الوحدة 6

المتجهات

لقد تعلمنا، في ما سبق، كيفية تحديد موقع جسم باستعمال الإحداثيات العددية. لكن يمكننا استعمال هذه الإحداثيات، من خلال تغيير بسيط في تفسيرها، في تحديد التغير في مواقع الأجسام المتحركة، أي السرعة، وبالتالي نمذجة مسائل السرعة. هذا التفسير الجديد مبني على مفهوم "المتجهات" الذي يشكّل موضوع هذه الوحدة.

يمكننا تمثيل بعض الكميات، مثل الحرارة والارتفاع والمساحة والحجم، باستعمال عدد حقيقي واحد يُسمّى المقدار. لكن بعض الكميات الأخرى، مثل الشغل والسرعة والتسارع، تحتاج إلى عنصرين لتمثيلها هما المقدار والاتجاه. سنتعلم في هذه الوحدة عن المتجهات وكيفية حساب مقاديرها واتجاهاتها، وسندرس العمليات التي يمكنها مساعدتنا في حل مسائل من واقع الحياة. ولأننا ندرس العالم الواقعي من خلال الهندسة التحليلية، فإن لفهم المتجهات في الفضاء ثلاثي الأبعاد الفائدة الكبرى لحل المسائل الواقعية.

6.1 مدخل إلى المتجهات Introduction to Vectors

ما ستتعلّمه

- المتجهات الثنائية البعد
- متجهات الوحدة
- زاوية الاتجاه

... ولماذا

تبرز ضرورة المتجهات في الكثير من التطبيقات الواقعية، كدراسة تأثير الرياح على مسار الطائرة على سبيل المثال.

معايير الدرس

12A.7.1

12A.7.2

12A.7.5

المصطلحات

- قطعة مستقيمة متجهة directed line segment
- متجه الموضع position vector
- متجه ثنائي البعد two-dimensional vector
- الصورة التركيبية component form
- مركبتا المتجه components of vector
- التمثيل القياسي standard representation
- مقدار المتجه magnitude
- اتجاه المتجه direction
- المتجه الصفري zero vector
- زاوية الاتجاه direction angle

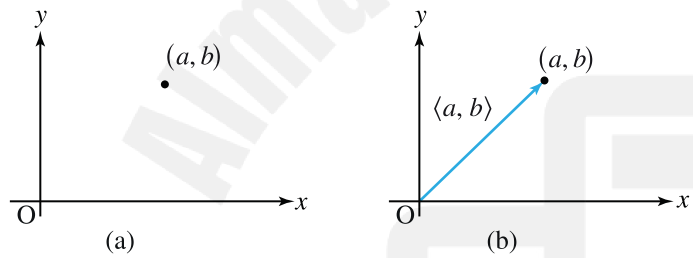
المتجهات الثنائية البعد

للحديث عن بعض الكميات، مثل الحرارة والمسافة والارتفاع والمساحة والحجم، يكفي استعمال الأعداد الحقيقية لتحديد مقاديرها أو قيمها من دون أي إضافة. غير أن بعض الكميات الأخرى، مثل السرعة والتسارع والقوة، لا يكفي استعمال الأعداد فقط لتوصيفها، لأنها تتحدد بمقاديرها واتجاهاتها. إذا كانت الاتجاهات الممكنة لحركة جسم ما على سطح مستوٍ غير منتهية، فإن عددين فقط سيكونان كافيين لتحديد سرعته، من حيث **المقدار والاتجاه**، في أي لحظة، وهو ما قد يبدو غريبًا. ببساطة، سوف نرى أن زوجًا مرتبًا (a, b) من الأعداد الحقيقية، لا يمثل نقطة فقط في المستوى الإحداثي، بل يمثل **قطعة مستقيمة متجهة** (أو سهم) رأسها عند النقطة (a, b) وذيلها عند نقطة الأصل (انظر الشكل 6.1.1).

يمثّل طول هذا **السهم** المقدار وتحدد النقطة (a, b) الاتجاه.

لأنه في هذا السياق، يمثّل الزوج المرتب (a, b) كائنًا رياضيًا ذا مقدار واتجاه.

لذا نسميه **متجه الموضع** للنقطة (a, b) ونرمز له بالرمز $\langle a, b\rangle$ لنميزه عن النقطة (a, b).



الشكل 6.1.1 النقطة تمثّل الزوج المرتب (a, b). السهم (قطعة مستقيمة متجهة) يمثّل المتجه $\langle a, b\rangle$.

تعريف المتجهات الثنائية البعد

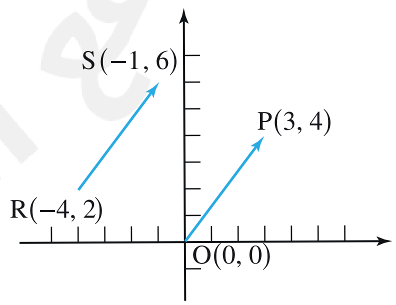
المتجه v الثنائي البعد هو زوج مرتب من الأعداد الحقيقية يُرمز له في **الصورة التركيبية** بالرمز $\langle a, b\rangle$ حيث تصبح كل من a و b **مركبتي** المتجه $\mathbf{v}$.

التمثيل القياسي للمتجه $\langle a, b\rangle$ هو السهم الذي يمتد من نقطة الأصل إلى النقطة (a, b).

مقدار المتجه $\mathbf{v}$ هو طول هذا السهم **واتجاهه** هو الاتجاه الذي يدل السهم عليه.

المتجه $\mathbf{0} = \langle 0, 0\rangle$ يُسمّى **المتجه الصفري** وهو متجه مقداره صفر ولا اتجاه له.

كثيرًا ما يكون من المفيد التعبير عن المتجهات باستعمال أسهم تبدأ بنقاط غير نقطة الأصل. الأمر المهم الذي يجب التنبه إليه هو أن سهمين لهما نفس الطول ونفس الاتجاه يعبّران عن نفس المتجه. في الشكل 6.1.2 على سبيل المثال، يعبّر السهم $\overrightarrow{RS}$ الذي **نقطة البداية** فيه هي R **ونقطة النهاية** هي S عن المتجه $\langle 3, 4\rangle$ كما يعبّر عن نفس هذا المتجه التمثيل القياسي $\overrightarrow{OP}$. نقول عن هذين السهمين الذين يعبّران عن متجه واحد إنهما **متكافئان**.



الشكل 6.1.2 يعبّر كلا السهمان $\overrightarrow{RS}$ و $\overrightarrow{OP}$ عن المتجه $\langle 3, 4\rangle$، كما هو الحال مع أي سهم بنفس الطول يشير إلى نفس الاتجاه. نقول عن هكذا أسهم إنها متكافئة.

الطريقة الأبسط لمعرفة الأسهم التي تعبر عن المتجهات هي استعمال القاعدة التالية.

الصورة التركيبية للقطعة المستقيمة المتجهة

السهم الذي نقطة بدايته (x_1, y_1) ونقطة نهايته (x_2, y_2) يعبّر عن المتجه:

$$\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$$

مثال 1 القطع المستقيمة المتجهة المتكافئة

أثبت أن السهم من $\mathbf{R(-4, 2)}$ إلى $\mathbf{S(-1, 6)}$ يكافئ السهم من $\mathbf{P(2, -1)}$ إلى $\mathbf{Q(5, 3)}$ (انظر الشكل 6.1.3).

الحل

باستعمال الصورة التركيبية للقطعة المستقيمة المتجهة، لاحظ أن $\overrightarrow{RS}$ يمثّل المتجه $\langle -1-(-4), 6-2 \rangle = \langle 3, 4 \rangle$.

كذلك فإن $\overrightarrow{PQ}$ يمثّل المتجه $\langle 5-2, 3-(-1) \rangle = \langle 3, 4 \rangle$.

على الرغم من وقوعهما في موضعين مختلفين في المستوى إلا أنهما يمثّلان المتجه نفسه، وبالتالي هما متكافئان.

حاول أن تحل التمرين 1

نشاط استكشافي توجيه المتجهات

حاول أن ترى كيف يمكنك توجيه الأسهم في المستوى الإحداثي من خلال المعلومات عن المتجهات وباستعمال الصورة التركيبية للقطعة المستقيمة المتجهة.

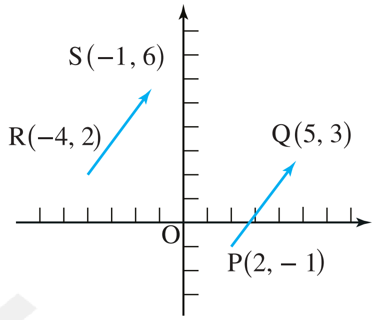
1. سهم نقطة بدايته $(2, 3)$ ونقطة نهايته $(7, 5)$. أوجد المتجه الذي يمثّله.
2. سهم نقطة بدايته $(3, 5)$ ويمثّل المتجه $\langle -3, 6 \rangle$. أوجد نقطة النهاية لهذا المتجه.
3. إذا كانت P هي النقطة $(4, -3)$، وكان $\overrightarrow{PQ}$ يمثّل $\langle 2, -4 \rangle$، أوجد إحداثيّي Q.
4. إذا كانت Q هي النقطة $(4, -3)$، وكان $\overrightarrow{PQ}$ يمثّل $\langle 2, -4 \rangle$، أوجد إحداثيّي P.

يساعد النشاط الاستكشافي السابق على فهم التمثيل الهندسي للمتجهات، الذي يساعد بدوره على فهم مسائل الجبر المتعلقة بالمتجهات بشكل عام، وأولها مفهوم مقدار المتجه.

مقدار المتجه $\mathbf{v}$، ويسمّى أيضًا **القيمة المطلقة للمتجه** $\mathbf{v}$ ويرمز له بالرمز $|\mathbf{v}|$ (أو $\|\mathbf{v}\|$ في بعض الكتب)، هو عدد حقيقي موجب، وليس متجهًا، يساوي طول السهم الذي يعبّر عن المتجه. يمكننا إذن استعمال صيغة المسافة في المستوى الإحداثي لإيجاد مقدار المتجه (انظر الشكل 6.1.4).

ملاحظة

على الرغم من أن السهم يمثّل متجهًا، إلا أنه لا يعتبر متجهًا بحد ذاته، وذلك لأن المتجه يمكن أن يعبّر عنه بعدد غير محدود من الأسهم المتكافئة. لكننا رغم ذلك سوف نكتب $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$ للقول أن السهم $\overrightarrow{PQ}$ يمثّل المتجه $\mathbf{u}$ من غير أن يكون هو المتجه نفسه.



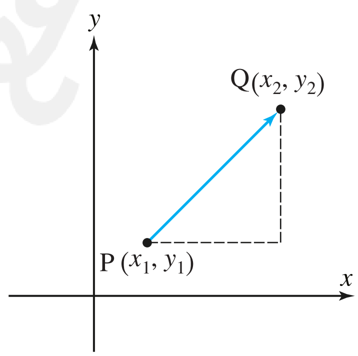
الشكل 6.1.3 يبدو أن للسهمين $\overrightarrow{RS}$ و $\overrightarrow{PQ}$ نفس المقدار والاتجاه. تثبت الصورة التركيبية للقطعة المستقيمة المتجهة أنهما يمثلان نفس المتجه.

الهدف

سيتعرف الطلاب على المتجهات الثنائية البعد وتعريف المصطلحات الأساسية المتعلقة بها مثل "متجه الوحدة" و "زاوية الاتجاه".

دليل الدرس

1. تعريف المتجه الثنائي البعد
2. شرح معنى متجه الوحدة
3. شرح معنى زاوية الاتجاه



الشكل 6.1.4 مقدار $\mathbf{v}$ هو طول السهم $\overrightarrow{PQ}$، ويمكن إيجاده باستعمال صيغة المسافة:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

مقدار المتجه (أو طول المتجه)

إذا كان المتجه $\mathbf{v}$ ممثلًا بسهم من (x_1, y_1) إلى (x_2, y_2)، فإن مقداره هو:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

بصورة أخرى إذا كان $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$، فإن $|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

مثال 2 إيجاد مقدار متجه

أوجد مقدار (طول) المتجه الذي يمثله $\overrightarrow{PQ}$ حيث $P(-3, 4)$ و $Q(-5, 2)$.

الحل

باستعمال القاعدة السابقة ومن خلال النظر إلى $\overrightarrow{PQ}$ يمكنك أن تكتب:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(-5-(-3))^2 + (2-4)^2} = 2\sqrt{2}$$

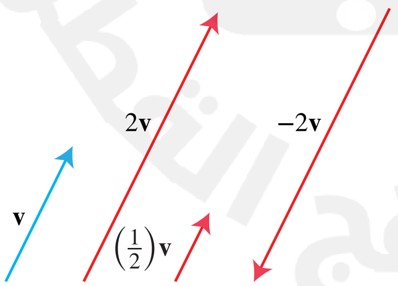
وباستعمال الصور التركيبية للمتجهات تجد أن $\mathbf{v} = \langle -2, -2 \rangle$. إذن:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$$

حاول أن تحل التمرين 5

متجهات الوحدة

يتطلب العمل في المتجهات أحيانًا التعامل مع المتجهات والأعداد في نفس الوقت.
نسمي الأعداد في هذا السياق "الكمية غير المتجهة" أو "الكمية القياسية".
إذا كان $\mathbf{v}$ هو المتجه $\langle a, b \rangle$ وكان k عددًا حقيقيًّا، يمكننا تعريف المتجه $k\mathbf{v}$ بأنه المتجه $\langle ka, kb \rangle$. ويمكننا ملاحظة أن اتجاه هذا المتجه هو نفس اتجاه $\mathbf{v}$ إذا كان $k > 0$، واتجاه معاكس للمتجه $\mathbf{v}$ إذا كان $k < 0$، أي انه يوازي المتجه $\mathbf{v}$، كما أن طوله هو $|k|\,|\mathbf{v}|$ (انظر الشكل 6.1.5).



الشكل 6.1.5 يبين الشكل تمثيل المتجه $\mathbf{v}$ وتمثيلات بعض المتجهات التي تشكل حاصل ضرب المتجه $\mathbf{v}$ بكمية قياسية، وجميعها متجهات متوازية.

تحفيز

اعرض على الطلاب صورًا للسهام التي كانت تستعمل في الماضي، وأخبرهم أن طريقة استعمالها كانت تعتمد على تحديد اتجاهها نحو الهدف المطلوب إصابته، وانتقاء طولها بما يتناسب مع المهمة المطلوبة.

نشاط المصطلحات

ناقش مع الطلاب ما تتسع له كلمة "متجه" من معنى ثنائي الاتجاه، والمقدار الموضوع في هذا الاتجاه، كالحركة أو القوة أو ما شابه ذلك.

