شرح تفصيلي لدرس الاتصال و النهايات

رياضيات 3-1

الفصل الأول: تحليل الدوال

الدرس الثالث: الأتصال والنهايات

مدة إعطاء الدرس
بإذن الله
هي ثلاثة حصص

أ/عبدالعزيز السهيمي

◄ (شروط اتصال الدالة)

أولاً أن تكون $f(x)$ معرفة (لها قيمة محددة)

ثانياً أن تكون $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ موجودة (النهاية اليمنى = النهاية اليسرى)

ثالثاً $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$ (نهاية الدالة تساوي قيمة الدالة)

أ/عبدالعزيز السهيمي

مثال 1

أولاً ◄ (التحقق من الاتصال عند نقطة)

حدد ما إذا كانت الدالة $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$ متصلة عند $x = 2$. برّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال.

1) هل $f(2)$ موجودة؟

هل $f(c)$ معرفة (لها قيمة محددة) ؟

$$f(x) = 2x^2 - 3x - 1$$

$$f(2) = 2(2)^2 - 3(2) - 1$$

$f(2) = 1$، أي أن الدالة معرفة عند $x = 2$

2) هل $\lim_{x \to 2} f(x)$ موجودة؟ ندرس النهاية واقترابها من جهتي يمين ويسار العدد صفر

x	1.9	1.99	1.999	2.0	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	0.52	0.95	0.995		1.005	1.05	1.52

يُبين الجدول أنه عندما تقترب قيم x من 2 من اليسار ومن اليمين، فإن قيمة $f(x)$ تقترب من 1، أي أن $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$.

3) هل $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$ ؟

بما أن $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$ ، $f(2) = 1$ ، نستنتج أن $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$ ، إذن الدالة متصلة عند $x = 2$. ويوضّح منحنى الدالة $f(x)$ في الشكل 1.3.1 اتصال الدالة عند $x = 2$.

أ/عبدالعزيز السهيمي

تحقق من فهمك

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلتين عند $x = 0$. برِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال:

1A) $f(x) = x^3$

الحل

الشرط الأول

هل $f(c)$ معرفة (لها قيمة محددة) ؟

نعوض في الدالة عند القيمة المعطاة

$$f(0) = (0)^3 = 0$$

إذاً $f(0)$ معرفة

الشرط الثاني

ندرس النهاية واقترابها من جهتي يمين ويسار العدد صفر

x	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	-0.001	-0.000001	-0.000000001		0.000000001	0.000001	0.001

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

عند اختيار قيم أكبر من الصفر مباشرة وأقل من الصفر مباشرة ، نلاحظ أن ناتج تعويضها من الجهتين تقترب من العدد صفر ، وهذا يؤكد تساوي النهايتين

الشرط الثالث

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

وبالتالي فالدالة متصلة عند $x=0$

أ/عبدالعزيز السهيمي

تحقق من فهمك

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلتين عند $x = 0$. برِّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال:

1B) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \quad x < 0 \\ x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$

الحل

الشرط الأول

هل $f(c)$ معرفة (لها قيمة محددة) ؟

نعوض في الدالة عند القيمة المعطاة

$f(0) = 0$

إذاً $f(0)$ معرفة

الشرط الثاني

ندرس النهاية واقترابها من جهتي يمين ويسار العدد صفر

x	-0.1	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	-10	-100	-1000		0.001	0.01	0.1

عند اختيار قيم أكبر من الصفر مباشرة وأقل من الصفر مباشرة ، نلاحظ أن ناتج تعويضها من الجهتين تقترب من قيمتين مختلفتين، وهذا يؤكد عدم تساوي النهايتين

وبالتالي لا نحتاج نكمل الشرط الثالث لان الشرط الثاني غير متحقق إذا فالدالة غير متصلة عند العدد صفر

عدم اتصال قفزي

أ/عبدالعزيز السهيمي

◄ (حالات عدم اتصال الدالة)

