دفتر تطبيقات مفكرة تمرينات

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج السعودية	
موقع المناهج ⇦ المناهج السعودية ⇦ الصف الثالث الثانوي ⇦ رياضيات ⇦ الفصل الثاني ⇦ ملفات متنوعة ⇦ الملف	
تاريخ إضافة الملف على موقع المناهج: 19-01-2026 22:41:24	
المزيد من مادة رياضيات:	ملفات ا كتب للمعلم ا كتب للطالب ا اختبارات الكترونية ا اختبارات ا حلول ا عروض بوربوينت ا أوراق عمل منهج انجليزي ا ملخصات وتقارير ا مذكرات وبنوك ا الامتحان النهائي ا للمدرس
	إعداد: أمل باجوده

التواصل الاجتماعي بحسب الصف الثالث الثانوي					
صفحة المناهج السعودية على فيسبوك					
المواد على تلغرام	التربية الاسلامية	اللغة العربية	اللغة الانجليزية	الرياضيات	

المزيد من الملفات بحسب الصف الثالث الثانوي والمادة رياضيات في الفصل الثاني	
1	دفتر تطبيقات مفكرة تمرينات
2	كتاب الطالب
3	درس التحليل الإحصائي
4	حل بنك أسئلة الفصل الثالث المتطابقات المثلثية
5	نموذج اختبار محلول

المملكة العربية السعودية

وزارة التعليم

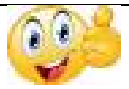
الثانوية ٣٤

أمل باجوده

دفتر تطبيقات على رياضيات ثالث ثانوي الفصل الثاني.

الفصل الثاني

اسم الطالب/ة	
المادة	رياضيات ٣-٢
الصف	
المدرسة	

التاريخ	الدفتر كامل ومرتب 	عليه ملاحظات	الدرجة من ١٠	التوقيع

الوصول إلى قمة النجاح ينسيك مشقة الطريق

أمل باجوده ٤٧هـ
١٤٤٧/٧/٢٤هـ

التاريخ : / / الموضوع: **مقدمة في المتجهات**

تحديد الكميات المتجهة تحقق من فهمك

حدّد الكميات المتجهة ، والكميات القياسية (العددية) في كلٍّ مما يأتي:

1A) تسير سيارة بسرعة 60 mi / h ، وبزاوية 15° جهة الجنوب الشرقي. .....

1B) هبوط مظلّي رأسيًّا إلى أسفل بسرعة 12.5 mi / h . .....

1C) طول قطعةٍ مستقيمةٍ 5cm . .....

تمثيل المتجه هندسيًّا تحقق من فهمك

استعمل مسطرة ومنقلة؛ لرسم متجه لكلٍّ من الكميات الآتية، واكتب مقياس الرسم في كل حالة:

2A) $\mathbf{t} = 20\ \text{ft/s}$ ، باتجاه 065° .

.....

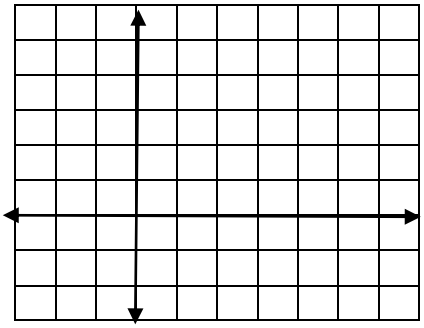
2B) $\mathbf{u} = 15\ \text{mi/h}$ ، باتجاه S 25° E .

.....

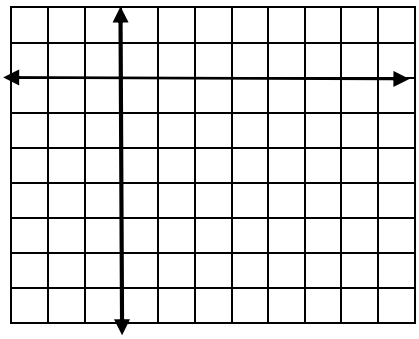
2C) $\mathbf{m} = 60\text{N}$ ، بزاوية قياسها 80° مع الاتجاه الأفقي.

.....

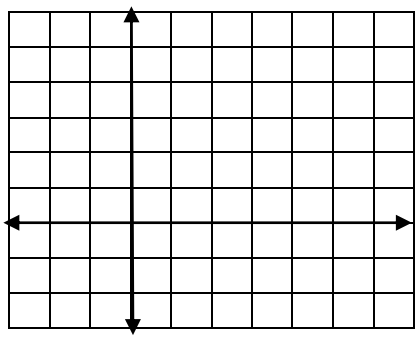
A



B



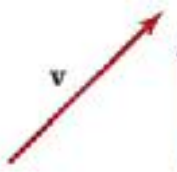
C

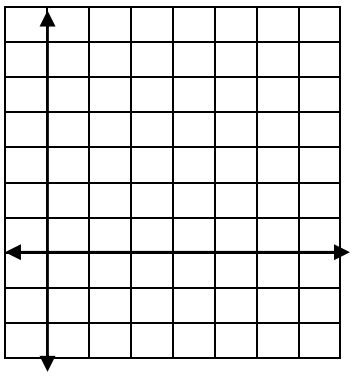


إيجاد محصلة متجهين تحقق من فهمك

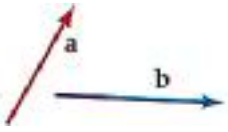
أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية مستعملًا قاعدة المثلث، أو متوازي الأضلاع. ثمّ حدّد اتجاهها بالنسبة للأفقي.

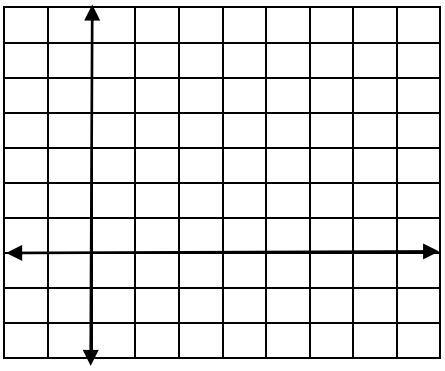
3A)





3B)

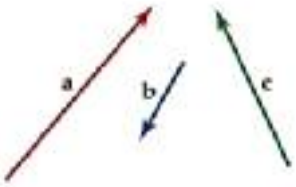




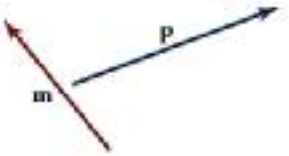
العمليات على المتجهات تحقق من فهمك

ارسم المتجه الذي يُمثّل كلًّا مما يأتي :

(4A $a - c + 2b$



(4B $m - \frac{1}{4}p$



.....

.....

تحليل القوة إلى مركبتين متعامدتين تحقق من فهمك

5) كرة قدم: يركل لاعبٌ كرةَ قدمٍ من سطح الأرض بسرعةٍ مقدارها 44 ft/s ، وبزاويةٍ قياسها "33 مع سطح الأرض كما في الشكل أدناه.

A) ارسم شكلًا يوضّح تحليل هذه السرعة إلى مركبتين متعامدتين.

B) أوجد مقدار كلٍّ من المركبتين الأفقية والرأسية للسرعة .

.....

.....

.....

.....

محصلة جمع المتجهات المتوازية	
في الاتجاه نفسه	في اتجاهين متعاكسين
نجمع المتجهين وله نفس الاتجاه	القيمة المطلقة للفرق بين الطولين واتجاهه اتجاه المتجه الأطول منهما

حدِّد الكميات المتجهة والكميات القياسية في كلٍّ مما يأتي:

1) طول محمد 125 cm . .....

3) يركض غزال بسرعة 15 m/s باتجاه الغرب. .....

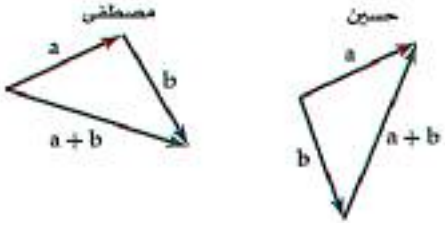
5) إطار سيارة وزنه 7 kg معلق بحبل. .....

حدّد مقدار المحصلة الناتجة عن جمع المتجهين، واتجاهها في كلٍّ مما يأتي:

18) 18 N للأمام، ثم 20 N للخلف.

19) 100 m للشمال، ثم 350 m للجنوب.

43) اكتشف الخطأ: حاول كلٌّ من حسين ومصطفى إيجاد محصلة المتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برّر إجابتك.



تحصيلي

إذا كان A, B, C ثلاث نقاط في مستوى فإن $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ تساوي .

Ⓐ AB Ⓑ $\overrightarrow{AB}$

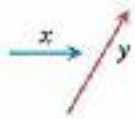
Ⓒ AC Ⓓ $\overrightarrow{AC}$

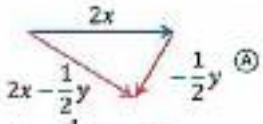
إذا كان المتجهان $8xy$ ، $5xy$ متوازيين ومتعاكسين فإن محصلتهما تساوي

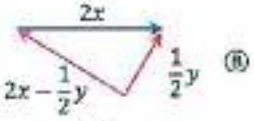
Ⓐ $3xy$ Ⓑ $5xy$

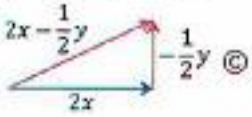
Ⓒ $8xy$ Ⓓ $13xy$

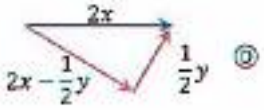
إذا كان الشكل يُمثل المتجهين x, y ؛ فأي التالي يُمثل المتجه $2x - \frac{1}{2}y$ ؟



Ⓐ 

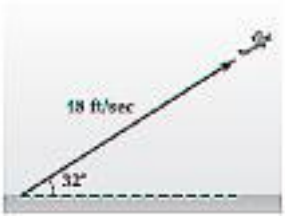
Ⓑ 

Ⓒ 

Ⓓ 

من تمارين التحصيلي أيضا

52) طارت طائرة لعبة تسير باستعمال جهاز التحكم عن بُعد، بزاوية قياسها 32° مع الأفقي، وبسرعة 48 ft/s كما في الشكل أدناه. أيٌّ مما يأتي يُمثّل مقدار المركبتين الأفقية والرأسية لسرعة الطائرة على الترتيب؟



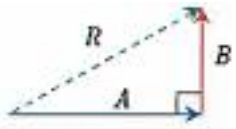
A 25.4 ft/s, 40.7 ft/s

B 40.7 ft/s, 25.4 ft/s

C 56.6 ft/s, 90.6 ft/s

D 90.6 ft/s, 56.6 ft/s

في الشكل، إذا كانت قيمة المتجه A تساوي 5 ، وقيمة المتجه B تساوي 6 ؛ فما قيمة متجه المحصلة R ؟



لإيجاد R نستخدم نظرية فيثاغورس

Ⓐ $\sqrt{61}$ Ⓑ $\sqrt{40}$

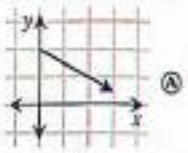
Ⓒ $\sqrt{13}$ Ⓓ $\sqrt{11}$

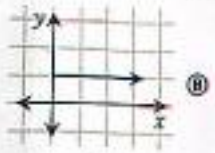
تسير باخرة بزاوية قيمتها 60° مع الأفقي وبسرعة 100 km/h ، ما مقدار المركبة الأفقية لسرعة الباخرة؟

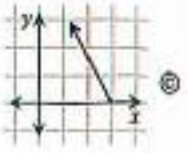
Ⓐ 50 km/h Ⓑ $50\sqrt{3}$ km/h

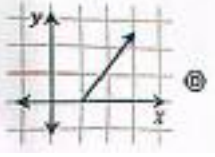
Ⓒ 200 km/h Ⓓ $200\sqrt{3}$ km/h

أي المتجهات التالية له مركبة أفقية أكبر؟

Ⓐ 

Ⓑ 

Ⓒ 

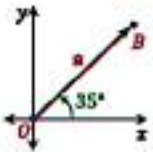
Ⓓ 

01/14 ◄ أيّ الكميات التالية كمية متجهة؟

Ⓐ الزمن Ⓑ المسافة

Ⓒ الإزاحة Ⓓ الكتلة

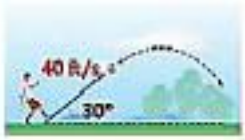
02/14 ◄ في الشكل: قياس زاوية الاتجاه الحقيقي للمتجه ..



Ⓐ 35° Ⓑ 035°

Ⓒ 055° Ⓓ 090°

09/14 ◄ لاعب يركل كرة قدم من سطح الأرض بسرعة مقدارها 40 ft/s وبزاوية 30° مع الأرض، إن مقدار المركبة الرأسية ..



Ⓐ 20 ft/s Ⓑ $20\sqrt{3}$ ft/s

Ⓒ 40 ft/s Ⓓ $40\sqrt{3}$ ft/s

التاريخ: / / الموضوع : **المتجهات في المستوى الإحداثي**

التعبير عن المتجه بالصورة الإحداثية تحقق من فهمك

أوجد الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممَّا يأتي:

1A $A(-2, -7), B(6, 1)$

1B $A(0, 8), B(-9, -3)$

إيجاد طول متجه تحقق من فهمك

أوجد طول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلّ ممَّا يأتي:

2A $A(-2, -7), B(6, 1)$

2B $A(0, 8), B(-9, -3)$

العمليات على المتجهات تحقق من فهمك

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{a} = \langle 2, 5 \rangle, \mathbf{b} = \langle -3, 0 \rangle, \mathbf{c} = \langle -4, 1 \rangle$

3A $4\mathbf{c} + \mathbf{b}$

3B $-3\mathbf{c}$

3C $2\mathbf{c} + 4\mathbf{a} - \mathbf{b}$

إيجاد متجه وحدة له نفس الاتجاه لمتجه معطًى تحقق من فهمك

أوجد متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه المتجه المُعطى في كلٍّ ممَّا يأتي:

(4A $\mathbf{w} = \langle 6, -2 \rangle$ **(4B** $\mathbf{x} = \langle -4, -8 \rangle$

كتابة متجهٍ على صورة توافق خطي لمتجهَي الوحدة تحقق من فهمك

اكتب المتجه $\overrightarrow{DE}$ المُعطى نقطتا بدايته ونهايته على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ في كلٍّ ممَّا يأتي :

(5A $D(-6, 0), E(2, 5)$ **(5B** $D(-3, -8), E(7, 1)$

إيجاد الصورة الإحداثية تحقق من فهمك

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ المُعطى طوله وزاوية اتجاهه مع الأفقي في كلٍّ ممَّا يأتي :

(6A $|\mathbf{v}| = 8, \theta = 45°$

(6B $|\mathbf{v}| = 24, \theta = 210°$

زوايا الاتجاه للمتجهات تحقق من فهمك

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهين الآتيين مع الاتجاه الموجب لمحور x.

(7A $-6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

(7B $\langle -3, -8 \rangle$

تطبيق العمليات على المتجهات تحقق من فهمك

8) كرة قدم: أوجد محصلة السرعة، واتجاه حركة الكرة إذا تحرك اللاعب إلى الأمام بسرعة $7\ \text{m/s}$

الصورة الاحداثية لمتجه سرعة اللاعب $\mathbf{v_1} = \langle 7,0 \rangle$ وتكون الصورة الإحداثية لمتجه سرعة الكرة $\mathbf{v_2}$ هي:

الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v_2}$ $\quad \mathbf{v_2} = \langle |\mathbf{v_2}| \cos\theta, |\mathbf{v_2}| \sin\theta \rangle$

$|\mathbf{v_2}| = 25, \theta = 40°$ $\quad = \langle 25\cos 40°, 25 \sin 40° \rangle$

بسّط $\quad \approx \langle 19.2, 16.1 \rangle$

متجه المحصلة $\quad \mathbf{r} = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$

.....

.....

.....

.....

بيّن ما إذا كان $\overline{AB}, \overline{CD}$ المُعطاة نقطتا البداية والنهاية لكلٍّ منهما فيما يأتي متكافئين أو لا، وإذا كانا متكافئين، فأثبت أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ، وإذا كانا غير ذلك، فاذكر السبب.

.....

36) A(3, 5), B(6, 9), C(−4, −4), D(−2, 0)

.....

.....

37) A(1, −3), B(0, −10), C(11, 8), D(10, 1)

.....

.....

44) تبرير: إذا أُعطيت طول متجه، ونقطة بدايته، فصف المحل الهندسي للنقاط التي يمكن أن تُمثّل نقطة نهايته. (إرشاد: المحل الهندسي هو مجموعة من النقاط تحقق شرطًا معيّنًا).

.....

.....

.....

55) ما طول المتجه الذي نقطة بدايته (2, 5)، ونقطة نهايته (−3, −4)؟

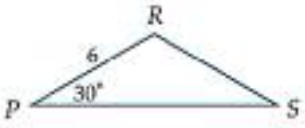
A $\sqrt{2}$ **B** $\sqrt{26}$ **C** $\sqrt{82}$ **D** $\sqrt{106}$

.....

.....

.....

56) ما مساحة المثلث المجاور، إذا علمت أن $PR = RS$؟



A $9\sqrt{2}$ **B** $9\sqrt{3}$ **C** $18\sqrt{2}$ **D** $18\sqrt{3}$

ما الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$، حيث $A(-4,1), B(2,-5)$؟

Ⓐ $\langle -8, -5 \rangle$ Ⓑ $\langle -4, 1 \rangle$

Ⓒ $\langle 6, -6 \rangle$ Ⓓ $\langle 2, -5 \rangle$

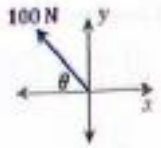
.....

.....

.....

.....

في الشكل؛ عند تحليل القوة 100 N لمركبتين أفقية ورأسية، أي العبارات التالية صحيح مهما كانت قيمة θ ؟



Ⓐ المركبة الأفقية أكبر من 50 N

Ⓑ المجموع المتجهي للمركبة الأفقية والمركبة الرأسية = 100 N

Ⓒ المركبة الأفقية = المركبة الرأسية = 25 N

Ⓓ المركبة الرأسية أكبر من 50 N

إذا كانت الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB} = \langle 7,4 \rangle$ ، وكانت $B(4,5), A(d,1)$ ؛ فإن d تساوي ..

Ⓐ -3 Ⓑ 0

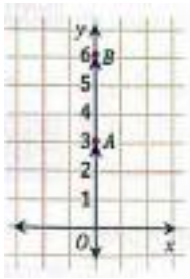
Ⓒ 3 Ⓓ 7

طول المتجه $C = \langle 0,6 \rangle$ يساوي ..

Ⓐ 8 Ⓑ 6

Ⓒ 4 Ⓓ 2

من التمثيل البياني إذا كان طول المتجه $OA = 3$ فما طول المتجه AB ؟



Ⓐ 0 Ⓑ 3

Ⓒ 5 Ⓓ 6

إذا كان $A = \langle 3,4 \rangle , B = \langle 2,-1 \rangle$ فأوجد $3A - B$.

