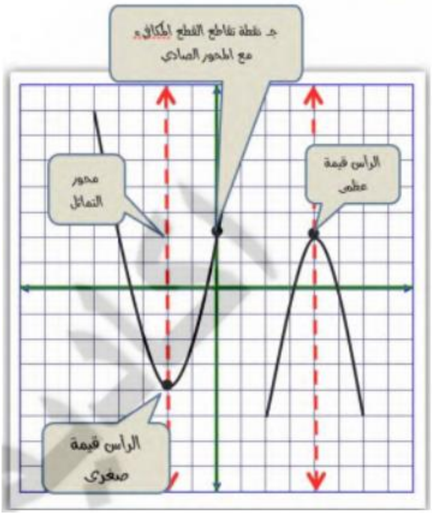
٨ - ١ تمثيل المعادلات التربيعية بيانيًا



خصائص الدوال التربيعية:

الصورة القياسية: أس^{٢} + ب س + ج

الدالة المولدة: د(س) = س^{٢}

التمثيل البياني: قطع مكافئ

محور التماثل: س = $\frac{-ب}{٢ أ}$

المقطع الصادي = ج

المجال هو مجموعة جميع القيم الممكنة للمتغير س

المدى هو مجموعة جميع القيم الممكنة للمتغير ص

تمثيل الدوال التربيعية بيانيًا:

خطوات تمثيل الدوال التربيعية بيانيا:

١ أوجد معادلة محور التماثل.

٢ أوجد الرأس وأحدد إذا كان يمثل نقطة صغرى أم نقطة عظمى.

٣ أوجد المقطع الصادي.

٤ استعمل التماثل لإيجاد نقاط أخرى التمثيل البياني للدالة عند الضرورة.

٥ صِل بين النقاط بمنحنى.

القيم العظمى والصغرى:

يكون التمثيل البياني للدالة أس٢ + ب ص + جـ ، حيث أ ≠ ٠

◄ له قيمة عظمى : • عندما أ < ٠ (سالبة) • يكون القطع مفتوح إلي أسفل

• المدى جميع الأعداد التي تقل عن أو تساوي القيمة العظمى.

◄ له قيمة عظمى : • عندما أ > ٠ (موجبة) • يكون القطع مفتوح إلي أعلي

• المدى جميع الأعداد التي تزيد عن أو تساوي القيمة الصغرى.

تحديد خصائص القطع المكافئ من خلال قاعدة دالته:

مثال: أوجد الرأس ومعادلة محور التماثل والمقطع الصادي للدالة ص = −٣س^{٢} + ٦س − ٥

- معادلة محور تماثل س = $\frac{-ب}{٢أ}$ = $\frac{-٦}{٢ \times -٣}$ = ١
- الرأس (س ، ص) ، ص = −٣س^{٢} + ٦س − ٥

س = ١ ⟸ ص = -٣ (١)^{٢} + ٦(١) − ٥

س = ١ ⟸ ص = -٢ ⟸ الرأس (١ ، -٢)

- المقطع الصادي: -٥ ، أ < ٠ مفتوح للأسفل وله قيمة عظمى.

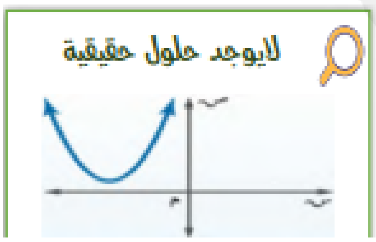
تحديد خصائص القطع المكافئ من خلال تمثيله:

مثال: أوجد الرأس ومعادلة محور التماثل والمقطع الصادي

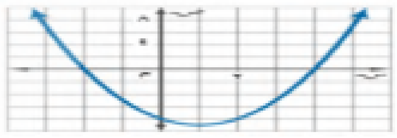
- محور التماثل س = -١
- المقطع الصادي ص = ١
- الرأس (-٢ ، -٣)

٨ - ٢ حل المعادلات التربيعية بيانيًا

حلول المعادلة أو جذورها يمكن تحديدها بإيجاد المقاطع السينية للتمثيل البياني للدالة المرتبطة.

حلان حقيقيان مختلفان:	حل حقيقي واحد:	لا يوجد حلول حقيقية:
		
القطع يتقاطع في نقطتين مع محور السينات	القطع يتقاطع في نقطة واحدة مع محور السينات	القطع لا يتقاطع مع محور السينات

مثال: حل المعادلة س^{٢} − ٢س − ٨ = ٠ بيانيًا

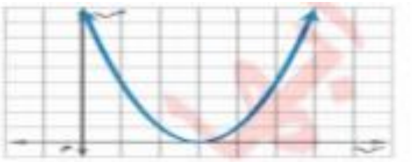


عند تمثيل الدالة د(س) س^{٢} − ٢س − ٨ المرتبطة بالمعادلة

بيانيًا تظهر المقاطع السينية للتمثيل البياني عند -٢ ، -٤

لذا فالحلول هي -٢ ، -٤

مثال: حل المعادلة س^{٢} − ٦س + ٩ = ٠ بيانيًا



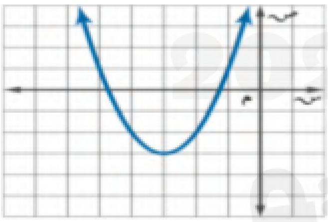
عند تمثيل الدالة د(س) س^{٢} − ٦س + ٩ المرتبطة بالمعادلة

بيانيًا تظهر المقاطع السينية للتمثيل البياني عند ٣ لذا

فالحل هو ٣ ويسمي جذر مكرر

ملحوظة: تمثل الجذور التي وجدت للمعادلات السابقة أعداد صحيحة، إلا أن جذور المعادلات التربيعية ليست دائمًا كذلك ونستعمل في هذه الحالات التقدير لإيجاد قيم تقريبية لجذور المعادلات.