لا نهائي

$\lim_{x \to c} f(x) = \infty$

إذا كانت الدالة غير معرفة

نهاية الدالة إلى مالا نهاية

قفزي

$\lim_{x \to c^+} f(x) \neq \lim_{x \to c^-} f(x)$

النهاية اليمنى لا تساوي النهاية اليسرى

قابل للإزالة (نقطي)

$f(c) \neq \lim f(x)$

قيمة الدالة لا تساوي نهاية الدالة

أ/عبدالعزيز السهيمي

مثال 2

ثانياً ◄ (تحديد نوع عدم الاتصال عند نقطة)

حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلة عند قيم x المعطاة. برر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال، واذا كانت الدالة غير متصلة، فحدّد نوع عدم الاتصال: لانهائي ، قفزي ، قابل للإزالة.

a) $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & , \quad x > -3 \\ 2 - x & , \quad x \leq -3 \end{cases}$ عند $x = -3$.

الحل

الشرط الأول

نعوض في الدالة عند القيمة المعطاة

$f(-3)= 2-(-3)=5$

الشرط الثاني

$\xrightarrow{\hspace{2em}} 5$ $\qquad$ $-11 \xleftarrow{\hspace{2em}}$

x	-3.1	-3.01	-3.001	-3.0	-2.999	-2.99	-2.9
$f(x)$	5.1	5.01	5.001		-10.997	-10.97	-10.7

$2 - x$ $\qquad$ $3x - 2$

نلاحظ أن ناتج تعويضها من الجهتين تقترب من قيمتين مختلفتين، وهذا يؤكد عدم تساوي النهايتين

فالدالة غير متصلة ونوع عدم الاتصال قفزي

أ/عبدالعزيز السهيمي

تحقق من فهمك

أوجد مجال الدالة f ومداها باستعمال التمثيل البياني المجاور .

(2A $f(x)=\frac{1}{x^2}$ ، عند $x=0$.

هل $f(c)$ معرفة (لها قيمة محددة) ؟

نعوض في الدالة عند القيمة المعطاة

$$f(0)=\frac{1}{0^2}$$

إذاً الدالة غير معرفة

وبالتالي فالدالة غير متصلة عند العدد صفر

(نوع عدم الاتصال : لا نهائي)

(2B $f(x)=\begin{cases} 5x+4 & , \quad x>2 \\ 2-x & , \quad x\le 2 \end{cases}$ ، عند $x=2$.

الشرط الأول

هل $f(c)$ معرفة (لها قيمة محددة) ؟

نعوض في الدالة عند القيمة المعطاة

$$f(2)=2-2=0$$

إذاً $f(2)$ معرفة

الشرط الثاني

عند $x>2$ (النهاية اليمنى)

$$5x+4=5(2)+4=14$$

عند $x\le 2$ (النهاية اليسرى)

$$2-x=2-(2)=0$$

$$0\ne 14$$

وبالتالي فالدالة غير متصلة عند العدد 2

(نوع عدم الاتصال : قفزي)

نهاية شرح الحصة (1)

أ/عبدالعزيز السهيمي

مثـال 3

ثالثاً ◄ (إزالة عدم الأتصال)

أعد تعريف الدالة $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$؛ لتصبح متصلة عند $x = 4$.

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \frac{(x+4)\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-4)}}$$

$$= x + 4$$

$$f(4) = 4 + 4 = 8$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x - 4} & , x \neq 4 \\ 8 & , x = 4 \end{cases}$$

أعد تعريف الدالة لتصبح

أ/عبدالعزيز السهيمي

05:00

تحقق من فهمك

3) أعد تعريف الدالة $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ ؛ لتصبح متصلة عند $x = 1$.