أسئلة للتفكر

س: (مع المثال 1) إذا كانت النقاط D و C و B و A تقع في نفس المستوى الإحداثي، ما القاعدة العامة المتعلقة بإحداثيات هذه النقاط والتي يمكن استنتاجها بحيث يكون $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$؟

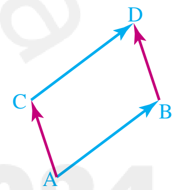
نموذج إجابة:

$\overrightarrow{AB} = \langle x_B - x_A, y_B - y_A \rangle$
$\overrightarrow{CD} = \langle x_D - x_C, y_D - y_C \rangle$
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

إذن

$x_B - x_A = x_D - x_C$
$y_B - y_A = y_D - y_C$

س: إذا كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$، هل يمكن استنتاج أن $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ جبريًّا؟



نموذج إجابة:

نعم. يكفي أن نلاحظ أن

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff \begin{cases} x_B - x_A = x_D - x_C \\ y_B - y_A = y_D - y_C \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x_B - x_D = x_A - x_C \\ y_B - y_D = y_A - y_C \end{cases} \iff \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$$

س: إذا كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$، كيف يمكن إثبات أن $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ هندسيًّا؟

نموذج إجابة:

إذا كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ فإن $AB = CD$ (إذا تساوى متجهان يتساوى مقداراهما) ويكون المستقيمان $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ متوازيين، وهذا يعني أن ABDC متوازي أضلاع، وبالتالي $AC = BD$ والمستقيمان $\overleftrightarrow{AC}$ و $\overleftrightarrow{BD}$ متوازيان، إذن $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

س: لماذا يكون المستقيمان $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ متوازيين عندما يكون $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$؟

نموذج إجابة:

بالعودة إلى نتيجة السؤال الأول يمكننا أن نستنتج:

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C}$$

وبما أن ميل المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ هو $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ إذا كان $x_B - x_A \neq 0$. وميل المستقيم $\overleftrightarrow{CD}$ هو $\frac{y_D - y_C}{x_D - x_C}$. إذن، يكون المستقيمان $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ متوازيين إذا كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. وإذا كان $x_B - x_A = 0$، فإن $x_D - x_C = 0$، ما يعني أن للنقطتين A و B نفس الإحداثي x، وبالتالي يكون المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ رأسيًا، وكذلك المستقيم $\overleftrightarrow{CD}$، إذن هما متوازيان.

للطلاب الذين يواجهون صعوبات

(مع المثال 1) يحتاج بعض الطلاب إلى مزيد من التدرب على كتابة المعادلات الناتجة عن تكافؤ المتجهات، وذلك لحل المسائل.

كل متجه $\mathbf{u}$ مقداره $|\mathbf{u}| = 1$ يُسمّى متجه الوحدة. لكل متجه يوجد متجه وحدة خاص به مقداره وحدة واحدة وله نفس الاتجاه. إذا كان $\mathbf{v}$ متجهًا غير صفري $\mathbf{v} \neq \langle 0, 0\rangle$، فإن المتجه

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$$

هو متجه وحدة في اتجاه المتجه $\mathbf{v}$، وقد يُسمّى أيضًا **متجه الاتجاه**، وهو طريقة للتعبير عن اتجاه $\mathbf{v}$، لأن أي متجه اتجاهه نفس اتجاه $\mathbf{v}$ أو معاكس لاتجاهه هو $k\hat{\mathbf{v}}$، حيث k عدد حقيقي لا يساوي الصفر.

مثال 3 إيجاد متجه وحدة

أوجد متجه الوحدة للمتجه $\mathbf{v} = \langle -3, 2\rangle$ وتحقق من أن مقداره يساوي 1

الحل

أوجد مقدار $\mathbf{v}$:

$$\begin{aligned}|\mathbf{v}| &= |\langle -3, 2\rangle| \\ &= \sqrt{(-3)^2 + (2)^2} \\ &= \sqrt{13}\end{aligned}$$

إذن

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v} &= \frac{1}{\sqrt{13}}\langle -3, 2\rangle \\ &= \left\langle \frac{-3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}} \right\rangle\end{aligned}$$

مقدار هذا المتجه هو

$$\begin{aligned}\left|\left\langle \frac{-3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}} \right\rangle\right| &= \sqrt{\left(\frac{-3}{\sqrt{13}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{9}{13} + \frac{4}{13}} = \sqrt{\frac{13}{13}} = 1\end{aligned}$$

إذن، مقدار المتجه $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ يساوي 1، وله نفس اتجاه $\mathbf{v}$ لأنه ناتج ضرب المتجه $\mathbf{v}$ بكمية قياسية موجبة.

حاول أن تحل التمرين 11

زاوية الاتجاه

من المعروف أن تحديد الاتجاه يتم بطرق متعددة، ولعل أبسط الطرق وأكثرها دقة لمعرفة اتجاه متجه هي في تعريف **زاوية الاتجاه** الخاصة به، وهي الزاوية θ التي ضلع الابتداء فيها هو الجزء الموجب من المحور x وضلع الانتهاء فيها هو السهم الذي يمثل المتجه $\mathbf{v}$ تمثيلًا قياسيًّا (انظر الشكل 6.1.7).

يمكننا، باستعمال حساب المثلثات، أن نتبين أن **المركبة الأفقية** للمتجه $\mathbf{v}$ هي $|\mathbf{v}|\cos\theta$ **والمركبة الرأسية** هي $|\mathbf{v}|\sin\theta$. تسمّى عملية إيجاد المركبات الأفقية والرأسية لمتجه تحليل المتجه إلى مركباته الأساسية.

ملاحظة

إن كتابة المقدار $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ هي مجرد رمز، لأن عملية قسمة متجه على عدد حقيقي لم يتم تعريفها، وهذا يساعدنا في الوصول إلى أن $\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$.

للطلاب الذين يواجهون صعوبات

س: (تابع) حدّد ما إذا كان المتجهان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متكافئين أم لا في كل من الحالتين التاليتين.

1. $A(3, 2), B(2, 1), C(1, 6), D(2, -3)$
2. $A(2, 2a), B(2, a), C(0, a), D(0, 0)$

نموذج إجابة:

1. $\overrightarrow{AB} = \langle -1, -1\rangle, \overrightarrow{CD} = \langle 1, -9\rangle, \overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$
2. $\overrightarrow{AB} = \langle 0, -a\rangle = \overrightarrow{CD}$

س: أوجد x_A و y_A إذا كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ في كل من الحالتين التاليتين.

1. $B(1, 2), C(-2, 1), D(-1, 1)$
2. $B(1, 1), C(-2, 2), D(-3, 3)$

نموذج إجابة:

1. $A(0, 2)$
2. $A(2, 0)$

سؤال للتفكر

س: (مع المثال 2) أوجد مقدار المتجه الذي يمثله $\overrightarrow{QP}$ في المثال 2

نموذج إجابة:

باستعمال قاعدة مقدار المتجه يمكننا بالنظر إلى $\overrightarrow{QP}$ أن نكتب

$$|\overrightarrow{QP}| = \sqrt{(-3-(-5))^2 + (4-2)^2} = 2\sqrt{2}$$

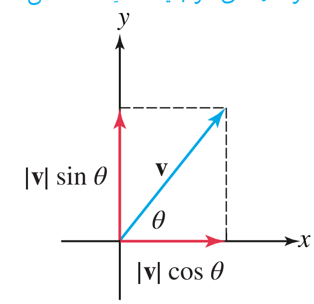
س: بالنظر إلى إجابة السؤال السابق، هل يمكننا القول بأن تساوي مقدار متجهين يعني أنهما متكافئان؟

نموذج إجابة:

لا، فالمتجهان $\overrightarrow{QP}$ و $\overrightarrow{PQ}$ لهما نفس المقدار ولكنهما ليسا متكافئين بل هما متعاكسان. إذن قد يكون لمتجهين نفس المقدار ولكن اتجاهين مختلفين، وبالتالي يكون المتجهان غير متكافئين.

سؤال للتفكر

س: (مع المثال 3) هل يمكن تحديد متجه الوحدة إذا عرفنا إحدى مركبتيه؟ أعطِ مثالًا على ذلك.



الشكل 6.1.7 مركبتا المتجه $\mathbf{v}$ الأفقية والرأسية.

تحليل متجه إلى مركباته الأساسية

إذا كانت θ هي زاوية الاتجاه للمتجه $\mathbf{v}$، فيمكن إيجاد مركبتي $\mathbf{v}$ الأساسيتين باستعمال الصيغة:

$$\mathbf{v} = \langle |\mathbf{v}| \cos \theta, |\mathbf{v}| \sin \theta \rangle$$

نلاحظ أن متجه الوحدة للمتجه $\mathbf{v}$ بحسب القاعدة السابقة هو

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \langle \cos \theta, \sin \theta \rangle$$

مثال 4 إيجاد مركّبتي المتجه

أوجد مركّبتي المتجه v الأساسيتين إذا كانت زاوية اتجاهه قياسها °115 ومقداره 6

الحل

(انظر الشكل 6.1.8) إذا كانت كل من a و b هما المركبتين الأفقية والرأسية للمتجه $\mathbf{v}$، فإن:

$$\mathbf{v} = \langle a, b \rangle = \langle 6 \cos 115°, 6 \sin 115° \rangle$$

إذن، $a = 6 \cos 115° \approx -2.54$ و $b = 6 \sin 115° \approx 5.44$.

حاول أن تحل التمرين 19

إن **سرعة** جسم متحرك تمثل متجهًا لأن للسرعة مقدار واتجاه. يبين المثال التالي تطبيق مفهوم المتجهات في موضوع السرعة.

مثال 5 كتابة السرعة بالصورة التركيبية للمتجه

تطير طائرة في مسار يشكّل زاوية قياسها °65 مع الشمال الجغرافي بسرعة 500 mph (انظر الشكل 6.1.9). أوجد الصورة التركيبية للمتجه الذي يمثّل سرعة الطائرة.

الحل

إذا كان $\mathbf{v}$ هو متجه سرعة الطائرة، فإن مسارًا بزاوية قياسها °65 مع الشمال الجغرافي يكافئ زاوية اتجاه للمتجه $\mathbf{v}$ قياسها °25

السرعة 500 هي مقدار $\mathbf{v}$، $|\mathbf{v}| = 500$. إذن،

$$\mathbf{v} = \langle |\mathbf{v}| \cos 25°, \ |\mathbf{v}| \sin 25° \rangle$$

$$= \langle 500 \cos 25°, \ 500 \sin 25° \rangle$$

$$\approx \langle 453.15, 211.31 \rangle$$

سؤال للتفكر

س: (مع المثال 5) هل يمكن أن نستنتج من هذا المثال أن بإمكاننا تحديد اتجاه المتجه من خلال تحديد قياس زاويته مع أي محور وليس مع المحور x بالضرورة؟

نموذج إجابة:

نعم، لأن تحديد قياس زاوية اتجاه المتجه مع أي محور في المستوى الإحداثي يمكّننا من تحديد قياس زاويته مع أي محور آخر بما في ذلك المحور x، ويمكّننا بالتالي من تحديد اتجاهه.

(تابع)

ملاحظة

فيما يلي، نقصد بمركبتي المتجه المركبتين الأساسيتين، أي المركبة الأفقية والمركبة الرأسية.

سؤال للتفكر

نموذج إجابة: (تابع)

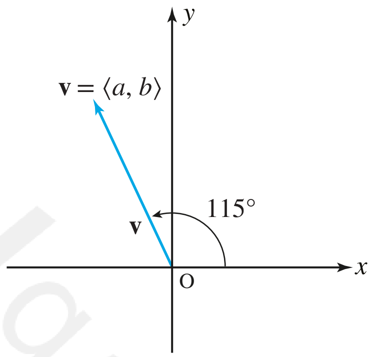
كلا. إذا كان $\hat{\mathbf{v}} = \langle a, b \rangle$ متجه وحدة، وكنا نعرف a، فإن $a^2 + b^2 = 1$، وبالتالي $b^2 = 1 - a^2$، و

$b = \pm\sqrt{1 - a^2}$

إذن، هناك احتمالان ممكنان للمركبة b.

على سبيل المثال، إذا كان $a = \frac{1}{2}$ فإن b يمكن أن تكون إما $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ أو $b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

بالفعل، $\left\langle \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle$ و $\left\langle \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle$ كلاهما متجه وحدة.



الشكل 6.1.8 زاوية اتجاه $\mathbf{v}$ قياسها 115°

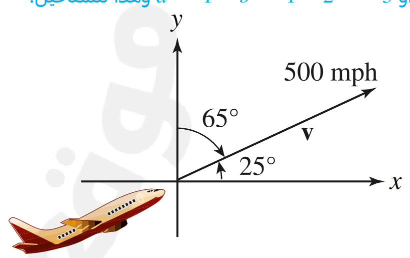
سؤال للتفكر

س: (مع المثال 3) هل يمكن أن تكون قيمة إحدى مركبتي متجه وحدة $\hat{\mathbf{v}} = \langle a, b \rangle$ هي 2؟

نموذج إجابة:

كلا، لأن $|\hat{\mathbf{v}}| = 1$ يعني أن $a^2 + b^2 = 1$، وهذا يعني أن $b^2 = 1 - a^2 = 1 - 2^2 = -3$

أو $a^2 = 1 - b^2 = 1 - 2^2 = -3$ وهذا مستحيل.



الشكل 6.1.9 الزاوية التي يشكلها مسار الطائرة هي الزاوية بين خط الطيران والخط الذي يمثّل الشمال، وتقاس في اتجاه حركة عقارب الساعة.

سؤال للتفكر

س: (مع المثال 4) ما قياس زاوية اتجاه المتجه إذا كانت مركبتاه سالبتين؟

نموذج إجابة:

عندما تكون المركبتان سالبتين، يكون التمثيل القياسي للمتجه في الربع الثالث، وبالتالي:

$180° \leq \theta \leq 270°$

تمثّل مركبتا متجه السرعة **v** السرعة الشمالية والسرعة الشرقية للطائرة. أي أنه عندما تسير الطائرة في مسار بزاوية مع اتجاه الشمال قياسها 65° وبسرعة 500 mph، فهذا يعني أنها تطير شرقًا بسرعة مقدارها 453.15 mph وتطير شمالاً بسرعة مقدارها 211.31 mph

حاول أن تحل التمرين 23

إذا كان لدينا مركبتي متجه ما، يمكننا إيجاد قياس زاوية اتجاهه. كما في المثال التالي.

مثال 6 إيجاد قياس زاوية الاتجاه

أوجد مقدار كل متجه أدناه وقياس زاوية اتجاهه.

A. $\mathbf{u} = \langle 3, 2\rangle$

B. $\mathbf{v} = \langle -2, -5\rangle$

الحل

A. $|\mathbf{u}| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$

إذا كانت α هي زاوية الاتجاه، فإن

$$\mathbf{u} = \langle 3, 2\rangle = \langle |\mathbf{u}| \cos \alpha, |\mathbf{u}| \sin \alpha\rangle$$

$$3 = |\mathbf{u}| \cos \alpha \quad \text{المركبة الأفقية للمتجه}$$

$$3 = \sqrt{13} \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

بما أن مركّبتَي المتجه موجبتان فإن $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ وبالتالي تكون:

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right) \approx 33.69°$$

إذن، قياس زاوية اتجاه المتجه **v** تساوي 33.69° تقريبًا.