تقدير الجذور التربيعية باستعمال الجدول:



مثال: حل المعادلة س^{٢} + ٦س + ٦ = ٠ بيانيًا ، وإذا لم تكن أعداد صحيحة،

فقدرها لأقرب جزء من عشرة. عند تمثيل الدالة د(س) = س^{٢} + ٦س + ٦

المرتبطة بالمعادلة بيانيًا تظهر المقاطع السينية للتمثيل البياني

بين (-٥ ، -٤) وبين (-٢ ، -١) .

أنشئ جدولًا بتدرج طوله ٠,١ لقيم س التي تقع بين -٥ ، -٤ وبين -٢ ، -١ وتعد قيمة الدالة الأقرب إلي الصفر هي التقريب الأفضل للدالة

س	-٤,٩	-٤,٨	-٤,٧	-٤,٦	-٤,٥	-٤,٤	-٤,٣	-٤,٢	-٤,١
ص	٠,٦١	٠,٢٤	-٠,١١	-٠,٤٤	-٠,٧٥	-١,٠٤	-١,٣١	-١,٦٥	-١,٧٩

س	-١,٩	-١,٨	-١,٧	-١,٦	-١,٥	-١,٤	-١,٣	-١,٢	-١,١
ص	-١,٧٩	-١,٥٦	-١,٣١	-١,٠٤	-٠,٧٥	-٠,٤٤	-٠,١١	٠,٢٤	٠,٦١

بما أن قيمة الدالة الأقرب إلي الصفر هي -٠,١١ ؛ لذا الجذور التقريبية هما -٤,٧ ، -١,٣

٨ - ٣ حل معادلات تربيعية بإكمال مربع

إكمال المربع :

خطوات إكمال المربع في أي عبارة تربيعية علي الصورة $س^٢ + ب س$

❶ أوجد نصف ب (معامل س) ❷ ربّع الناتج في الخطوة (١)

❸ أضف الناتج من الخطوة (٢) إلي $س^٢ + ب س$ ، ثم اكتب العبارة علي صورة مربع كامل

$$س^٢ + ب س + \left(\frac{ب}{٢}\right)^٢ = \left(س + \frac{ب}{٢}\right)^٢$$

مثال: أوجد قيمة ج التي تجعل ثلاثية الحدود $ف^٢ + ٨ف + ج$ مربع كاملًا

❶ أوجد نصف العدد ٨ $\frac{٨}{٢} = ٤$ ❷ ربع الناتج في الخطوة (١) $٤^٢ = ١٦$

❸ أضيف ١٦ إلي $ف^٢ + ٨ف$ $ف^٢ + ٨ف + ١٦$

إذن ج = ١٦ و $ف^٢ + ٨ف + ١٦ = (ف + ٤)^٢$

حل معادلات بإكمال المربع:

لابد أن يكون المعامل الرئيسي (معامل $س^٢$) يساوي (١) وإذا كان المعامل الرئيسي لا يساوي واحد ، اقسم كل حد علي هذا المعامل ثم أفصل الحدين اللذين يحتويان $س^٢$ ، س ثم أكمل المربع.

مثال: حل المعادلة $س^٢ + ٤س = ٢١$

$س^٢ + ٤س + ٤ = ٢١ + ٤$ بما أن $\left(\frac{٤}{٢}\right)^٢ = ٤$ ، لذا أضف ٤ للطرفين

$(س + ٢)^٢ = ٢٥$ حلل $س^٢ + ٤س + ٤$

$س = -٢ \pm ٥$ بأخذ الجذر للطرفين ثم إضافة -٢ للطرفين

$س = -٢ + ٥$ $س = -٢ - ٥$ أفصل الحلين

$س = ٣$ $س = -٧$ أبسط

إذن الحلان هما ٣ ، -٧

٨ - ٤ حل معادلات تربيعية باستعمال القانون العام

القانون العام:

هو صيغة تستعمل لحل أي معادلة تربيعية مكتوبة بالصيغة القياسية $أس^{٢} + ب س + جـ = ٠$

ويعبر عنه بالقانون العام: $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢أ}$ حيث $أ \neq ٠$

مثال: حل المعادلة $س^{٢} + ٤س = ٢١$ باستعمال القانون العام

الخطوة (١): أعد كتابة المعادلة بالصورة القياسية

$$س^{٢} - ٢س = ١٥ \Leftarrow س^{٢} - ٢س - ١٥ = ٠$$

الخطوة (٢): نطبق القانون العام

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢أ}$$

$$س = \frac{-(-٢) \pm \sqrt{(-٢)^{٢} - ٤(١)(-١٥)}}{٢(١)}$$

$$س = \frac{٢ \pm \sqrt{٦٤}}{٢(١)}$$

فصل الحلان

$$س = \frac{٢ + \sqrt{٦٤}}{٢(١)} \qquad س = \frac{٢ - \sqrt{٦٤}}{٢(١)}$$

$$س = ٥ \qquad س = -٣$$

الحلان هما ٥ ، -٣

استعمال المميز لتحديد عدد حلول معادلة تربيعة:

في القانون العام تسمى العبارة التي تحت الجذر ($ب^{٢} + ٤$ أ جـ) المميز ويمكن استعماله لتحديد عدد الحلول الحقيقية للمعادلة التربيعية

- إذا كان المميز موجب: فالمعادلة لها حلين ، عدد المقاطع السينية اثنين.
- إذا كان المميز صفر: فالمعادلة لها حل واحد ، عدد المقاطع السينية واحد.
- إذا كان المميز سالب: فالمعادلة ليس لها حل ، ولا يوجد مقطع سيني.

