دولة الكويت

وزارة التربية
التوجيه الفني العام للرياضيات
المجال الدراسي الرياضيات

(عدد صفحات الامتحان:11 صفحة)
الزمن : ساعتان و45 دقيقة
العام الدراسي 2019/ 2020 م

نموذج إجابة امتحان نهاية الفترة الدراسية الأولى للصف الثاني عشر علمي

القسم الأول – أسئلة المقال

تراعى الحلول الأخرى في جميع أسئلة المقال

السؤال الأول : (14 درجة)

(a) أوجد $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{1-\cos x}$ (7 درجات)

الحل :

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2}{1-\cos x}\cdot\dfrac{1+\cos x}{1+\cos x}\right)$	1
$= \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}\right)$	1
$= \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2(1+\cos x)}{\sin^2 x}\right)$	$\frac{1}{2}$
$= \lim\limits_{x\to 0}\left(\left(\dfrac{x^2}{\sin^2 x}\right)\cdot(1+\cos x)\right)$	$\frac{1}{2}$
$= \lim\limits_{x\to 0}\left(\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^2\cdot(1+\cos x)\right)$	$\frac{1}{2}$
$= \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^2\cdot \lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)$	$\frac{1}{2}$
$= \left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\left(\lim\limits_{x\to 0}(1)+\lim\limits_{x\to 0}\cos x\right)$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$
$= (1)^2 \times (1+1)$	1
$= 1 \times 2 = 2$	$\frac{1}{2}$

تابع السؤال الأول : (7 درجات)

(b) ابحث اتصال الدالة f عند $x = 0$ حيث :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x}{|x|} & : x \neq 0 \\ -3 & : x = 0 \end{cases}$$

الحل :

$$\frac{x^2 - 3x}{|x|} = \begin{cases} \dfrac{x(x-3)}{x} & : x > 0 \\ \dfrac{x(x-3)}{-x} & : x < 0 \end{cases}$$ 1

$$\therefore f(x) = \begin{cases} x - 3 & : x > 0 \\ -x + 3 & : x < 0 \\ -3 & : x = 0 \end{cases}$$ 1

$$f(0) = -3$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x - 3) = -3$$ 1

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x + 3) = 3$$ 1

$$\because \lim_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f(x)$$ 1

$\therefore \lim_{x \to 0} f(x)$ ليست موجودة 1

$\therefore$ الدالة f ليست متصلة عند $x = 0$ 1

السؤال الثاني : (14 درجة)

(a) أوجد $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}}$ (7 درجات)

الحل:

بفرض أن $f(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}}$

1 $$f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}}=\frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}}$$

$\frac{1}{2}$ $$=\frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ $$=\frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$ عندما $x>0$ يكون $|x|=x$

$\frac{1}{2}$ $$=\frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$ بشرط $x\neq 0$

$\frac{1}{2}$ $$\because \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}-\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}$$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ $$=1+0-0=1 \quad , \quad 1>0$$

1 $$\therefore \lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}=\sqrt{1}=1 \quad ,1\neq 0$$

$\frac{1}{2}$ $$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}1-\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=1-0=1$$

$\frac{1}{2}$ $$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$\frac{1}{2}$ $$=\frac{1}{1}=1$$

تابع السؤال الثاني :

(b) أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $y = \frac{8}{4+x^2}$ عند $x = 2$ (7 درجات)

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{8}{4+x^2}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-8(2x)}{(4+x^2)^2} = \frac{-16x}{(4+x^2)^2}$$ 2

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = \left[\frac{-16x}{(4+x^2)^2}\right]_{x=2} = \frac{-16(2)}{(4+(2)^2)^2} = \frac{-1}{2}$$ 1

ميل المماس لمحنى الدالة يساوي $\frac{-1}{2}$ 1

$$\because x = 2 \quad , \quad \therefore y = \frac{8}{4+(2)^2} = 1$$ 1

معادلة المماس لمحنى الدالة : $y - y_1 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} \cdot (x - x_1)$ 1

$$y - 1 = \left(\frac{-1}{2}\right)(x-2)$$ 1

$$y - 1 = \frac{-1}{2}x + 1$$

$$y = \frac{-1}{2}x + 2$$

السؤال الثالث : (14 درجة)