B. $|\mathbf{v}| = \sqrt{(-2)^2+(-5)^2} = \sqrt{29}$

إذا كانت β هي زاوية الاتجاه، فإن

$$\mathbf{v} = \langle -2, -5\rangle = \langle |\mathbf{v}| \cos \beta, |\mathbf{v}| \sin \beta\rangle$$

$$-2 = |\mathbf{v}| \cos \beta \quad \text{المركبة الأفقية للمتجه}$$

$$-2 = \sqrt{29} \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{-2}{\sqrt{29}}$$

(تابع)

سؤال للتفكر

س: (مع المثال 6) إذا كنا نعرف مقدار متجه ومركبة واحدة من مركبتيه، هل نحتاج إلى معرفة المركبة الثانية لإيجاد زاوية اتجاهه؟

نموذج إجابة:

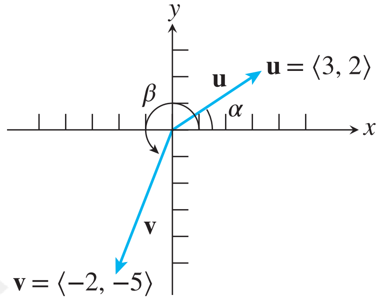
كلا. إذا كنا نعرف المركبة الأفقية a، على سبيل المثال نكتب

$$a = r\cos\theta$$

إذن

$$\cos\theta = \frac{a}{r}$$

$$\theta = \pm\alpha + 2k\pi$$



الشكل 6.1.10 التمثيل القياسي للمتجهين $\mathbf{u} = \langle 3, 2\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -2, -5\rangle$

ملاحظة

يمكن استعمال معكوس الظل في حساب زاوية الاتجاه للمتجه **v**

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$$

حيث v_2 هي المركبة الرأسية للمتجه و v_1 هي المركبة الأفقية للمتجه. ويمكن تحديد الربع الذي تقع فيه بناء على إشارتي مركبتي المتجه.

(تابع) لذلك نحن بحاجة لمعرفة إشارة المركبة الثانية فقط لتحديد بأي ربع من المستوى الإحداثي يوجد المتجه لنتمكن من تحديد الخيار المناسب لزاوية اتجاهه.

للطلاب سريعي الإنجاز

من المفيد أن يعرف الطلاب أن رؤوس الأسهم التي تمثل متجهات الوحدة قياسيًا تقع على دائرة الوحدة، وبذلك يتمكنون من استنتاج حلول بعض المسائل بطريقة بيانية وبطريقة جبرية.

س: أوجد متجهات الوحدة التي تكون فيها القيم المطلقة للمركبتين متساويتين بالطريقتين الجبرية والبيانية.

$$(\hat{\mathbf{v}} = \langle a, b\rangle;\ |a| = |b|)$$

نموذج إجابة:

بالطريقة الجبرية:

$$a^2 + b^2 = 1$$

$$2a^2 = 1$$

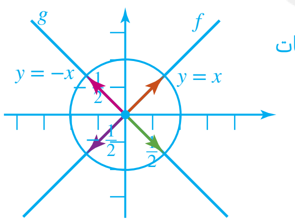
$$a^2 = \frac{1}{2}$$

$$a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

إذن المتجهات $\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle$ و $\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle$ و $\left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle$ و $\left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle$ هي متجهات الوحدة التي تحقق المطلوب.

بالطريقة البيانية:

تحدد هذه المتجهات نقاط تقاطع دائرة الوحدة والمنصفين الأول والثاني.



بما أن مركبتَي المتجه سالبتان فإن $180° < \beta < 270°$ وبالتالي تكون:

$$\beta' = \cos^{-1}\left(\left|\frac{-2}{\sqrt{29}}\right|\right) \approx 68.2$$

$$\beta = 180 + 68.2 = 248.2°$$

إذن، قياس زاوية اتجاه المتجه **v** تساوي $248.2°$ تقريبًا.

متابعة

دع الطلاب يتحدثوا عن الفرق بين تعريف المتجه $\overrightarrow{AB}$ وبين المقطع الخطي AB، وكيف نحتاج إلى تعريف زاوية الاتجاه لفهم وتحديد المتجهات.

ملاحظات على التمارين

التمارين 5-22، تدرب الطالب على إيجاد مركبتي متجه ومقداره.

التمارين 23 و 24 و 29، تدرب الطالب على إيجاد المتجهات لحل مسائل من واقع الحياة.

التمارين 30-33، تدرب الطالب على أنماط من الاختبارات.

التقييم المستمر **حاول أن تحل التمرين 25**

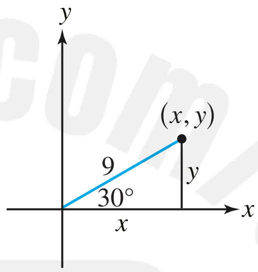
التقييم الذاتي:

التمارين 24 ,21 ,17 ,12 , 6 ,2

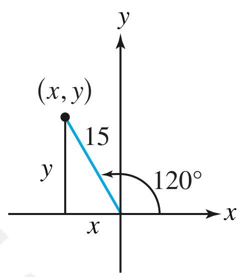
مراجعة سريعة 6.1

في التمارين 1-4، أوجد قيمة كل من x و y في كل حالة.

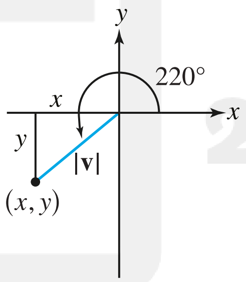
1.



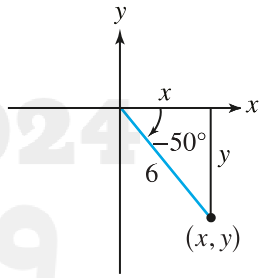
2.



3.



4.



في التمرينين 5 و 6، أوجد قيمة θ بالدرجات إذا كان $0° < \theta < 360°$

5. $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{29}}\right)$ $\theta \approx 33.9°$

6. $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{15}}\right)$ $\theta \approx 105°$

في التمارين 7-9، تقع النقطة P على ضلع الانتهاء للزاوية θ.
أوجد قيمة θ إذا كانت $0° < \theta < 360°$

7. $P(5, 9)$

8. $P(5, -7)$

9. $P(-2, -5)$

الدرس 6.1 التمارين

في التمارين 1-4، برهن أن $\overrightarrow{RS}$ و $\overrightarrow{PQ}$ متكافئان من خلال إثبات أنهما يمثلان نفس المتجه.

1. $R(-4, 7), S(-1, 5), P(0, 0), Q(3, -2)$

2. $R(7, -3), S(4, -5), P(0, 0), Q(-3, -2)$

3. $R(2, 1), S(0, -1), P(1, 4), Q(-1, 2)$

4. $R(-2, -1), S(2, 4), P(-3, -1), Q(1, 4)$

في التمارين 5-10، ليكن $R(-2, 5)$ ،$S(2, -8)$ ،$P(-2, 2)$، و $Q(3, 4)$. اكتب المتجه بالصورة التركيبية ثم أوجد مقداره.

5. $\overrightarrow{PQ}$ **6.** $\overrightarrow{RS}$

7. $\overrightarrow{QR}$ **8.** $\overrightarrow{PS}$

9. $2\overrightarrow{QS}$ **10.** $(\sqrt{2})\,\overrightarrow{PR}$

في التمارين 11-16، أوجد متجه الوحدة في نفس اتجاه المتجه المعطى.

11. $\mathbf{u} = \langle -2, 4 \rangle$ **12.** $\mathbf{u} = \langle 1, -1 \rangle$

13. $\mathbf{u} = \langle 2, 1 \rangle$ **14.** $\mathbf{u} = \langle -3, 2 \rangle$

15. $\mathbf{u} = \langle -4, -5 \rangle$ **16.** $\mathbf{u} = \langle 3, -4 \rangle$

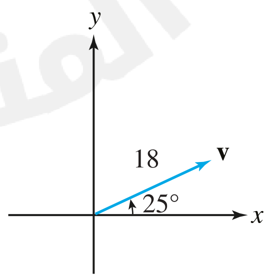
في التمرينين 17 و 18، أوجد المتجه **v** حسب المقدار المعطى وفي اتجاه **u**.

17. $|\mathbf{v}| = 2, \mathbf{u} = \langle 3, -3 \rangle$

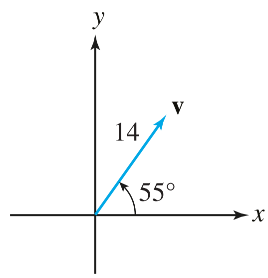
18. $|\mathbf{v}| = 5, \mathbf{u} = \langle -5, 7 \rangle$

في التمارين 19-22، أوجد مركبتي المتجه **v**. حل جبريًا وأوجد القيم الدقيقة باستعمال الحاسبة.

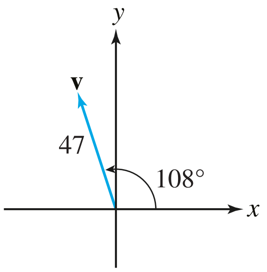
19.



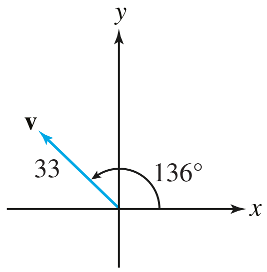
20.



21.



22.



23. ملاحة تحلّق طائرة في مسار يشكّل زاوية قياسها °335 مع الشمال الجغرافي بسرعة 530 mph، أوجد مركبتي المتجه الذي يمثّل سرعة الطائرة. $\mathbf{v} = \langle 530 \cos 115°, 530 \sin 115° \rangle$
$\approx \langle -223.99, 480.34 \rangle$

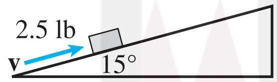
24. ملاحة تحلّق طائرة في مسار يشكّل زاوية قياسها °170 مع الشمال الجغرافي بسرعة 460 mph، أوجد مركبتي المتجه الذي يمثّل سرعة الطائرة. $\mathbf{v} = \langle 460 \cos (280°), 460 \sin (280°) \rangle$
$\approx \langle 79.88, -453.01 \rangle$

التمارين 25-28، أوجد مقدار وقياس زاوية اتجاه المتجه. قرّب إجابتك باستعمال الحاسبة إذا لزم الأمر.

25. $\langle 3, 4 \rangle$ **26.** $\langle -1, 2 \rangle$

27. $\langle -2, -3 \rangle$ **28.** $\langle 5, -1 \rangle$

29. تحريك جسم ثقيل يتم دفع صندوق صعودًا نحو مخزن عبر مسار منحدر يشكل زاوية قياسها °15 مع مستوى الأرض بقوة مقدارها 2.5 lb كما هو مبين في الشكل.



a. أوجد مركبتي المتجه الذي يمثّل القوة.

b. الكتابة للتعلم أعطِ تفسيرًا للمركبتين الأفقية والرأسية للقوة.

أسئلة اختبار معيارية

30. صواب أم خطأ إذا كان $\hat{\mathbf{u}}$ متجه وحدة، فإن $-\hat{\mathbf{u}}$ متجه وحدة أيضًا. برّر إجابتك.

31. صواب أم خطأ إذا كان $\hat{\mathbf{u}}$ متجه وحدة، فإن $\frac{1}{\hat{\mathbf{u}}}$ متجه وحدة أيضًا. برّر إجابتك.

في التمرينين 32 و 33، يمكنك استعمال الحاسبة.

32. **اختيار من متعدد** أي مقدار من المقادير التالية هو مقدار المتجه $\langle 2, -1\rangle$؟ D

A. 1

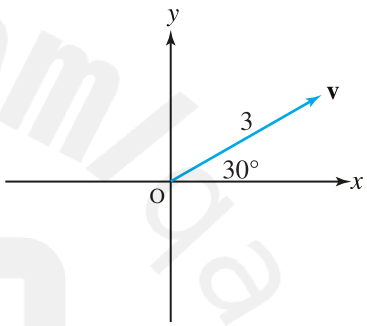
B. $\sqrt{3}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

D. $\sqrt{5}$

E. 5

33. **اختيار من متعدد** أي الخيارات التالية يمثّل المتجه **v** المبين في الشكل أدناه؟ A



A. $\langle 3\cos 30°, 3\sin 30°\rangle$

B. $\langle 3\sin 30°, 3\cos 30°\rangle$

C. $\langle 3\cos 60°, 3\sin 60°\rangle$

D. $\langle \sqrt{3}\cos 30°, \sqrt{3}\sin 30°\rangle$

E. $\langle \sqrt{3}\sin 30°, \sqrt{3}\cos 30°\rangle$

استكشاف

34. ليكن $A = (2, 0)$، $B = (3, 2)$، و $C = (1, 2)$.

a. أوجد مركبات المتجهين $\overrightarrow{OC}$ و $\overrightarrow{AB}$. استنتج أن OABC متوازي أضلاع.

b. لتكن N هي نقطة منتصف المقطع [OA] و M نقطة منتصف المقطع [BC]. أوجد مكونات المتجهين $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{NM}$، ثم أوجد مقداريهما.

c. ليكن OS منصف زاوية في المثلث MON. أثبت أن $\overrightarrow{SN} = 2\sqrt{2}\ \overrightarrow{MS}$. استنتج إحداثيَّي النقطة S.

توسيع الأفكار

35. ليكن $A = (3, 0)$، $B = (4, 1)$، و $C = (1, 1)$.

a. أثبت من خلال معادلة بين منحنيين أن OABC متوازي أضلاع.

b. لتكن N هي نقطة منتصف المقطع [AB] و M نقطة منتصف المقطع [BC] و P نقطة منتصف القطر [OB]. إذا كانت S هي نقطة تقاطع (OM) و (AC)، أثبت أن S هي مركز المثلث OBC.

c. استنتج أن $\overrightarrow{SC} = -2\overrightarrow{SP}$. أوجد إحداثيَّي النقطة S.

d. إذا كانت النقطة T هي نقطة تقاطع (ON) و (AC)، أوجد إحداثيَّي T واستنتج مقدار $\overrightarrow{ST}$.

e. أثبت أن $|\overrightarrow{ST}| = \frac{|\overrightarrow{AC}|}{3}$. ما القاعدة العامة التي يمكن استنتاجها؟

إجابات أسئلة مراجعة سريعة 6.1

1. $x = 9\cos(30°) = 9 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 7.79$

$y = 9\sin(30°) = 9 \times \left(\frac{1}{2}\right) = 4.5$

2. $x = 15\cos(120°) = 15 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -7.5$

$y = 15\sin(120°) = 15 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 13$

3. $x = |\mathbf{v}|\cos(220°) \approx -0.77|\mathbf{v}|$

$y = |\mathbf{v}|\sin(220°) \approx -0.64|\mathbf{v}|$

4. $x = 6\cos(-50°) = 6 \times (0.64) \approx 3.86$

$y = 6\sin(-50°) = 6 \times (-0.77) \approx -4.6$

7. $\overrightarrow{OP} = \langle 5, 9\rangle$

$\tan\theta = \frac{9}{5}$

$\theta = \tan^{-1} \approx 60.9°$

8. $\overrightarrow{OP} = \langle 5, -7\rangle$

$\tan\theta = -\frac{7}{5}$

$\theta' = \tan^{-1}\left|-\frac{7}{5}\right| \approx 54.5°$

$\theta \approx 360° - 54.5° = 305.5°$

9. $\overrightarrow{OP} = \langle -2, -5\rangle$

$\tan\theta = \frac{-5}{-2} = 2.5$

$\theta' = \tan^{-1}|2.5| = 68.2°$

$\theta \approx 180° + 68.2° = 248.2°$

إجابات أسئلة التمارين 6.1

.1 $\overrightarrow{RS}$ يمثل المتجه $\langle -1-(-4), 5-7\rangle = \langle 3, -2\rangle$.
$\overrightarrow{PQ}$ يمثل المتجه $\langle 3-0, -2-0\rangle = \langle 3, -2\rangle$.
إذن، $\overrightarrow{RS}$ و $\overrightarrow{PQ}$ متكافئان.