مثال: المعادلة $س^{٢} + ٢س + ٥ = ٠$

المميز: $ب^{٢} + ٤$ أ جـ = $٢^{٢} - ٤(١)(٥) = -١٦$ "سالب"

إذن عدد الحلول للمعادلة صفر ولا يوجد مقاطع سينية

مثال: المعادلة $٩س^{٢} - ٣٠س + ٢٥ = ٠$

المميز: $ب^{٢} + ٤\ أ\ جـ = (-٣٠)^{٢} - ٤(٩)(٢٥) = ٠$ "صفر"

إذن يوجد للمعادلة حل واحد ومقطع سيني واحد فقط.

٩-١ تبسيط العبارات الجذرية

تكون العبارة الجذرية في أبسط صورة إذا تحققت في العبارة التي تحت الجذر الشروط التالية:

- لا يكون أي من عوامله مربعًا كاملًا عدا الواحد.
- لا يتضمن كسورًا.
- لا يظهر أي جذر في مقام الكسر.

ويمكن استعمال الخواص الاتية لتبسيط الجذور التربيعية

خاصية ضرب الجذور التربيعية

$$\sqrt{أب} = \sqrt{أ} \times \sqrt{ب}$$

مثال: $\sqrt{٤٥} = \sqrt{٥} \times \sqrt{٩}$

$$= \sqrt{٥} \times \sqrt{٣^{٢}}$$

$$= ٣\sqrt{٥}$$

$$\sqrt{٥} \times \sqrt{١٥} = \sqrt{٥} \times \sqrt{٥} \times \sqrt{٣}$$

$$= \sqrt{٥^{٢}} \times \sqrt{٣} = ٥\sqrt{٣}$$

خاصية قسمة الجذور التربيعية

$$\sqrt{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}}$$

مثال: $\sqrt{\frac{١٠}{٩}} = \frac{\sqrt{١٠}}{\sqrt{٩}} = \frac{\sqrt{١٠}}{\sqrt{٣^{٢}}}$

$$= \frac{\sqrt{١٠}}{٣}$$

تبسيط الجذر التربيعي للمتغيرات:

عند تبسيط العبارات الجذرية إذا كان ما تحت الجذر التربيعي متغيرًا ذا أس زوجي وناتج تبسيطه ذا أس فردي يجب استعمال القيمة المطلقة.

مثال: $\sqrt{٥٢ك^{٢}ب^{٢}} = \sqrt{٥^{٢}} \times \sqrt{ك^{٢}} \times \sqrt{ك} \times \sqrt{ب^{٢}}$

$$= ٥ \times |ك| \times \sqrt{ك} \times |ب| = ٥|ك||ب|\sqrt{ك}$$

إنطاق المقام (جعل المقام خاليًا من الجذور):

عندما يكون المقام من حد واحد يحتوي علي جذر نضرب في جذر المقام

مثال: $\frac{٣}{\sqrt{٢}} = \frac{٣}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}}$

$= \frac{٣\sqrt{٢}}{٢}$

عندما يكون المقام من حدين تحتوي جذر نضرب في المرافق

مثال: $\frac{٣}{٣+\sqrt{٥}} = \frac{٣}{٣+\sqrt{٥}} \times \frac{٣-\sqrt{٥}}{٣-\sqrt{٥}}$

$= \frac{٣(٣-\sqrt{٥})}{٣^{٢}-(\sqrt{٥})^{٢}} = \frac{٩-٣\sqrt{٥}}{٩-٥}$

$= \frac{٩-٣\sqrt{٥}}{٤}$

٩-٢ العمليات علي العبارات الجذرية

جمع العبارات الجذرية وطرحها

يجب أن تكون العبارات الجذرية عند جمعها أو طرحها متشابهة مثلها مثل وحيدات الحد

جمع وطرح العبارات الجذرية:

◄ إذا كان ما تحت جذورها متشابهة: يجب أن تكون العبارات الجذرية عند جمعها أو طرحها متشابهة مثلها مثل وحيدات الحد.

مثال: $٩\sqrt{٢} + ٧\sqrt{٢} - ٣\sqrt{٢} = (٩+٧-٣) = ١٣\sqrt{٢}$

◄ إذا كان ما تحت جذورها غير متشابهة: يجب تبسيط كل حد جذري أولًا ، ثم إجراء العمليات الحسابية المطلوبة.

مثال: $٤\sqrt{٥} + ٢\sqrt{٢٠} = ٤\sqrt{٥} + ٢(\sqrt{٥} \times \sqrt{٢^{٢}})$

$= ٤\sqrt{٥} + ٢(\sqrt{٥} \times ٢)$

$= ٤\sqrt{٥} + ٢\sqrt{٥} + ٤$

$= ٦\sqrt{٥} + ٤$

ضرب العبارات الجذرية:

- يشبهه ضرب العبارات الجذرية ضرب وحيدات الحد.

مثال: $٦\sqrt{٣} + ٢\sqrt{٧} = ٦ \times ٢\sqrt{٣ \times ٧} = ١٢\sqrt{٢١}$

- كما يمكن استعمال خاصية التوزيع علي العبارات الجذرية.