(a) لتكن الدالة f : $f(x) = x^3 - 12x - 5$ (7 درجات)

أوجد كلا مما يلي :

(1) النقاط الحرجة للدالة

(2) الفترات التي تكون الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها

(3) القيم القصوى المحلية

الحل :

(1) $\because$ f دالة كثيرة الحدود

$\therefore$ f متصلة و قابلة للاشتقاق عند كل x : $x \in \mathbb{R}$ $\frac{1}{2}$

نوجد النقاط الحرجة : $f'(x) = 3x^2 - 12$ $\frac{1}{2}$

$f'(x) = 0$

$3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow 3(x-2)(x+2) = 0$ $\frac{1}{2}$

$x = 2 \quad , x = -2$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$\therefore$ النقاط الحرجة هي :

$(-2, f(-2)) = (-2, 11)$ $\frac{1}{2}$

$(2, f(2)) = (2, -21)$ $\frac{1}{2}$

(2) نكون الجدول لدراسة إشارة f'

$-\infty$ -2 2 ∞

الفترات	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
إشارة f'	$+ + +$	$- - -$	$+ + +$
سلوك الدالة f	متزايدة ↗	متناقصة ↘	متزايدة ↗

1

الدالة متزايدة على الفترة $(-\infty, -2)$ و الفترة $(2, \infty)$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

و متناقصة على الفترة $(-2, 2)$ $\frac{1}{2}$

(3) توجد قيمة عظمى محلية عند $x = -2$ و هي $f(-2) = 11$ $\frac{1}{2}$

توجد قيمة صغرى محلية عند $x = 2$ و هي $f(2) = -21$ $\frac{1}{2}$

تابع السؤال الثالث :

(b) بين أن الدالة f : $f(x) = x + \frac{1}{x}$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ ثم أوجد قيمة c التي تنبئ به النظرية ، فسر اجابتك

الحل : (7 درجات)

لتكن الدالة g : $g(x) = x$

الدالة g دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$ — $\frac{1}{2}$

الدالة h : $h(x) = \frac{1}{x}$

الدالة h حدودية نسبية متصلة على $\mathbb{R} - \{0\}$ — $\frac{1}{2}$

∴ دالة الجمع f حيث $f(x) = g(x) + h(x)$ هي دالة متصلة على $\mathbb{R} - \{0\}$ — $\frac{1}{2}$

∴ الدالة f متصلة على $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ و قابلة للاشتقاق على $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ — $\frac{1}{2}$

∴ شروط نظرية القيمة المتوسطة محققة على الفترة $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ — $\frac{1}{2}$

∴ يوجد على الأقل $c \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ بحيث $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ — $\frac{1}{2}$

$$= \frac{f(2) - f(\frac{1}{2})}{2 - \frac{1}{2}}$$

$$f(2) = \frac{5}{2} \quad , f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$$ — $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \longrightarrow f'(c) = 1 - \frac{1}{c^2}$$ — $\frac{1}{2}$

$$1 - \frac{1}{c^2} = \frac{\frac{5}{2} - \frac{5}{2}}{2 - \frac{1}{2}} \longrightarrow \quad 1 - \frac{1}{c^2} = 0 \qquad \therefore c^2 = 1 \Longrightarrow c = \pm 1$$ — 1

$$c = 1 \in \left(\frac{1}{2}, 2\right) , \qquad c = -1 \notin \left(\frac{1}{2}, 2\right)$$ — 1

التفسير: يوجد مماس لمنحنى الدالة f عند $x = 1$ يوازي القاطع المار بالنقطتين $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ ، $\left(2, \frac{5}{2}\right)$ — $\frac{1}{2}$

السؤال الرابع : (14 درجة)