.2 $\overrightarrow{RS}$ يمثل المتجه $\langle 4-7, -5-(-3)\rangle = \langle -3, -2\rangle$.
$\overrightarrow{PQ}$ يمثل المتجه $\langle -3-0, -2-0\rangle = \langle -3, -2\rangle$.
إذن، $\overrightarrow{RS}$ و $\overrightarrow{PQ}$ متكافئان.

.3 $\overrightarrow{RS}$ يمثل المتجه $\langle 0-2, -1-1\rangle = \langle -2, -2\rangle$.
$\overrightarrow{PQ}$ يمثل المتجه $\langle -1-1, 2-4\rangle = \langle -2, -2\rangle$.
إذن، $\overrightarrow{RS}$ و $\overrightarrow{PQ}$ متكافئان.

.4 $\overrightarrow{RS}$ يمثل المتجه $\langle 2-(-2), 4-(-1)\rangle = \langle 4, 5\rangle$.
$\overrightarrow{PQ}$ يمثل المتجه $\langle 1-(-3), 4-(-1)\rangle = \langle 4, 5\rangle$.
إذن، $\overrightarrow{RS}$ و $\overrightarrow{PQ}$ متكافئان.

.5 الصورة التركيبية للمتجه $\overrightarrow{PQ}$ هي $\langle 3-(-2), 4-2\rangle = \langle 5, 2\rangle$.
$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$.

.6 الصورة التركيبية للمتجه $\overrightarrow{RS}$ هي $\langle 2-(-2), -8-5\rangle = \langle 4, -13\rangle$.
$|\overrightarrow{RS}| = \sqrt{4^2 + (-13)^2} = \sqrt{185}$.

.7 الصورة التركيبية للمتجه $\overrightarrow{QR}$ هي $\langle -2-3, 5-4\rangle = \langle -5, 1\rangle$.
$|\overrightarrow{QR}| = \sqrt{(-5)^2 + 1^2} = \sqrt{26}$.

.8 الصورة التركيبية للمتجه $\overrightarrow{PS}$ هي $\langle 2-(-2), -8-2\rangle = \langle 4, -10\rangle$.
$|\overrightarrow{PS}| = \sqrt{4^2 + (-10)^2} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$.

.9 الصورة التركيبية للمتجه $2\overrightarrow{QS}$ هي
$2 \times \langle 2-3, -8-4\rangle = 2 \times \langle -1, -12\rangle = \langle -2, -24\rangle$.
$|2\overrightarrow{QS}| = \sqrt{(-2)^2 + (-24)^2} = \sqrt{580} = 2\sqrt{145}$.

.10 الصورة التركيبية للمتجه $(\sqrt{2})\overrightarrow{PR}$ هي
$(\sqrt{2}) \times \langle -2-(-2), 5-2\rangle = (\sqrt{2}) \times \langle 0, 3\rangle = \langle 0, 3\sqrt{2}\rangle$.
$|(\sqrt{2})\overrightarrow{PR}| = \sqrt{(0)^2 + (3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}$.

11. $\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{|\mathbf{u}|}\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{(-2)^2+4^2}}\langle -2, 4\rangle = \frac{1}{2\sqrt{5}}\langle -2, 4\rangle = \left\langle -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right\rangle$

12. $\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{|\mathbf{u}|}\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\langle 1, -1\rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right\rangle$

13. $\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{|\mathbf{u}|}\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2^2+1^2}}\langle 2, 1\rangle = \left\langle \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right\rangle$

14. $\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{|\mathbf{u}|}\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{(-3)^2+2^2}}\langle -3, 2\rangle = \left\langle \frac{-3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right\rangle$

15. $\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{|\mathbf{u}|}\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{(-4)^2+(-5)^2}}\langle -4, -5\rangle = \left\langle \frac{-4}{\sqrt{41}}, \frac{-5}{\sqrt{41}}\right\rangle$

16. $\hat{\mathbf{u}} = \frac{1}{|\mathbf{u}|}\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}\langle 3, -4\rangle = \left\langle \frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right\rangle$

$\cos\theta = \frac{3}{|\mathbf{u}|} = \frac{3}{\sqrt{3^2+(-3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta' = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45°$

$\theta = 360° - 45° = 315°$

$\mathbf{v} = \langle |\mathbf{v}|\cos(315°), |\mathbf{v}|\sin(315°)\rangle$

$= \left\langle 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right), 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\rangle$

$= \langle \sqrt{2}, -\sqrt{2}\rangle$

17. $\cos\theta = \frac{-5}{|\mathbf{u}|} = \frac{-5}{\sqrt{(-5)^2+7^2}} = \frac{-5}{\sqrt{74}}$

$\theta' = \cos^{-1}\left|\frac{-5}{\sqrt{74}}\right| \approx 54.5°$

$\theta = 180° - 54.5° = 125.5°$

$\mathbf{v} = \langle |5|\cos(125.5°), |5|\sin(125.5°)\rangle \approx \langle -2.90, 4.07\rangle$

18. $\mathbf{v} = \langle 18\cos 25°, 18\sin 25°\rangle \approx \langle 16.31, 7.61\rangle$

19. $\mathbf{v} = \langle 14\cos 55°, 14\sin 55°\rangle \approx \langle 8.03, 11.47\rangle$

21. $\mathbf{v} = \langle 47\cos 108°, 47\sin 108°\rangle \approx \langle -14.52, 44.70\rangle$

22. $\mathbf{v} = \langle 33\cos 136°, 33\sin 136°\rangle \approx \langle -23.74, 22.92\rangle$

25. $|\langle 3, 4\rangle| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$\cos\theta = \frac{3}{5}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) \approx 53.1°$

26. $|\langle -1, 2\rangle| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\theta' = \cos^{-1}\left(\left|\frac{-1}{\sqrt{5}}\right|\right) \approx 63.4°$

$\theta = 180° - 63.4° = 116.6°$

27. $|\langle -2, -3\rangle| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

$\cos\theta = \frac{-2}{\sqrt{13}}$

$\theta' = \cos^{-1}\left(\left|\frac{-2}{\sqrt{13}}\right|\right) \approx 56.3°$

$\theta = 180° + 56.3° = 236.3°$

28. $|\langle -2, -3\rangle| = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$

$\cos\theta = \frac{5}{\sqrt{26}}$

$\theta' = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{26}}\right) \approx 11.3°$

$\theta = 360° - 11.3° = 348.7°$

29. a. $\mathbf{v} = \langle 2.5\cos(15°), 2.5\sin(15°)\rangle \approx \langle 2.41, 0.65\rangle$

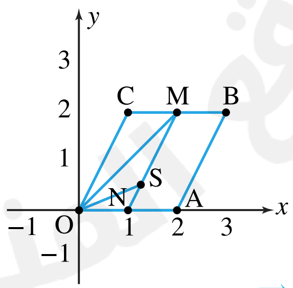
.b تمثّل مركبتا متجه القوة v القوة الشمالية والقوة الشرقية للدفع. أي أنه عندما تدفع قوة 2.5 lb الصندوق عبر مسار منحدر بشكل زاوية قياسها 15° مع مستوى الأرض، فهذا يعني أن القوة تدفع الصندوق شرقًا بقوة 2.41 lb وشمالًا بقوة 0.65 lb

.30 صواب. $|\hat{\mathbf{u}}| = |-\hat{\mathbf{u}}| = 1$. إذن، $-\hat{\mathbf{u}}$ متجه وحدة.

.31 خطأ. $\frac{1}{\hat{\mathbf{u}}}$ ليس متجهًا.

34. a. $\overrightarrow{OC} = \langle 1-0, 2-0\rangle = \langle 1, 2\rangle$

$\overrightarrow{AB} = \langle 3-2, 2-0\rangle = \langle 1, 2\rangle$



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$، إذن للمتجهين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{OC}$ نفس الاتجاه أي أن القطعتين المستقيمتين OC و AB متوازيتان و $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{OC}|$، إذن OABC متوازي أضلاع.

b. $N\left(\frac{x_A + x_O}{2}, \frac{y_A + y_O}{2}\right)$, $N\left(\frac{2}{2}, \frac{0}{2}\right)$, $N(1, 0)$

$M\left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}\right)$, $M\left(\frac{4}{2}, \frac{4}{2}\right)$, $M(2, 2)$

$\overrightarrow{OM} = \langle 2-0, 2-0\rangle = \langle 2, 2\rangle$

$\overrightarrow{NM} = \langle 2-1, 2-0\rangle = \langle 1, 2\rangle$

$|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

$|\overrightarrow{NM}| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

.c باستعمال نظرية منصف الزاوية

$\frac{MS}{OM} = \frac{SN}{ON}$

$\frac{MS}{2\sqrt{2}} = \frac{SN}{1}$

$MS = 2\sqrt{2}SN$

وبما أن للمتجهين $\overrightarrow{MS}$ و $\overrightarrow{SN}$ الاتجاه نفسه، فإن $\overrightarrow{MS} = 2\sqrt{2}\,\overrightarrow{SN}$.

$x_S - x_M = 2\sqrt{2}(x_N - x_S)$

$x_S - 2 = 2\sqrt{2}(1 - x_S)$

$x_S = \frac{2\sqrt{2}+2}{2\sqrt{2}+1} = \frac{6+2\sqrt{2}}{7}$

$y_S - y_M = 2\sqrt{2}(y_N - y_S)$

$y_S - 2 = 2\sqrt{2}(0 - y_S)$

$y_S = \frac{2}{1+2\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}-2}{7}$

إذن إحداثيا النقطة s هما $\left(\frac{6+2\sqrt{2}}{7}, \frac{4\sqrt{2}-2}{7}\right)$.

.35 a. تقع النقطتان B و C على المستقيم $y = 1$ الموازي للمستقيم $y = 0$ الذي يتضمّن A و O. إذن، (OA) // (BC). كما أن $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{OA}| = 3$، إذن OABC متوازي أضلاع.

.b بما أن (OM) يمر في منتصف [BC]، إذن (OM) هو وسيط في المثلث OCB، لذا يكفي أن نبرهن أن (AC) وسيط في المثلث OCB، أي أنه يمرّ بمنتصف (OB)، وهذا أمر واضح لأن [OB] و [AC] هما قطرا متوازي الأضلاع OABC، وبالتالي يتقاطعان في المنتصف. إذن، النقطة S هي مركز المثلث OCB.

.c بما أن النقطة S هي مركز المثلث OCB، فإنها تقسم كل وسيط الى مقطعين بالنسبة 2:1، هنا $|\overrightarrow{SC}| = 2|\overrightarrow{SP}|$، وبالتالي $\overrightarrow{SC} = -2\overrightarrow{SP}$.

$\overrightarrow{SC} = -2\overrightarrow{SP}$

$\langle x_C - x_S, y_C - y_S\rangle = -2\langle x_P - x_S, y_P - y_S\rangle$

$\langle 1 - x_S, 1 - y_S\rangle = \langle 2x_S - 4, 2y_S - 1\rangle$

$1 - x_S = 2x_S - 4,\ x_S = \frac{5}{3}$

$1 - y_S = 2y_S - 1,\ y_S = \frac{2}{3}$

إذن: $S\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

d. نستنتج بنفس الطريقة من الفرع c أن $\overrightarrow{TA} = -2\overrightarrow{TP}$ ، أي أن:

$$\langle x_A - x_T, y_A - y_T \rangle = -2\langle x_P - x_T, y_P - y_T \rangle$$
$$\langle 3 - x_T, 0 - y_T \rangle = \langle 2x_T - 4, 2y_T - 1 \rangle$$
$$3 - x_T = 2x_T - 4,\ x_T = \frac{7}{3}$$
$$0 - y_T = 2y_T - 1,\ y_T = \frac{1}{3}$$

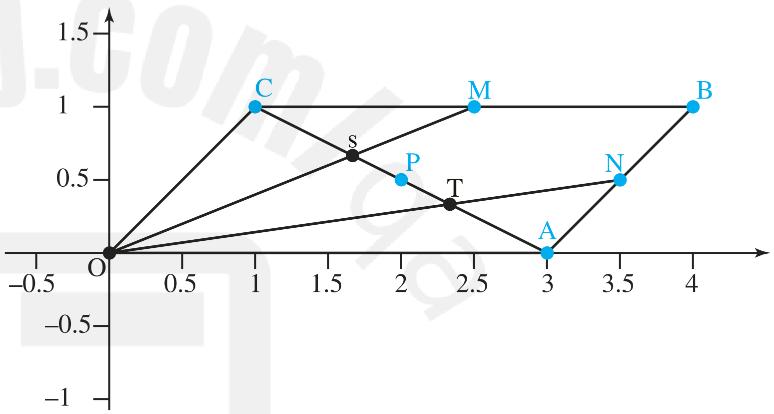
إذن: $T\left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

$$\left|\overrightarrow{ST}\right| = \sqrt{\left(\frac{7}{3} - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

e. $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(1-3)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{5}$

$\left|\overrightarrow{ST}\right| = \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{\left|\overrightarrow{AC}\right|}{3}$

القاعدة العامة التي يمكن استنتاجها هي: كل قطر في متوازي أضلاع يقسمه إلى مثلثين حيث المسافة بين مركزيهما تساوي ثلث القطر الآخر.



6.2 العمليات على المتجهات Operations on Vectors

ما ستتعلّمه

- العمليات على المتجهات جبريًا
- فهم العمليات على المتجهات

... ولماذا

يساعدنا فهم العمليات على المتجهات على الإفادة من مفهوم المتجهات في تطبيقات متنوعة وفي مسائل من واقع الحياة، مثل الملاحة الجوية والبحرية، وفي بعض التطبيقات الفيزيائية.

معايير الدرس

12A.7.4

12A.7.8

المصطلحات

- كمية قياسية scalar quantity
- طريقة الرأس للذيل head to tail method

العمليات على المتجهات جبريًّا

تتطلّب العمليات الجبرية على المتجهات العمل على المتجهات والأعداد في الوقت نفسه. في هذا السياق، سوف نسمّي الأعداد **كميات قياسية**.

لقد رأينا في الدرس السابق كيف يمكننا ضرب المتجه **v**، في عدد k (كمية قياسية) للحصول على متجه آخر له نفس اتجاه **v** إذا كان $k > 0$، واتجاهًا معاكسًا لاتجاهه إذا كان $k < 0$، ويكون مقداره هو $|k||\mathbf{v}|$. فيما يلي نعرف هذه العملية جبريًّا.

ضرب متجه بكمية قياسية

إذا كان $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ متجه، k عدد حقيقي، فإن ناتج ضرب الكمية القياسية k بالمتجه **u** هو

$$k\,\mathbf{u} = k\,\langle u_1, u_2 \rangle = \langle ku_1, ku_2 \rangle$$

ويكون طول المتجه $k\mathbf{u}$:

$$|k\,\mathbf{u}| = |k||\mathbf{u}| = |k|\,\sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2}$$

مثال 1 ضرب متجه في كمية قياسية

في كل حالة أدناه، اضرب الكمية القياسية المعطاة في المتجه، ثم قارن مقدار واتجاه المتجه الناتج بمقدار واتجاه المتجه الأصلي.