مثال: $٢\sqrt{٥}(٣\sqrt{٥} + ٢\sqrt{٢}) = (٢\sqrt{٥} \times ٣\sqrt{٥}) + (٢\sqrt{٥} \times ٢\sqrt{٢})$

$$= \left[(٢ \times ٣)(\sqrt{٥} \times \sqrt{٥})\right] + \left[(٢ \times ٢)(\sqrt{٥} \times \sqrt{٢})\right]$$

$$= \left[٦\sqrt{٢٥}\right] + \left[٤\sqrt{١٠}\right] = \left[٦ \times ٥\right] + \left[٤\sqrt{١٠}\right]$$

$$= ٢٠ + \left[٤\sqrt{١٠}\right]$$

٩-٣ المعادلات الجذرية

المعادلات الجذرية: هي المعادلات التي تحتوي علي متغيرات تحت الجذر.

حل المعادلات الجذرية التي تحتوي متغيرات تحت الجذر:

- أولًا: اجهل المتغير الذي تريد إيجاد قيمته في طرف من المعادلة.
- ثانيًا: ربع طرفي المعادلة للتخلص من الجذر.

مثال: $\sqrt{س + ٣} - ٢ = ٥$	معادلة جذرية
$\sqrt{س + ٣} = ٧$	بإضافة (٢) للطرفين
$س + ٣ = ٤٩$	بتربيع الطرفين
$س = ٤٦$	بإضافة -٣ للطرفين

ملحوظة: ينتج عن تربيع طرفي المعادلة أحيانا حل لا يحقق المعادلة الأصلية، وهذه الحلول تسمي حلولًا دخيلة ؛ لذا عليك التحقق من الحلول كلها في المعادلة الأصلية

حل المعادلات الجذرية التي تحتوي متغيرًا في طرفيها:

مثال: $\sqrt{ك+٥} = (ك+٣)$

الحل: $(\sqrt{ك+٥})^{٢} = (ك+٣)^{٢}$ "ربع الطرفين" $ك+٥ = ك^{٢}+٦+٩$ "بسط"

$٠ = ك^{٢}+٥ك+٤$ " اطرح ك + ٥ من الطرفين"

$٠ = (ك + ٤)(ك + ١)$ "حلل" ك + ٤ = ٠ ، ك = -٤ ، ك + ١ = ٠ ، ك = -١ "حل"

التحقق: $\sqrt{ك+٥} = (ك+٣)$ " المعادلة الأصلية "

$\sqrt{-٤+٥} = -٤+٣$ " عوض عن ك = -٤ "

$١ \neq ٢$ " حل خطأ "

$\sqrt{ك+٥} = (ك+٣)$ "المعادلة الأصلية"

$\sqrt{-١+٥} = -١+٣$ " عوض عن ك = -١ "

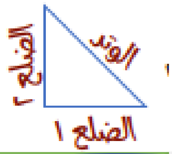
$٢ = ٢$ " حل صحيح "

بما أن -٤ لا تحقق المعادلة الأصلية، لذا فإن -١ هو الحل الوحيد.

٩-٤ نظرية فيثاغورث

نظرية فيثاغورث:

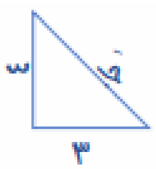
في المثلث القائم الزوايا: (الوتر)^{٢} = (الضلع ١)^{٢} + (الضلع ٢)^{٢}



إيجاد الضلع المجهول في المثلث القائم الزاوية:

◄ الوتر المجهول : (الوتر)^{٢} = (الضلع ١)^{٢} + (الضلع ٢)^{٢}

مثال: أوجدي طول الضلع المجهول في المثلث الآتي:

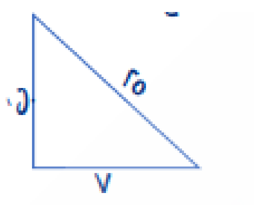


(الوتر)^{٢} = (الضلع ١)^{٢} + (الضلع ٢)^{٢}

(جـ)^{٢} = (٤)^{٢} + (٣)^{٢}

(جـ)^{٢} = ١٦ + ٩ = ٢٥

جـ = ± ٥ "بما أن طول الضلع لا يكون سالبًا، لذا فإن طول الضلع المجهول هو ٥ وحدات.



◄ أحد الأضلاع " غير الوتر" : (الضلع ١)^٢ = (الوتر)^٢ - (الضلع ٢)^٢

(الضلع ١)^٢ = (الوتر)^٢ - (الضلع ٢)^٢

(بَ)^٢ = (٢٥)^٢ - (٧)^٢

(بَ)^٢ = ٦٢٥ - ٤٩ = ٥٧٦

بَ = ± ٢٤ "بما أن طول الضلع لا يكون سالبًا، لذا فإن طول الضلع المجهول هو ٢٤ وحدات.

عكس نظرية فيثاغورث:

إذا كان الأطوال أَ ، بَ ، جـَ لأضلاع مثلث تحقق أن: جـَ^٢ = أَ^٢ + بَ^٢ فإن المثلث قائم الزوايا

مثال: حدد إذا كانت الأطوال (١٠ ، ٨ ، ٦) يمكن أن تشكل أضلاع مثلث قائم الزاوية أم لا ؟

بما أن طول الضلع الأكبر هو ١٠ فإن جـَ = ١٠ ، أَ = ٨ ، بَ = ٦

جـَ^٢ = أَ^٢ + بَ^٢ "نظرية فيثاغورث"

١٠^٢ = ٨^٢ + ٦^٢ "بالتعويض عن جـَ = ١٠ ، أَ = ٨ ، بَ = ٦"

١٠٠ = ٦٤ + ٣٦ "بالتربيع"

١٠٠ = ١٠٠ "بالجمع"

بما أن جـَ^٢ = أَ^٢ + بَ^٢ فإن قياسات هذه الأضلاع تشكل مثلثًا قائم الزاوية.

