مراجعة النهايات والاشتقاق

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

إيجاد الدوال الأصلية

$F(x) = \frac{k x^{n+1}}{n+1} + C$.

$\int f(x)\, dx = F(x) + C$ ،

أوجد دالَّتين أصليتين مختلفتين لكل دالة مما يأتي:

(1A $2x$

$\frac{2x^2}{2} + C$

$x^2+5,\ x^2+7,\ x^2+10$

(1B $-3x^{-4}$

$\frac{-3x^{-4+1}}{-3} + C$

$-x^{-3}+1,\ -x^{-3}+12$

قواعد الدوال الأصلية

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

(2A $f(x) = 6x^4$

$F(x) = \frac{6x^5}{5} + C$

(2B $f(x) = \frac{10}{x^3}$

$f(x) = 10x^{-3}$

$F(x) = \frac{10x^{-3+1}}{-3+1} + C$

$= \frac{10x^{-2}}{-2} + C = \frac{-5}{x^2} + C$

(2C $f(x) = 8x^7 + 6x + 2$

$= 8\frac{x^8}{8} + 6\frac{x^2}{2} + 2x$

$= x^8 + 3x^2 + 2x$

(1 $f(x) = x^5$

$= \frac{x^6}{6} + C$

(2 $f(z) = \sqrt[3]{z}$

$f(z) = (z)^{\frac{1}{3}}$

$F(z) = \frac{z^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C$

(3 $q(r) = \frac{3}{4} r^{\frac{2}{5}} + \frac{5}{8} r^{\frac{1}{3}} + r^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{3}{4}\ \frac{r^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{2}{5}+1} + \frac{5}{8}\ \frac{r^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + \frac{r^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}$

$= \frac{3}{4}\ \frac{r^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} + \frac{5}{8}\ \frac{r^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + \frac{r^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$

$= \frac{3\times 5}{4\times 7} r^{\frac{7}{5}} + \frac{5\times 3}{8\times 4} r^{\frac{4}{3}} + \frac{2}{3} r^{\frac{3}{2}}$

$= \frac{15}{28} r^{\frac{7}{5}} + \frac{15}{32} r^{\frac{4}{3}} + \frac{2}{3} r^{\frac{3}{2}}$

(6 $m(t) = 16t^3 - 12t^2 + 20t - 11$

$= 16\frac{t^4}{4} - 12\frac{t^3}{3} + 20\frac{t^2}{2} - 11t$

$= 4t^4 - 4t^3 + 10t^2 - 11t$

تحقق من فهمك

3) **سقوط حُر:** عند قيام فنِّي بإصلاح نافذة برج على ارتفاع 120 ft سقطت محفظتُه نحو الأرض، وتمثّل $v(t) = -32t$ سرعة المحفظة المتجهة اللحظية بالأقدام بعد t ثانية من سقوطها.

A) أوجد دالة موقع المحفظة $s(t)$ بعد t ثانية من سقوطها.

$$v = -32t$$

$$s(t) = -32\frac{t^2}{2} + C = -16t^2 + 120$$

B) أوجد الزمن الذي تستغرقُهُ المحفظة حتى تصل إلى سطح الأرض.

$$s(t) = 0 \Rightarrow -16t^2 + 120 = 0$$

$$-16t^2 = -120$$

$$t^2 = \frac{120}{16} = 7.5$$

$$t = \sqrt{7.5} \approx 2.74\,s$$

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

احسب كل تكامل محدد مما يأتي:

4A) $\int_2^5 3x^2\,dx$

$$= 3\frac{x^3}{3}\Big|_2^5 = x^3\Big|_2^5$$

$$= [5^3 - 2^3]$$

$$= [125 - 8] = 117$$

4B) $\int_1^2 (16x^3 - 6x^2)\,dx$

$$= 16\frac{x^4}{4} - 6\frac{x^3}{3}\Big|_1^2$$

$$= 4x^4 - 2x^3\Big|_1^2$$

$$= [4(2)^4 - 2(2)^3] - [4(1)^4 - 2(1)^3]$$

$$= [64 - 16] - [4 - 2]$$

$$= 48 - 2 = 46$$

9) $\int_1^4 2x^3\,dx$

$$= 2\frac{x^4}{4}\Big|_1^4$$

$$= \frac{1}{2}x^4\Big|_1^4$$

$$= \frac{1}{2}[4^4 - 1^4]$$

$$= \frac{256 - 1}{2} = 127.5$$

5A) $\int (6x^2 + 8x - 3)\,dx$

$$= 6\frac{x^3}{3} + 8\frac{x^2}{2} - 3x + C$$

$$= 2x^3 + 4x^2 - 3x + C$$

$$\int (6m + 12m^3)\, dm \quad \textbf{(8}$$

$$= 6\frac{m^2}{2} + 12\frac{m^4}{4} + C$$

$$= 3m^2 + 3m^4 + C$$

$$\int_x^2 (3t^2 + 8t)\, dt \quad \textbf{(22}$$

$$= 3\frac{t^3}{3} + 8\frac{t^2}{2}\Big|_x^2$$

$$= t^3 + 4t^2\Big|_x^2$$

$$= [2^3 + 4(2)^2] - [x^3 + 4x^2]$$

$$= [8 + 16] - x^3 - 4x^2$$

$$= -x^3 - 4x^2 + 24 = 0$$

$$\int_{-3}^1 3\, dx \quad \textbf{(16}$$

$$= 3x\Big|_{-3}^1$$

$$= 3(1) - 3(-3)$$

$$= 3 + 9 = 12$$

$$\int_1^3 (-x^4 + 8x^3 - 24x^2 + 30x - 4)\, dx \quad \textbf{(5B}$$

$$= -\frac{x^5}{5} + 8\frac{x^4}{4} - 24\frac{x^3}{3} + 30\frac{x^2}{2} - 4x\Big|_1^3$$

$$= \frac{-x^5}{5} + 2x^4 - 8x^3 + 15x^2 - 4x\Big|_1^3$$

$$= \left[\frac{-3^5}{5} + 2(3)^4 - 8(3)^3 + 15(3)^2 - 4(3)\right]$$

$$- \left[\frac{-1^5}{5} + 2(1)^4 - 8(1)^3 + 15(1)^2 - 4(1)\right]$$

$$= \frac{-242}{5} + 64 = -48.4 + 64$$

$$= 15.6$$

$$\int_{-1}^2 (-x^2 + 10)\, dx \quad \textbf{(17}$$

$$= -\frac{x^3}{3} + 10x\Big|_{-1}^2$$

$$= \left[-\frac{2^3}{3} + 10 \times 2\right] - \left[-\frac{(-1)^3}{3} + 10 \times -1\right]$$

$$= -\frac{8}{3} + 20 - \frac{1}{3} + 10$$

$$= \frac{-9}{3} + 10 = -3 + 10 = 27$$

$$\int_2^5 (a^2 - a + 6)\, da \quad \textbf{(10}$$

$$= \frac{a^3}{3} - \frac{a^2}{2} + 6a\Big|_2^5$$

$$= \left[\frac{5^3}{3} - \frac{5^2}{2} + 6 \times 5\right]$$

$$- \left[\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} + 6 \times 2\right]$$

$$= 39 - \frac{25}{2} + 20 = 59 - 12.5$$

$$= 46.5$$

التكاملات المحددة

أوجد الشغل اللازم لشد نابض مسافة ما والمعطى بالتكامل في كل مما يأتي:

6A) $\int_0^{0.7} 476x\,dx$

$= 476\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0.7}$

$= 476\left[\frac{0.7^2}{2} - 0\right]$

$= \frac{233.4}{2} = 116.6\ J$ جول

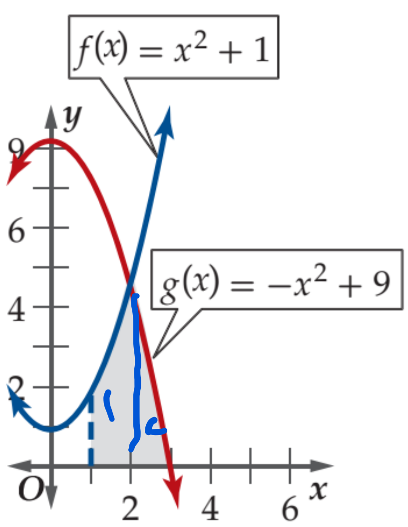
6B) $\int_0^{1.4} 512x\,dx$

$= 512\frac{x^2}{2}\Big|_0^{1.4}$

$= 512\frac{(1.4)^2}{2} - 0$

$= 501.76\ J$ جول

29) **مساحات:** احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي $f(x)$ ، $g(x)$ والمحور x ، في الفترة $1 \le x \le 3$.



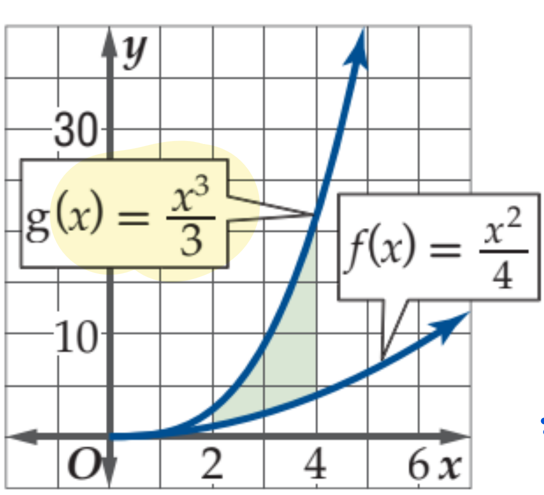
$\int_1^2 (x^2+1)\,dx + \int_1^3 (-x^2+9)\,dx$