A. $\mathbf{r} = \langle 9, 3 \rangle, k = 5$

B. $\mathbf{s} = \langle 4, 5 \rangle, k = -3$

الحل

A. لضرب متجه في كمية قياسية، يكفي ضرب هذه الكمية في مركبتي المتجه.

$$5\mathbf{r} = 5\langle 9, 3 \rangle = \langle 45, 15 \rangle$$

بما أن $k > 0$، فإن اتجاه $5\mathbf{r}$ نفس اتجاه **r**. أما مقداره فقد تضاعف 5 مرات.

للتحقق من ذلك جبريًا اكتب:

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{9^2 + 3^2} = \sqrt{90}$$

$$|5\mathbf{r}| = \sqrt{(45)^2 + (15)^2} = \sqrt{2\,250} = 5\sqrt{90}$$

إذن، طول $5\mathbf{r}$ يساوي 5 أضعاف طول **r**.

أوجد زاوية الاتجاه لكل من المتجهين **r** و $5\mathbf{r}$:

$$\theta_{\mathbf{r}} = \tan^{-1}\left(\frac{3}{9}\right) \approx 18.4° \text{ و } \theta_{5\mathbf{r}} = \tan^{-1}\left(\frac{15}{45}\right) \approx 18.4°$$

(تابع)

نموذج إجابة:
عندما نمثّل المتجهين **r** و **s** بيانيًا نجد أن لهما اتجاهين مختلفين، وبالتالي لا يمكن أن يكون $\mathbf{r} = a\mathbf{s}$.

الهدف

سيتعلم الطلاب جمع وطرح المتجهات، وكذلك ضربها في كميات قياسية، بما في ذلك خصائص العمليات على المتجهات.

دليل الدرس

1. شرح العمليات على المتجهات جبريًا
2. فهم العمليات على المتجهات

تحفيز

ارسم على السبورة متجهًا في الصيغة القياسية واطلب من الطلاب تمديد السهم ليبلغ طوله ضعف طول السهم الذي رسمته، ثم اطلب منهم إيجاد مركبتي كل من المتجهين الأول والثاني.

أسئلة للتفكر

س: هل يمكننا تعريف قسمة متجه على كمية قياسية؟

نموذج إجابة:
كلا، فنحن لا نقول ذلك أبدًا، ولا نكتب $\frac{\mathbf{s}}{k}$ وإنما نكتب $\frac{1}{k}\mathbf{s}$ للإشارة إلى ضرب المتجه في الكمية القياسية $\frac{1}{k}$.

س: (مع المثال 1) هل يمكننا إيجاد عدد a يحقق المعادلة $\mathbf{r} = a\mathbf{s}$؟

نموذج إجابة:
كلا، لأننا إذا عوّضنا عددًا كهذا في المعادلة $\mathbf{r} = a\mathbf{s}$ نحصل على

$$\langle 9, 3 \rangle = a\langle 4, 5 \rangle$$

$$\langle 9, 3 \rangle = \langle 4a, 5a \rangle$$

إذن

$$a = \frac{9}{4} \text{ و } a = \frac{3}{5}$$

وهذا محال.

س: كيف نفسّر ذلك بيانيًا؟

B. أوجد مركبتي المتجه $-3\mathbf{s}$:

$$-3\mathbf{s} = -3\langle 4, 5\rangle = \langle -12, -15\rangle$$

بما أن $k < 0$، فإن اتجاه $-3\mathbf{s}$ عكس اتجاه $\mathbf{s}$. أما مقداره فقد تضاعف 3 مرات.

للتحقق من ذلك جبريًّا اكتب:

$$|\mathbf{s}| = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$$

$$|-3\mathbf{s}| = \sqrt{(-12)^2 + (-15)^2} = \sqrt{369} = 3\sqrt{41}$$

إذن، طول $-3\mathbf{s}$ يساوي 3 أضعاف طول $\mathbf{s}$.

أوجد زاوية الاتجاه لكل من المتجهين $\mathbf{s}$ و $-3\mathbf{s}$:

$$\theta_s = \tan^{-1}\left(\frac{5}{4}\right) \approx 51.3° \text{ و } \theta_{-3s} = \tan^{-1}\left(\frac{-15}{-12}\right) \approx 231.3°$$

لاحظ أن الفرق بين زاويتَي المتجهين $\mathbf{s}$ و $-3\mathbf{s}$ هو $180°$ لأن $\mathbf{s}$ و $-3\mathbf{s}$ لهما اتجاهان متعاكسان.

حاول أن تحل التمرينين 1 و 2

سوف نعرّف هنا عمليتي جمع وطرح المتجهات، وهما عمليتان مهمتان للغاية في تطبيقات واقعية كثيرة.

جمع وطرح متجهين

إذا كان $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2\rangle$ متجهين، فإن:

مجموع $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ هو المتجه

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle u_1 + v_1, u_2 + v_2\rangle$$

والفرق $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ هو المتجه

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \langle u_1 - v_1, u_2 - v_2\rangle$$

مثال 2 العمليات على المتجهات

ليكن $\mathbf{u} = \langle -1, 3\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle 4, 7\rangle$. أوجد المتجهات التالية بالصورة التركيبية ثم ارسم التمثيل البياني لكل منها.

A. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$

B. $3\mathbf{u}$

C. $2\mathbf{u} - \mathbf{v}$

الحل

باستعمال تعريف العمليات الجبرية على المتجهات، لدينا ما يلي:

A. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle -1, 3\rangle + \langle 4, 7\rangle$

$= \langle -1 + 4, 3 + 7\rangle$

$= \langle 3, 10\rangle$

(تابع)

ملاحظة

إن ضرب المتجه بعدد ثابت ينتج عنه متجه موازي إما في نفس الاتجاه أو عكس الاتجاه وذلك حسب إشارة العدد الثابت.

للطلاب سريعي الإنجاز

(مع المثال 1) قد يتساءل بعض الطلاب عما إذا كانت هناك قاعدة لمعرفة ما إذا كان المتجهان $\mathbf{u} = \langle a_1, a_2\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle b_1, b_2\rangle$ يحققان المعادلة $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$ لقيمة معينة هي λ

س: أثبت أن هناك قيمة عددية λ تحقق المعادلة $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$ إذا وفقط إذا كان

$a_1b_2 - b_1a_2 = 0;\ \mathbf{u} \neq 0$ و $\mathbf{v} \neq 0$

نموذج إجابة:

الشرط الضروري: إذا كانت هناك قيمة عددية λ بحيث يكون $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$، إذن

$\langle a_1, a_2\rangle = \lambda\langle b_1, b_2\rangle$

$\langle a_1, a_2\rangle = \langle \lambda b_1, \lambda b_2\rangle$

$a_1 = \lambda b_1$

$a_2 = \lambda b_2$

إذا كان $b_1 = 0$، فإن $a_1 = 0$،

وبالتالي $a_1b_2 - b_1a_2 = 0$

كذلك إذا كان $b_2 = 0$، فإن $a_2 = 0$،

وبالتالي $a_1b_2 - b_1a_2 = 0$

إذا كان $b_1 \neq 0$ و $b_2 \neq 0$، فإن $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \lambda$

وبالتالي $a_1b_2 - b_1a_2 = 0$

الشرط الكافي: $a_1b_2 - b_1a_2 = 0$

إذا كان $b_1 = 0$، فإن $a_1b_2 = 0$، حيث $b_2 = 0$

وبالتالي $a_1 = 0$

$\mathbf{u} = \langle 0, a_2\rangle, a_2 \neq 0$ و $\mathbf{v} = \langle 0, b_2\rangle, b_2 \neq 0$

$\mathbf{u} = \frac{a_2}{b_2}\mathbf{v}$

كذلك إذا كان $b_2 = 0$.

إذا كان $b_1 \neq 0$ و $b_2 \neq 0$، فإن $a_1b_2 = b_1a_2$،

وبالتالي $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \lambda$

إذن $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$.

أسئلة للتفكر

س: ليكن $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ من المثال 2، أوجد مركبات المتجهات التالية بالصورة التركيبية.

a. $-\mathbf{u} - \mathbf{v}$

b. $-3\mathbf{u}$

نموذج إجابة:

a. $-\mathbf{u} - \mathbf{v} = -\langle -1, 3\rangle - \langle 4, 7\rangle$

$= \langle 1, -3\rangle + \langle -4, -7\rangle$

$= \langle 1 - 4, -3 - 7\rangle$

$= \langle -3, -10\rangle$

(تابع)

b. $-3\mathbf{u} = -3\langle -1, 3\rangle = \langle 3, -9\rangle$

س: هل يمكننا معرفة الإجابة عن السؤال السابق بطريقة أخرى؟

نموذج إجابة:

نعم. يمكننا ملاحظة أن

$-\mathbf{u} - \mathbf{v} = -(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = -\langle 3, 10\rangle = \langle -3, -10\rangle$

$-3\mathbf{u} = -(3\mathbf{u}) = -\langle -3, 9\rangle = \langle 3, -9\rangle$

B. $3\mathbf{u} = 3\langle -1, 3\rangle = \langle -3, 9\rangle$

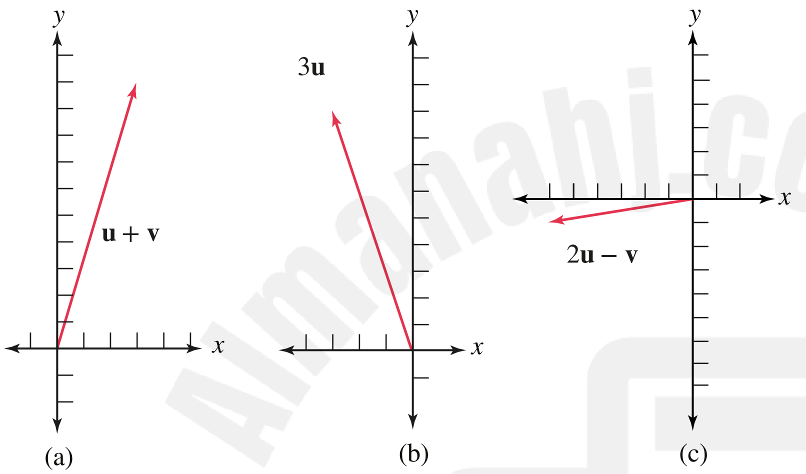
C. $2\mathbf{u} - \mathbf{v} = 2\mathbf{u} + (-1)\mathbf{v}$

$$= 2\langle -1, 3\rangle + (-1)\langle 4, 7\rangle$$

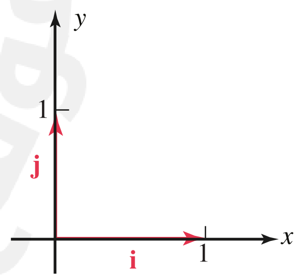
$$= \langle -2, 6\rangle + \langle -4, -7\rangle$$

$$= \langle -6, -1\rangle$$

في ما يلي التمثيل القياسي للمتجه $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ (انظر الشكل a) وللمتجه $3\mathbf{u}$ (انظر الشكل b) وللمتجه $2\mathbf{u} - \mathbf{v}$ (انظر الشكل c).



حاول أن تحل التمرينين 6 و 11



الشكل 6.2.1 متجهي الوحدة القياسيين: **i** و **j** في المستوى الإحداثي ثنائي البعد

يُسمى المتجهان $\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle$ و $\mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$ **متجهي الوحدة القياسيين**. حيث اتجاه **i** باتجاه المحور x واتجاه **j** باتجاه المحور y كما هو موضح في الشكل 6.2.1، تكمن أهمية هذين المتجهين في أن بإمكاننا كتابة أي متجه بدلالة هذين المتجهين وذلك كما يلي

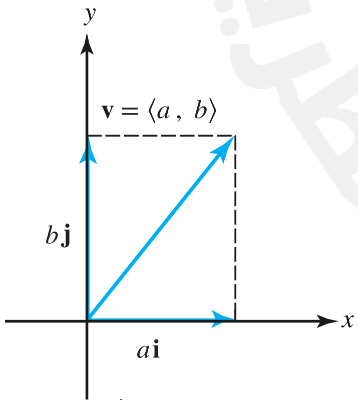
$$\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$$

$$= \langle a, 0\rangle + \langle 0, b\rangle$$

$$= a\langle 1, 0\rangle + b\langle 0, 1\rangle$$

$$= a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$$

يتم هنا التعبير عن المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ على شكل الترتيب الخطي $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ للمتجهين **i** و **j**. تمثل الكميتان القياسيتان a و b المركبتين الأفقية والرأسية، بالتتالي، للمتجه **v**. (انظر الشكل 6.2.2)



الشكل 6.2.2 يمكن كتابة أي متجه في المستوى الإحداثي ثنائي البعد بدلالة **i** و **j**.

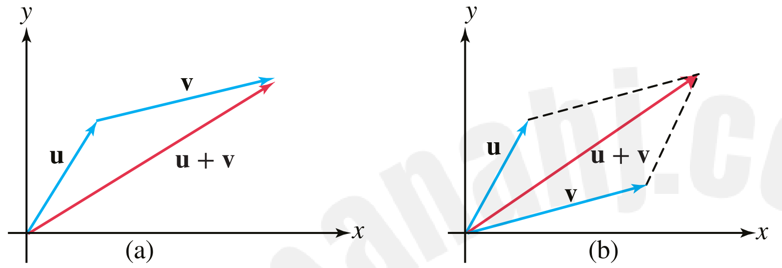
فهم العمليات على المتجهات

يمكننا التعبير عن مجموع المتجهات هندسيًّا باستعمال أسهم بطريقتين:

الطريقة الأولى هي **طريقة الرأس للذيل**، وتقوم على تمثيل المتجه **u** بسهم من نقطة الأصل إلى النقطة (u_1, u_2). السهم من النقطة (u_1, u_2) إلى النقطة $(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ يمثّل المتجه **v**.

إذن، السهم من نقطة الأصل إلى النقطة $(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ يعبّر عن **u + v** (انظر الشكل 6.2.3a).

فيما تعتمد الطريقة الثانية، على استعمال **متوازي أضلاع**، وذلك بإكمال السهمين اللذين يمثّلان المتجهين **u** و **v** في التمثيل القياسي لتكوين متوازي أضلاع وتره هو السهم الذي يمثّل **u + v**



الشكل 6.2.3 طريقتا تمثيل الجمع هندسيًّا للمتجهات: (a) الرأس للذيل، و (b) متوازي الأضلاع.

لتمثيل جمع المتجهين **u** و **v** بيانيًّا، كما ذكرنا سابقًا، نقوم بتمثيل **u** و **v** بسهمين يبدآن عند نقطة الأصل، ثم نكمل رسم متوازي الأضلاع ليصبح السهم الممتد على طول الوتر المبتدئ من نقطة الأصل هو ما يعبر عن **u + v**.