٩ - ٥ المسافة بين نقطتين

المسافة بين نقطتين إحداثيهما (س١ ، ص١) ، (س٢ ، ص٢) يعبر عنها بالقانون

$$ف = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$$

مثال: أوجدي المسافة بين النقطتين (٥ ، ٤) ، (٢ ، ٣)

الحل: $ف = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

$= \sqrt{(-٣)^٢ + (-١)^٢} = \sqrt{٩ + ١} = \sqrt{١٠}$

إيجاد الإحداثي المجهول:

ويمكن استعمال قانون المسافة بين نقطتين عند معرفة المسافة بينهما ومعرفة إحداثيات إحداهما لإيجاد الإحداثي المجهول للنقطة الآخري.

مثال: أوجد القيم الممكنة للمتغير (أ) إذا كانت المسافة بين نقطتين (٤ ، ٧) ، (أ ، ٣) = ٥ وحدات

الحل: $ف = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$ ، $٥ = \sqrt{(أ - ٤)^٢ + (٣ - ٧)^٢}$

$٥ = \sqrt{أ^٢ - ٨أ + ٣٢}$ "ربع وتبسيط" ، $٢٥ = أ^٢ - ٨أ + ٣٢$ "بأخذ الجذر التربيعي للطرفين"

$٠ = أ^٢ - ٨أ + ٧$ "اطرح ٢٥ من الطرفين" ، $٠ = (أ - ١)(أ - ٧)$ "حل"

$أ - ١ = ٠$ ، $أ = ١$ ، $أ - ٧ = ٠$ ، $أ = ٧$

قانون نقطة المنتصف:

نقطة المنتصف: هي النقطة الواقعة علي بعدين متساويين من طرفي قطعة مستقيمة تنتمي إلي هذه القطعة ويمكن إيجادها باستعمال القانون $م = \left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} \right)$

مثال: أوجد إحداثيي نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة التي تصل بين النقطتين (٦ ، ٨) ، (١٠ ، ٤)

الحل: $م = \left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right)$

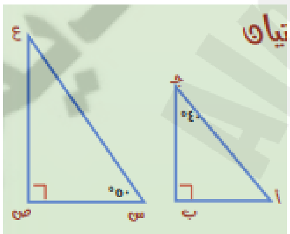
$م = \left(\frac{٦+١٠}{٢} ، \frac{٨+٤}{٢}\right) = (٨ ، ٦)$

٩-٦ المثلثات المتشابهة

المثلثات المتشابهة: هي المثلثات التي لها الشكل نفسه، وزواياها المتناظرة متساوية وقياسات الأضلاع المتناظرة متناسبة والرمز (~) يشير لمثلثين متشابهين.

تحديد المثلثات المتشابهة:

◄ باستعمال المقارنة بين قياسات الزوايا المتناظرة



مثال: حدد ما إذا كانت المثلثان الآتيان متشابهين أم لا ، وبرر إجابتك ؟

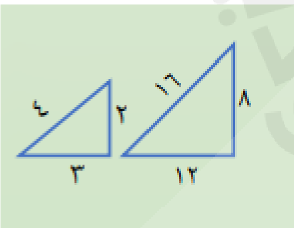
الحل: نعم متشابهة لأن الزوايا المتناظرة متساوية في القياس

قياس ∠ أ = ١٨٠° - (٩٠° + ٤٠°) = ٥٠° = قياس ∠ س

قياس ∠ ع = ١٨٠° - (٩٠° + ٥٠°) = ٤٠° = قياس ∠ جـ

قياس ∠ ب = ٩٠° = قياس ∠ ص

◄ باستعمال المقارنة بين نسب أطوال الاضلاع المتناظرة

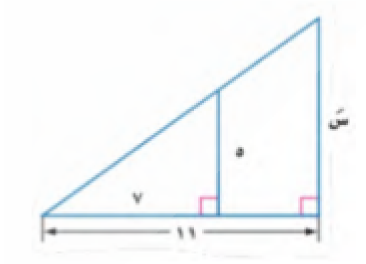


مثال: حدد ما إذا كانت المثلثان الآتيان متشابهين أم لا ، وبرر إجابتك ؟

الحل: نعم متشابهة لأن الأضلاع المتناظرة متناسبة

$\frac{١٦}{٤} = \frac{١٢}{٣} = \frac{٨}{٢} = ٤$

ملحوظة: يمكن استعمال التناسب لإيجاد القياسات المجهولة، عندما تكون بعض أطوال أضلاع المثلثات المتشابهة معلومة.



مثال: أوجد قياس العناصر المجهولة في المثلثين المتشابهين

الحل: بما أن المثلثان متشابهان فإن الأضلاع المتناظرة متناسبة

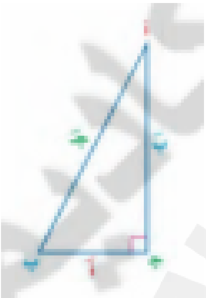
$\frac{س}{٥} = \frac{١١}{٧}$ ، ٧ س = ٥٥ ، س = $\frac{٥٥}{٧}$ = ٧,٩

٩ - ٧ النسب المثلثية

حساب المثلثات: هو دراسة العلاقة بين زوايا المثلث وأضلاعه.

النسب المثلثية: هي النسب التي تقارن بين طولي ضلعين من أضلاع المثلث قائم الزاوية.