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}$$

$$= x+1$$

$$f(1) = 1 + 1 = 2$$

أعد تعريف الدالة لتصبح

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & , x \neq 1 \\ 2 & , x = 1 \end{cases}$$

أ/عبدالعزيز السهيمي

مثـال 4

رابعاً ◄ (تقريب الاصفار عند تغيير الإشارة)

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة $f(x) = x^3 - 4x + 2$ في الفترة $[-4, 4]$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-46	-13	2	5	2	-1	2	17	50

يقع بين 3- و 2- ، **يقع بين 0 و 1** ، **يقع بين 1 و 2**

أ/عبدالعزيز السهيمي

05:00

تحقق من فهمك

4A) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x + 3$ ، $[-6, 4]$

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
F(x)	-93	-32	3	18	19	12	3	-2	3	24	67

يقع بين 5- و 4- ، **يقع بين 0 و 1** ، **يقع بين 1 و 2**

أ/عبدالعزيز السهيمي

05:00

تحقق من فهمك

(4B $f(x) = \dfrac{x^2 - 6}{x + 4}$ ، $[-3, 4]$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
F(x)	3	-1	-1.67	-1.5	-1	-0.33	0.43	1.25

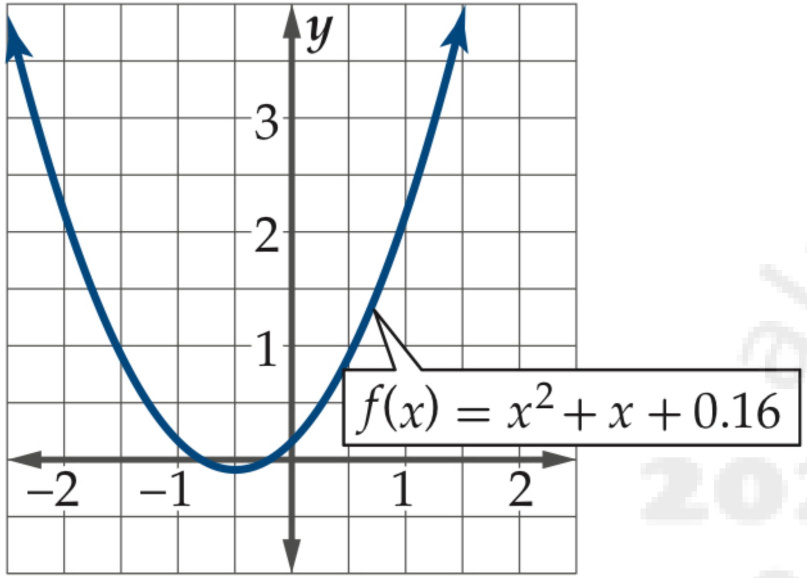
يقع بين 3- و 2- ، يقع بين 2 و3

أ/عبدالعزيز السهيمي

مـثال 5

خامساً ◄ (تقريب الاصفار دون تغيير الإشارة)

حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة $f(x) = x^2 + x + 0.16$ في الفترة $[-3, 3]$.



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6.16	2.16	0.16	0.16	2.16	6.16	12.16