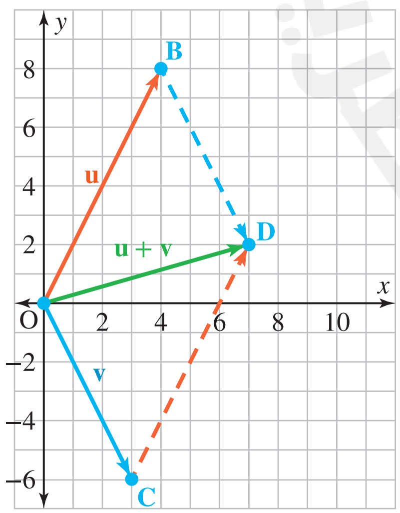
مثال 3 جمع المتجهات

أوجد مجموع المتجهين $\mathbf{u} = \langle 4, 8 \rangle$ و $\mathbf{v} = \langle 3, -6 \rangle$ بيانيًّا بطريقة متوازي الأضلاع ثم جبريًّا.

الحل

لجمع المتجهين بيانيًّا، ابدأ بتمثيل **u** قياسيًّا بالسهم $\overrightarrow{OB}$ وتمثيل **v** بالسهم $\overrightarrow{OC}$.

ثم أكمل متوازي الأضلاع برسم سهم يمثّل المتجه **u** يبدأ من C وآخر يمثّل المتجه **v** ويبدأ من B.



(تابع)

سؤال للتفكر

س: أوجد نقطة المنتصف M للقطعة المستقيمة $\overline{OD}$. هل يمكن التحقق من خلال النقطة M أن طريقة متوازي الأضلاع في الجمع صحيحة؟

نموذج إجابة:

$$M\left\langle \frac{0+7}{2}, \frac{0+2}{2} \right\rangle = M\left\langle \frac{7}{2}, 1 \right\rangle$$

يمكننا إثبات أن

$$\frac{x_B + x_C}{2} = \frac{4+3}{2} = \frac{7}{2}$$
$$\frac{y_B + y_C}{2} = \frac{8+(-6)}{2} = 1$$

إذن، M هي نقطة منتصف القطعة المستقيمة $\overline{BC}$.

أي أنه إذا كان $\overrightarrow{OD}$ يمثل **u + v**، فإن $D(7, 2)$ وفقًا للقاعدة، وبالتالي يمكننا إثبات أن نقطة منتصف القطعة المستقيمة $\overline{OD}$ هي نقطة منتصف القطعة المستقيمة $\overline{BC}$، ما يعني أن OBDC متوازي الأضلاع.

لاحظ أن رأسي نسختَي المتجهين **u** و **v** هاتين يلتقيان عند النقطة $D = (7, 2)$ التي تمثل الرأس الرابع لمتوازي الأضلاع.

بحسب القاعدة، السهم الذي يعبّر عن $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ هو السهم الذي يبدأ عند نقطة الأصل وينتهي عند النقطة D (وهو وتر متوازي الأضلاع الذي يبدأ من نقطة الأصل). إذن، $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle 7, 2\rangle$.
يمكن أيضًا إيجاد مركبات المتجه $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ جبريًا من خلال جمع مركبات **u** و **v**.

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \mathbf{v} &= \langle 4, 8\rangle + \langle 3, -6\rangle \\ &= \langle 4 + 3, 8 - 6\rangle \\ &= \langle 7, 2\rangle\end{aligned}$$

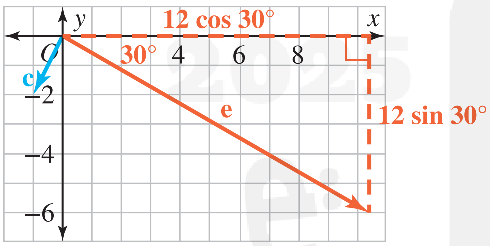
حاول أن تحل التمرين 14

يمكننا استعمال قواعد العمليات على المتجهات في تطبيقات مهمة كما يبيّن المثال التالي

مثال 4 إيجاد مقدار واتجاه مجموع متجهين

يبحر جاسم في النهر بقارب ذي محرك سرعته 12 mph في اتجاه بزاوية قياسها °30 من الشرق إلى الجنوب. تبلغ سرعة التيار النهري 2 mph وهو يتجه بزاوية قياسها °30 من الجنوب إلى الغرب. أوجد مقدار واتجاه المسار الذي يسلكه قارب جاسم عبر النهر.

الحل



الخطوة 1 استعمل النسب المثلثية لإيجاد مركبتي المتجه.

إذا كان **e** هو المتجه الذي يمثّل سرعة المحرك، فإن مقدار **e** هو 12 mph وزاوية اتجاهه مع المحور x (الذي يمثّل الاتجاه شرق-جنوب) قياسها °30 نحو الأسفل.

إذن، مركبات المتجه هما:

$$12 \sin 30° = 6$$

$$12 \cos 30° = 6\sqrt{3} \approx 10.39$$

وبما أن اتجاه المركّبة الرأسية نحو الأسفل فإنها تكون سالبة:

$$-12 \sin 30° = -6$$

$$\mathbf{e} = \langle 10.39, -6\rangle$$

إذا كان **c** هو المتجه الذي يمثّل سرعة التيار، فإن مقدار **c** هو 2 mph وزاوية اتجاهه مع المحور الرأسي (الذي يمثّل الاتجاه جنوب-غرب) قياسها °30، يشكل هذا المتجه زاوية قياسها °60 مع المحور الأفقي لكنه يقع في الربع الثالث، وبالتالي فإن مركبتاه سالبتين:

(تابع)

أسئلة للتفكر

س: (مع المثال 4) كيف يمكننا إيجاد نقطة النهاية للمتجه؟

نموذج إجابة:
يمكن إنشاء مثلث قائم الزاوية بين المتجه والمحور x، ثم نستطيع إيجاد إحداثيي نقطة النهاية للمتجه باستعمال الدوال المثلثية.

س: كيف يمكننا رسم المتجه الذي يمثل السرعة الفعلية للقارب؟

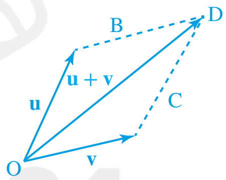
نموذج إجابة:
يمثل المتجه قُطر متوازي الأضلاع الذي يشكله المتجهان اللذان يمثلان السرعة الأمامية للقارب وسرعة التيار.

س: لماذا لا يتساوى مقدار جمع المتجهين مع جمع مقداري المتجهين في المثال؟

نموذج إجابة:
لأن للمتجهين اتجاهان مختلفان، حيث يؤثر جزء من حركة الأول على الثاني وبالعكس، وذلك نسبة لمقداريهما والزاوية بينهما.

س: كيف يمكن أن نثبت بيانيًا أن $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \le |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$

نموذج إجابة:



نلاحظ أن $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = OD$ و $OD \le OB + BD$ (الخط المستقيم هو أقصر مسافة بين نقطتين)، إذن
$|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \le |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$

للطلاب الذين يواجهون صعوبات

(مع المثال 4) يحتاج ترسيخ بعض المفاهيم في أذهان الطلاب إلى التحقق منها من خلال أمثلة.

س: أثبت أن $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \le |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$ في كل من الحالتين التاليتين.

1. $\mathbf{u} = \langle 2, 3\rangle, \mathbf{v} = \langle -1, 1\rangle$
2. $\mathbf{u} = \langle 2, 6\rangle, \mathbf{v} = \langle -2, -4\rangle$

نموذج إجابة:

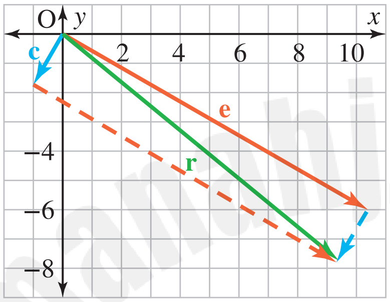
1. $|\mathbf{u}| \approx 3.6, |\mathbf{v}| \approx 1.4$
$|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}| \approx 5, |\mathbf{u} + \mathbf{v}| \approx 4.1$
$|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \le |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$
2. $|\mathbf{u}| \approx 6.3, |\mathbf{v}| \approx 4.5$
$|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}| \approx 10.8, |\mathbf{u} + \mathbf{v}| = 2$
$|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \le |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$

$$-2\cos 60° = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1$$
$$-2\sin 60° = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \approx -1.73$$
$$\mathbf{c} = \langle -1, -1.73 \rangle$$

الخطوة 2 أوجد جمع المتجهين الذين يمثلان سرعة المحرك وسرعة التيار.

إذن متجه سرعة القارب هو:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{e} + \mathbf{c}\\ &= \langle 10.39, -6 \rangle + \langle -1, -1.73 \rangle\\ &= \langle 9.39, -7.73 \rangle\end{aligned}$$



لاحظ أن المركبة الأولى للمتجه **r** موجبة ومركبته الثانية سالبة، وبالتالي فإن تمثيله القياسي يقع في الربع الرابع (انظر الشكل أعلاه).

الخطوة 3 أوجد مقدار **r** باستعمال نظرية فيثاغورس.

مقدار المتجه هو:

$$\begin{aligned}|\mathbf{r}| &= \sqrt{(9.39)^2 + (-7.73)^2}\\ &\approx 12.16\end{aligned}$$

الخطوة 4 استعمل مركبتي **r** لإيجاد زاوية اتجاهه.

إذا كانت θ هي زاوية اتجاه **r**، فإن

$$|\mathbf{r}| \cos\theta = 9.39$$
$$12.2\cos\theta = 9.39$$
$$\cos\theta = \frac{9.39}{12.2}$$
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{9.39}{12.2}\right) \approx 39.5°$$

إذن، يبحر القارب بسرعة 12.2 mph وبزاوية قياسها 40° تقريبًا من الشرق إلى الجنوب.

حاول أن تحل التمرين 17

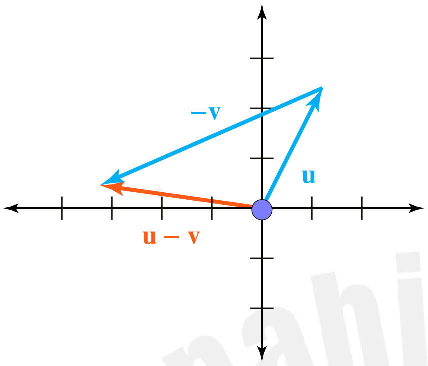
ملاحظة

إن الاتجاه بزاوية مقدارها 40° من الشرق إلى الجنوب يكافئ زاوية اتجاه مقدارها $360° - 40° = 320°$ مع محور x الموجب، وذلك لأن ضلع انتهاء الزاوية يقع في الربع الرابع.

يمكن كذلك تمثيل الفرق بين متجهين **u** و **v** تمثيلاً هندسيًّا، كما فعلنا في مجموع متجهين:

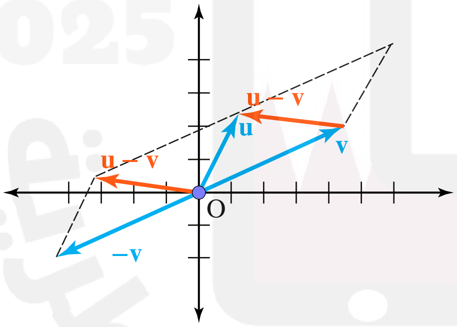
$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-1)\mathbf{v}$$

في التمثيل القياسي، إذا كان السهم من نقطة الأصل إلى النقطة (u_1, u_2) يمثّل المتجه **u**، يمكننا إثبات أن السهم من النقطة (u_1, u_2) إلى النقطة $(u_1 - v_1, u_2 - v_2)$ يمثّل المتجه **v**−.
بذلك يكون المتجه من نقطة الأصل إلى النقطة $(u_1 - v_1, u_2 - v_2)$ هو **u − v**
(انظر الشكل 6.2.4).



الشكل 6.2.4 يبين الشكل الفرق بين المتجهين **u** و **v** هندسيًّا على أنه جمع المتجه **u** مع سالب المتجه **v**.

يمكننا أيضًا تمثيل الفرق بين متجهين باستعمال متوازي الأضلاع:
نأخذ التمثيل القياسي للمتجه **u** وللمتجه **v**− الذي هو عكس المتجه **v**، ثم نكمل رسم متوازي الأضلاع ونأخذ السهم من نقطة الأصل على طول الوتر، فهو يمثّل المتجه **u − v**.
يمكننا أن نلاحظ أن السهم على طول الوتر الآخر لمتوازي الأضلاع الآخر الذي يشكله **u** و **v** يمثّل أيضًا المتجه **u − v** (انظر الشكل 6.2.5).



الشكل 6.2.5 يبين الشكل أن السهم الذي على الوتر الآخر لمتوازي الأضلاع الذي يشكله **u** و **v** يمثل أيضًا المتجه **u − v** وهو الفرق بين المتجهين **u** و **v**.

سؤال للتفكر

س: (مع المثال 5) إذا كان $\hat{\mathbf{u}}$ هو متجه الوحدة للمتجه $\mathbf{u}$، و $\hat{\mathbf{v}}$ هو متجه الوحدة للمتجه $\mathbf{v}$ و $\mathbf{s}$ هو متجه الوحدة للمتجه $\mathbf{u}-\mathbf{v}$، فهل هذا يعني أن $\hat{\mathbf{u}}-\hat{\mathbf{v}}=\mathbf{s}$؟

نموذج إجابة:

كلا:

$$\hat{\mathbf{u}}=\left\langle \frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}} \right\rangle$$

$$\hat{\mathbf{v}}=\langle 0, -1 \rangle$$

$$\mathbf{s}=\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$$

إذن،

$$\hat{\mathbf{u}}-\hat{\mathbf{v}}=\left\langle \frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}+1 \right\rangle \neq \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle=\mathbf{s}$$

متابعة

اطلب من الطلاب أن يناقشوا العلاقة بين الطريقة الجبرية لتعريف عملية الجمع وبين الطريقة البيانية.

ملاحظات على التمارين

التمارين 1-22، تدرب الطالب على جمع وطرح المتجهات وضربها في كميات قياسية.

التمارين 35-38، تدرب الطالب على أنماط من الاختبارات.

التقييم المستمر

التقييم الذاتي:

التمارين 1, 3, 6, 14, 17, 18, 21, 23, 29

مساعدة دراسية

يمكننا إيجاد الزاوية θ بطريقة أخرى.

نستعمل مركبتي متجه الفرق $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ لإيجاد زاوية الاتجاه:

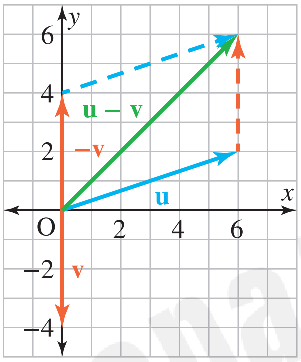
$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{6}{6}\right)=45°$$

مثال 5 طرح المتجهات

إذا كان $\mathbf{u}=\langle 6, 2\rangle$ و $\mathbf{v}=\langle 0, -4\rangle$، أوجد $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ بيانيًّا وجبريًّا ثم أوجد مقداره واتجاهه.

الحل

بيانيًّا، مثّل المتجهين $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ قياسيًّا ثم مثّل المتجه $-\mathbf{v}$ الذي له نفس مقدار $\mathbf{v}$ لكنه يعاكسه في الاتجاه ويبدأ من نقطة الأصل.