Ⓐ $\langle 7,13 \rangle$ Ⓑ $\langle 1,5 \rangle$

Ⓒ $\langle 11,13 \rangle$ Ⓓ $\langle 7,3 \rangle$

إذا كان $A = \langle 1,2 \rangle , B = \langle -3,5 \rangle , C = \langle 4,0 \rangle$ فأوجد $C - 2A + B$.

Ⓐ $\langle 1,-1 \rangle$ Ⓑ $\langle -1,1 \rangle$

Ⓒ $\langle 0,-14 \rangle$ Ⓓ $\langle -14,0 \rangle$

متجه الوحدة u الذي له نفس اتجاه $v = \langle \sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle$ هو ..

Ⓐ $\left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$ Ⓑ $\langle -1,-1 \rangle$

Ⓒ $\left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$ Ⓓ $\left\langle \frac{-3}{2}, \frac{-1}{2} \right\rangle$

أي التالي يعبر عن المتجه الممثل في الشكل؟

Ⓐ $3i + j$ Ⓑ $-3i + j$

Ⓒ $2i + j$ Ⓓ $-2i + 2j$

ما الصورة الإحداثية لمتجه طوله 6 وزاوية اتجاهه مع الأفقي $150°$ ؟

Ⓐ $\langle -3\sqrt{3}, 3 \rangle$ Ⓑ $\langle 3, -3\sqrt{3} \rangle$

Ⓒ $\langle 3, 3\sqrt{3} \rangle$ Ⓓ $\langle 3\sqrt{3}, -3 \rangle$

أي المتجهات طوله $2\sqrt{2}$ وزاوية اتجاهه $45°$ ؟

Ⓐ $\langle 2,-2 \rangle$ Ⓑ $\langle -2,2 \rangle$

Ⓒ $i + j$ Ⓓ $2i + 2j$

المتجه $\overrightarrow{AB}$ حيث $A(-2,7), B(6,3)$ يكتب بدلالة متجهي الوحدة على الصورة ..

Ⓐ $8i - 4j$ Ⓑ $-8i + 4j$

Ⓒ $4i - 4j$ Ⓓ $-4i + 4j$

إذا كان المتجه $a = \langle 3,5 \rangle$ يوازي المتجه b وعكس اتجاهه؛ فإن b يساوي ..

Ⓐ $\langle -3,-5 \rangle$ Ⓑ $\langle 0,3 \rangle$

Ⓒ $\left\langle \frac{1}{3}, \frac{1}{5} \right\rangle$ Ⓓ $\langle 6,10 \rangle$

التاريخ : / / الموضوع: **الضرب الداخلي**

الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى الإحداثي **المتجهان المتعامدان**

استعمال الضرب الداخلي في التحقق من تعامد متجهين **تحقق من فهمك**

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين .

1A $\mathbf{u} = \langle 3, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle -5, 1 \rangle$

.....

.....

1B $\mathbf{u} = \langle -2, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 9, -6 \rangle$

.....

.....

خصائص الضرب الداخلي **استعمال الضرب الداخلي لإيجاد طول متجه** **تحقق من فهمك**

استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول كلٍّ من المتجهات الآتية : **2A** $\mathbf{b} = \langle 12, 16 \rangle$

.....

.....

2B $\mathbf{c} = \langle -1, -7 \rangle$

.....

.....

الزاوية بين متجهين **إيجاد قياس الزاوية بين متجهين** **تحقق من فهمك**

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي:

3A $\mathbf{u} = \langle -5, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 4 \rangle$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3B $\mathbf{u} = \langle 9, 5 \rangle, \mathbf{v} = \langle -6, 7 \rangle$

.....

.....

.....

.....

.....

حساب الشغل تحقق من فهمك

4) **تنظيف:** يدفع إبراهيم مكنسةً كهربائيةً بقوةٍ مقدارها 25N، إذا كان قياس الزاوية بين ذراع المكنسة وسطح الأرض 60°، فأوجد الشغل بالجول الذي بذله إبراهيم عند تحريك المكنسة مسافة 6m؟

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$، ثم تحقق ممَّا إذا كانا متعامدين أم لا. (مثال 1)

2) $\mathbf{u} = \langle 9, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 3 \rangle$

استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول المتجه المعطى.

8) $\mathbf{r} = \langle -9, -4 \rangle$

أوجد متجهًا يعامد المتجه المعطى في كلٍّ مما يأتي:

18) $\langle 3, 5 \rangle$

45) ما قياس الزاوية بين المتجهين $\langle -1, -1 \rangle$ ، $\langle -9, 0 \rangle$ ؟

A 0°
B 45°
C 90°
D 135°

46) إذا كان: $\mathbf{t} = \langle -6, 2 \rangle$ ، $\mathbf{s} = \langle 4, -3 \rangle$ ، فأيُّ مما يأتي يمثِّل $\mathbf{r}$، حيث $\mathbf{r} = \mathbf{t} - 2\mathbf{s}$ ؟

A $\langle 14, 8 \rangle$
B $\langle 14, 6 \rangle$
C $\langle -14, 8 \rangle$
D $\langle -14, -8 \rangle$

9) **اختيار من متعدد:** أيُّ مما يأتي يُمثِّل الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ ، حيث $A(-5, 3)$ نقطة بدايته، و $B(2, -1)$ نقطة نهايته؟ (الدرس 2-5)

A $\langle 4, -1 \rangle$
B $\langle 7, -4 \rangle$
C $\langle -4, 7 \rangle$
D $\langle -6, 4 \rangle$

16) اختيار من متعدد: إذا كان :
$\mathbf{u} = \langle 2, 3 \rangle, \mathbf{v} = \langle -1, 4 \rangle, \mathbf{w} = \langle 8, -5 \rangle$ ، فما ناتج $(\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ ؟ (الدرس 5-3)

A -2
B -18
C 15
D 38

إذا كان $\mathbf{u} = \langle 3, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 7 \rangle$ فإن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ يساوي ..

Ⓐ -14
Ⓑ -1
Ⓒ 1
Ⓓ 15

إذا كان $\frac{23}{14}$ ◄

إذا كان $B = (3,4), A = (7,3), C = (0,0)$: فأوجد $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BA}$.

Ⓐ 0
Ⓑ 5
Ⓒ 25
Ⓓ 28

إذا كان حاصل الضرب الداخلي لمتجهين يساوي صفر فإن الزاوية بينهما تكون ..

Ⓐ حادة
Ⓑ قائمة
Ⓒ منفرجة
Ⓓ مستقيمة

المتجه العمودي على المتجه $\mathbf{v} = \langle 4, -1 \rangle$ هو ..

Ⓐ $\langle -1, 4 \rangle$
Ⓑ $\langle 8, 2 \rangle$
Ⓒ $\langle 2, 8 \rangle$
Ⓓ $\langle 1, -4 \rangle$

إذا كان $\mathbf{u} = \langle -3, 6 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, -5 \rangle, \mathbf{w} = \langle 8, 4 \rangle, \mathbf{c} = \langle -2, 7 \rangle$ فإن المتجهين المتعامدين هما ..

Ⓐ $\mathbf{u}, \mathbf{v}$
Ⓑ $\mathbf{v}, \mathbf{w}$
Ⓒ $\mathbf{u}, \mathbf{w}$
Ⓓ $\mathbf{v}, \mathbf{c}$

نبحث عن متجهين حاصل ضربهما القياسي يساوي صفر

إذا كان $\mathbf{a} = \langle -9, k \rangle, \mathbf{b} = \langle -5, -15 \rangle$: فإن قيمة k التي تجعل المتجهين متعامدين هي ـ

Ⓐ $\frac{1}{3}$
Ⓑ 3
Ⓒ $\frac{25}{3}$
Ⓓ 27

ما قياس الزاوية بين المتجهين $\langle 3, 3 \rangle, \langle 2, 0 \rangle$ ؟

Ⓐ $30°$
Ⓑ $45°$
Ⓒ $120°$
Ⓓ $135°$

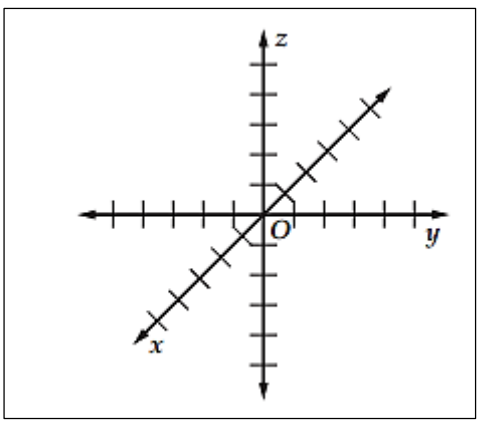
نرسم رسمًا تقريبيًا ونختار قياس الزاوية الأنسب

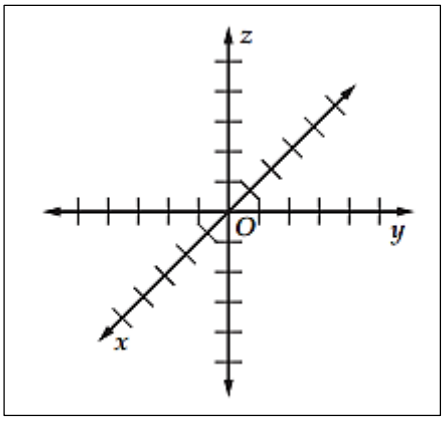
التاريخ : / / الموضوع: **المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد**

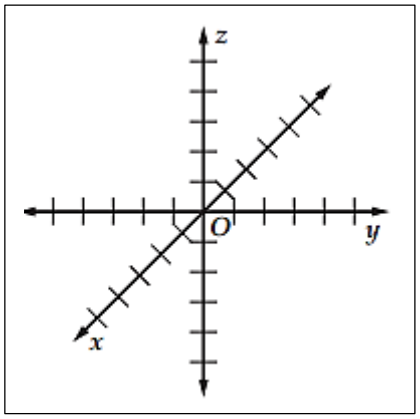
تعيين نقطة في الفضاء تحقق من فهمك

عيّن كلًّا من النقاط الآتية في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

1A) $(-3, -4, 2)$ **1B)** $(3, 2, -3)$ **1C)** $(5, -4, -1)$







المسافة بين نقطتين ونقطة منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء تحقق من فهمك

2) طائرات، تفرض أنظمة السلامة ألّا تقل المسافة بين الطائرات عن 0.5 mi في أثناء طيرانها، إذا علمت أن طائرتين تطيران فوق إحدى المناطق، وفي لحظةٍ معينةٍ كانت إحداثيات موقعَي الطائرتين: (450, −250, 28000) , (300, 150, 30000)، مع العلم بأن الإحداثيات معطاة بالأقدام، فأجب عما يأتي:

A) هل تخالف الطائرتان أنظمة السلامة؟

.....

.....

B) إذا أطلقت ألعابٌ ناريةٌ، وانفجرت في منتصف المسافة بين الطائرتين، فما إحداثيات نقطة الانفجار؟

إرشادٌ: الميل = 5280 قدمًا

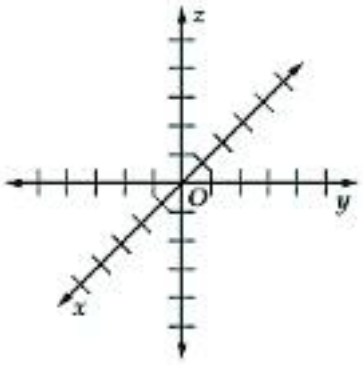
.....

.....

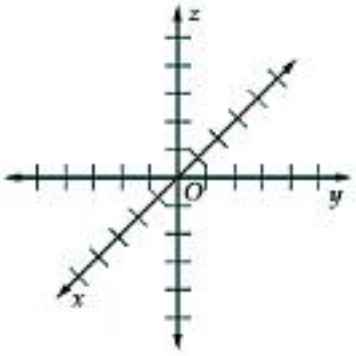
تعيين متجه في الفضاء تحقق من فهمك

مثّل بيانيًا كلًّا من المتجهين الآتيين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

3A $\mathbf{u} = \langle -4, 2, -3 \rangle$



3B $\mathbf{w} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$



العمليات على المتجهات في الفضاء تحقق من فهمك

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{y} = \langle 3, -6, 2 \rangle, \mathbf{w} = \langle -1, 4, -4 \rangle, \mathbf{z} = \langle -2, 0, 5 \rangle$

4A $4\mathbf{w} - 8\mathbf{z}$

.....

.....

4B $3\mathbf{y} + 3\mathbf{z} - 6\mathbf{w}$

.....

.....

.....

التعبير عن المتجهات في الفضاء جبريًا تحقق من فهمك

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overline{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه $\overline{AB}$ في كلٍّ مما يأتي:

5A $A(-2, -5, -5), B(-1, 4, -2)$

.....

5B) $A(-1,4,6), B(3,3,8)$

أوجد طول القطعة المستقيمة المعطاة نقطتا نهايتها وبدايتها، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها في كلٍّ مما يأتي: (مثال 2)

7) $(-4, 10, 4), (1, 0, 9)$

9) $(8, 3, 4), (-4, -7, 5)$

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات:
$\mathbf{a} = \langle -5, -4, 3 \rangle, \mathbf{b} = \langle 6, -2, -7 \rangle, \mathbf{c} = \langle -2, 2, 4 \rangle$.

25) $-6\mathbf{a} + \mathbf{b} + 7\mathbf{c}$

53) **تحدٍّ:** إذا كانت M هي نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين: $M_1(-1, 2, -5), M_2(3, 8, -1)$، فأوجد إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة M_1M.

أوجدي معادلة الكرة التي مركزها ونصف قطرها التالي

49) مركزها $(3, -2, -4)$، طول نصف قطرها 4

61) ما نوع المثلث الذي رؤوسه هي النقاط $A(0, 3, 5), B(1, 0, 2), C(0, -3, 5)$؟

A قائم الزاوية

B متطابق الضلعين

C متطابق الأضلاع

D مختلف الأضلاع

إذا كان $A(-5,0,2)$, $B(3,6,2)$ فإن متجه الوحدة الذي له اتجاه $\overrightarrow{AB}$ هو ..

Ⓐ $\left\langle \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0 \right\rangle$ Ⓑ $\left\langle 2, \frac{3}{2}, 0 \right\rangle$

Ⓒ $\langle -1, 3, 2 \rangle$ Ⓓ $\left\langle \frac{-4}{5}, \frac{-3}{5}, 0 \right\rangle$

37/14 إذا كـــان $\mathbf{a} = \langle 2, 4, -3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -5, -7, 1 \rangle$ فـــإن $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$ يساوي ..

Ⓐ $\langle -1, 1, 5 \rangle$ Ⓑ $\langle 4, 8, -6 \rangle$

Ⓒ $\langle 9, 15, -7 \rangle$ Ⓓ $\langle 9, 15, -5 \rangle$

.....

30/14 إذا كـانـت $(3, 0, 6)$ نـقـطـة الـمـنـتـصـف بـيـن الـنـقـطـتـيـن $A(2, 3, 4), B(4, -3, k)$ فإن k تساوي ..

Ⓐ 2 Ⓑ 6

Ⓒ 8 Ⓓ 12

31/14 أي مما يلي يمثل المتجه $\overrightarrow{AB}$ إذا كان $A(3, 4, -4), B(-5, 2, 1)$ ؟

Ⓐ $\langle -8, -2, 5 \rangle$ Ⓑ $\langle 8, -2, 3 \rangle$

Ⓒ $\langle 8, 2, -3 \rangle$ Ⓓ $\langle -8, -2, -3 \rangle$

.....

.....

التاريخ: / / الموضوع : **الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء**

الضرب الداخلي والمتجهات المتعامدة في الفضاء

إيجاد الضرب الداخلي لتحديد المتجهات المتعامدة تحقق من فهمك

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدِّد ما إذا كانا متعامدين أم لا:

1A) $\mathbf{u} = \langle 3, -5, 4 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 7, 5 \rangle$

.....

.....

1B) $\mathbf{u} = \langle 4, -2, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 3, -2 \rangle$

.....

.....

الزاوية بين متجهين في الفضاء تحقق من فهمك

2) أوجد قياس الزاوية بين المتجهين: $\mathbf{u} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$ ، إلى أقرب منزلةٍ عشريةٍ.

.....

.....

.....

.....

الضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

إذا طبَّقنا قاعدة حساب قيمة محدِّدة من الدرجة الثالثة على المحدِّدة أدناه، والتي تتضمن متجهات الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ، وإحداثيات كلٍّ من $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ، فإننا نتوصل إلى القاعدة نفسها للمتجه $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

بوضع متجهات الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ في الصف 1

بوضع إحداثيات $\mathbf{a}$ في الصف 2

بوضع إحداثيات $\mathbf{b}$ في الصف 3

إيجاد الضرب الاتجاهي لمتجهين

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين: $\mathbf{u} = \langle 3, -2, 1 \rangle, \mathbf{v} = \langle -3, 3, 1 \rangle$، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

$$\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k} \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ ممايأتي، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$:

3A $\mathbf{u} = \langle 4, 2, -1 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 1, 4 \rangle$

3B $\mathbf{u} = \langle -2, -1, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 1, 4 \rangle$

مساحة متوازي أضلاع في الفضاء تحقق من فهمك

4) أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه: $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ضلعان متجاوران .

5) أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه: $\mathbf{t} = 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}, \mathbf{u} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ أحرف متجاورة.

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدِّد ما إذا كانا متعامدين أم لا:

1) $\mathbf{u} = \langle 3, -9, 6 \rangle, \mathbf{v} = \langle -8, 2, 7 \rangle$

2) $\mathbf{u} = \langle 5, 0, -4 \rangle, \mathbf{v} = \langle 6, -1, 4 \rangle$

أوجد متجهًا غير صفري يعامد المتجه المُعطى في كلٍّ مما يأتي:

24) $\langle 3, -8, 4 \rangle$

42) تبرير حدِّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبدًا. برِّر إجابتك.

«لأي متجهين غير صفريين وغير متوازيين، يوجد مستوى عمودي على هذين المتجهين».

حدِّد ما إذا كان كل متجهين مما يأتي متوازيين أم لا:

33) $\mathbf{m} = \langle 2, -10, 6 \rangle, \mathbf{n} = \langle 3, -15, 9 \rangle$

34) $\mathbf{a} = \langle 6, 3, -7 \rangle, \mathbf{b} = \langle -4, -2, 3 \rangle$

38) إذا كان $\mathbf{a} = \langle 0, 5, 3 \rangle, \mathbf{b} = \langle 7, 0, 1 \rangle$ فإن $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ يساوي ..