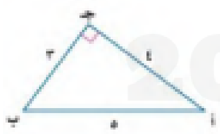
النسب المثلثية الأكثر شيوعًا:



◄ جيب الزاوية أ = $\frac{\text{الضلع المقابل للزاوية أ}}{\text{الوتر}}$ ◄ جيب تمام الزاوية أ = $\frac{\text{الضلع المجاور للزاوية أ}}{\text{الوتر}}$

◄ ظل الزاوية أ = $\frac{\text{الضلع المقابل للزاوية أ}}{\text{الضلع المجاور للزاوية أ}}$

مثال: أوجد النسب المثلثية للزاوية أ في المثلث الآتي:



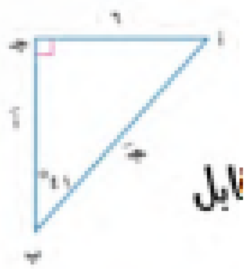
الحل: جا أ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{٣}{٥}$ ظا أ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{٣}{٤}$

جتا أ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{٤}{٥}$

استعمال النسب المثلثية:

حل المثلث: يعني إيجاد القياسات المجهولة لأضلاع وزوايا المثلث قائم الزاوية.

مثال: حل المثلث القائم الزاوية مقربًا طول الضلع إلي أقرب جزء من عشرة.



الحل: أجد قياس ∠ أ = ١٨٠° - (٩٠° + ٤١°) = ٤٩° ، قياس ∠ أ = ٤٩

أجد أ باستعمال نسبة الظل لان الضلع المقابل للزاوية ب معطى ونريد إيجاد المجاور للزاوية ب

أ = $\frac{٦}{\text{ظا ٤٥}}$ ⟸ أ = ٦.٩ ، ظا ٤٥ = $\frac{٦}{أ}$ ⟸ أ ظا ٤٥ = ٦

أجد جـَ باستعمال نسبة الجيب لأن قياس الضلع المقابل للزاوية مغطى ونريد إيجاد قياس الوتر

جا ٤١ = $\frac{٦}{جـَ}$ ⟸ جـَ جا ٤١ = ٦ ، جـَ = $\frac{٦}{\text{جا ٤١}}$ = ٩.١ تقريبًا

معكوس النسب المثلثية:

إذا كانت ∡ أ زاوية حادة وكان جا أ = س فإن جا$^{-1}$ س = ق ∡ أ

وكان جتا أ = س فإن جتا$^{-1}$ س = ق ∡ أ

وكان ظا أ = س فإن ظا$^{-1}$ س = ق ∡ أ

مثال: أوجد ق ∡ ص إلي أقرب درجة.

الحل: نعلم طول الضلع المجاور للزاوية ص وطول الوتر إذن استعمل جيب التمام

جتا ص = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{8}{19}$ ، جتا$^{-1}$ $\frac{8}{19}$ = ق ∡ ص

باستعمال الحاسبة ودالة جتا$^{-1}$ (COS^{-1}) ، ق ∡ ص = ٦٥°

١٠ - ١ تصميم دراسة مسحية

أساليب جمع البيانات

	الدراسة المسحية	الدراسة القائمة علي الملاحظة	التجربة
تعريف / استعمالها	تؤخذ فيها البيانات من استجابات أفراد عينة من المجتمع للتوصل إلي استنتاجات	تسجيل البيانات بعد ملاحظة أو مشاهدة العينة وتستعمل لمقارنة ردود الأفعال والتوصل إلي استنتاجات حول استجابات المجتمع.	تسجل البيانات بعد تغيير العينة وتستعمل للتوصل إلي استنتاجات عامة حول ما يمكن أن يحدث خلال حادثة ما
مثال عليها	تحديد درجة رضا طلاب مدرسة عن فقرات الإذاعة المدرسية الصباحية: يسأل مشرف الإذاعة عينة من ٥٠ طالب عن رأيهم في فقرات الإذاعة.	تراقب شركة لصناعة الدمي بعض الأطفال وهم يلعبون وتلاحظ نوع الدمي التي يفضلونها أكثر ويستنتجون من ذلك أن الأطفال في عمر سنتين يفضلون الدمي التي تصدر أصوات علي تلك التي لا تصدر أصوات	يقوم مراقب ضبط الجودة بتشغيل آلة بسرعة معينة عشر مرات فإذا وجد أن المنتج يكون معيبًا في كل مرة فإنه يستنتج أن المنتج سيكون معيبًا في كل مرة تدور فيها الآلة بهذه السرعة

ملحوظة: تكون العينة متحيزة إذا كانت طريقة اختيارها تعطي تفضيل لمجموعة معينة علي مجموعة أخري.

تكون العينة غير متحيزة إذا كان لكل فرد منها الاحتمال نفسه في الاختيار وتسمي عينة عشوائية

العينات العشوائية:

	العينة العشوائية البسيطة	العينة العشوائية الطبقية	العينة العشوائية المنتظمة
تعريفها	العينة التي لها فرصة الاختيار نفسها كأي عينة أخري من المجتمع	العينة التي لها يقسم فيها المجتمع إلي فئات متماثلة غير متداخلة ثم يتم اختيار عينة من كل واحدة من هذه الفئات	العينة التي يختار أفرادها تبعًا لفترة زمنية محددة أو فئة محددة من العناصر.
مثال عليها	سحب أرقام مئة طالب من كيس وإخضاع هؤلاء الطلاب لدراسة مسحية.	يختار الباحث عينات من صفوف مختلفة من الطلاب بناء علي النسبة المئوية لهذه الصفوف في المدرسة	تفحص قطعة من خط الإنتاج كل عشر دقائق أو تفحص قطعة من كل ٥٠ قطعة