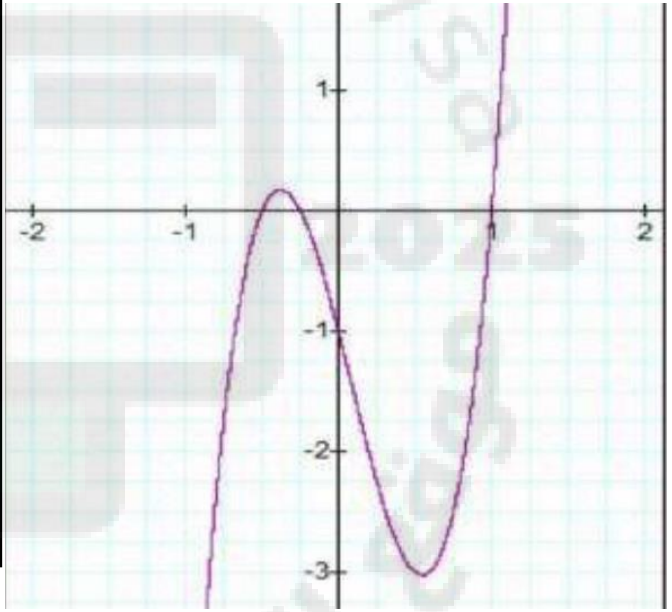
الاصفار تقع بين 1- و 0

أ/عبدالعزيز السهيمي

تحقق من فهمك

5A) $f(x) = 8x^3 - 2x^2 - 5x - 1$ ، $[-5, 5]$

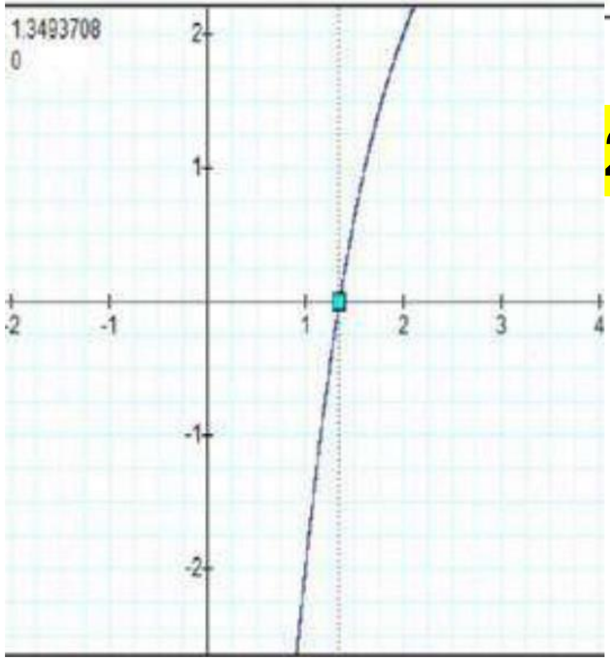
x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-1026	-525	-220	-63	-6	-1	0	45	182	459	924



الاصفار تقع بين 1- و 0

5B) $f(x) = x^3 - 7x^2 + 18x - 14$ ، $[0, 4]$

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	-14	-2	2	4	10



الاصفار تقع بين 1 و 2

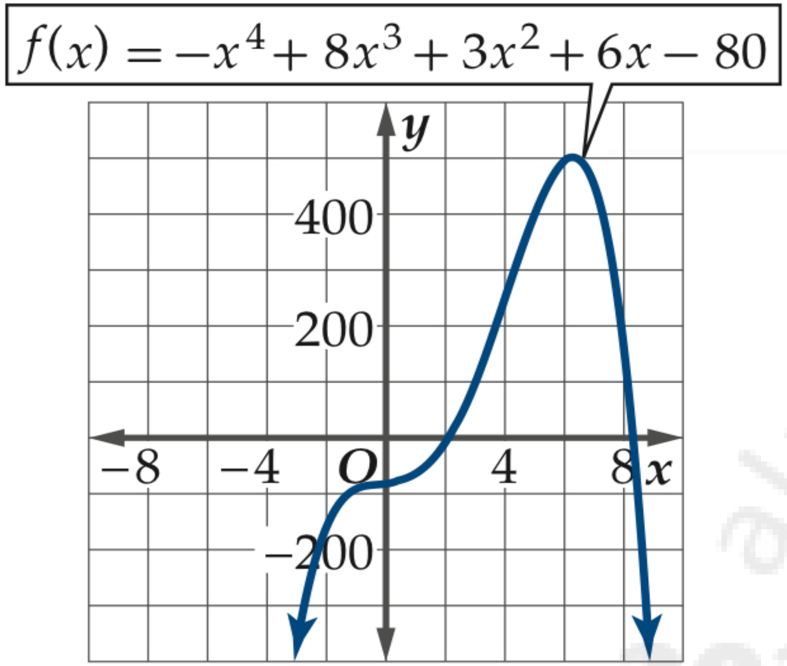
نهاية شرح الحصة (2)

أ/عبدالعزيز السهيمي

مثال 6

سادساً ◄ (المنحنيات التي تقترب من ما لانهاية)

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = -x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 6x - 80$ لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني، ثم عزز إجابتك عدديًّا.