(a) لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & : \ x \le 2 \\ 4x-3 & : \ x > 2 \end{cases}$ دالة متصلة على مجالها

أوجد $f'(x)$ إن أمكن (8 درجات)

الحل :

مجال الدالة : $D_f = (-\infty, 2] \cup (2, \infty) = \mathbb{R}$ — $\frac{1}{2}$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & : \ x < 2 \\ \text{تبحث} & : \ x = 2 \\ 4 & : \ x > 2 \end{cases}$$ — $\frac{1}{2}$

$$f(2) = 2^2 + 1 = 5$$ — $\frac{1}{2}$

(إن وجدت)

$$f'_-(2) = \lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x-2}$$ — $\frac{1}{2}$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2+1-5}{x-2}$$ — $\frac{1}{2}$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2-4}{x-2}$$ — $\frac{1}{2}$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} (x+2) = 4$$ — 1

(إن وجدت)

$$f'_+(2) = \lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x-2}$$ — $\frac{1}{2}$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{4x-3-5}{x-2}$$ — $\frac{1}{2}$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{4x-8}{x-2}$$ — $\frac{1}{2}$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{4(x-2)}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} 4 = 4$$ — 1

$$f'_-(2) = f'_+(2) = 4$$ — $\frac{1}{2}$

$$\therefore f'(2) = 4$$ — $\frac{1}{2}$

$$\therefore f'(x) = \begin{cases} 2x & : x \le 2 \\ 4 & : x > 2 \end{cases}$$ — $\frac{1}{2}$

تابع السؤال الرابع:

(b) إذا كانت : $S = 7$, $\bar{x} = 40$, $n = 20$ (6 درجات)

اختبر الفرض بأن $\mu = 35$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

الحل :

$n = 20$, $\bar{x} = 40$, $S = 7$

(1) صياغة الفروض :

$H_0: \mu = 35$ مقابل $H_1: \mu \neq 35$ $\frac{1}{2}$

(2) $\because$ σ غير معلومة ، $n < 30$ $\frac{1}{2}$

نستخدم المقياس الاحصائي t : $t = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ $\frac{1}{2}$

$t = \dfrac{40 - 35}{\frac{7}{\sqrt{20}}} \approx 3.194$ $1\frac{1}{2}$

(3) $\because n = 20$ درجات الحرية $n - 1 = 20 - 1 = 19$ $\frac{1}{2}$

مستوى المعنوية α : $\because \alpha = 0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$ $\frac{1}{2}$

من جدول توزيع t : $\therefore t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.093$ $\frac{1}{2}$

(4) منطقة القبول هي : $(-2.093 , 2.093)$ $\frac{1}{2}$

(5) اتخاذ القرار الإحصائي : $\because 3.194 \notin (-2.093 , 2.093)$ $\frac{1}{2}$

$\therefore$ القرارنرفض فرض العدم $\mu = 35$ و نقبل الفرض البديل $\mu \neq 35$ $\frac{1}{2}$

القسم الثاني: البنود الموضوعية

أولا: في البنود من (1) إلى (4) عبارات ظلل في ورقة الاجابة (a) إذا كانت العبارة صحيحة (b) إذا كانت العبارة خاطئة

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{|2x-3|} = \dfrac{1}{2}$

(2) إذا كانت $y = 5\cot\left(\dfrac{2}{x}\right)$ فإن $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{10}{x^2}\csc^2\left(\dfrac{2}{x}\right)$

(3) أكبر مساحة لمستطيل قاعدته على محور السينات و رأساه العلويان على القطع المكافئ الذي معادلته $y = 12 - x^2$ ، هي $24\ \text{units}^2$

(4) إن القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ لدرجة الثقة 96% هي 2.055

ثانيا : في البنود من (5) إلى (14) لكل بند أربعة اختيارات واحد فقط منها صحيح ظلل في ورقة الإجابة الرمز الدال على الإجابة الصحيحة .