Ⓐ 3 Ⓑ 12 Ⓒ 21 Ⓓ 35

إذا كان $\mathbf{u} = \langle 4, x, 2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, -3, 5 \rangle$ ؛ فما قيمة x التي تجعل المتجهين متعامدين؟

Ⓐ 8 Ⓑ 7 Ⓒ 6 Ⓓ 5

54) أيٌّ مما يأتي متجهان متعامدان؟

A $\langle 1, 0, 0 \rangle , \langle 1, 2, 3 \rangle$

B $\langle 1, -2, 3 \rangle , \langle 2, -4, 6 \rangle$

C $\langle 3, 4, 6 \rangle , \langle 6, 4, 3 \rangle$

D $\langle 3, -5, 4 \rangle , \langle 6, 2, -2 \rangle$

55) ما حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين:
$\mathbf{u} = \langle 3, 8, 0 \rangle , \mathbf{v} = \langle -4, 2, 6 \rangle$ ؟

A $48\mathbf{i} - 18\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$

B $48\mathbf{i} - 22\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$

C $46\mathbf{i} - 22\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$

D $46\mathbf{i} - 18\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$

إذا كان $\mathbf{u} = \langle 1, -1, 0 \rangle , \mathbf{v} = \langle 0, 2, 1 \rangle$ متجهين فإن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يساوي ..

Ⓐ $\langle -1, -1, 2 \rangle$ Ⓑ $\langle 1, 1, -2 \rangle$

Ⓒ $\langle -1, 1, 2 \rangle$ Ⓓ $\langle 1, -1, -2 \rangle$

إذا كان $\mathbf{u} = \langle 2, 1, -2 \rangle , \mathbf{v} = \langle -2, 5, 3 \rangle$ فإن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يساوي ..

Ⓐ $\langle -4, 5, -6 \rangle$ Ⓑ $\langle 13, 2, 12 \rangle$

Ⓒ $\langle 13, -2, 12 \rangle$ Ⓓ $\langle -7, -2, 5 \rangle$

42/14 ◄ أوجد $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

Ⓐ $2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ Ⓑ $-2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$

Ⓒ $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ Ⓓ $-2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$

41/14 ◄ قياس الزاوية بين المتجهين $\mathbf{a} = \langle \sqrt{2}, 2, 0 \rangle , \mathbf{b} = \langle \sqrt{3}, 0, 1 \rangle$ ..

Ⓐ $30°$ Ⓑ $45°$

Ⓒ $60°$ Ⓓ $90°$

44/14 ◄ أي المتجهات التالية عمودي على المتجهين
$\mathbf{w} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k} , \mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{k}$ ؟

Ⓐ $\langle -3, 2, 6 \rangle$ Ⓑ $\langle -3, 6, -6 \rangle$

Ⓒ $\langle 3, -2, 6 \rangle$ Ⓓ $\langle -3, -6, 6 \rangle$

45/14 ◄ متوازي أضلاع فيه $\mathbf{u} = 7\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ و $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$
ضلعان متجاوران، ما مساحته بالوحدات المربعة؟

Ⓐ 13 Ⓑ 21

Ⓒ $\sqrt{186}$ Ⓓ $\sqrt{458}$

◄ 46/14 حجم متوازي السطوح الذي فيه $u = -6i - 2j + 3k$ و $v = 4i + 3j - k$ و $t = 2j - 5k$ أحرف متجاورة يساوي ..... وحدة مكعبة.

(A) 31 (B) 62 (C) 72 (D) 86

◄ 47/14 إذا كان حجم متوازي السطوح الذي فيه $u = \langle c, -3, 1 \rangle$ و $v = \langle -2, -1, 4 \rangle$ و $w = \langle 1, 0, -2 \rangle$ أحرف متجاورة تساوي 7 وحدات مكعبة؛ فإن قيمة c الموجبة تساوي ..

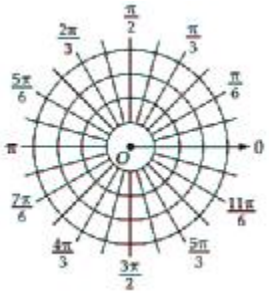
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

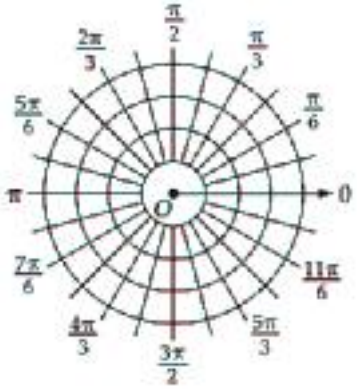
التاريخ : / / الموضوع: **الإحداثيات القطبية**

تمثيل الإحداثيات القطبية تحقق من فهمك

مثّل كل نقطة من النقاط الآتية:

1A $D\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ **1B** $E(2.5, 240^\circ)$ **1C** $F\left(4, -\frac{5\pi}{6}\right)$

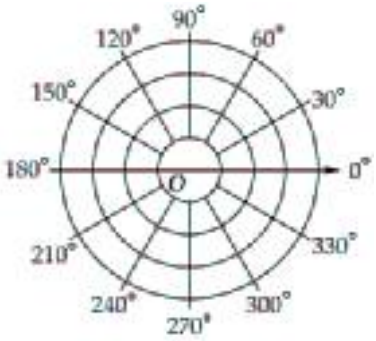




تمثيل النقاط في المستوى القطبي تحقق من فهمك

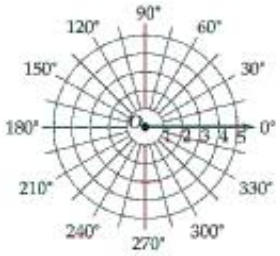
مثّل كلًّا من النقاط الآتية في المستوى القطبي:

2A $R\left(1.5, -\frac{7\pi}{6}\right)$ **2B** $S(-2, -135^\circ)$



تمثيلات قطبية متعددة تحقق من فهمك

وبصورة عامة، إذا كان n عددًا صحيحًا، فإنه يمكن تمثيل النقطة (r, θ) بالإحداثيات $(r, \theta + 360°n)$ أو $(-r, \theta + (2n + 1)180°)$.



أوجد ثلاثة أزواج مختلفة كل منها يمثّل إحداثيين قطبيين للنقطة المعطاة، علمًا بأن: $-360° \le \theta \le 360°$ ، أو $-2\pi \le \theta \le 2\pi$.

(3A $(5, 240°)$

(3B $\left(-2, \frac{\pi}{6}\right)$

.....

.....

.....

.....

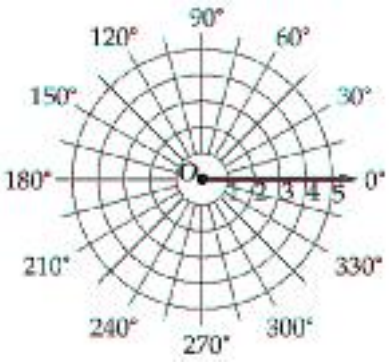
.....

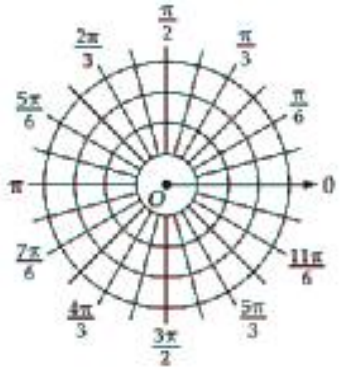
التمثيل البياني للمعادلات القطبية

مَثّل كل معادلة من المعادلات القطبية الآتية بيانيًا:

(4A $r = 3$

(4B $\theta = \frac{2\pi}{3}$





.....

.....

المسافة بالصيغة القطبية إيجاد المسافة باستعمال الصيغة القطبية

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط فيما يأتي. **(25** $(2, 30°), (5, 120°)$

.....

.....

إذا كانت $-360° \le \theta \le 360°$ ، فأوجد ثلاثة أزواج مختلفة كل منها يمثّل إحداثيين قطبيين للنقطة في كلٍّ مما يأتي: (مثال 3) $(2, -30°)$

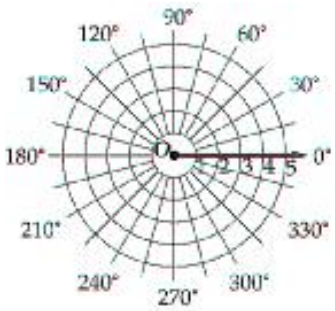
.....

.....

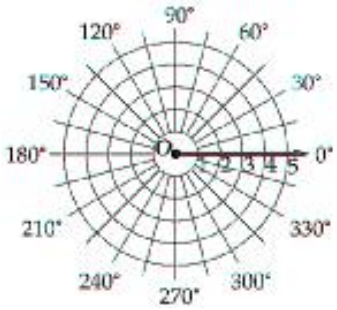
.....

مثّل كل معادلة من المعادلات القطبية الآتية بيانيًا:

21 $\theta = 225°$



$r = 4$



تمرين ٥٢و ٥٣ صفحة ٢٧٣في الكتاب ٥٨ و ٧٢ص ٢٧٤

54) تبرير: وضّح لماذا لا يكون ترتيب النقاط في معادلة المسافة القطبية مهمًا، أو بعبارة أخرى، لماذا يمكنك اختيار أي نقطة لتكون P_1، والنقطة الأخرى لتكون P_2؟

.....

.....

01/15 ◄ تمثيل النقطة $(2, 50°)$ في المستوى القطبي هو نفسه تمثيل النقطة ..

Ⓐ $(50, 2°)$ Ⓑ $(2, 130°)$

Ⓒ $(-2, -50°)$ Ⓓ $(-2, 230°)$

02/15 ◄ أيّ من النقاط التالية يُعد تمثيلاً آخر للنقطة $\left(-2, \frac{7\pi}{6}\right)$ في المستوى القطبي؟

Ⓐ $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ Ⓑ $\left(-2, \frac{\pi}{6}\right)$

Ⓒ $\left(2, \frac{-11\pi}{6}\right)$ Ⓓ $\left(-2, \frac{11\pi}{6}\right)$

أوجد إحداثيات النقطة T في الشكل.

Ⓐ $\left(6, \frac{3\pi}{5}\right)$

Ⓑ $\left(6, \frac{3\pi}{4}\right)$

Ⓒ $\left(6, \frac{4\pi}{3}\right)$

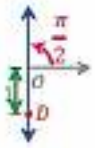
Ⓓ $\left(6, \frac{5\pi}{3}\right)$

.....

.....

.....

03/15 ◄ من الشكل المجاور: تمثيل النقطة D يساوي ..



Ⓐ $\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ Ⓑ $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$

Ⓒ $(-1, \pi)$ Ⓓ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

04/15 ◄ الشكل المجاور يمثل المعادلة ..

Ⓐ $r = 2$ Ⓑ $r = 3$

Ⓒ $r = 4$ Ⓓ $r = 6$

.....

الإحداثيات الديكارتية للنقطة $T(-4, 60°)$ هي ..

Ⓐ $(-2, -2\sqrt{3})$ Ⓑ $(-2\sqrt{3}, -2)$

Ⓒ $(2, 2\sqrt{3})$ Ⓓ $(2\sqrt{3}, 2)$

إذا كان $\left(5, \frac{\pi}{3}\right)$ الإحداثي القطبي للنقطة P فما الإحداثي الديكارتي لها؟

Ⓐ $\left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$ Ⓑ $\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2}\right)$

Ⓒ $\left(10, \frac{10}{\sqrt{3}}\right)$ Ⓓ $\left(\frac{10}{\sqrt{3}}, 10\right)$

.....

أي العبارات التالية يُمثل المتجه في الصورة الديكارتية؟

Ⓐ $(-3, -3\sqrt{3})$ Ⓑ $(-3, 3\sqrt{3})$

Ⓒ $(3, -3\sqrt{3})$ Ⓓ $(3, 3\sqrt{3})$

إذا كان للنقطة P الإحداثيات الديكارتية $(3, 3\sqrt{3})$ فإن الإحداثيات القطبية (r, θ) للنقطة P هي ..

Ⓐ $(6, 60°)$ Ⓑ $(6, 30°)$

Ⓒ $(3, 90°)$ Ⓓ $(6, 45°)$

.....

.....

07 ◄ المسافة بين النقطتين $P_1 = (0, 40°), P_2 = (3, 60°)$ تساوي

Ⓐ 0 Ⓑ 3 Ⓒ 40 Ⓓ 60

08 ◄ إذا كانت المسافة بين النقطتين $P_1 = (r, 0°), P_2 = (4, 90°)$ تساوي 5 وحدات؛ فما قيمة r ؟

Ⓐ 1 Ⓑ 2 Ⓒ 3 Ⓓ 4

تنبيه السؤالين الأخيرين هنا يعتمد على التفكير المنطقي ويأتي حلها ذهنيا سريعا في حالة فهم الطالب/ـة

التاريخ : / / الموضوع : **الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات**

تحويل الاحداثيات القطبية إلى الاحداثيات الديكارتية

حوّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية، لكلّ نقطة مما يأتي:

(1A $R(-6, -120°)$

(1B $S\left(5, \frac{\pi}{3}\right)$

(1C $T(-3, 45°)$

تحويل الاحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبيّة

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثّل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة بالإحداثيات الديكارتية في كلٍّ مما يأتي:

(2A $V(8, 10)$ صيغ التحويل $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$

(2B $W(-9, -4)$ صيغ التحويل $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + 180°$

التحويل بين الإحداثيات تحقق من فهمك

3) صيد الأسماك: يُستعمل جهاز رصد؛ لتحديد موقع وجود الأسماك تحت الماء. افترض أن قاربًا يتجه إلى الشرق، وأن جهاز الرصد قد رصد سربًا من الأسماك عند النقطة $(6, 125°)$.

A) ما الإحداثيات الديكارتية لموقع سرب الأسماك؟

.....

.....

.....

B) إذا كان موقع سرب الأسماك قد رُصد سابقًا عند النقطة التي إحداثياتها الديكارتية $(6, -2)$، فما الإحداثيات القطبية لموقع السرب؟

.....

.....

.....

تحويل المعادلات الديكارتية إلى المعادلات القطبية

اكتب كلّ معادلة مما يأتي على الصورة القطبية:

4A) $x^2 + (y - 3)^2 = 9$ لإيجاد الصورة القطبيّة للمعادلة، عوض عن x بـ $r\cos\theta$ وعن y بـ $r\sin\theta$، ثم بَسِّط المعادلة.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4B) $x^2 - y^2 = 1$

.....

.....

.....

.....

.....

تحويل المعادلات القطبية إلى المعادلات الديكارتية

$r^2 = x^2 + y^2$, $\tan\theta = \frac{y}{x}$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

اكتب كلّ معادلة قطبيّة مما يأتي على الصورة الديكارتية.

5A) $r = -3$

.....

.....

5B $\theta = \frac{\pi}{3}$

5C $r = 3\cos\theta$

حوّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية لكلّ نقطة مما يأتي:

1 $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$ **2** $\left(\frac{1}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

اكتب كلّ معادلة قطبيّة مما يأتي على الصورة الديكارتية.

34 $r = 10$ **36** $\tan\theta = 4$

58 اكتشف الخطأ! يحاول كل من باسل وتوفيق كتابة المعادلة القطبية $r = \sin\theta$ على الصورة الديكارتية، فيعتقد توفيق أن الحل هو $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$، في حين يعتقد باسل أن الحل هو $y = \sin x$. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برّر إجابتك.

75 أيٌّ من النقاط الآتية يعد تمثيلًا آخر للنقطة $(-2, \frac{7\pi}{6})$ في المستوى القطبي؟

A $(2, \frac{\pi}{6})$

B $(-2, \frac{\pi}{6})$

C $(2, \frac{-11\pi}{6})$

D $(-2, \frac{11\pi}{6})$

77 ما الصورة القطبية للمعادلة $x^2 + (y-2)^2 = 4$؟

من أسئلة التحصيلي أيضا

A $r = \sin\theta$

B $r = 2\sin\theta$

C $r = 4\sin\theta$

D $r = 8\sin\theta$

ما الصورة القطبية للمعادلة $y^2 = x$ ؟

Ⓐ $r = \cot\theta \csc\theta$ Ⓑ $r = \tan\theta \sec\theta$

Ⓒ $r = \sin\theta \sec\theta$ Ⓓ $r = \cot\theta \sin\theta$

المعادلة الديكارتية $x = 2$ بالصيغة القطبية هي ..

Ⓐ $r = 2\cos\theta$ Ⓑ $r = 2\sin\theta$

Ⓒ $r = 2\sec\theta$ Ⓓ $r = 2\tan\theta$

ما الصورة القطبية للمعادلة $x^2 + (y-2)^2 = 4$ ؟

Ⓐ $r = \sin\theta$ Ⓑ $r = 2\sin\theta$

Ⓒ $r = 4\sin\theta$ Ⓓ $r = 8\sin\theta$

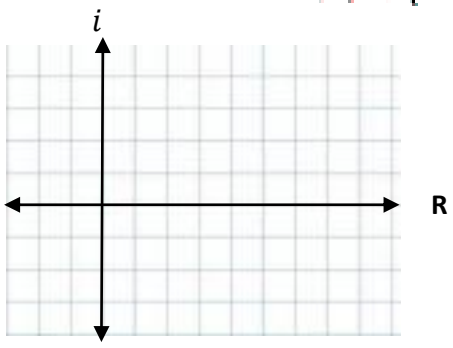
التاريخ : / / الموضوع : **الأعداد المركبة ونظرية ديموافر**

القيمة المطلقة لعدد مركب $z = a + bi$ هي: $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

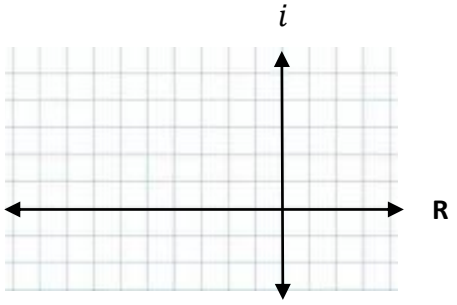
تمثيل الأعداد المركبة وإيجاد قيمها المطلقة تحقق من فهمك

مَثّل كل عدد مما يأتي في المستوى المركب، وأوجد قيمته المطلقة:

(1A $5 + 2i$



(1B $-3 + 4i$



الصورة القطبية لعدد مركب تحقق من فهمك

عبّر عن كلّ عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية: (ملاحظة : الزوايا هنا بالراديان في المثال ولكني سوف أحول الراديان إلى درجات)

(2A $9 + 7i$ ، $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ صيغ التحويل، $a > 0$ $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$

(2B $-2 - 2i$ ، $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ صيغ التحويل، $a < 0$ $\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{b}{a} + \pi$

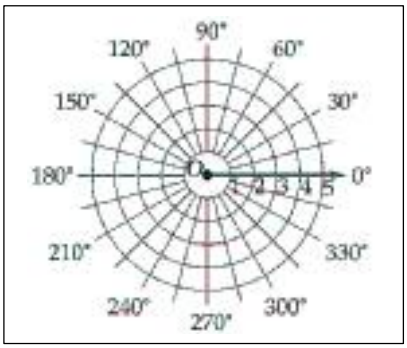
تمثيل الصورة القطبية لعدد مركب وتحويلها إلى الصورة الديكارتية تحقق من فهمك

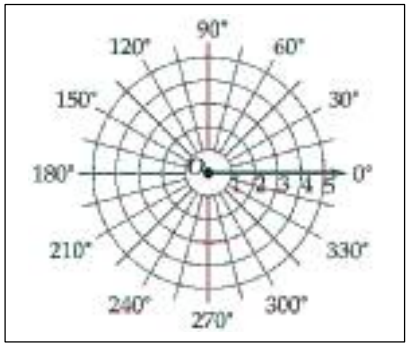
مَثِّل كل عدد مركب مما يأتي في المستوى القطبي، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية:

(3A $5\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ $5(\cos 135°+i\ \sin 135°)$

(3B $4\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ $4\ (\cos 300°+i\ \sin 300°)$

التمثيل





ضرب الأعداد المركبة على الصورة القطبية تحقق من فهمك

أوجد الناتج على الصورة القطبية، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية لكلٍّ مما يأتي:

(4A $3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot 5\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ $=3(\cos 60°+i\ \sin 60°)\ .\ 5(\cos 45°+i\ \sin 45°)$

(4B $6\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ $=6(\cos 135°+i\ \sin 135°)\ .\ 2(\cos 120°+i\ \sin 120°)$

قسمة الأعداد المركبة على الصورة القطبية (تمرين)

أوجد الناتج على الصورة القطبية، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية لكلٍّ مما يأتي:

(25 $6\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\div 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ $6(\cos 135°+i\ \sin 135°)\div\ 2(\cos 45°+i\ \sin 45°)=$

نظرية ديموافر تحقق من فهمك

أوجد الناتج في كلٍّ مما يأتي، وعبّر عنه بالصورة الديكارتية :

(6A $(1+\sqrt{3}i)^4$

(6B $(2\sqrt{3}-2i)^8$

(29 $\left[4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]^4$

(31 $\left[2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^4$

جذور العدد المركب تحقق من فهمك

إرشادات للدراسة

الجذور النونية لعدد مركب
يكون للجذور المقياس نفسه وهو $r^{\frac{1}{n}}$ ، سعة الجذر الأول $\frac{\theta}{n}$ ، ثم تزداد للجذور الأخرى على التوالي بإضافة $\frac{2\pi}{n}$.