يمين

$x \to \infty$

$f(x) \to -\infty$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

يسار

$x \to -\infty$

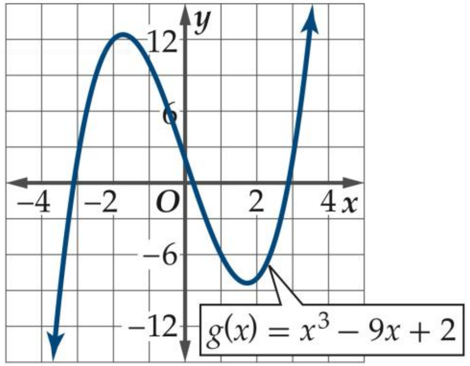
$f(x) \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

أ/عبدالعزيز السهيمي

تحقق من فهمك

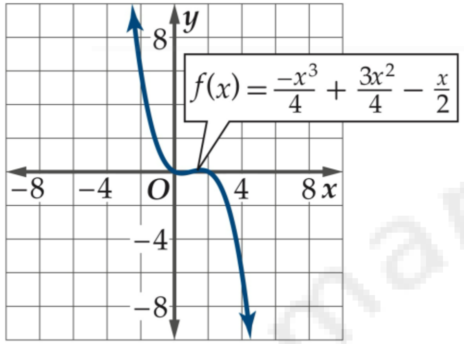
6A)



يمين $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$

يسار $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$

6B)



يمين $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

يسار $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

أ/عبدالعزيز السهيمي

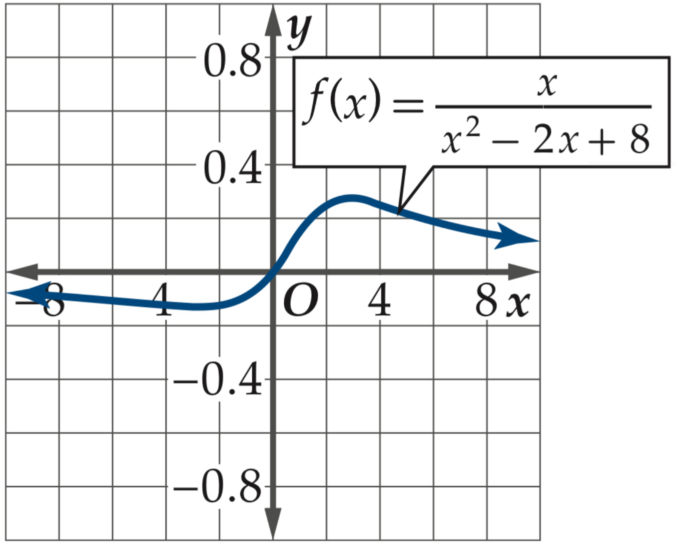
مثال 7

سابعاً ◄ (منحنيات دوال تقترب من قيمة محددة)

استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 8}$ لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني. ثم عزز إجابتك عدديًا.

1

2



إذا كان المقام اكبر سيكون الحل يساوي 0

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

◄ (منحنيات دوال تقترب من قيمة محددة)

- إذا كان قوى المقام اكبر من قوى البسط سيكون الحل يساوي 0

- إذا كان قوى المقام يساوي قوى البسط سيكون الحل ان اقسم معامل البسط على معامل المقام