$= \frac{x^3}{3} + x\Big|_1^2 + -\frac{x^3}{3} + 9x$

$= \left[\frac{2^3}{3}+2\right] - \left[\frac{1^3}{3}+1\right] + \left[\frac{-3^3}{3}+9\times3\right] - \left[\frac{-2^3}{3}+9\times2\right]$

$= \frac{15}{3} + \left[2 - 1 - \cancel{9} + \cancel{27} - \cancel{18}\right] = 5 + 1 = 6$

33) **مساحات:** ما مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي $f(x)$ ، $g(x)$ في الفترة $2 \le x \le 4$ في الشكل أدناه؟



$\int_2^4 \frac{x^3}{3}\,dx - \int_2^4 \frac{x^2}{4}\,dx$

$\frac{x^4}{3\cdot4}\Big|_2^4 - \frac{x^3}{4\cdot3}\Big|_2^4$

$= \frac{1}{12}\left[x^4 - x^3\right]_2^4$

$= \frac{1}{12}\left[4^4 - 4^3\right] - \frac{1}{12}\left[2^4 - 2^3\right]$

$= \frac{192-8}{12}$

$= \frac{184}{12} = 15.3$

A $17\frac{5}{12}$ وحدة مساحة

B $17\frac{1}{3}$ وحدة مساحة

C $15\frac{1}{3}$ وحدة مساحة

D 16 وحدة مساحة

45) إذا كان $\int_0^2 k\,x\,dx = 6$ ، فما قيمة k ؟

A 1

B 2

C 3

D 4

$\int_0^2 kx\,dx = 6$

$= k\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 6$

$= k\frac{2^2}{2} - 0 = 6$

$\frac{2k}{2} = \frac{6}{2}$

$\boxed{k = 3}$

المساحة تحت المنحنى والتكامل

استعمل النهايات؛ لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x والمعطاة بالتكامل المحدد في كلٍّ مما يأتي:

(3A $\int_0^1 3x^2\,dx$

$= 3\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = x^3\Big|_0^1$

$= [1^3 - 0] = 1$

(3B $\int_0^3 x\,dx$

$= \frac{x^2}{2}\Big|_0^3$

$= [\frac{3^2}{2} - 0] = \frac{9}{2}$

(4A $\int_1^3 x^2\,dx$

$= \frac{x^3}{3}\Big|_1^3$

$= [\frac{3^3}{3} - \frac{1}{3}] = \frac{27-1}{3} = \frac{26}{3}$

(4B $\int_2^4 x^3\,dx$

$= \frac{x^4}{4}\Big|_2^4$

$= [\frac{4^4}{4} - \frac{2^4}{4}] = 64 - 4$

$= 60$

(15 $\int_2^4 (-3x + 15)\,dx$

$= -3\frac{x^2}{2} + 15x\Big|_2^4$

$= [\frac{-3}{2}(4)^2 + 15\times4] - [\frac{-3}{2}(2)^2 + 15\times2]$

$= [-24 + 60] - [-6 + 30] = 12$

(24 $\int_{-2}^0 (2x + 6)\,dx$

$= \cancel{2}\frac{x^2}{\cancel{2}} + 6x\Big|_{-2}^0$

$= [0] - [(-2)^2 + 6(-2)]$

$= -(4 - 12) = 8$

(27 $\int_{-2}^0 (-x^3)\,dx$

$= -\frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^0$

$= [0] - [\frac{-(-2)^4}{4}] = 4$

(28 $\int_{-4}^3 2\,dx$

$= 2x\Big|_{-4}^3$

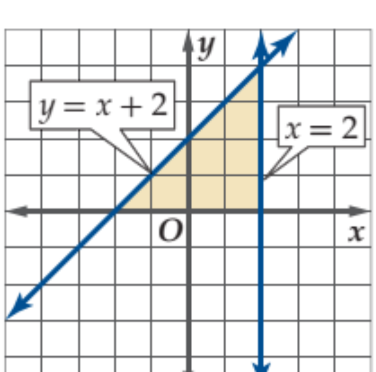
$= 2[3 - (-4)] = 14$

(19 **(a** أوجد طول قاعدة وارتفاع المثلث، ثم مساحته باستعمال قانون مساحة المثلث.

$\frac{1}{2}\times4\times4$

$= 8$

(b أوجد مساحة المثلث بحساب التكامل $\int_{-2}^2 (x + 2)\,dx$



$= \frac{x^2}{2} + 2x\Big|_{-2}^2$

$= [\frac{2^2}{2} + 2\times2] - [\frac{(-2)^2}{2} + 2(-2)] = 8$

$2 + 4 \quad -(2 - 4)$