7A) أوجد الجذور التكعيبية للعدد $2+2i$

7B) أوجد الجذور التكعيبية للعدد 8

الجذور النونية للعدد واحد تحقق من فهمك

8A) أوجد الجذور التكعيبية للعدد واحد.

س) أوجد الجذور الرباعية للعدد 1

تمرين ٤٢و ٤٣و ٤٤ الكتاب صفحة ٢٩٣

57) ما المسافة بين النقطة $\left(-3, \frac{5\pi}{3}\right)$ والنقطة $\left(6, \frac{\pi}{4}\right)$ ؟

A) 3.97 B) 4.97 C) 5.97 D) 6.97

تمرين ١٠ صفحة ٢٩٩

$\frac{14}{15}$ ◄ القيمة المطلقة للعدد المركب $4i + 3$ تساوي ..

Ⓐ 2 Ⓑ 3 Ⓒ 4 Ⓓ 5

$\frac{15}{15}$ ◄ عدد مركب مقياسه 3 وسعته 30° ، إن الصورة القطبية لهذا العدد ..

Ⓐ $\cos 90° + i \sin 90°$ Ⓑ $\sin 30° + i \cos 30°$ Ⓒ $3(\sin 30° + i \cos 30°)$ Ⓓ $3(\cos 30° + i \sin 30°)$

$\frac{17}{15}$ ◄ الصورة الديكارتية للعدد المركب $2(\cos 45° + i \sin 45°)$ هي ..

Ⓐ $\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$ Ⓑ $2i\sqrt{2}$ Ⓒ $2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$ Ⓓ $2 + 2i$

القيمة المطلقة للعدد المركب $(1 + i\sqrt{3})^6$ تساوي ..

Ⓐ 27 Ⓑ $27\sqrt{3}$ Ⓒ 64 Ⓓ $64\sqrt{3}$

سعة العدد المركب $z = 7\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ تساوي ..

Ⓐ $30°$ Ⓑ $60°$ Ⓒ $90°$ Ⓓ $120°$

الصورة الديكارتية للعدد المركب $2(\cos 45° + i\sin 45°)$ هي ..

Ⓐ $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ Ⓑ $2i\sqrt{2}$ Ⓒ $2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$ Ⓓ $2 + 2i$

إذا كان $z_1 = 5\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right), z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ فما حاصل ضرب $z_1 z_2$ ؟

Ⓐ $10\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

Ⓑ $10\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

Ⓒ $10\left(\cos^2\frac{\pi^2}{18} + i\sin^2\frac{\pi^2}{18}\right)$

Ⓓ $10\left(\cos^2\frac{\pi^2}{18} - i\sin^2\frac{\pi^2}{18}\right)$

.....

.....

19/15 ◄ قيمة المقدار $(\cos 15° + i\cos 75°)^6$ تساوي ..

Ⓐ 1 Ⓑ -1 Ⓒ i Ⓓ $-i$

خارج قسمة: $12(\cos 80° + i\sin 80°) \div 4(\cos 20° + i\sin 20°)$ على الصورة الديكارتية هو ..

Ⓐ $4 + 4\sqrt{3}i$ Ⓑ $\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ Ⓒ $4\sqrt{3} + 4i$ Ⓓ $\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

.....

.....

20/15 ◄ عند إيجاد الجذور التكعيبية للعدد المركب $8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ فإن مقياس الجذر الثاني يساوي ..

Ⓐ 1 Ⓑ 2 Ⓒ 4 Ⓓ 8

21/15 ◄ عند إيجاد الجذور الخماسية للعدد المركب $3(\cos\pi + i\sin\pi)$ فإن سعة الجذر الأول تساوي ..

Ⓐ $\frac{\pi}{5}$ Ⓑ $\frac{\pi}{3}$ Ⓒ π Ⓓ 5π

.....

.....

22/15 ◄ عند إيجاد الجذور الرباعية للعدد واحد فإن مقياس الجذر الثالث يساوي ..

Ⓐ 1 Ⓑ 2 Ⓒ 3 Ⓓ 4

◄ لإيجاد الجذور النونية للعدد 1 نضع العدد 1 على الصورة القطبية $1(\cos 0 + i\sin 0)$.

◄ الجذور النونية المختلفة للعدد «واحد» جميعها لها المقياس نفسه، ويساوي 1 .

.....

.....

التاريخ : / / الموضوع : **الدراسات التجريبية والمسحية والقائمة على الملاحظة**

العينات المتحيزة وغير المتحيزة تحقق من فهمك

حدِّد ما إذا كانت كل دراسة مسحية فيما يأتي تتبنى عينة متحيزة، أو غير متحيزة، وفسّر إجابتك:

1A) سؤال كل لاعب في فريق كرة السلة عن الرياضة التي يحب مشاهدتها على التلفاز. .....

1B) الذهاب إلى ملعب كرة القدم وسؤال 100 شخص اختيروا عشوائيًّا عن رياضتهم المفضلة .....

1) استطلاع رأي كل ثالث شخص يخرج من مطعم للمشويات؛ لمعرفة الوجبة المفضلة للناس. .....

.....

تصميم الدراسات المسحية تحقق من فهمك

أي مما يأتي يُحدّد أفضل مادة بالنسبة إلى الطلاب دون تحيُّز؟

2A) هل تفضل المادة التي خرجت من حصتها الآن؟ .....

2B) أيهما تفضل أكثر: العلوم أو الرياضيات؟ .....

2C) ما مادتك المفضلة؟ .....

.....

الدراسات التجريبية والدراسات القائمة على الملاحظة تحقق من فهمك

حدّد ما إذا كان الموقف الآتي يمثّل دراسة تجريبية، أو دراسة قائمة على الملاحظة، وفي حالة الدراسة التجريبية اذكر كلًّا من المجموعة الضابطة والمجموعة التجريبية، ثم بيّن ما إذا كانت الدراسة التجريبية متحيزةً أم لا.

3) اختر 80 طالبًا جامعيًّا نصفهم درس الإحصاء في المدرسة الثانوية، وقارن نتائج المجموعتين في مساق للإحصاء ثم تدريسه في الجامعة.

.....

الدراسات المسحية والتجريبية والقائمة على الملاحظة تحقق من فهمك

حدّد ما إذا كانت الحالة الآتية تتطلب دراسة مسحية، أو دراسة قائمة على الملاحظة، أو دراسة تجريبية، فسّر إجابتك.

4) تريد استطلاع آراء طلاب مدرسة ثانوية حول وسيلة المواصلات المدرسية باستعمال مقياس متدرج من 1 (لا أوافق مطلقًا) إلى 5 (أوافق بشدة).

.....

التمييز بين الارتباط والسببية الارتباط والسببية تحقق من فهمك

بيّن ما إذا كانت العبارة الآتية تُظهر ارتباطًا، أو سببية، ثم فسّر إجابتك.

c) عندما ترى الشمس يكون النهار قد طلع.

العبارة الواردة تظهر سببية؛ لأنه ليس هناك عوامل أخرى مع الشمس يلزم وجودها لتسبب طلوع النهار.

5) عندما أدرس أحصل على تقدير ممتاز. .....

5B) إذا صاحبتَ شخصًا حسن السيرة، فإنك تقتدي بأخلاقه الحسنة. .....

التمارين من 2 إلى 4 في الكتاب – تمرين 7-8-41-40-26-25-19-18- 15-14-13

التاريخ : / / الموضوع **التحليل الإحصائي**

مقاييس النزعة المركزية تحقق من فهمك

1) تمنح مؤسسة جائزة كبرى قيمتها 20000 ريال، و30 جائزة أخرى قيمة كل منها 500 ريال، أي مقاييس النزعة المركزية يلائم البيانات بصورة أفضل؟ ولماذا؟

.....

1) 833, 796, 781, 776, 758 .....

3) 63, 70, 17, 60, 55, 65, 63, 58, 60, 69 .....

هامش خطأ المعاينة تحقق من فهمك

في دراسة مسحية عشوائية شملت 3247 شخصًا، قال 41% منهم: إنهم مرتاحون للنهضة العلمية.

2A) ما هامش خطأ المعاينة؟

.....

2B) ما الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة أفراد المجتمع المرتاحين للنهضة العلمية؟

.....

.....

3A احسب المتوسط والانحراف المعياري للمجتمع للبيانات المحدّدة في الجدول المجاور.

31	33	33	34	28
31	36	34	29	33
36	28	32	29	30
28	28	29	33	29
29	27	28	31	26

$\mu = \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$

التكرار	x_k	μ	$x_k - \mu$	$(x_k - \mu)^2$	التكرار × $(x_k - \mu)^2$
3	31	30.6			
4	33	30.6			
2	34	30.6			
5	28	30.6			
2	36	30.6			
5	29	30.6			
1	32	30.6			
1	30	30.6			
1	27	30.6			
1	26	30.6			
25					المجموع

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k - \mu)^2}{n}}$$

3B ضع 70 مكان 30 في الجدول المجاور. ماذا تتوقع أن يحدث لكلٍّ من المتوسط والانحراف المعياري؟ أعد الحسابات للتحقق.

3C اختير (5) طلاب عشوائيًّا من فصل دراسي، وقيست أطوالهم ١٥ سم، 170 سم، 168 سم، 167سم، 170 سم. بيّن ما إذا كانت هذه البيانات تمثّل عينة أم مجتمعًا، ثم أوجد الانحراف المعياري لأطوال هؤلاء الطلاب.

x_k	$\bar{x}$	$x_k - \bar{x}$	$(x_k - \bar{x})^2$
175			
170			
168			
167			
170			
			المجموع =

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2}{n-1}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

9) تمارين رياضية: في دراسة مسحية شملت 4213 شخصًا اختيروا بطريقة عشوائية، أفاد 78% منهم أنهم يمارسون الرياضة لمدة ساعة أسبوعيًّا على الأقل.

a) ما هامش خطأ المعاينة؟

b) ما الفترة الممكنة التي تحتوي على نسبة المجتمع الذين يمارسون الرياضة ساعة واحدة على الأقل أسبوعيًا؟

.....

.....

.....

16) تبرير: حذفت قيمة متطرفة كبيرة من مجموعة بيانات، كيف يؤثر ذلك في المتوسط والانحراف المعياري لمجموعة البيانات؟ وضّح ذلك.

.....

.....

.....

تمرين ١٢

28) إحصاء: في مجموعة من تسعة أعداد مختلفة، أي ممّا يأتي لا يؤثر في الوسيط؟

A مضاعفة كل عدد

B زيادة كل عدد بمقدار 10

C زيادة القيمة الصغرى فقط

D زيادة القيمة الكبرى فقط

.....

.....

.....

.....

29) درجات اختبار: كانت درجات 5 طلاب اختيروا عشوائيًا في فصل دراسي كما يلي 55, 45, 30, 50, 70. بيّن ما إذا كانت هذه البيانات تمثّل عينة أم مجتمعًا، ثم احسب الانحراف المعياري لدرجاتهم إلى أقرب عدد صحيح.

A 40

B 15

C 14

D 13

.....

.....

.....

.....

.....

.....

$\frac{28}{9}$ ◂ اختبار 200 طالب وتقسيمهم عشوائيًا إلى نصفين مع إخضاع إحدى المجموعتين إلى برنامج تدريبي وعدم إخضاع الأخرى لأي برنامج ..

Ⓐ دراسة تجريبية
Ⓑ دراسة مسحية
Ⓒ دراسة بالملاحظة
Ⓓ الرباط

$\frac{30}{9}$ ◂ تريد أن تعرف ما إذا كان التدخين لمدة 10 سنين يؤثر في سعة الرئة أم لا ..

Ⓐ دراسة تجريبية
Ⓑ دراسة مسحية
Ⓒ دراسة بالملاحظة
Ⓓ ارتباط

.....

$\frac{31}{9}$ ◂ في دراسة مسحية عشوائية تشمل 100 طالب بمدرسة أفاد 95% منهم أن الجوالات ضرورية لهم، إن هامش الخطأ لهذه الدراسة ..

Ⓐ ± 0.001
Ⓑ ± 0.01
Ⓒ ± 0.1
Ⓓ ± 10

إذا أجريت دراسة مسحية على 10000 شخص، وقال 47% منهم إن الكبسة أكلتهم المفضلة؛ فما هامش الخطأ؟

Ⓐ ± 0.2
Ⓑ ± 0.002
Ⓒ ± 0.01
Ⓓ ± 0.0001

.....

.....

35/9 ◄ أيُّ مقاييس النزعة المركزية يناسب بيانات الجدول المجاور؟

25	19	28	26	28	27	26	27
26	22	42	26	29	26	26	25
25	27	40	27	30	27	25	27

Ⓐ الانحراف المعياري Ⓑ الوسيط
Ⓒ المتوسط Ⓓ المنوال

36/9 ◄ أيُّ من مقاييس النزعة المركزية يناسب البيانات التالية بشكل أفضل ؟ 15, 46, 52, 47, 75, 42, 53, 45

Ⓐ الوسط Ⓑ الوسيط
Ⓒ التباين Ⓓ المنوال

.....

أي التالي ليس من مقاييس النزعة المركزية؟

Ⓐ الوسط الحسابي Ⓑ الوسيط
Ⓒ المنوال Ⓓ الانحراف المعياري

إذا رُصدت درجات الحرارة في فصل الشتاء بمنطقة خلال أسبوع فكانت على النحو التالي: 15, 19, 15, 13, 13, 11, 12 ؛ فما متوسط درجات الحرارة خلال الأسبوع؟

Ⓐ 13 Ⓑ 14
Ⓒ 15 Ⓓ 16

.....

.....

إذا كانت 68, 93, 82, 57, 61, 100 درجات 6 طلاب في مادة الرياضيات: فما وسيطها؟

Ⓐ 59 Ⓑ 61
Ⓒ 75 Ⓓ 77

الوسيط هو متوسط البيانين الموجودين في المنتصف بعد الترتيب

أي التالي ليس من مقاييس التشتت؟

Ⓐ الوسط الحسابي Ⓑ التباين
Ⓒ المدى Ⓓ الانحراف المعياري

.....

أي البيانات التالية له أكبر انحراف معياري؟

Ⓐ 14, 10, 12, 11, 13, 13
Ⓑ 14, 10, 15, 11, 13, 13
Ⓒ 11, 10, 20, 11, 13, 13
Ⓓ 14, 10, 30, 11, 13, 13

تحذف القيم المتشابهة بين الخيارات لتسهيل إيجاد المدى

.....
.....
.....
.....
.....
.....

التاريخ : / / الموضوع : **الاحتمال المشروط**

الاحتمال المشروط $P(B \mid A) = \frac{P(A \text{ و } B)}{P(A)}$, $P(A) \neq 0$

الاحتمال المشروط

ألقت عبير مكعب أرقام مرةً واحدةً. ما احتمال ظهور العدد 3 ، علمًا بأن العدد الظاهر فردي؟

.....

.....

تحقق من فهمك

1) يحتوي كيس على 52 بطاقة مقسمة إلى أربع مجموعات لكل منها لون من الألوان الآتية: الأحمر والأخضر والأزرق والأصفر، ورقّمت بطاقات كل لون بالأعداد من 1 إلى 13. إذا سحبت نوال بطاقة، فما احتمال أن تحمل هذه البطاقة العدد 13 علمًا بأن ما سحبته كان العدد 11 أو 12 أو 13؟

.....

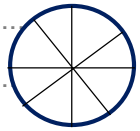
.....

.....

.....

.....

6) **قطاعات دائرية :** رقّمت قطاعات دائرية متطابقة في قرص من 1 إلى 8، إذا أُدير مؤشر القرص، فما احتمال أن يستقر المؤشر عند العدد 8 إذا عُلِم أنه استقر عند عدد زوجي؟



الجداول التوافقية

مثال: أوجد احتمال أن يكون شخص اختير عشوائيًا معافى، علمًا بأنه يمارس المشي.

الحالة	عدد الأشخاص	
	يمارس المشي (W)	لا يمارس المشي (N̄W̄)
مريض(S)	1600	1200
معافى(H)	800	400

تحقق من فهمك 2) أوجد احتمال أن يكون شخص اختير عشوائيًا معافى، علمًا بأنه لا يمارس المشي.

يوضّح الجدول أدناه عدد الطلاب الجامعيين الذين يمارسون الرياضة بشكل منتظم، إذا اختير طالب عشوائيًا، فأوجد احتمال أن يكون الطالب من ضمن المنتخب الجامعي، علمًا بأنه في السنة الثالثة.

الرياضيون الجامعيون	سنة أولى	سنة ثانية	سنة ثالثة	سنة رابعة
ضمن المنتخب الجامعي(K)	7	22	36	51
ليس ضمن المنتخب الجامعي(S)	269	262	276	257

A 11.5% تقريبًا
B 16.6% تقريبًا
C 13.0% تقريبًا
D 19.8% تقريبًا

تحقق من فهمك 3) أوجد احتمال أن يكون الطالب من ضمن المنتخب الوطني، علمًا بأنه في السنة الأولى.