- إذا كان قوى المقام اصغر من قوى البسط سيكون الحل يساوي موجب او سالب مالانهاية

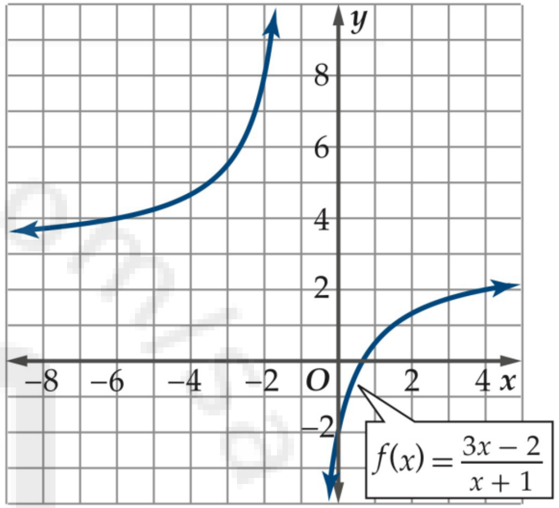
أ/عبدالعزيز السهيمي

تحقق من فهمك

7A)

$$\frac{3x-2}{x+1}$$

$$\frac{3}{1} = 3$$



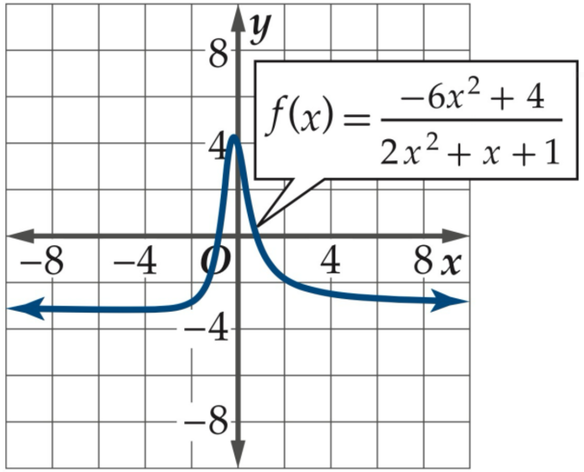
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$$

7B)

$$\frac{-6x^2+4}{2x^2+x+1}$$

$$\frac{-6}{2} = -3$$



$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -3$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -3$$

أ/عبدالعزيز السهيمي

مثال 8 من واقع الحياة

ثامناً ◄ (تطبيقات سلوك طرفى التمثيل البيانى)

فيزياء: تُعطى قيمة طاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لجسم بالقاعدة $U(r) = -\frac{GmM_e}{r}$ ، حيث G ثابت نيوتن للجذب الكوني، و m كتلة الجسم، و M_e كتلة الأرض، و r المسافة بين الجسم ومركز الأرض كما في الشكل المجاور. ماذا يحدث لطاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لجسم عندما يتحرك مبتعدًا عن الأرض مسافة كبيرة جدًا؟ ∞

$$\lim_{r\to\infty} u(r) = -\frac{GmMe}{\infty} = \frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$$

ومن ثم إذا تحرك جسم مبتعدًا عن الأرض بصورة كبيرة، فإن طاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لهذا الجسم تقترب من الصفر.

أ/عبدالعزيز السهيمي

تحقق من فهمك

8) **فيزياء:** الضغط الديناميكي هو قياس الضغط الناتج عن حركة جزيئات الغاز ويعطى بالقاعدة $q(v) = \frac{\rho v^2}{2}$، حيث ρ (ويقرأ روه) كثافة الغاز، و v السرعة التي يتحرك بها الجزيء. ماذا يحدث للضغط الديناميكي لجزيئات الغاز عندما تستمر سرعة الجزيئات في التزايد؟

$$\lim_{r \to \infty} q(v) = -\frac{p(\infty)}{2} = \frac{\infty}{2} = \infty$$

$$\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$$

$$\frac{\text{عدد}}{0} = \infty$$

$$\frac{\infty}{\text{عدد}} = \infty$$

نهاية شرح الحصة (3)

أ/عبدالعزيز السهيمي

انتهى الدرس

أ/عبدالعزيز السهيمي