أكمل متوازي الأضلاع المكوّن من $\mathbf{u}$ و $-\mathbf{v}$ لتجد أن السهم الذي يقع على طول الوتر الذي يمثّل $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ ينتهي عند النقطة $(6, 6)$. إذن:

$$\mathbf{u}-\mathbf{v}=\langle 6, 6\rangle$$

أما جبريًّا فاكتب ببساطة:

$$\mathbf{u}-\mathbf{v}=\langle 6, 2\rangle-\langle 0, -4\rangle=\langle 6-0, 2-(-4)\rangle=\langle 6, 6\rangle$$

مقدار $\mathbf{u}-\mathbf{v}$:

$$|\mathbf{u}-\mathbf{v}|=\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2}$$

إذا كانت θ هي زاوية اتجاه $\mathbf{u}-\mathbf{v}$، فإن

$$|\mathbf{u}-\mathbf{v}|\cos\theta=6$$

$$6\sqrt{2}\cos\theta=6$$

$$\cos\theta=\frac{6}{6\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=45°$$

حاول أن تحل التمرين 18

مراجعة سريعة 6.2

في التمارين 1-4، تقع النقطتان A و B على الدائرة $x^2 + y^2 = 4$.
أوجد مركبات المتجه $\overrightarrow{AB}$

1. $A(-2, 0), B(1, \sqrt{3})$

2. $A(2, 0), B(1, \sqrt{3})$

3. $A(2, 0), B(1, -\sqrt{3})$

4. $A(-2, 0), B(1, -\sqrt{3})$

في التمرينين 5 و 6، أوجد المتجه **u** حسب المقدار المعطى وفي اتجاه **v**.

5. $|\mathbf{u}| = 2, \mathbf{v} = \langle 2, 3\rangle$

6. $|\mathbf{u}| = 3, \mathbf{v} = \langle -4, 3\rangle$

الدرس 6.2 التمارين

في التمرينين 1 و 2، ليكن $\mathbf{t} = \langle -5, -7\rangle$. أوجد مركبتي ومقدار واتجاه المتجه المعطى.

1. $-4\mathbf{t}$

2. $2\mathbf{t}$

في التمارين 3-5، أوجد $k\mathbf{u}$ في كل من الحالات التالية.

3. $\mathbf{u} = \langle -7, -9\rangle, k = 4$

4. $\mathbf{u} = \langle 4, 12\rangle, k = -6$

5. $\mathbf{u} = \langle 6, -1\rangle, k = 2$

في التمارين 6-13، ليكن $\mathbf{u} = \langle -1, 3\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle 2, 4\rangle$ و $\mathbf{w} = \langle 2, -5\rangle$. أوجد المتجه المطلوب.

6. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$

7. $\mathbf{u} + (-1)\mathbf{v}$

8. $\mathbf{u} - \mathbf{w}$

9. $3\mathbf{v}$

10. $2\mathbf{u} + 3\mathbf{w}$

11. $2\mathbf{u} - 4\mathbf{v}$

12. $-2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$

13. $-\mathbf{u} - \mathbf{v}$

في التمارين 14-16، أوجد الحل جبريًّا وبيانيًّا.

14. ليكن $\overrightarrow{MN} = \langle 9, 12\rangle$ و $\overrightarrow{NO} = \langle 2, 7\rangle$. أوجد $\overrightarrow{NO} + \overrightarrow{MN}$.

15. ليكن $\mathbf{v} = \langle -3, 4\rangle$ و $\mathbf{w} = \langle 5, -8\rangle$. أوجد $\mathbf{v} + \mathbf{w}$.

16. ليكن $\mathbf{v} = \langle 3, -4\rangle$ و $\mathbf{w} = \langle 1, -3\rangle$. أوجد $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين.

17. بالعودة إلى المثال 4، إذا كانت سرعة المحرك 9 mph وكان القارب يبحر في اتجاه الشمال الغربي بزاوية قياسها $135°$ مع اتجاه التيار، ماذا يصبح مقدار واتجاه سرعة القارب؟ قرّب الإجابة إلى أقرب جزء من عشرة.

في التمارين 18-20، أوجد الحل جبريًّا وبيانيًّا.

18. ليكن $\overrightarrow{MN} = \langle 4, 2\rangle$ و $\overrightarrow{NO} = \langle 5, -7\rangle$. أوجد $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NO}$.

19. ليكن $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$ و $\mathbf{w} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$. أوجد $\mathbf{v} - \mathbf{w}$.

20. ليكن $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ و $\mathbf{w} = 4\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$. أوجد $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين.

في التمرينين 21 و 22، أوجد مركبتي ومقدار واتجاه مجموع المتجهين المعطيين ومقدار واتجاه $\mathbf{s} - \mathbf{t}$.

21. $\mathbf{s} = 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j}, \mathbf{t} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$

22. $\mathbf{s} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j}, \mathbf{t} = -2\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

في التمرينين 23 و 24، أوجد مقدار واتجاه القوة الناتجة.

23. جمع القوى تُطبّق قوة مقدارها 50 lb على جسم بزاوية قياسها $45°$، وتطبّق على الجسم في الوقت نفسه قوة أخرى مقدارها 75 lb بزاوية قياسها $-30°$

24. جمع القوى تُطبّق ثلاث قوى هي 100 lb، 50 lb، 80 lb على جسم بزوايا قياساتها $-20°$، $160°$، $50°$ على الترتيب.

في التمارين 25-28، أوجد مركبتي وقياس زاوية اتجاه المتجه المعطى. استعمل الطريقة الجبرية وقرّب الإجابات إذا لزم الأمر.

25. $3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

26. $-3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$

27. $7(\cos 135°\, \mathbf{i} + \sin 135°\, \mathbf{j})$

28. $2(\cos 60°\, \mathbf{i} + \sin 60°\, \mathbf{j})$

الكتابة للتعلم في التمارين 29-34، استعمل مركبتي كل متجه لإثبات صحة العمليات التالية على المتجهات، حيث a و b عددين حقيقيين ثابتين.

29. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

30. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

31. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u},\ \mathbf{0} = \langle 0, 0\rangle$

32. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0},\ -\langle a, b\rangle = \langle -a, -b\rangle$

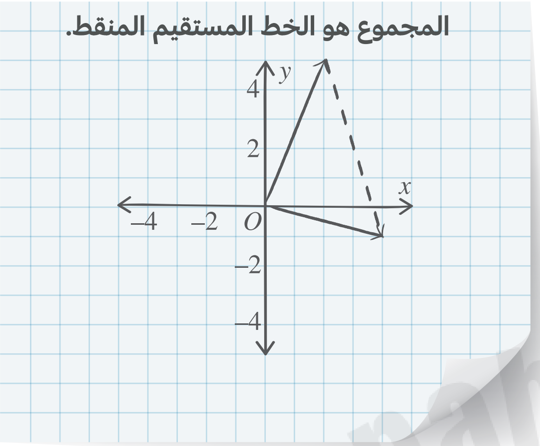
33. $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$

34. $(a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$

أسئلة اختبار معيارية

35. صواب أم خطأ يقول تامر إن مجموع المتجهين $\overrightarrow{BA} = \langle 7, 13\rangle$ و $\overrightarrow{CB} = \langle 2, -4\rangle$ هو المتجه $\overrightarrow{CA} = \langle 7, 13\rangle$. هل هذا صحيح؟ برّر إجابتك.

36. صواب أم خطأ جمع خالد المتجهين $\overrightarrow{BA} = \langle 2, 5\rangle$ و $\overrightarrow{CB} = \langle 4, -1\rangle$ بيانيًّا ورسم التمثيل البياني التالي حيث عبّر عن مجموع المتجهين بالخط المنقط. هل إجابته صحيحة؟ برّر إجابتك.



37. اختيار من متعدد ليكن $\mathbf{s} = \langle -2, 8\rangle$ و $\mathbf{t} = \langle 7, 11\rangle$.
أي الخيارات التالية يمثّل المتجه $\mathbf{s} + \mathbf{t}$؟ D

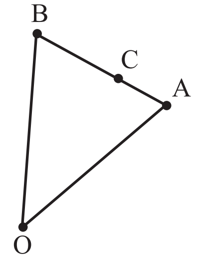
A. $\langle -5, 3\rangle$
B. $\langle 9, 19\rangle$
C. $\langle 9, 3\rangle$
D. $\langle 5, 19\rangle$
E. $\langle 2, 9\rangle$

38. اختيار من متعدد ليكن $\mathbf{u} = \langle -2, 3\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle 4, -1\rangle$.
أي الخيارات التالية يمثّل المتجه $\mathbf{u} - \mathbf{v}$؟ E

A. $\langle 6, -4\rangle$
B. $\langle 2, 2\rangle$
C. $\langle -2, 2\rangle$
D. $\langle -6, 2\rangle$
E. $\langle -6, 4\rangle$

استكشاف

39. تقسيم قطعة مستقيمة وفق نسبة معطاة لتكن A و B نقطتين في المستوى الإحداثي (انظر الشكل أدناه).



a. أثبت أن $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ حيث O نقطة الأصل.

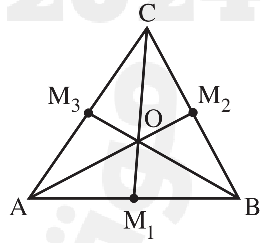
b. لتكن C نقطة تقع على القطعة المستقيمة BA، تقسمها بالنسبة $y : x$ حيث $x + y = 1$. أي أن

$$\frac{|\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{CA}|} = \frac{x}{y}$$

أثبت أن

$$\overrightarrow{OC} = x\,\overrightarrow{OA} + y\,\overrightarrow{OB}$$

40. الخطوط الوسيطة في المثلث نفّذ الخطوات التالية باستعمال المتجهات لتبرهن أن الخطوط الوسيطة في المثلث تتقاطع في النقطة O التي تقسم كل وسيط حسب النسبة 1 : 2
M_1 و M_2 و M_3 هي نقاط منتصف القطع المستقيمة للمثلث كما هو مبيّن في الشكل.



a. استعمل التمرين السابق لإثبات أن

$$\overrightarrow{OM_1} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$
$$\overrightarrow{OM_2} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OC} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$
$$\overrightarrow{OM_3} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OC}$$

b. أثبت أن كلًّا من $\overrightarrow{CO} + 2\overrightarrow{M_1O}$ و $\overrightarrow{AO} + 2\overrightarrow{M_2O}$ و $\overrightarrow{BO} + 2\overrightarrow{M_3O}$ تساوي $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO}$.

c. الكتابة للتعلم وضّح لماذا يثبت الفرع b صحة النتيجة المطلوبة.

توسيع الأفكار

41. صيغة المستقيم في صورة معادلة متجهات
ليكن L المستقيم الذي يمر بالنقطتين A و B. برهن أن النقطة $C = (x, y)$ تقع على المستقيم L إذا وفقط إذا كان

$$\overrightarrow{OC} = t\,\overrightarrow{OA} + (1 - t)\overrightarrow{OB}$$

حيث t عدد حقيقي و O نقطة الأصل.

إجابات أسئلة مراجعة سريعة 6.2

1. $\overrightarrow{AB} = \langle 1-(-2),\ \sqrt{3}-0\rangle = \langle 3, \sqrt{3}\rangle$

2. $\overrightarrow{AB} = \langle 1-2,\ \sqrt{3}-0\rangle = \langle -1, \sqrt{3}\rangle$

3. $\overrightarrow{AB} = \langle 1-2,\ -\sqrt{3}-0\rangle = \langle -1, -\sqrt{3}\rangle$

4. $\overrightarrow{AB} = \langle 1-(-2),\ -\sqrt{3}-0\rangle = \langle 3, -\sqrt{3}\rangle$

5. $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) \approx 56.31°$

$\mathbf{u} = \langle |u| \cos\theta, |\mathbf{u}| \sin\theta\rangle = \langle 2\cos 56.31°, 2\sin 56.31°\rangle \approx \langle 1.11, 1.66\rangle$

6. $\theta' = \tan^{-1}\left|\frac{3}{-4}\right| \approx 36.9°,\ \theta \approx 180° - 36.87° = 143.13°$

$u = \langle |\mathbf{u}| \cos\theta, |\mathbf{u}| \sin\theta\rangle = \langle 3\cos 143.13°, 3\sin 143.13°\rangle \approx \langle -2.4, 1.8\rangle$

إجابات أسئلة التمارين 6.2

1. $-4\mathbf{t} = -4\langle -5, -7\rangle = \langle 20, 28\rangle$

$|-4\mathbf{t}| = \sqrt{20^2 + 28^2} = 4\sqrt{74} \approx 34.41$

$\theta = \tan^{-1}\frac{28}{20} = 54.46°$

2. $2\mathbf{t} = 2\langle -5, -7\rangle = \langle -10, -14\rangle$

$|2\mathbf{t}| = \sqrt{(-10)^2 + (-14)^2} = 2\sqrt{74} \approx 17.20$

$\theta' = \tan^{-1}\left|\frac{-14}{-10}\right| \approx 54.46°,\ \theta \approx 180° + 54.46° = 234.46°$

3. $k\mathbf{u} = 4\langle -7, -9\rangle = \langle -28, -36\rangle$

4. $k\mathbf{u} = -6\langle 4, 12\rangle = \langle -24, -72\rangle$

5. $k\mathbf{u} = 2\langle 6, -1\rangle = \langle 12, -2\rangle$

6. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle -1+2, 3+4\rangle = \langle 1, 7\rangle$

7. $\mathbf{u} + (-1)\,\mathbf{v} = \langle -1+(-2), 3+(-4)\rangle = \langle -3, -1\rangle$

8. $\mathbf{u} - \mathbf{w} = \langle -1-2, 3+5\rangle = \langle -3, 8\rangle$

9. $3\mathbf{v} = 3\langle 2, 4\rangle = \langle 6, 12\rangle$

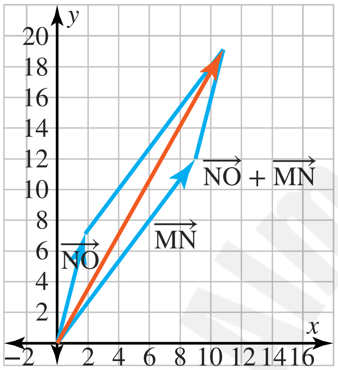
10. $2\mathbf{u} + 3\mathbf{w} = 2\langle -1, 3\rangle + 3\langle 2, -5\rangle = \langle 4, -9\rangle$

11. $2\mathbf{u} - 4\mathbf{v} = 2\langle -1, 3\rangle - 4\langle 2, 4\rangle = \langle -10, -10\rangle$

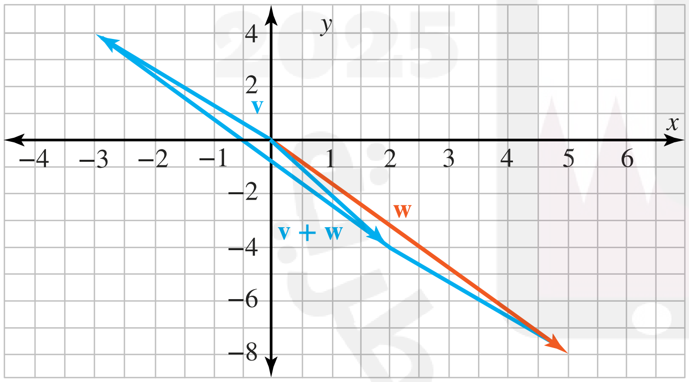
12. $-2\mathbf{u} - 3\mathbf{v} = -2\langle -1, 3\rangle - 3\langle 2, 4\rangle = \langle -4, -18\rangle$