A 2.6% تقريبًا B 2.5% تقريبًا C 8.4% تقريبًا D 7.7% تقريبًا

يحتوي كيس على 8 كرات زرقاء، و6 كرات حمراء، و10 كرات صفراء، و6 كرات بيضاء، و5 كرات خضراء. إذا سُحبت كرة واحدة عشوائيًا،

1) أن تكون الكرة خضراء، إذا عُلِم أنها ليست زرقاء.

2) أن تكون حمراء، إذا عُلِم أنها ليست خضراء.

3) أن تكون صفراء، إذا عُلِم أنها ليست حمراء وليست زرقاء.

4) أن تكون خضراء أو بيضاء، إذا عُلِم أنها ليست حمراء.

5) أن تكون زرقاء، إذا عُلم أنها بيضاء.

.....

.....

.....

7) **فحص القيادة:** يوضح الجدول أدناه أداء مجموعة من الأشخاص في فحص القيادة، علمًا بأن بعضهم أخذ حصصًا تدريبية تحضيرًا للفحص، والبعض الآخر لم يأخذ. إذا اختير أحد الأشخاص عشوائيًا، فأوجد احتمال كل مما يأتي: (مثال 2)

	أخذ حصصًا	لم يأخذ حصصًا
ناجح	64	48
راسب	18	32

a) الشخص ناجح علمًا بأنه أخذ حصصًا.

.....

b) الشخص راسب علمًا بأنه لم يأخذ حصصًا.

.....

c) لم يأخذ حصصًا، علمًا بأنه ناجح.

.....

17) **تحدٍّ:** ألقي مكعب مرقم من 1 إلى 6 خمس مرات متتالية. ما احتمال ظهور الرقم 2 في الرميات الخمس علمًا بأن الرقم 2 ظهر في الرميات الثلاث الأولى؟

.....

.....

.....

27) سحبت كرة بشكل عشوائي من كيس يحتوي على كرتين حمراوين و3 زرقاء دون إرجاع وكانت زرقاء. ما احتمال سحب كرة زرقاء ثانية؟

.....

التاريخ : / / الموضوع : **الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية**

احتمال النجاح والفشل

الاحتمال باستعمال التوافيق

رشّحت مدرسة 12 طالبًا من الصف الثاني الثانوي، و 16 طالبًا من الصف الأول الثانوي للتنافس على 6 جوائز؛ نظرًا لتفوقهم الدراسي. إذا تمت مقابلة المرشحين، واختير 6 منهم بشكل عشوائي، فما احتمال أن يفوز بالجوائز 3 طلاب من الصف الأول الثانوي و 3 طلاب من الصف الثاني الثانوي؟

.....

.....

.....

تحقق من فهمك

1) في المثال 1 إذا كان عدد الذين رُشّحوا من الصف الثاني الثانوي 3، ومن الصف الأول الثانوي 11، وكان عدد الجوائز 4، واختير 4 طلاب من الذين رُشّحوا بطريقة عشوائية، فما احتمال أن يفوز طالبان من الصف الثاني وطالبان من الصف الأول؟

.....

.....

الاحتمال باستعمال التباديل

لدى صالح 6 أصدقاء تبدأ أسماؤهم بالأحرف A , B , C , D , E , F ، ويتوقع من كل منهم اتصالًا هاتفيًّا للاتفاق على موعد رحلة يقومون القيام بها. ما احتمال أن يتصل A أولًا ثم B ثانيًا، ويتصل كل من D, E , F أخيرًا.

تحقق من فهمك

2) **سباق:** اشترك صلاح، وعبد الله، وسليم في سباق 400 m مع خمسة رياضيين آخرين. ما احتمال أن ينهي هؤلاء الثلاثة السباق في المراكز الثلاثة الأولى؟

التوزيع الاحتمالي المنفصل تحقق من فهمك

يوضح الجدول أدناه توزيعًا احتماليًّا، حيث أُلقي مكعبان مرقمان من 1 إلى 6 مرة واحدة، وسُجّل مجموع العددين الظاهرين على الوجهين العلويين واحتمال كلٍّ منها.

المجموع	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
الاحتمال	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

3A) مثّل بالأعمدة هذا التوزيع الاحتمالي.

3B) استعمل التمثيل بالأعمدة؛ لتحدد الناتج الأكثر إمكانية للوقوع؟ ثم أوجد احتماله.

3C) أوجد $P(5 \text{ أو } 11)$.

القيمة المتوقعة تحقق من فهمك

4) أوجد القيمة المتوقّعة عند رمي مكعبين مرقمين مرة واحدة، وتسجيل مجموع العددين الظاهرين على الوجهين العلويين.

1) صندوق فيه 10 كرات، منها 6 حمراء، إذا سحبت منه كرتان معًا عشوائيًّا، فما احتمال أن تكون الكرتان حمراوين؟ **(مثال 1)**

2) **فن:** اختار مسؤول متحف للفنون 4 لوحات بشكل عشوائي من بين 20 لوحة؛ لعرضها في أحد المعارض. ما احتمال أن تكون 3 منها لفنان واحد يشارك بـ 8 لوحات في المتحف؟ **(مثال 1)**

.....

.....

3) دخل 8 لاعبين A,B,C,D,E,F,G,H في مباراة، إذا اختيرت أسماء اللاعبين عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون أول 4 لاعبين مختارين هم A,C,E,G على الترتيب؟ **(مثال 2)**

.....

.....

.....

تمرين ٩ و١٥ في الكتاب و٢٤و٢٥

39 ◄ يبين الجدول التالي عدد الطلاب المشاركين وغير المشاركين في مسابقة القرآن الكريم في المرحلة الابتدائية، إذا اختير طالب عشوائيًّا؛ فما احتمال أن يكون مشاركًا؟ علمًا بأنه في الصف الثالث

	الصف الثاني	الصف الثالث
مشارك	30	40
غير مشارك	50	80

Ⓐ $\frac{3}{5}$ Ⓑ $\frac{2}{5}$ Ⓒ $\frac{1}{3}$ Ⓓ $\frac{1}{5}$

.....

.....

.....

.....

41 ◄ إذا اشترك عبدالله في سباق 400 m مع ثلاثة رياضيين آخرين فإن احتمال أن ينهي عبدالله السباق في المركز الأول يساوي ..

Ⓐ 25% Ⓑ 50% Ⓒ 75% Ⓓ 100%

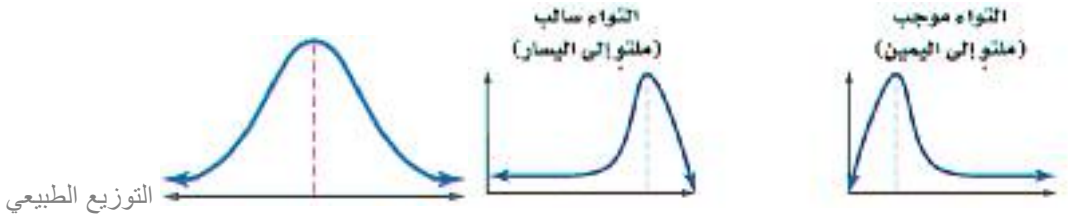
.....

.....

.....

.....

التاريخ : / / الموضوع : **التوزيع الطبيعي**



تصنيف بيانات التوزيع تحقق من فهمك

1) حدِّد ما إذا كانت البيانات في الجدول المجاور تُظهر التواءً موجبًا، أو التواءً سالبًا، أو موزَّعة توزيعًا طبيعيًّا.

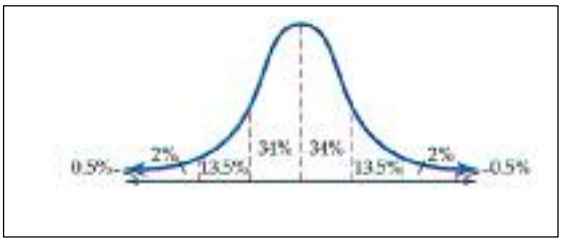
قياس الحذاء	38	39	40	41	42	43	44	45
التكرار	6	8	9	7	4	2	3	1

.....

التوزيع الطبيعي

المتوسط لتوزيع طبيعي 34، وانحرافه المعياري 5.

2) أوجد احتمال أن تكون قيمة تم اختيارها عشوائيًّا في التوزيع الوارد في المثال 2 أقل من 49.

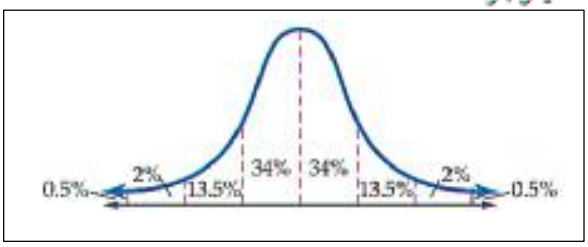


عينة موزّعة توزيعًا طبيعيًا تحقق من فهمك

درجات، إذا علمت أن كتل 100 موظف في شركة تتوزّع توزيعًا طبيعيًّا بمتوسط حسابي مقداره 70 كيلوجرامًا، وانحراف معياري 10 كيلوجرامات، فاعتمد على ذلك في الإجابة عن السؤالين الآتيين :

3A) ما العدد التقريبي للموظفين الذين تقع كتلهم بين 60, 80 كيلوجرامًا؟

3B) ما احتمال أن يتمّ اختيار موظف بصورة عشوائية، وتكون كتلته أقل من 90 كيلوجرامًا؟



إذا توزّعت البيانات في الأسئلة 7 - 4 توزيعًا طبيعيًّا، وكان المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لكل منها كما هو موضّح، فأوجد الاحتمال المطلوب.

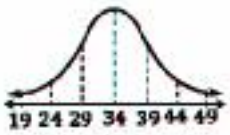
4) $\mu = 74, \sigma = 6, P(X > 86)$

5) $\mu = 13, \sigma = 0.4, P(X < 12.6)$

6) $\mu = 63, \sigma = 4, P(59 < X < 71)$

تمارين ١٤ و ٢٣و٢٤

43 التوزيع الطبيعي المجاور وسطه 34 والحرافه المعياري 5 ، كم احتمال أن تكون قيمة تم اختيارها عشوائيًا أقل من 49 ؟



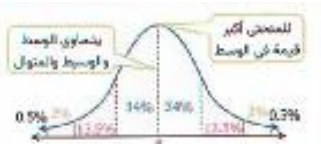
Ⓐ 68% Ⓑ 87%
Ⓒ 99.5% Ⓓ 100%

44 مجموعة بيانات تتوزع توزيعًا طبيعيًا، فإذا كان وسطها الحسابي 12 والحرافها المعياري 2 فما قيمة $P(10 < x < 16)$ ؟

Ⓐ 81.5% Ⓑ 68%
Ⓒ 47.5% Ⓓ 40%

45 يتوزع عُمر 10000 بطارية توزيعًا طبيعيًا بوسط 300 يوم، والحراف معياري 40 يومًا، كم بطارية يقع عمرها بين 340 و 260 يومًا؟

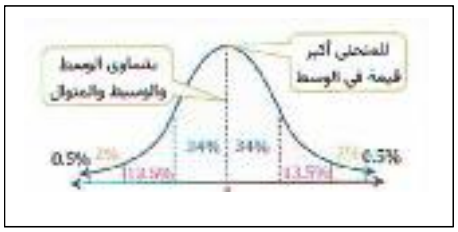
Ⓐ 6800 Ⓑ 5000
Ⓒ 3400 Ⓓ 2500



46 ◄ مجموعة بيانات تتوزع توزيعًا طبيعيًا، فإذا كان وسطها الحسابي 25 والحرافها المعياري 2 ، كم احتمال أن تكون قيمة تم اختيارها عشوائيًا أقل من 27 ؟

Ⓐ 84% Ⓑ 97%

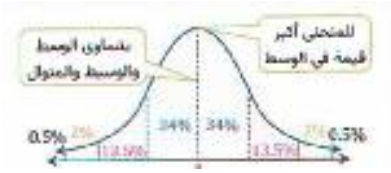
Ⓒ 16% Ⓓ 25%



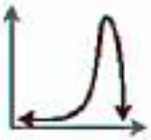
47 ◄ مجموعة بيانات تتوزع توزيعًا طبيعيًا، فإذا كان وسطها الحسابي 2 والحرافها المعياري 1 ؛ فما نسبة أن يكون x أكبر من 3 ؟

Ⓐ 84% Ⓑ 97%

Ⓒ 16% Ⓓ 25%



48 ◄ ما الوصف الأفضل للتمثيل البياني المجاور؟



Ⓐ ذو التواء موجب Ⓑ ذو التواء سالب

Ⓒ يمثل توزيعًا طبيعيًا Ⓓ يمثل توزيعًا متماثلاً

في توزيع طبيعي لمجموعة طلاب، إذا كانت درجات 99% منهم تتراوح بين 13 و 49 ؛ فما قيمة الانحراف المعياري؟

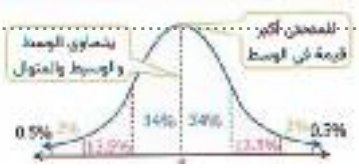
Ⓐ 6 Ⓑ 10 Ⓒ 18 Ⓓ 31

النسبة غير المطلوبة 1% وتمثل 0.5% من يمين المنحنى و 0.5% من اليسار

إذا أجريت إحصائية لطالبات مدرسة، وكان 95% من الطالبات تتراوح أوزانهن بين 52 kg و 68 kg ؛ فما قيمة الوسط الحسابي؟

Ⓐ 59 Ⓑ 60 Ⓒ 61 Ⓓ 65

النسبة غير المطلوبة 5% وتمثل 2.5% من يمين المنحنى و 2.5% من اليسار



التاريخ : / / الموضوع : **التوزيعات ذات الحدين**

تجربة ذات الحدين تمييز التجربة ذات الحدين تحقق من فهمك

حدّد ما إذا كانت كل تجربة مما يأتي ذات حدين، أو يمكن جعلها كذلك. وإذا كانت تجربة ذات حدين، فاكتب قيم n, p, q ، وقيم المتغير العشوائي الممكنة، وإذا لم تكن كذلك فبيّن السبب.

1A) أظهرت نتيجة لمسح إحصائي في إحدى المدارس ذات الزي الموحّد أن 61% يحبون الزي الجديد، وأن 24% لا يحبونه. إذا تم اختيار 20 طالبًا بشكل عشوائي، وسؤالهم عمَّا إذا كانوا يحبون الزي الجديد. وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الطلاب الذين يحبون الزي الجديد.

1B) أجاب خالد عن اختبار مكوّن من 20 فقرة من نوع «الاختيار من متعدد» لكل فقرة منها أربع إجابات، واحدة فقط صحيحة (دون معرفة علمية بموضوع الاختبار). وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الإجابات الصحيحة

صيغة احتمال ذات الحدين

احتمال النجاح في X مرة من n من المحاولات المستقلة في تجربة ذات الحدين هو:

$$P(X) = {}_nC_X\, p^X q^{n-X} = \frac{n!}{(n-X)!X!}\, p^X q^{n-X}$$

حيث p احتمال النجاح ، و q احتمال الفشل في المحاولة الواحدة.

التوزيع ذو الحدين تحقق من فهمك

2) كليات، يدرس في إحدى الكليات 48% من الطلاب لغة عالمية خلال سنة التخرج. إذا اختير 7 خريجين عشوائيًا، وتم سؤالهم عمَّا إذا درسوا لغة عالمية في سنتهم الأخيرة. وكان المتغير العشوائي X يدل على عدد الطلاب الذين أجابوا بنعم، فكوِّن التوزيع ذا الحدين، ومثله بالأعمدة، ثم أوجد احتمال أن يجيب أقل من 4 طلاب بنعم.

$$2)\ n = 7 \quad , \quad p = 0.48 \quad , \quad q = 1 - 0.48 = 0.52$$

x	$P(x)$
0	0.010
1	0.066
2	0.184
3	0.283
4	0.261
5	0.145
6	0.045
7	0.006

$p(0) = 7\ C\ 0\ (0.48)^0\ (0.52)^7 = 0.010$

$p(1) = 7\ C\ 1\ (0.48)^1\ (0.52)^6 = 0.066$

$p(2) = 7\ C\ 2\ (0.48)^2\ (0.52)^5 = 0.184$

$p(3) = 7\ C\ 3\ (0.48)^3\ (0.52)^4 = 0.283$

$p(4) = 7\ C\ 4\ (0.48)^4\ (0.52)^3 = 0.261$

$p(5) = 7\ C\ 5\ (0.48)^5\ (0.52)^2 = 0.145$

$p(6) =$. .....

$p(7) =$. .....

.....

المتوسط والتباين والانحراف المعياري للتوزيع ذي الحدين تحقق من فهمك

3) كليات، أوجد المتوسط والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X في تحقق من فهمك 2، وفسّر معنى المتوسط في سياق الموقف.

تقريب التوزيع ذي الحدين إلى التوزيع الطبيعي تحقق من فهمك

4) أشارت دراسة سابقة إلى أن 32% من أولياء الأمور المستطلعة آراؤهم يرون أنه يجب تقليل عدد أيام الإجازة الصيفية للطلاب في نهاية العام الدراسي. غير أن آية ترى أن النسبة أقل من ذلك، ولذلك قامت بإجراء دراسة مسحية شملت 250 من أولياء الأمور اختارتهم بطريقة عشوائية ممن استهدفتهم الدراسة السابقة. ما احتمال ألّا يرى أكثر من 65 من أولياء الأمور وجوبَ تقليلِ عدد أيام الإجازة الصيفية؟

.....

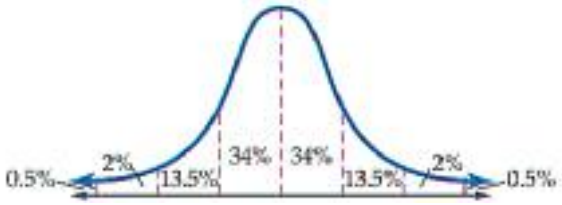
.....

.....

.....

.....

.....



حدّد ما إذا كانت كل تجربة مما يأتي ذات حدين، أو يمكن جعلها ذات حدين. وإن كانت كذلك، فاكتب قيم n, p, q، ثم اكتب كل قيم المتغير العشوائي الممكنة. وإذا لم تكن تجربة ذات حدين، فبيِّن السبب. (مثال 1)

1) تم ترقيم أوجه مكعب بالأرقام من 1 إلى 6، ثم أُلقي المكعب 10 مرات، والمتغير العشوائي X يدل على عدد مرات ظهور الرقم 5.

.....

.....

4) صندوق به 52 كرة، منها 13 كرة حمراء، و13 كرة زرقاء، و13 كرة بيضاء، و13 كرة صفراء. سحبت 10 كرات على التوالي دون إرجاع. والمتغير العشوائي X يدل على عدد الكرات البيضاء المسحوبة.

.....

.....

.....