(5) $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{2x^3+9x^2+9x}{x+3}$ يساوي

$(a)\ -9$ $(b)\ -3$ $(c)\ 0$ $(d)\ 9$

(6) لتكن الدالة f : $f(x) = \sqrt{x^2+7}$, $g(x) = x^2 - 3$ فإن $(f \circ g)(0)$ يساوي

$(a)\ 1$ $(b)\ -1$ $(c)\ 4$ $(d)\ -4$

(7) إذا كان $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{ax^2+bx+3}{2x+5} = 3$ فإن قيم $a\ ,\ b$ هي

$(a)\ a = 0\ , b = 6$ $(b)\ a = 0\ , b = -6$

$(c)\ a = 6\ , b = 0$ $(d)\ a = -6\ , b = 0$

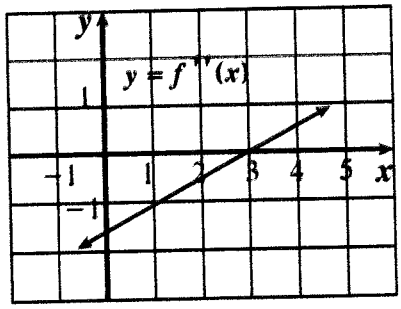
(8) الدالة f : $f(x) = \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-25}}$ متصلة على

$(a)\ \left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right)$ $(b)\ (5, \infty)$ $(c)\ R$ $(d)\ (-5, 5)$

(9) أي من الدوال التالية ليس لها نقطة انعطاف

$(a)\ f(x) = x^3 + 5x$ $\qquad$ $(b)\ f(x) = 4x^2 - 2x^4$

$(c)\ f(x) = x^3$ $\qquad$ $(d)\ f(x) = (x-2)^4$



(10) إذا كانت f دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة والشكل المقابل يوضح بيان f'' فإن منحنى f مقعرا للاسفل في الفترة

$(a)\ (-\infty, 3)$ $\qquad$ $(b)\ (3, \infty)$

$(c)\ (-1,4)$ $\qquad$ $(d)\ (3,5)$

---

(11) الدالة k : $k(x) = -|x^2 - 4|$ لها

(a) نقطتان حرجتان فقط $\qquad$ (b) قيمة صغرى مطلقة

(c) قيمة عظمى مطلقة $\qquad$ (d) ليس أيا مما سبق

---

(12) إن الدالة f : $f(x) = x + \sqrt{x^2} + 2$ ليست قابلة للاشتقاق عند $x = 0$ و السبب هو

(a) ناب $\qquad$ (b) ركن

(c) مماس عمودي $\qquad$ (d) غير متصلة

---

(13) ميل الخط العمودي على المماس (الناظم) عند النقطة $A(3,2)$ على منحنى : $x^2 - y^2 - 2xy = -7$ هو

$(a)\ -5$ $\qquad$ $(b)\ \frac{-1}{5}$ $\qquad$ $(c)\ \frac{1}{5}$ $\qquad$ $(d)\ 5$

---

(14) لتكن الدالة f: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & : x \geq 1 \\ 4x - 1 & : x < 1 \end{cases}$ فإن مجال f' هو

$(a)\ \{1\}$ $\qquad$ $(b)\ [1, \infty)$ $\qquad$ $(c)\ \mathbb{R}$ $\qquad$ $(d)\ \mathbb{R} - \{1\}$

انتهت الأسئلة

ورقة إجابة البنود الموضوعية

(1)	(a)		(c)	(d)
(2)		(b)	(c)	(d)
(3)	(a)		(c)	(d)
(4)		(b)	(c)	(d)
(5)	(a)	(b)	(c)	
(6)	(a)	(b)		(d)
(7)		(b)	(c)	(d)
(8)	(a)		(c)	(d)
(9)	(a)	(b)	(c)	
(10)		(b)	(c)	(d)
(11)	(a)	(b)		(d)
(12)	(a)		(c)	(d)
(13)		(b)	(c)	(d)
(14)	(a)	(b)		(d)

14