١٠ - ٢ تحليل نتائج دراسة مسحية

مقاييس النزعة المركزية

	المتوسط الحسابي	الوسيط	المنوال
وصفه	مجموع البيانات مقسومًا علي عددها	العدد الأوسط أو متوسط العددين الأوسطين في البيانات المترتبة.	العدد أو الأعداد الأكثر تكرارًا في مجموعة البيانات.
متي يستخدم؟	عندما لا يوجد قيم متطرفة في مجموعة البيانات	عندما توجد قيمة متطرفة في البيانات ولكن لا توجد فجوة كبيرة في وسط البيانات.	عندما توجد أعداد متكررة في مجموعة البيانات

أنواع البيانات:

◄ بيانات كمية: تعطي بصورة قيم عددية يمكن تحليلها مثل درجات الاختبار وساعات الدراسة.

◄ بيانات نوعية: لا يمكن أن تأخذ قيمة عددية ومن أمثلتها الجنس (ذكر ، أنثي).

تقويم نتائج الدراسة المسحية

غالبا ما تقدم الصحف اليومية والمجلات والتقارير المتلفزة نتائج دراسات مسحية تحتاج إلي الحكم علي مصداقيتها قبل اتخاذ قرار يعتمد عليها ويمكن أن تطرح بعض الأسئلة علي نفسك من أجل ذلك مثل:

ما مجتمع الدراسة؟ وما العينات المختارة منه؟ وهل أستطيع تحديدها بسهولة؟

وهل هي متحيزة؟ ما مصدر البيانات؟ وهل هو موثوق؟ وهل يمكن أن يكون متحيز؟

هل تدعم البيانات الاستنتاجات فعليًا؟

وهذا ما يسمي بتقويم نتائج الدراسة المسحية

نتائج مظللة

يفكر قائد مدرسة ثانوية كبيرة في تطبيق نظام جديد لتوزيع الطلاب علي جمعيات النشاط فوزع استبانة علي الطلاب يسألهم عن رأيهم في النظام الجديد وكان السؤال ما رأيك في تطبيق النظام الجديد لتوزيع الطلاب علي جمعيات النشاط؟

الاستنتاج/ لن ينزعج الطلاب من تطبيق نظام توزيع الطلاب علي جمعيات النشاط

حدد ما إذا كان التمثيل بالأعمدة المجاور يعطي الصورة الصحيحة حول نتائج الدراسة المسحية؟

يبدو للوهلة الأولي أن معظم الطلاب موافقون علي تطبيق النظام الجديد ومع ذلك فإن أطول فترات التدريج غير ثابتة وإذا ألقينا نظرة فاحصة نجد أن نحو ٤٥٠ طالب غير موافقين أو غير موافقين بشدة علي هذا النظام الجديد وأن عدد الطلاب الموافقين يزيد قليلًا علي ٣٠٠ طالب فقط لذا فإن التمثيل البياني المعروض مظلل والاستنتاج غير صادق

١٠ - ٣ إحصائيات العينة ومعالم المجتمع

عين العينة والمجتمع في الموقف التالي ثم صف إحصائي العينة ومعلمة المجتمع

اختيرت عينة عشوائية من إحدي الجامعات مكونة من ٤٠ من طالبي المنح الدراسية ثم حسب متوسط درجاتهم

- العينة: مجموعة الطلاب ٤٠ المتقدمين بطلبات المنح.
- المجتمع: جميع الطلاب طالبي المنح الدراسية.
- إحصائي العينة: متوسط درجات الطلاب الأربعين.
- معلمة المجتمع: متوسط درجات جميع طالبي المنح الدراسي.

مقاييس التشتت

	المدي	الربيعات	المدي الربيعي
وصفه	الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة في مجموعة البيانات	القيم التي تقسم مجموعة البيانات إلي أربعة أجزاء متساوية.	مدي النصف الأوسط من مجموعة البيانات وهو الفرق بين الربيعين الأعلى والأدنى.
متي يستخدم؟	لوصف الأعداد التي تشملها مجموعة البيانات.	لتحديد القيم الواقعة في الجزء الأعلى أو الجزء الأسفل من البيانات	لتحديد القيم الواقعة في النصف الأوسط من مجموعة البيانات

- الانحراف المتوسط: هو متوسط القيم المطلقة للفرق بين كل قيمة والمتوسط الحسابي لمجموعة بيانات
- كيف نوجد الانحراف المتوسط.....؟!

١- نوجد المتوسط الحسابي

٢- نوجد مجموع القيم المطلقة للفرق بين كل قيمة في مجموعة البيانات والمتوسط الحسابي

٣- نقسم هذا المجموع علي عدد القيم في مجموعة البيانات.

- الانحراف المعياري: هو القيمة التي تحسب لتدل علي مدي تباعد قيم مجموعة البيانات عن متوسطها الحسابي
- التباين: هو مربع الانحراف المعياري.
- كيف نوجد التباين والانحراف المعياري.....؟!

١- نوجد المتوسط الحسابي

٢- نوجد مربع الفرق بين كل قيمة في مجموعة البيانات والمتوسط الحسابي ثم نجمع هذه المربعات ونقسم المجموع علي عدد القيم في مجموعة البيانات لنحصل علي التباين.

٣- نوجد الانحراف المعياري بإيجاد الجذر التربيعي للتباين.