لكل من التوزيعات ذات الحدين الآتية، يدلّ الرمز n على عدد المحاولات، ويدلّ الرمز p على احتمال نجاح كل محاولة. أوجد احتمال الحصول على X من النجاحات.

18) $n = 8, p = 0.3, X \geq 2$

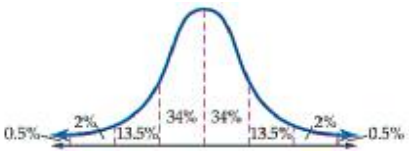
.....

.....

.....

.....

24) **تحدٍّ:** في تقريب التوزيع ذي الحدين إلى التوزيع الطبيعي، إذا علمت أن احتمال وجود $66 - 60$ نجاحًا يساوي 34%، وكان $\bar{x} = 60$، واحتمال النجاح 36%، فكم كان عدد المحاولات؟



.....

.....

.....

.....

33) اختبار: تقدّمت سمر لاختبار من عشرة أسئلة من نوع الاختيار من متعدد لكل منها أربعة بدائل، لكنها أجابت عن الأسئلة من خلال التخمين (دون معرفة علمية بالموضوع)، ما احتمال أن تحصل على:

a) 7 أسئلة صحيحة الإجابة؟

.....

.....

b) 9 أسئلة صحيحة الإجابة؟

.....

.....

c) 0 سؤال صحيح الإجابة؟

.....

.....

d) 3 أسئلة صحيحة الإجابة؟

.....

.....

34) إذا كان احتمال نجاح عملية جراحية 90% ، فما احتمال نجاح عملية واحدة على الأقل إذا أجريت العملية ثلاث مرات؟

.....

.....

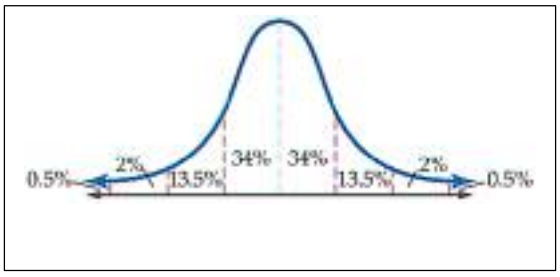
.....

.....

A) 0.001 **B)** 0.1

C) 0.9 **D)** 0.999

.....



14) برامج دينية ، بناءً على دراسة مسحية سابقة، إذا علمت أن 70% من الأشخاص تحت سن العشرين يتابعون برنامجًا دينيًّا على الأقل في التلفاز. إذا استطلع خليل رأي 200 شخص تحت سن 20 سنة، فما احتمال أن 146 شخصًا منهم على الأقل يتابعون برنامجًا دينيًّا على الأقل؟

.....

.....

.....

.....

.....

$\frac{49}{9}$ ◄ كسب لاعب 50% من مبارياته التي لعبها خلال مسيرته الرياضية، ما احتمال أن يكسب 3 مباريات من بين 5 مباريات قادمة؟

.....

.....

.....

.....

A) $\frac{5}{16}$ **B)** $\frac{1}{2}$

C) $\frac{3}{5}$ **D)** 1

50/9 ◄ في تجربة ذات حدين: إذا كان احتمال النجاح 35% ، وعدد المحاولات 4 فإن الوسط يساوي ..

Ⓐ 1.3 Ⓑ 1.4

Ⓒ 1.5 Ⓓ 1.6

51/9 ◄ في تجربة ذات حدين كان احتمال النجاح 40% ، وكان المتوسط 20 ، فكم كان عدد المحاولات؟

Ⓐ 30 Ⓑ 40

Ⓒ 50 Ⓓ 70

52/9 ◄ أخبر الراصد الجوي أن احتمال سقوط المطر في كل يوم من الأيام العشر القادمة 40% ، إن التباين يساوي ..

Ⓐ $\sqrt{2.4}$ Ⓑ 2.4

Ⓒ 4 Ⓓ 6

53/9 ◄ توزيع ذات حدين مقدار تباينه 25 ، إن انحرافه المعياري يساوي ..

Ⓐ 625 Ⓑ 25

Ⓒ 12.5 Ⓓ 5

54/9 ◄ تقدمت العنود لاختبار من 80 سؤالاً من نوع الاختيار من متعدد لكل منها أربعة خيارات، لكنها أجابت على الأسئلة بالتخمين (دون معرفة علمية)، إن الانحراف المعياري يساوي ..

Ⓐ $\sqrt{12}$ Ⓑ $\sqrt{15}$

Ⓒ 12 Ⓓ 15

55/9 ◄ في حادثة ذات حدين كان عدد المحاولات 20 ، وكان الوسط 12 ، كم ستكون قيمة الانحراف المعياري؟

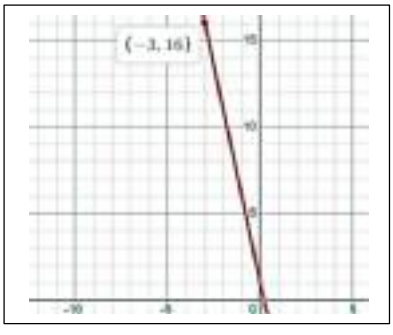
Ⓐ $\sqrt{4.8}$ Ⓑ 1.2

Ⓒ $\sqrt{1.2}$ Ⓓ 4.8

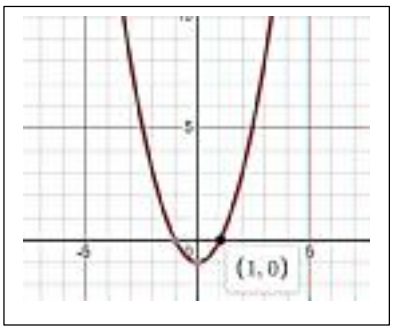
التاريخ : / / الموضوع : **تقدير النهايات بيانيًا**

تقدير النهاية (النهاية تساوي قيمة الدالة) تحقق من فهمك

(1A $\lim_{x \to -3} (1 - 5x)$



(1B $\lim_{x \to 1} (x^2 - 1)$

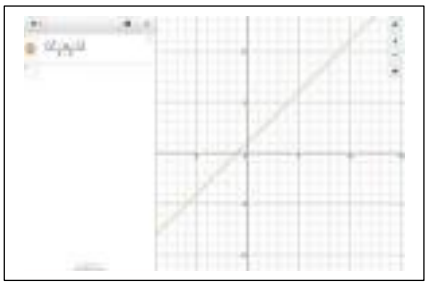


تقدير النهاية (النهاية لا تساوي قيمة الدالة) تحقق من فهمك

قدّر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني.

(2A $\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{x^2-4}$

(2B $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-4x-5}{x-5}$



.....

.....

.....

.....

تقدير النهاية من جهة واحدة ومن جهتين

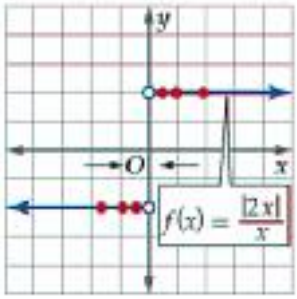
قدّر إن أمكن كلًّا من النهايات الآتية باستعمال التمثيل البياني للدالة:

(a $\lim_{x\to 0^-}\frac{|2x|}{x}$, $\lim_{x\to 0^+}\frac{|2x|}{x}$, $\lim_{x\to 0}\frac{|2x|}{x}$

يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x)=\frac{|2x|}{x}$ أن:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|2x|}{x}=-2 \quad , \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{|2x|}{x}=2$$

وبما أن النهايتين من اليسار واليمين غير متساويتين، فإن $\lim_{x\to 0}\frac{|2x|}{x}$ غير موجودة.



وصف النهاية

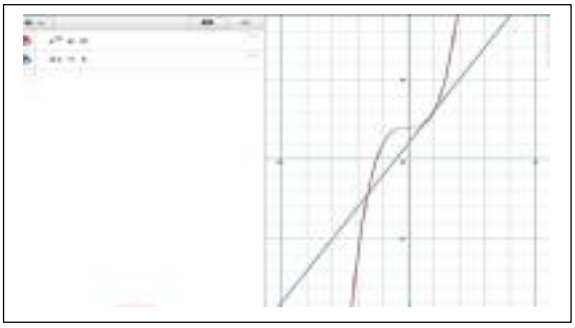
إذا كانت النهايتان من اليسار ومن اليمين غير متساويتين، فإننا نقول: إن النهاية غير موجودة.

تحقق من فهمك

قدّر إن أمكن كلًّا من النهايات الآتية إذا كانت موجودة:

(3A $\lim_{x\to 1^-}f(x)$, $\lim_{x\to 1^+}f(x)$, $\lim_{x\to 1}f(x)$ ، حيث:

$$f(x)=\begin{cases} x^3+2 & , \quad x<1 \\ 2x+1 & , \quad x\geq 1 \end{cases}$$

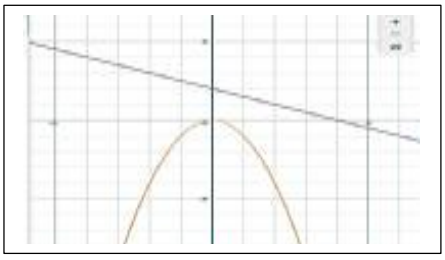


.....

.....

(3B $\lim_{x\to -2^-}g(x)$, $\lim_{x\to -2^+}g(x)$, $\lim_{x\to -2}g(x)$ ، حيث:

$$g(x)=\begin{cases} -0.5x+2 & , \quad x<-2 \\ -x^2 & , \quad x\geq -2 \end{cases}$$



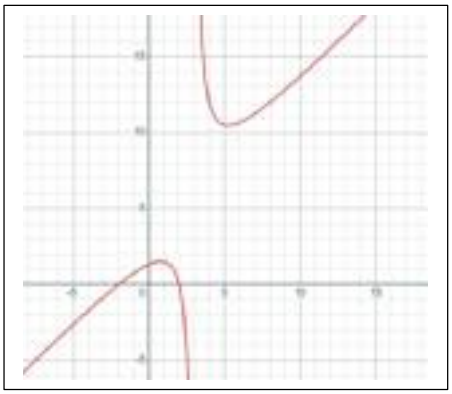
.....

.....

.....

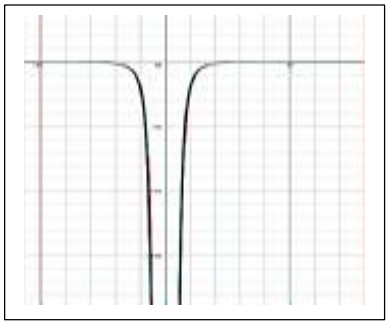
النهايات والسلوك غير المحدود تحقق من فهمك

قدِّر –إن أمكن– كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:



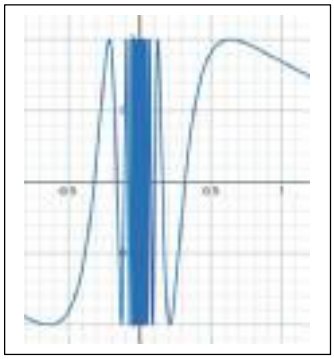
(4A $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-4}{x-3}$

(4B $\lim_{x\to 0} -\frac{2}{x^4}$

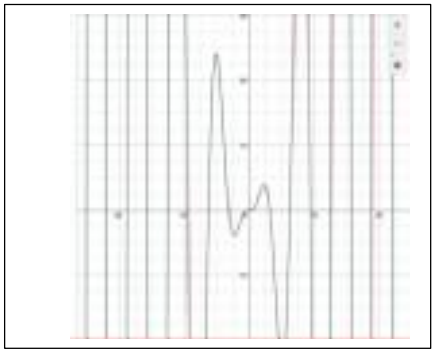


النهايات والسلوك التذبذبي تحقق من فهمك

قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:



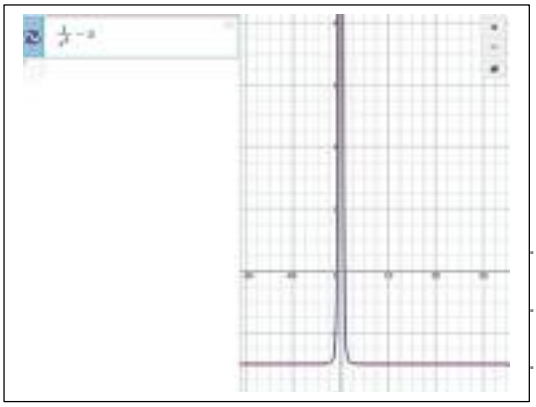
(5A $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$



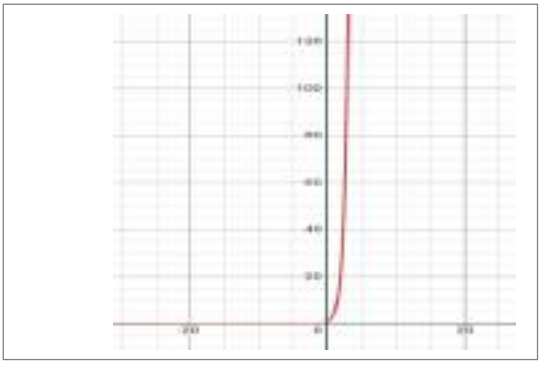
(5B $\lim_{x\to 0} (x^2 \sin x)$

تقدير النهاية عند المالانهاية تحقق من فهمك

قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:



(6A $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x^4}-3\right)$

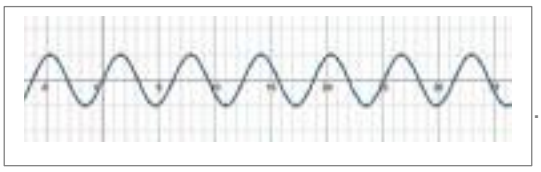


(6B $\lim_{x \to -\infty} 5^x$

.....

.....

.....

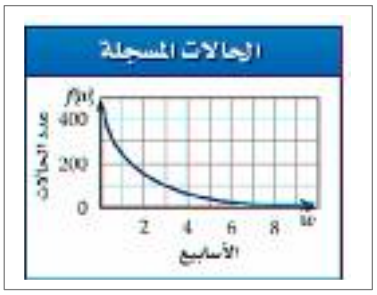


(6C $\lim_{x \to \infty} \sin x$

.....

.....

.....



تقدير النهاية عند المالانهاية

35) دواء: تم توزيع لقاح للحدّ من عدوى مرض ما. ويُبيّن التمثيل البياني أدناه عدد الحالات المصابة بالمرض بعد w أسبوع من توزيع اللقاح. **(مثال 7)**

a) استعمل التمثيل البياني لتقدير $\lim_{w \to 1} f(w)$ ، $\lim_{w \to 3} f(w)$.

.....

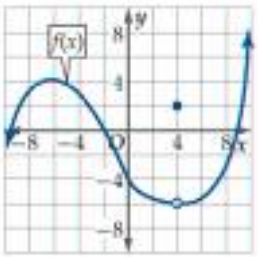
.....

b) استعمل التمثيل البياني لتقدير $\lim_{w \to \infty} f(w)$ إذا كانت موجودة، وفسّر النتيجة.

.....

.....

استعمل التمثيل البياني لتقدير كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:



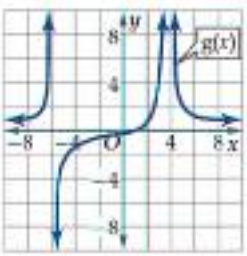
(21 $\lim_{x \to -4} f(x)$

.....

(23 $\lim_{x \to 4} f(x)$

.....

.....



(22 $\lim_{x \to 4} g(x)$

.....

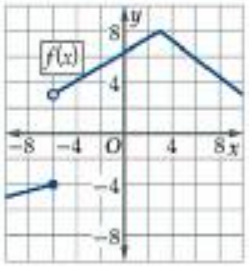
.....

(24 $\lim_{x \to -6} g(x)$

.....

.....

48) **اكتشف الخطأ:** قال علي: إن نهاية الدالة الممثَّلة بيانيًّا في الشكل أدناه عندما تقترب x من -6 هي -4 . في حين قال محمد: إنها 3.
هل أي منهما إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.

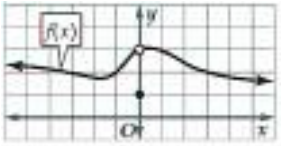


.....

.....

.....

60) باستعمال التمثيل البياني للدالة $y = f(x)$ أدناه، ما قيمة $\lim_{x \to 0} f(x)$ (إن وجدت)؟



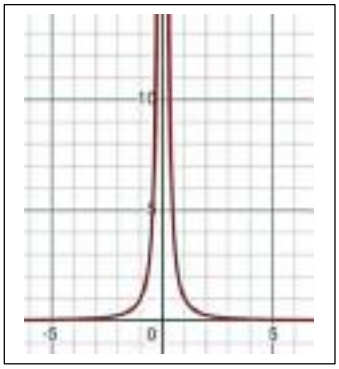
A 0 **C** 3
B 1 **D** النهاية غير موجودة

61) إذا كانت $g(x) = \frac{1}{x^2}$ وكانت العبارات:

I نقطة عدم اتصال لا نهائي.
II نقطة عدم اتصال قفزي.
III نقطة عدم اتصال قابل للإزالة.

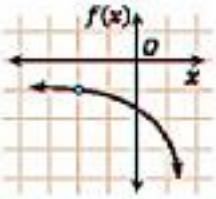
فأيٌّ مما يأتي يصف التمثيل البياني لمنحنى الدالة $g(x)$؟

A I فقط **C** II فقط
B I , III فقط **D** I و II فقط



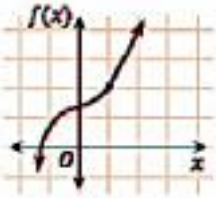
.....

01/16 ◄ في الشكل المجاور: تُقدَّر $\lim_{x \to -2} f(x)$ بـ ..



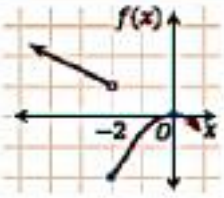
Ⓐ -2 Ⓑ -1
Ⓒ 0 Ⓓ غير موجودة

02/16 ◄ في الشكل المجاور: تُقدَّر $\lim_{x \to 1} f(x)$ بـ ..



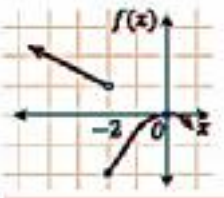
Ⓐ -1 Ⓑ 0
Ⓒ 1 Ⓓ 2

03/16 ◄ في الشكل المجاور: تُقدَّر $\lim_{x \to -2^+} f(x)$ بـ ..



Ⓐ -2 Ⓑ 0
Ⓒ 1 Ⓓ غير موجودة

04/16 ◄ في الشكل المجاور: تُقدَّر $\lim_{x \to -2} f(x)$ بـ ..



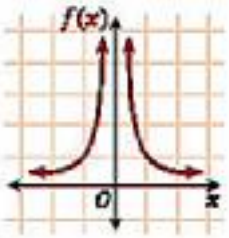
Ⓐ -2 Ⓑ 0
Ⓒ 1 Ⓓ غير موجودة

05/16 ◄ إذا كانت $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 5$ و $\lim_{x\to 3} f(x) = -5$ و $f(3) = 7$ فإن قيمة $\lim_{x\to 3} f(x)$ تساوي ..

Ⓐ 3 Ⓑ 5

Ⓒ 7 Ⓓ غير موجودة

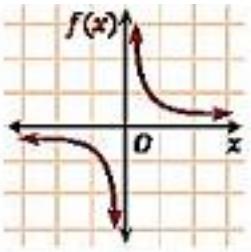
09/16 ◄ في الشكل المجاور: نُقدِّر $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ بـ ..



Ⓐ $-\infty$ Ⓑ 0

Ⓒ $+\infty$ Ⓓ غير موجودة

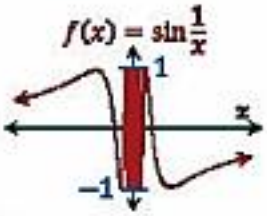
10/16 ◄ في الشكل المجاور: نُقدِّر $\lim_{x\to 0} f(x)$ بـ ..



Ⓐ $-\infty$ Ⓑ 0

Ⓒ $+\infty$ Ⓓ غير موجودة

11/16 ◄ في الشكل المجاور: نُقدِّر $\lim_{x\to 0} f(x)$ بـ ..



Ⓐ $-\infty$ Ⓑ 0

Ⓒ $+\infty$ Ⓓ غير موجودة

.....

حساب النهايات جبريا

التاريخ : / / الموضوع :

استعمال خصائص النهايات تحقق من فهمك

استعمل خصائص النهايات لحساب كل نهاية مما يأتي:

1A $\lim_{x\to 2} (-x^3 + 4)$

.....

1B $\lim_{x\to 2} \frac{x-3}{2x^2 - x - 15}$

.....

1C $\lim_{x\to -1} \sqrt{x+3}$

.....

استعمال التعويض المباشر لحساب النهايات تحقق من فهمك

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب:

2A $\lim_{x\to 4} (x^3 - 3x^2 - 5x + 7)$

.....

(2B $\lim_{x\to -5} \frac{x+1}{x^2+3}$

(2D $\lim_{x\to -8} \sqrt{x+6}$

(2C $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$

إذا قمت بحساب نهاية دالة نسبية، ووصلت إلى الصيغة غير المحددة $\frac{0}{0}$ ، فبسّط العبارة جبريًا من خلال تحليل كل من البسط والمقام واختصار العوامل المشتركة.

$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

استعمال التحليل لحساب النهايات تحقق من فهمك

احسب كل نهاية مما يأتي: (3A $\lim_{x\to -2} \frac{x^3-3x^2-4x+12}{x+2}$

(3B $\lim_{x\to 6} \frac{x^2-7x+6}{3x^2-11x-42}$

استعمال إنطاق البسط أو المقام لحساب النهايات تحقق من فهمك

(4A $\lim_{x\to 25} \frac{x-25}{\sqrt{x}-5}$

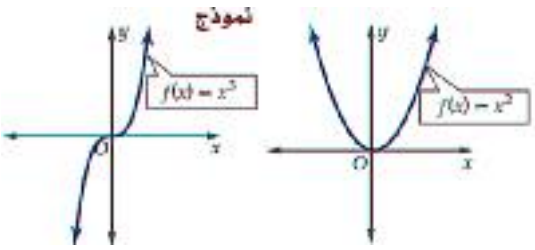
(4B $\lim_{x\to 0} \frac{2-\sqrt{x+4}}{x}$

حساب النهايات عند المالانهاية ، نهايات دوال القوى عند المالانهاية

لأي عدد صحيح موجب n ،

- $\lim_{x\to\infty} x^n = \infty$
- $\lim_{x\to-\infty} x^n = \infty$ ، إذا كان n عددًا زوجيًا.
- $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ ، إذا كان n عددًا فرديًا.

نموذج



نهايات دوال كثيرات الحدود عند المالانهاية

إن سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود هو ذاته سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة القوة الناتجة عن الحد الرئيس في كثيرة الحدود ، وهو الحد ذو القوة الكبرى، ويمكننا وصف ذلك أيضًا باستعمال النهايات.

تحقق من فهمك

احسب كل نهاية مما يأتي:

5A) $\lim_{x\to\infty}(-x^3 - 4x^2 + 9)$ .....

5B) $\lim_{x\to-\infty}(4x^6 + 3x^5 - x)$ .....

5C) $\lim_{x\to-\infty}(2x - 6x^2 + 4x^5)$ .....

نهايات دالة المقلوب عند المالانهاية

لأي عدد صحيح موجب n ، فإن $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^n} = 0$.

نهاية الدوال النسبية عند المالانهاية

درجة البسط > درجة المقام	درجة البسط = درجة المقام	درجة البسط < درجة المقام
النهاية = $\pm\infty$	النهاية = المعامل الرئيس في البسط / المعامل الرئيس في المقام	النهاية = صفر

نهايات الدوال النسبية عند المالانهاية

احسب كل نهاية مما يأتي إن أمكن:

a) $\lim_{x\to\infty}\frac{4x+5}{8x-3}$ .....

b) $\lim_{x\to-\infty}\frac{6x^2 - x}{3x^3 + 1}$ .....

$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^4}{9x^3 + 2x}$ .....

تحقق من فهمك

(6A $\lim_{x\to-\infty} \frac{5}{x-10}$

(6B $\lim_{x\to\infty} \frac{-3x^2+7}{5x+1}$

(6C $\lim_{x\to\infty} \frac{7x^3-3x^2+1}{2x^3+4x}$

نهايات المتتابعات تحقق من فهمك

احسب نهاية كل متتابعة مما يأتي إن وجدت:

(7A $a_n = \frac{4}{n^2+1}$

(7B $b_n = \frac{2n^3}{3n+8}$

(7C $c_n = \frac{9}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$

13/16 ◄ النهاية $\lim_{x\to4}(4x-1)$ تساوي ..

Ⓐ 4 Ⓑ 8

Ⓒ 12 Ⓓ 15

14/16 ◄ $\lim_{x\to5}(3x^3-5x^2-3x-10)$ تساوي ..

Ⓐ 125 Ⓑ 225

Ⓒ 275 Ⓓ 235

15/16 ◄ ما قيمة $\lim_{x\to0}(4^x-\cos x+2x-1)$ ؟

Ⓐ −2 Ⓑ −1

Ⓒ 1 Ⓓ 2

16/16 ◄ ما قيمة $\lim_{x\to2}\frac{x^2-7x+6}{x-1}$ ؟

Ⓐ 4 Ⓑ 0

Ⓒ −2 Ⓓ −4

17/16 ◄ ما قيمة $\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{7}}{x-3}$ ؟

Ⓐ $3+\sqrt{7}$ Ⓑ $3-\sqrt{7}$

Ⓒ $\sqrt{7}-3$ Ⓓ 3

18/16 ◄ $\lim_{x\to 5}\left(\frac{x+1}{x^2+3}\right)$ تساوي ..

Ⓐ 5 Ⓑ $\frac{5}{28}$

Ⓒ $\frac{3}{14}$ Ⓓ 28

19/16 ◄ $\lim_{x\to -1}\frac{4-\sqrt{x^2+x+16}}{x^3-1}$ تساوي ..

Ⓐ $\frac{1}{8}$ Ⓑ $\frac{1}{12}$

Ⓒ ∞ Ⓓ 0

20/16 ◄ ما قيمة $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$ ؟

Ⓐ 0 Ⓑ 6

Ⓒ 4 Ⓓ 8

21/16 ◄ $\lim_{x\to 0}\frac{(x+3)^2-9}{x}$ تساوي ..

Ⓐ 0 Ⓑ 3

Ⓒ 6 Ⓓ غير موجودة

22/16 ◄ $\lim_{x\to 25}\frac{x-25}{\sqrt{x}-5}$ تساوي ..

Ⓐ -5 Ⓑ 0

Ⓒ 10 Ⓓ 25

23/16 ◄ $\lim_{x\to -\infty} x^5$ تساوي ..

Ⓐ $-\infty$ Ⓑ 0

Ⓒ 2 Ⓓ $+\infty$

24/16 ◄ $\lim_{x\to \infty}(x^2+x+2)$ تساوي ..

Ⓐ $-\infty$ Ⓑ 0

Ⓒ 1 Ⓓ ∞

25/16 ◄ $\lim_{x\to -\infty}(x^3-2x^2+5x-1)$ تساوي ..

Ⓐ $-\infty$ Ⓑ 0

Ⓒ 2 Ⓓ $+\infty$

26/16 ◄ $\lim_{x\to-\infty}(4x^6+3x^5-x)$ تساوي ..

Ⓐ $-\infty$ Ⓑ 0

Ⓒ 2 Ⓓ $+\infty$

27/16 ◄ النهاية $\lim_{x\to\infty}\frac{3x-1}{2x+5}$ تساوي ..

Ⓐ $-\frac{1}{5}$ Ⓑ 0

Ⓒ $\frac{3}{2}$ Ⓓ ∞

28/16 ◄ $\lim_{x\to\infty}\frac{10x^4-2}{5x^4+3x^3-2x}$ تساوي ..

Ⓐ 10 Ⓑ 5

Ⓒ 2 Ⓓ 0

إذا كان $\lim_{x\to\infty}\frac{Ax}{3+|x|}=2$ فما قيمة A ؟

Ⓐ 6 Ⓑ 2

Ⓒ -2 Ⓓ -6

30/16 ◄ ما قيمة $\lim_{x\to\infty}\frac{10x^3-12x}{5+3x^2-2x^3}$ ؟

Ⓐ -5 Ⓑ -2

Ⓒ 2 Ⓓ 5

31/16 ◄ $\lim_{n\to-\infty}\frac{4}{n^3+2}$ تساوي ..

Ⓐ -4 Ⓑ 0

Ⓒ 2 Ⓓ 4

$\lim_{x\to-\infty}\frac{7x^3+1}{x^2+4x}$ تساوي ..

Ⓐ 7 Ⓑ $\frac{7}{4}$

Ⓒ $-\infty$ Ⓓ $+\infty$

1) $\lim_{x\to 5}(4x-10)$

.....

1) $\lim_{x\to -3}(5x-10)$

.....

59) ما قيمة $\lim_{h\to 0}\frac{2h^3-h^2+5h}{h}$ ؟

A 3 B 4 C 5 D غير موجودة

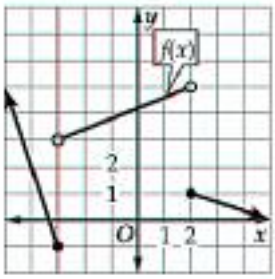
.....

60) ما القيمة التي تقترب منها $g(x)=\frac{x+\pi}{\cos(x+\pi)}$ عندما تقترب x من 0 ؟

A $-\pi$ B $-\frac{3}{4}$ C $-\frac{1}{2}\pi$ D 0

.....

61) باستعمال التمثيل البياني للدالة f أدناه، ما قيمة $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ ؟



A 0 B 1 C 5 D غير موجودة

.....

.....

.....

.....

.....

التاريخ : / / الموضوع : **المماس والسرعة المتجهة**

هذا الدرس له طريقة معينة في التعامل وسأعرضه بطريقة مختلفة فسوف أحل تمارين بسيطة منه ثم بعد أخذ درس المشتقات نعود له و نحل معظم تمارينه باستخدام المشتقات.

مُعدل التغيّر اللحظي

مُعدل التغيّر اللحظي للدالة f عند النقطة $(x, f(x))$ هو ميل المماس m عند النقطة $(x, f(x))$

ويُعطى بالصيغة $m=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ، بشرط أن تكون النهاية موجودة.

ميل المماس للمنحنى عند نقطة عليه **تحقق من فهمك**

أوجد ميل مماس كل منحنى مما يأتي عند النقطة المعطاة: **1A)** $y = x^2, (3, 9)$

.....

.....

.....

.....

.....

ميل المنحنى عند أي نقطة عليه

أوجد معادلة ميل منحنى كل دالة مما يأتي عند أي نقطة عليه: $y = x^2$

.....

.....

.....

.....

.....

إذا عوضنا ب $x = 3$ في معادلة ميل المنحنى للدالة $y = x^2$ نجد أنه يساوي القيمة في تحقق ١

أي أنه الأفضل إيجاد ميل المماس عند أي نقطة عليه ثم التعويض بعد ذلك بنقطة محددة معطاه.

.....

.....

السرعة المتوسطة المتجهة

إذا أُعطي موقع جسم متحرك بوصفه دالة في الزمن $f(t)$، فإن السرعة المتوسطة المتجهة للجسم v_{avg} في الفترة الزمنية من a إلى b تُعطى بالصيغة

$$v_{avg} = \frac{\text{التغيّر في المسافة}}{\text{التغيّر في الزمن}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

تحقق من فهمك

3) بالون: تمثّل $h(t) = 5 + 65t - 16t^2$ الارتفاع بالأقدام بعد t ثانية لبالون يصعد رأسيًا، ما السرعة المتوسطة المتجهة للبالون بين $t = 1\text{s}$ ، $t = 2\text{s}$؟

.....

.....

.....

.....

.....

.....

السرعة المتجهة اللحظية

إذا أُعطي موقع جسم متحرك بوصفه دالة في الزمن $f(t)$ ، فإن السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ لذلك الجسم عند الزمن t تعطى بالصيغة

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

بشرط أن تكون هذه النهاية موجودة.

مثال 4 ومثال 5 سوف نحله بطريقة إيجاد السرعة اللحظية عند أي زمن ثم نعوض بالعدد المحدد بعد درس المشتقات يتم حل مثل هذه التمارين بسهولة .

تحقق من فهمك

4) سقطت علبة مادة التنظيف من يد عامل في أثناء قيامه بتنظيف نافذة بناية على ارتفاع 1400 ft عن سطح الأرض، وتمثل الدالة $h(t) = 1400 - 16t^2$ ارتفاع العلبة بالأقدام بعد t ثانية من سقوطها. أوجد السرعة المتجهة اللحظية للعلبة $v(t)$ بعد 7 s .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

السرعة المتجهة اللحظية عند أي لحظة زمنية تحقق من فهمك

5) تمثِّل الدالة $s(t) = 90t - 16t^2$ ارتفاع صاروخ بعد t ثانية من إطلاقه رأسيًّا من مستوى سطح البحر ، حيث الارتفاع بالأقدام. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للصاروخ عند أي زمن .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(تمارين هذ الدرس سوف نحلها بعد درس المشتقات)

التاريخ : / / الموضوع : **المشتقات**

قواعد أساسية للاشتقاق، استعملت النهايات في الدرس 3-4 لتحديد ميل مماس منحنى الدالة $f(x)$ عند أي نقطة عليه ، وتُسمى هذه النهاية **مشتقة الدالة** ويرمز لها بالرمز $f'(x)$، وتُعطى بالصيغة:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

بشرط وجود هذه النهاية، وتُسمَّى عملية إيجاد المشتقة **الاشتقاق**، وتُسمَّى النتيجة **معادلة تفاضلية**.

يُرمز لمشتقة $y = f(x)$ أيضًا بالرموز $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{df}{dx}$ ، y' ، وإذا سبق الدالة **المؤثر التفاضلي** $\frac{d}{dx}$ ، فإن ذلك يعني إيجاد مشتقة الدالة.

قواعد الاشتقاق :

قاعدة مشتقة القوة إذا كان $f(x) = x^n$ ، حيث n عدد حقيقي، فإن: $f'(x) = nx^{n-1}$.

تحقق من فهمك

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

2A $j(x) = x^4$

.....

2B $k(x) = \sqrt{x^3}$

.....

.....

2C $m(x) = \frac{1}{x^5}$

.....

.....

قواعد أخرى للاشتقاق

مشتقة الثابت، مشتقة الدالة الثابتة تساوي صفرًا؛ أي أنه إذا كانت $f(x) = c$، حيث c عدد ثابت، فإن $f'(x) = 0$.

مشتقة مضاعفات القوة، إذا كانت $f(x) = cx^n$ ، حيث c ثابت، و n عدد حقيقي، فإن: $f'(x) = cnx^{n-1}$.

مشتقة المجموع أو الفرق، إذا كانت: $f(x) = g(x) \pm h(x)$ ، فإن: $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$.

المشتقات

إذا كانت $f(x) = x$، فإن $f'(x) = 1$، وإذا كانت $f(x)$ $= cx$، فإن $f'(x) = c$.

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

3A $f(x) = 2x^5 - x^3 - 102$

.....

3B $g(x) = 3x^4(x + 2)$ = ...

.....

3C $h(x) = \frac{4x^4 - 3x^2 + 5x}{x}$ = ...

.....

مشتقة الجذر التربيعي = مشتقة ما داخل الجذر / ٢× الجذر

$f(x) = \sqrt{x}$ المشتقة هي = $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

تنبيه!

للتسهيل يمكنك إيجاد كلٍّ من ميل المماس لمنحنى الدالة، والسرعة المتجهة اللحظية، ومشتقة الدالة، باستخدام القواعد ما لم يُطلب منك استخدام النهايات لإيجاد أيٍّ منها.

أوجد مشتقة $f(x)$ ثم احسب قيمة المشتقة عند قيم x المعطاة:

1A $f(x) = 6x^2 + 7, x = 2, 5$

.....

.....

.....

(1B $f(x) = -5x^2 + 2x - 12, x = 1, 4$

.....

.....

.....

السرعة المتجهة اللحظية

تحقق من فهمك

4) الدالة: $h(t) = 55t - 16t^2$ تمثّل الارتفاع بالأقدام بعد t ثانية لكرة قُذِفت رأسيًّا إلى أعلى. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية للكرة عند أي زمن .

.....

.....

النقطة التي تكون عندها مشتقة الدالة صفرًا أو غير موجودة تُسمَّى نقطةً حرجةً للدالة، والنقطة الحرجة قد تشير إلى وجود نقطة قيمة عظمى أو صغرى للدالة ، وتحدثُ عندما يكون ميل مماس منحنى الدالة صفرًا أو غير موجود.

نظرية القيمة القصوى

لتعيين نقاط القيم العظمى والصغرى للدالة على فترة مغلقة، لا بد من حساب قيم الدالة عند أطراف الفترة، وعند النقاط الحرجة في تلك الفترة.

القيمتان العظمى والصغرى لدالة تحقق من فهمك

5) رياضة القفز: الدالة: $h(t) = 20t^2 - 160t + 330$ تمثّل ارتفاع سعد بالأقدام في أثناء مشاركته في قفزة البنجي (القفز من أماكن مرتفعة، بحيث تكون القدمان موثقتين بحبل مطاطيٍّ)، حيث t الزمن بالثواني في الفترة $[0, 6]$. أوجد أقصى وأدنى ارتفاع يبلغه سعد في هذه الفترة الزمنية.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

قاعدة مشتقة الضرب

إذا كانت مشتقة كلٍّ من الدالتين f و g موجودة عند x ، فإن: $\frac{d}{dx}[f(x)\,g(x)] = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$.