١٠ - ٤ التباديل والتوافيق

التباديل

عندما تنظم العناصر بحيث يكون ترتيبها مهمًا وتكتب جميع التراتيب الممكنة لهذه العناصر يسمي كل من هذه التراتيب تبديل.

◄ في التباديل الترتيب مهم جدًا

مثال: أوجد قيمة كل مما يلي:

$^{٦}ل_{٢} = ٦ \times ٥ = ٣٠$

$^{٥}ل_{٣} = ٥ \times ٤ \times ٣ = ٦٠$

مثال من واقع الحياة "مسألة قدرات"

يريد أمين مكتبة أن يعرض ٦ مجلات من بين ١٠ مجلات مختلفة علي رف، فبكم طريقة يمكنه ذلك؟

الحل: ملاحظة/ كلمة مختلفة تدل علي ترتيب لذلك تحل بالتباديل

$^{١٠}ل_{٦} = ١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ = ١٥١٢٠٠$

التوافيق

يسمي عدد طرق التشكيل الممكنة لمجموعة من العناصر ليس لترتيبها أهمية توافيق

◄ في التوافيق الترتيب غير مهم أبدًا "اختيار جزء من كل"

مثال: أوجد قيمة كل مما يلي:

$^{٦}ق_{٣} = \frac{٦ \times ٥ \times ٤}{٣ \times ٢ \times ١} = ٢٠$

$^{٤}ق_{٢} = \frac{٤ \times ٣}{٢ \times ١} = ٦$

مثال من واقع الحياة "مسألة قدرات"

تطلب أم من بناتها الخمسة القيام بالأعمال المنزلية كل أسبوع بكم طريقة يمكن اختيار اثنين منهن لتنظيف ساحة المنزل؟

الحل: ملاحظة/ الترتيب في عملية الاختيار ليس مهم كذلك نلاحظ انه اختيار جزء من كل لذلك تحل بالتوافيق

$^{٥}ق_{٢} = \frac{٥ \times ٤}{٢ \times ١} = ١٠$

المضروب

مضروب العدد الصحيح الموجب ن هو ناتج ضرب الأعداد الصحيحة الموجبة التي تقل عن ن أو تساويه

مثال: $٤! = ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٢٤$

مثال من واقع الحياة "مسألة قدرات"

دخل فهد وخمسة من أصدقائه قاعة محاضرات فبكم طريقة مختلفة يمكنهم أن يجلسوا حميعًا علي ٦ مقاعد خالية في صف واحد ؟

الحل: عدد طرق جلوس فهد وأصدقائه هو $٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٧٢٠$

١٠ - ٥ احتمالات الحوادث المركبة

الحوادث المركبة

تتكون من حادثتين بسيطتين أو أكثر

مثال : يحتوي كيس علي ٦ كرات سوداء و ٩ زرقاء و ٤ صفراء وكرتين خضراوين فإذا سحبت كرة ثانية أوجد احتمال سحب كرة سوداء ثم كرة صفراء؟

الكرة الأولي: ح(سوداء) $= \frac{\text{عدد الكرات السوداء}}{\text{عدد الكرات الكلي}} = \frac{٦}{٢١}$

الكرة الثانية: ح(صفراء) $= \frac{\text{عدد الكرات الصفراء}}{\text{عدد الكرات الكلي}} = \frac{٤}{٢١}$

إذًا احتمال الحوادث المستقلة يكون: ح(سوداء و صفراء) = ح(سوداء) × ح(صفراء)

$= \frac{٦}{٢١} \times \frac{٤}{٢١} = \frac{٢٤}{٤٤١}$

الحوادث المستقلة والغير مستقلة

الحوادث المستقلة هي التي نتيجة إحداهما لا تؤثر علي الأخرى.

مثال : يحتوي كيس علي ١٠ كرات ٥ منها زرقاء و ٢ سوداء و ٣ خضراء ثم سحب كرة عشوائيًا زرقاء ثم سوداء

مستقلة: ح (زرقاء و سوداء) $= \frac{٥}{١٠} \times \frac{٢}{١٠} = \frac{١٠}{١٠٠} = \frac{١}{١٠}$

غير مستقلة: عندما سحبنا الكرة الاولي لم يتم إعادتها إلي الكيس.

$\frac{٣}{١٠} \times \frac{٢}{٩} = \frac{٦}{٩٠} = \frac{١}{١٠}$

الحوادث المتنافية

هي الحوادث التي لا يمكن وقوعها معًا

مثال : عند رمي مكعب أرقام أوجدي احتمال ظهور العدد ٣ أو ٥ ؟

أولًا نوجد احتمال ظهور العدد ٣ والعدد ٥ كلا علي حده

ح(ظهور ٣) = $\frac{١}{٦}$ ، ح(ظهور ٥) = $\frac{١}{٦}$

احتمال الحوادث المتنافية

ح (٣ أو ٥) = $\frac{١}{٦} + \frac{١}{٦} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$ ، ح (٤ علي الأقل) = $\frac{١}{٦} + \frac{١}{٦} + \frac{١}{٦} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

الحوادث الغير متنافية

مثال : في حالة رمي مكعب أرقام احتمال ظهور عدد فردي أو أولي؟

أولًا نوجد احتمال ظهور عدد فردي وعدد أولي كلا علي حده

ح (فردي) = $\frac{٣}{٦}$ ، ح (أولي) = $\frac{٣}{٦}$

ح (فردي أو أولي) =$\frac{٢}{٦}$

ح(فردي) + ح(أولي) – ح(الاعداد الأولية الفردية) = $\frac{٣}{٦} + \frac{٣}{٦} - \frac{٢}{٦} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$