أوجد مشتقة كل دالةٍ مما يأتي:

(6A $h(x) = (x^5 + 13x^2)(7x^3 - 5x^2 + 18)$

.....

.....

.....

(6B $h(x) = (x^2 + x^3 + x)(8x^2 + 3)$

.....

.....

.....

قاعدة مشتقة القسمة

إذا كانت مشتقة كلٌ من الدالتين f, g موجودة عند x ، وكان $g(x) \neq 0$ ، فإن:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}$$

أوجد مشتقة كل دالةٍ مما يأتي:

(7A $j(x) = \dfrac{7x - 10}{12x + 5}$

.....

.....

.....

(7B $k(x) = \dfrac{6x}{2x^2 + 4}$

.....

.....

.....

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي : (المثالان 2 , 3)

(6 $y(f) = -11f$ **(7** $z(n) = 2n^2 + 7n$

.....

استعمل الاشتقاق لإيجاد النقاط الحرجة، ثم أوجد نقاط القيم العظمى والصغرى لكل دالة مما يأتي على الفترة المعطاة.

(15 $f(x) = 2x^2 + 8x, [-5, 0]$

.....

.....

.....

.....

.....

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

(22 $f(x) = (4x + 3)(x^2 + 9)$

.....

.....

.....

40) المشتقات العليا، لتكن $f'(x)$ مشتقة $f(x)$، إذا كانت مشتقة $f'(x)$ موجودة، فإنها تسمى المشتقة الثانية للدالة f، ويُرمز لها بالرمز $f''(x)$ ، أو الرمز $f^{(2)}(x)$ ، وكذلك إذا كانت مشتقة $f''(x)$ موجودة، فإنها تسمى المشتقة الثالثة للدالة f، ويرمز لها بالرمز $f'''(x)$ أو $f^{(3)}(x)$، وتسمى المشتقات على هذا النحو المشتقات العليا للدالة f. أوجد كلًّا مما يأتي:

a) المشتقة الثانية للدالة: $f(x) = 4x^5 - 2x^3 + 6$

.....

.....

.....

.....

b) المشتقة الثالثة للدالة: $g(x) = -2x^7 + 4x^4 - 7x^3 + 10x$

.....

.....

.....

46) اكتشف الخطأ، قام كلٌّ من أحمد وعبدالله بإيجاد $[f'(x)]^2$ للدالة $f(x) = 6x^2 + 4x$ ، حيث كانت إجابة عبد الله: $144x^2 + 96x + 16$ ، في حين كانت إجابة أحمد: $144x^3 + 144x^2 + 32x$ ، فأيهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.

.....

.....

60) ما مشتقة: $h(x) = (-7x^2 + 4)(2-x)$ ؟

A $h'(x) = -14x$

B $h'(x) = 14x$

C $h'(x) = -21x^2 - 28x + 4$

D $h'(x) = 21x^2 - 28x - 4$

.....

61) ما ميل مماس منحنى $y = 2x^2$ عند النقطة $(1, 2)$؟

.....

.....

.....

A 1

B 2

C 4

D 8

62) ما مشتقة: $f(x) = 5\sqrt[3]{x^8}$ ؟

.....

.....

.....

F $f'(x) = \frac{40}{3}x^{\frac{5}{3}}$

G $f'(x) = \frac{40}{3}x^{\frac{8}{3}}$

H $f'(x) = 225\,x^{\frac{5}{3}}$

J $f'(x) = 225\,x^{\frac{8}{3}}$

.....

أوجد ميل مماس كل منحنى مما يأتي عند النقطة المعطاة:

(1A $y = x^2, (3, 9)$ **(1B** $y = x^2 + 4, (-2, 8)$

.....

.....

أوجد معادلة ميل منحنى كل دالة مما يأتي عند أي نقطة عليه:

(2A $y = x^2 - 4x + 2$ **(2B** $y = x^3$

.....

تحقق من فهمك

4) سقطت علبة مادة التنظيف من يد عامل في أثناء قيامه بتنظيف نافذة بناية على ارتفاع 1400 ft عن سطح الأرض، وتمثل الدالة $h(t) = 1400 - 16t^2$ ارتفاع العلبة بالأقدام بعد t ثانية من سقوطها. أوجد السرعة المتجهة اللحظية للعلبة $v(t)$ بعد 7 s .

.....

.....

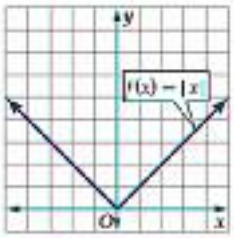
تحقق من فهمك

5) تمثّل الدالة $s(t) = 90t - 16t^2$ ارتفاع صاروخ بعد t ثانية من إطلاقه رأسيًّا من مستوى سطح البحر ، حيث الارتفاع بالأقدام. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للصاروخ عند أي زمن .

.....

.....

33) اكتشف الخطأ: سُئل علي وجميل أن يصفا معادلة ميل مماس منحنى الدالة الممثّلة بيانيًّا في الشكل المجاور عند أي نقطة على منحناها. فقال علي: إن معادلة الميل ستكون متصلة؛ لأن الدالة الأصلية متصلة، في حين قال جميل: إن معادلة الميل لن تكون متصلة. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ فسّر إجابتك.



.....

.....

.....

.....

.....

43) ما معادلة ميل منحنى $y = 2x^2$ عند أي نقطة عليه؟

A $m = 4x$ **B** $m = 2x$

C $m = x$ **D** $m = -4x$

.....

.....

44) سقطت كرة بشكل رأسي، فكانت المسافة التي تقطعها بالأقدام بعد t ثانية تعطى بالدالة $d(t) = 16t^2$. إذا كانت $\lim_{h \to 0} \frac{d(2+h) - d(2)}{h}$ تمثّل السرعة المتجهة للكرة بعد 2 s ، فكم تساوي هذه السرعة ؟

A 46 ft/s **B** 58 ft/s

C 64 ft/s **D** 72 ft/s

.....

45) ما ميل مماس منحنى $y = x^3 + 7$ عند النقطة $(3, 34)$؟

A -9 **B** 9

C 27 **D** 34

.....

.....

التاريخ : / / الموضوع : **المساحة تحت المنحنى والتكامل**

المساحة تحت منحنى باستعمال مستطيلات (مثال ١ ص ٣٨٠) (مثال ٣٨٢)

(تحل تمارين هذا الدرس بعد درس النظرية الأساسية لحساب التفاضل و التكامل)

التاريخ : / / الموضوع : **النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل**

الدوال الأصلية والتكامل غير المحدد **إيجاد الدوال الأصلية**

قواعد الدالة الأصلية

قاعدة القوة إذا كان $f(x) = x^n$، حيث n عدد نسبي لا يساوي -1، فإن: $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.

قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت إذا كان $f(x) = kx^n$، حيث n عدد نسبي لا يساوي -1، k عددًا ثابتًا، فإن: $F(x) = \frac{kx^{n+1}}{n+1} + C$.

قاعدة المجموع والفرق إذا كان لـ $f(x)$، $g(x)$ دالتان أصليتان هما $F(x)$، $G(x)$ على الترتيب، فإن: $F(x) \pm G(x)$ دالة أصلية لـ $f(x) \pm g(x)$.

أوجد دالَّتين أصليتين مختلفتين لكل دالة مما يأتي:

(1A $2x$ .....

(1B $-3x^{-4}$ .....

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

(2A $f(x) = 6x^4$ .....

(2B $f(x) = \frac{10}{x^3}$ = ...

.....

(2C $f(x) = 8x^7 + 6x + 2$ .....

.....

التكامل غير المحدد

يُعطى التكامل غير المحدد للدالة f بالصيغة $\int f(x)\,dx = F(x) + C$، حيث $F(x)$ دالة أصلية لـ $f(x)$، و C ثابت.

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

إذا كانت $F(x)$ دالةً أصلية للدالة المتصلة $f(x)$، فإن

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

ويمكن التعبير عن الطرف الأيمن من هذه العبارة بالرمز $F(x)\Big|_a^b$.

تنبيه!

التكاملات صحيح أنه يمكن تجاهل الثابت C عند حساب التكامل المحدد، إلا أنه يجب أخذه بعين الاعتبار عند حساب التكامل غير المحدد؛ لأنه جزء من الدالة الأصلية.

التكامل غير المحدد تحقق من فهمك

السرعة | تكامل | المسافة

التسارع | تكامل | السرعة

3) سقوط حُر: عند قيام فنّي بإصلاح نافذة برج على ارتفاع 120 ft سقطت محفظتُه نحو الأرض، وتمثّل $v(t) = -32t$ سرعة المحفظة المتجهة اللحظية بالأقدام بعد t ثانية من سقوطها.

A) أوجد دالة موقع المحفظة $s(t)$ بعد t ثانية من سقوطها.

B) أوجد الزمن الذي تستغرقُهُ المحفظة حتى تصل إلى سطح الأرض.

.....

.....

.....

.....

.....

المساحة تحت منحنى

احسب كل تكامل محدد مما يأتي:

(4A $\int_2^5 3x^2\,dx$

.....

.....

.....

(4B $\int_1^2 (16x^3 - 6x^2)\,dx$

.....

.....

.....

التكاملات المحددة وغير المحددة تحقق من فهمك

احسب كل تكامل مما يأتي:

(5A $\int (6x^2 + 8x - 3)\,dx$

.....

.....

.....

(17 $\int_{-1}^{2} (-x^2 + 10)\,dx$

.....

.....

.....

التكاملات المحددة تحقق من فهمك

أوجد الشغل اللازم لشد نابض مسافة ما والمعطى بالتكامل في كل مما يأتي:

6A $\int_0^{0.7} 476x\,dx$

6B $\int_0^{1.4} 512x\,dx$

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالّة مما يأتي:

1 $f(x) = x^5$

2 $f(z) = \sqrt[3]{z}$

احسب كل تكامل مما يأتي:

8 $\int (6m + 12m^3)\,dm$

9 $\int_1^4 2x^3\,dx$

16 $\int_{-3}^{1} 3\,dx$

19 $\int_{-1}^{1} (x^4 - 2x^3 - 4x + 8)\,dx$

22 $\int_x^2 (3t^2 + 8t)\,dt$

45 إذا كان $\int_0^2 k\,x\,dx = 6$ ، فما قيمة k ؟

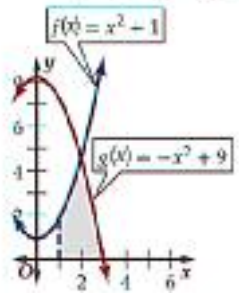
1 **A**

2 **B**

3 **C**

4 **D**

29) مساحات: احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x)$ ، $g(x)$ والمحور x ، في الفترة $1 \le x \le 3$.



درس المساحة تحت المنحنى والتكامل

3A $\int_0^1 3x^2\,dx$

3B $\int_0^3 x\,dx$

4A $\int_1^3 x^2\,dx$

4B $\int_2^4 x^3\,dx$

5) طلاء: لدى عبد الله كمية من الطلاء تكفي لطلاء $30\ ft^2$ ، هل تكفي هذه الكمية لطلاء جزأين من جدار مساحة كل منهما بالقدم المربعة تُعطَى بالتكامل $\int_0^5 (5 - 0.2x^2)dx$ ؟ برّر إجابتك.

تمرين ٣١ص ٣٨٨ـ ٤٥ـ٤٦ ٤٧ ص ٣٨٨

◄ إذا كانت $f(x) = \sqrt{7}$ فإن $f'(x)$ تساوي ..

Ⓐ $\sqrt{7}$ Ⓑ $\frac{1}{2}\sqrt{7}$ Ⓒ 0 Ⓓ $\frac{1}{2\sqrt{7}}$

مشتقة الدالة $f(x) = -2$ تساوي ..

Ⓐ -2 Ⓑ 0 Ⓒ 2 Ⓓ $2x$

مشتقة الدالة $f(x) = -2x - 2$ تساوي ..

Ⓐ -4 Ⓑ -2

Ⓒ 2 Ⓓ $-2x$

ما مشتقة الدالة $f(x) = 3x + 1$ ؟

Ⓐ 6 Ⓑ 3

Ⓒ 2 Ⓓ 0

ما معادلة ميل المنحنى $y = \sqrt{2x}$ عند أي نقطة عليه؟

Ⓐ $\sqrt{2x+1}$ Ⓑ $\frac{\sqrt{2x}}{x}$

Ⓒ $\sqrt{2x} - \sqrt{x}$ Ⓓ $\frac{1}{\sqrt{2x}}$

ما معادلة ميل المنحنى $y = 2\sqrt[4]{x^5}$ عند أي نقطة عليه؟

Ⓐ $8\sqrt[4]{x}$ Ⓑ $8\sqrt[4]{x^9}$

Ⓒ $\frac{5}{2}\sqrt[4]{x}$ Ⓓ $\frac{9}{2}\sqrt[4]{x^9}$

ميل المماس للمنحنى $y = x^2$ عند النقطة $(1, 1)$ يساوي ..

Ⓐ 2 Ⓑ 4

Ⓒ 6 Ⓓ 8

ما مشتقة الدالة $f(x) = 3x^2 - 5x + 12$ ؟

Ⓐ 1 Ⓑ $6x - 5$

Ⓒ $6x^2 - 5$ Ⓓ $6x^2 - 5x$

ما معادلة ميل المنحنى $y = x^5 + 3x - 2$ عند أي نقطة عليه؟

Ⓐ $5x^4 + 3$ Ⓑ $4x^4 + 3x$

Ⓒ $x^4 + 1$ Ⓓ $x^4 + 3$

ما المشتقة الثانية للدالة $f(x) = 2x^5 - x^3 + 6$ ؟

Ⓐ $10x^4 - 3x^2$ Ⓑ $40x^4 - 6x$

Ⓒ $40x^3 - 6$ Ⓓ $40x^3 - 6x$

ما المشتقة السادسة للدالة التالية؟

$$f(x) = \frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 7x - 12$$

Ⓐ -1 Ⓑ 0

Ⓒ 1 Ⓓ 3

إذا كانت رتبة المشتقة المطلوبة أكبر من درجة كثيرة الحدود فإن المشتقة تساوي صفر

إذا كانت $f(x) = (x^2 - 4)(2x - 5)$ فإن $f'(x)$ تساوي ..

Ⓐ $4x^2 - 10x$ Ⓑ $x^2 - 8$

Ⓒ $6x^2 - 10x - 8$ Ⓓ $2x^2 - 10x - 4$

إذا كانت $f(x) = \frac{5\sqrt{x^3}}{2-x}$ فإن $f'(4)$ تساوي ..

Ⓐ $\frac{31}{8}$ Ⓑ $\frac{15}{6}$

Ⓒ $\frac{5}{2}$ Ⓓ $\frac{16}{4}$

إذا كانت $f(x) = \frac{1}{2\sqrt[4]{x^{-6}}}$ فإن $f'(x)$ تساوي ..

Ⓐ $\frac{1}{x}$ Ⓑ $\frac{1}{\sqrt{x}}$

Ⓒ $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ Ⓓ x

للدالة $f(x) = 8x - x^2 + 30$ نقطة حرجة عندما x تساوي ..

Ⓐ -4 Ⓑ $-\frac{1}{4}$

Ⓒ $\frac{1}{4}$ Ⓓ 4

إذا كانت $f(x) = 6x^2 - x^3$ فما القيمة العظمى للدالة $f(x)$ في الفترة $[0,3]$ ؟

Ⓐ 64 Ⓑ 32

Ⓒ 27 Ⓓ 21

إذا كانت $f(x) = 2x^2 - 4$ فما القيمة العظمى للدالة $f(x)$ في الفترة $[1,5]$ ؟

Ⓐ -2 Ⓑ 2

Ⓒ 5 Ⓓ 46

15/17 ◄ قذف حارس مرمى الكرة لأعلى، فإذا كانت المسافة الرأسية التي تقطعها الكرة بالمتر بعد t ثانية $s(t) = 20t - 2t^2 + 3$ ؛ فما أقصى مسافة يمكن أن ترتفعها الكرة قبل أن تسقط؟

Ⓐ 153 Ⓑ 53

Ⓒ 50 Ⓓ 5

$\int (4x+5)\,dx$ يساوي ..

Ⓐ $4x+5+C$ Ⓑ 4

Ⓒ $2x^2+5x+C$ Ⓓ $4x^2+5x+C$

$\int \left(8x^3+x-\frac{7}{x^2}\right)dx$ يساوي ..

Ⓐ $2x^4+\frac{x^2}{2}+\frac{7}{4x^3}+C$ Ⓑ $24x^2+x-\frac{7}{4x^3}+C$

Ⓒ $x^4+\frac{x^2}{2}+C$ Ⓓ $2x^4-\frac{7}{x^3}+C$

التكامل $\int_1^3 (2x-5)\,dx$ يساوي ..

Ⓐ -6 Ⓑ -2

Ⓒ 1 Ⓓ 5

إذا كان $\int_0^2 nx\,dx = 6$ فما قيمة n ؟

Ⓐ 3 Ⓑ 4

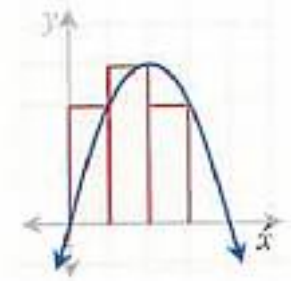
Ⓒ 5 Ⓓ 7

إذا كان $\int_{-1}^3 k|x+1|\,dx = 24$ فما قيمة k ؟

Ⓐ -7 Ⓑ -3

Ⓒ 3 Ⓓ 7

ما المساحة التقريبية المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ الممثلة بالشكل ومحور x ؟



Ⓐ 6 Ⓑ 10

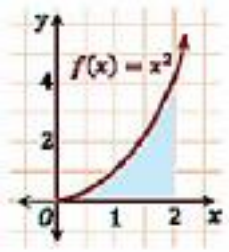
Ⓒ 12 Ⓓ 24

المساحة المستوية المحصورة بين المنحنى $y = 4-3x^2$ ومحور x في الفترة $[0,1]$ تساوي ..

Ⓐ 3 Ⓑ 5

Ⓒ 6 Ⓓ 10

27/17 ◄ في الشكل المجاور: المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x) = x^2$ ومحور x في الفترة $[0,2]$ تساوي ..... وحدة مساحة.



Ⓐ $\frac{1}{3}$ Ⓑ 2

Ⓒ $\frac{8}{3}$ Ⓓ 4

.....

الحمد لله رب العالمين

تم بحمد الله منهج رياضيات ٣ وأسأل الله العظيم رب العرش العظيم أن ينفع به

ويعين به طلبة وطالبات الصف الثالث

ويجعله حجة لنا لا علينا وأن يجعله علما نافعا خالصا لوجهه الكريم

والحمد لله حمدا كثيرا طيبا مباركا فيه كما يحب ربنا ويرضى.

أمل باجوده ١٤٤٧/٧/٢٦هـ