13. $-\mathbf{u} - \mathbf{v} = -\langle -1, 3\rangle - \langle 2, 4\rangle = \langle -1, -7\rangle$

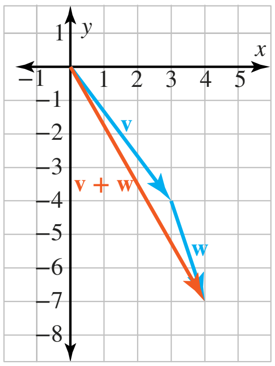
14. $\overrightarrow{NO} + \overrightarrow{MN} = \langle 2, 7\rangle + \langle 9, 12\rangle = \langle 11, 19\rangle$



15. $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \langle -3, 4\rangle + \langle 5, -8\rangle = \langle 2, -4\rangle$



16. $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \langle 3, -4\rangle + \langle 1, -3\rangle = \langle 4, -7\rangle = 4\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$



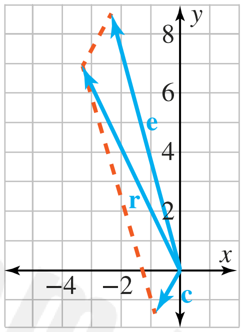
17. إذا كان القارب يبحر في اتجاه الشمال الغربي بزاوية قياسها $135°$ مع اتجاه التيار، فإن $\theta = 90° + 180° - (135° + 30°) = 105°$ إذن،

$\mathbf{e} = \langle 9\cos(105°), 9\sin(105°)\rangle \approx \langle -2.33, 8.69\rangle$

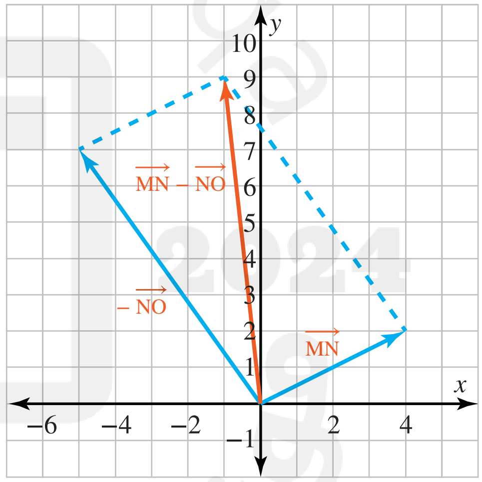
$\mathbf{r} = \mathbf{e} + \mathbf{c} \approx \langle -2.33, 8.69\rangle + \langle -1, -1.73\rangle \approx \langle -3.33, 6.96\rangle$

$|\mathbf{r}| = \sqrt{(-3.33)^2 + 6.96^2} \approx 7.72$ mph

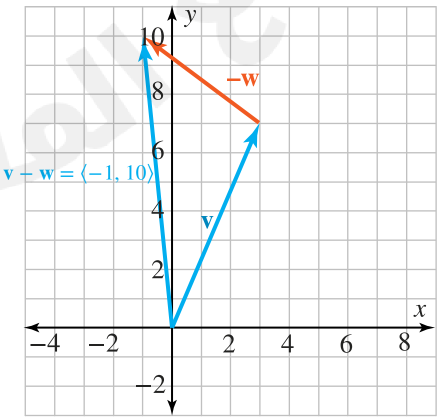
$\theta' = \tan^{-1}\left|\frac{6.96}{-3.33}\right| \approx 64.43°, \theta \approx 180° - 64.43° = 115.57°$



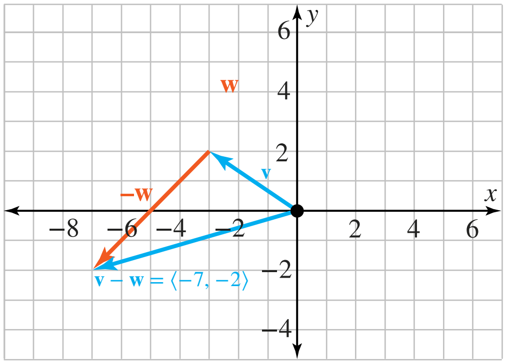
18. $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NO} = \langle 4, 2\rangle - \langle 5, -7\rangle = \langle -1, 9\rangle$



19. $\mathbf{v} - \mathbf{w} = \langle 3, 7\rangle - \langle 4, -3\rangle = \langle -1, 10\rangle$



20. $\mathbf{v} - \mathbf{w} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - (4\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) = -7\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$



21. $\mathbf{s} + \mathbf{t} = \langle 6 + 3, -3 + 1\rangle = \langle 9, -2\rangle, |\mathbf{s} + \mathbf{t}| = \sqrt{9^2 + (-2)^2} = \sqrt{85},$

$\theta' = \tan^{-1}\left|\frac{-2}{9}\right| \approx 12.53°, \theta \approx 360° - 12.53° = 347.47°$

$\mathbf{s} - \mathbf{t} = \langle 6 - 3, -3 - 1\rangle = \langle 3, -4\rangle, |\mathbf{s} - \mathbf{t}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5,$

$\theta' = \tan^{-1}\left|\frac{-4}{3}\right| \approx 53.13°, \theta \approx 360° - 53.13° = 306.87°$

22. $\mathbf{s} + \mathbf{t} = \langle 1 - 2, -3 + 7\rangle = \langle -1, 4\rangle, |\mathbf{s} + \mathbf{t}| = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17},$

$\theta' = \tan^{-1}\left|\frac{4}{-1}\right| \approx 75.96°, \theta \approx 180° - 75.96° = 104.04°$

$\mathbf{s} - \mathbf{t} = \langle 1 + 2, -3 - 7\rangle = \langle 3, -10\rangle, |\mathbf{s} - \mathbf{t}| = \sqrt{3^2 + (-10)^2} = \sqrt{109},$

$\theta' = \tan^{-1}\left|\frac{-10}{3}\right| \approx 73.30°, \theta \approx 360° - 73.30° = 286.70°$

23. $\mathbf{F} = \langle 50\cos 45° + 75\cos(-30°), 50\sin 45° + 75\sin(-30°)\rangle$

$= \left\langle 25\sqrt{2} + \frac{75\sqrt{3}}{2}, 25\sqrt{2} - \frac{75}{2}\right\rangle \approx \langle 100.31, -2.14\rangle$

$|\mathbf{F}| = \sqrt{100.31^2 + (-2.14)^2} \approx 100.33$

$\theta' = \tan^{-1}\left|\frac{-2.14}{100.31}\right| \approx 1.22°, \theta \approx 360° - 1.22° = 358.78°$

24. $\mathbf{F} = \langle 100\cos(-20°) + 50\cos(160°) + 80\cos(50°),$
$100\sin(-20°) + 50\sin(160°) + 80\sin(50°)\rangle$

$= \langle 98.41, 44.18\rangle$

$|\mathbf{F}| = \sqrt{98.41^2 + 44.18^2} \approx 107.87$

$\theta = \theta' = \tan^{-1}\left(\frac{44.18}{98.41}\right) = 24.18°$

25. $\mathbf{v} = \langle 3, -4\rangle$

$\theta' = \tan^{-1}\left|\frac{-4}{3}\right| \approx 53.13°, \theta \approx 360° - 53.13° = 306.87°$

26. $\mathbf{v} = \langle -3, -5\rangle$

$\theta' = \tan^{-1}\left|\frac{-5}{-3}\right| \approx 59.04°, \theta \approx 180° + 59.04° = 239.04°$

27. $\mathbf{v} = \langle 7\cos 135°, 7\sin 135°\rangle = \left\langle -\frac{7\sqrt{2}}{2}, \frac{7\sqrt{2}}{2}\right\rangle$

$\theta = 135°$

28. $\mathbf{v} = \langle 2\cos 60°, 2\sin 60°\rangle = \langle 1, \sqrt{3}\rangle$

$\theta = 60°$

29. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} = (u_1 + v_1)\mathbf{i} + (u_2 + v_2)\mathbf{j}$

$= (v_1 + u_1)\mathbf{i} + (v_2 + u_2)\mathbf{j} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

30. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = (u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}) + w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j}$

$= (u_1 + v_1 + w_1)\mathbf{i} + (u_2 + v_2 + w_2)\mathbf{j}$

$= u_1\mathbf{i} + (v_1 + w_1)\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + (v_2 + w_2)\mathbf{j}$

$= u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + (v_1 + w_1)\mathbf{i} + (v_2 + w_2)\mathbf{j}$

$= \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

31. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} = (u_1 + 0)\mathbf{i} + (u_2 + 0)\mathbf{j} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} = \mathbf{u}$

32. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + (-u_1)\mathbf{i} + (-u_2)\mathbf{j} = (u_1 - u_1)\mathbf{i} + (u_2 - u_2)\mathbf{j}$
$= 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} = 0$

33. $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a(u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}) = au_1\mathbf{i} + au_2\mathbf{j} + av_1\mathbf{i} + av_2\mathbf{j}$

$= a(u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}) + a(v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$

34. $(a + b)\mathbf{u} = (a + b)(u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}) = au_1\mathbf{i} + au_2\mathbf{j} + bu_1\mathbf{i} + bu_2\mathbf{j}$

$= a(u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}) + b(u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}) = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$

.35 خطأ.
$\overrightarrow{CA} = \langle 2, -4\rangle + \langle 7, 13\rangle = \langle 9, 9\rangle \neq \langle 7, 13\rangle$.

.36 خطأ. الخط يمثل الفرق بين المتجهين، أما مجموعهما فهو القطر الثاني لمتوازي الأضلاع المكون من المتجهين والمستقيمين الموازيين لهما.

39. a. $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$

.b لنفترض أن $\hat{\mathbf{u}}$ هو متجه الوحدة للمتجه $\overrightarrow{AC}$، إذن:

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + |\overrightarrow{AC}| \cdot \hat{\mathbf{u}}$

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{BC}| \cdot (-\hat{\mathbf{u}}) = \overrightarrow{OB} + \frac{x}{y}|\overrightarrow{AC}| \cdot (-\hat{\mathbf{u}})$

$2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + |\overrightarrow{AC}| \cdot \hat{\mathbf{u}} + \overrightarrow{OB} + \frac{x}{y}|\overrightarrow{AC}| \cdot (-\hat{\mathbf{u}})$

$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \left(1 - \frac{x}{y}\right)|\overrightarrow{AC}| \cdot \hat{\mathbf{u}}$

$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \left(1 - \frac{x}{y}\right)\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{x}{y}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \left(1 - \frac{x}{y}\right)\overrightarrow{OC}$

$\left(1 + \frac{x}{y}\right)\overrightarrow{OC} = \frac{x}{y}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

$\frac{1}{y}\overrightarrow{OC} = \frac{x}{y}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OC} = x\,\overrightarrow{OA} + y\,\overrightarrow{OB}$

.40 a. إذا اعتمدنا النتيجة التي توصّلنا إليها في الفرع b من التمرين السابق، وطبقناها على المثلثات AOB و AOC و BOC.
نستنتج أن، $x = y = \frac{1}{2}$،
وبالتالي، $\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OM_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OM_3} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$

.b إذا عوضنا قيمة $\overrightarrow{OM_1}$ التي حسبناها في الفرع a نحصل على:

$\overrightarrow{CO} + 2\overrightarrow{M_1O} = \overrightarrow{CO} - 2\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right) = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO}$

بنفس الطريقة نجد:

$\overrightarrow{AO} + 2\overrightarrow{M_2O} = \overrightarrow{AO} - 2\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right) = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{BO}$

$\overrightarrow{BO} + 2\overrightarrow{M_3O} = \overrightarrow{BO} - 2\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right) = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CO}$

.c بما أنّ النقطة O تقسم كل وسيط بالنسبة 1:2، إذن

$\overrightarrow{CO} + 2\overrightarrow{M_1O} = \overrightarrow{AO} + 2\overrightarrow{M_2O} = \overrightarrow{BO} + 2\overrightarrow{M_3O} = 0$

وبما أن $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} = 0$، يصبح واضحًا لماذا يؤكد الفرع b صحة النتيجة المطلوبة.

.41 إذا كانت C تقع على المستقيم L، يمكننا أن نستنتج من التمرين b 39 ما يلي: بما أن $t + (1 - t) = 1$، فإن:
$\overrightarrow{OC} = t\overrightarrow{OA} + (1 - t)\overrightarrow{OB}$

وإذا كان $\overrightarrow{OC} = t\overrightarrow{OA} + (1 - t)\overrightarrow{OB}$، فإن:

$\langle x, y\rangle = t\langle x_A, y_A\rangle + (1 - t)\langle x_B, y_B\rangle$

$x = tx_A + (1 - t)x_B = t(x_A - x_B) + x_B$

$y = ty_A + (1 - t)y_B = t(y_A - y_B) + y_B$

$|\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{CB}| = \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2} + \sqrt{(x_B - x)^2 + (y_B - y)^2}$

$= \sqrt{[t(x_A - x_B) + x_B - x_A]^2 + [t(y_A - y_B) + y_B - y_A]^2}$
$+ \sqrt{[-t(x_A - x_B)]^2 + [-t(y_A - y_B)]^2}$

$= \sqrt{(1 - t)^2(x_B - x_A)^2 + (1 - t)^2(y_B - y_A)^2}$
$+ \sqrt{t^2(x_B - x_A)^2 + t^2(y_B - y_A)^2}$

لتكن t عدد حقيقي حيث $0 \leq t \leq 1$، إذن

$|\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{CB}| = [(1 - t) + t]\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$= |\overrightarrow{AB}|$

إذن، تقع النقاط A و B و C على نفس المستقيم، وبالتالي تقع النقطة C على المستقيم L.

6.3 الضرب القياسي للمتجهات Scalar Product of Vectors

الضرب القياسي

هناك نوعان من ضرب المتجهات، وقد نشأ كلاهما عن حاجات تطبيقية. الأول هو **الضرب الاتجاهي** الذي ينتج عنه متجه جديد يشكّل زاوية قائمة مع المستوى الذي يتضمّن المتجهين الذين أُجريَ عليهما عملية الضرب والذي يأخذنا إلى بعد ثالث وهو خارج اهتمامنا في هذه الوحدة، والثاني هو **الضرب القياسي** الذي ينتج عنه عدد حقيقي يعطي معلومة هندسية عن المتجهين اللذين أُجريَ عليهما عملية الضرب، ما يضفي على هذا النوع من ضرب المتجهات أهمية خاصة.

لتبسيط هذا التعريف، سوف نجمع بين المتجه والسهم الذي يمثّله في عبارة واحدة. على سبيل المثال، إذا كان السهم $\overrightarrow{PQ}$ يمثّل المتجه **u**، نكتب $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$. كذلك سوف نستعمل للتعبير عن متجه كلا الصيغتين: الصيغة التركيبية $\langle a, b\rangle$ والصيغة $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$.

الضرب القياسي لمتجهين

الضرب القياسي للمتجه $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2\rangle$ في المتجه $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2\rangle$ هو:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2$$

مثال 1 إيجاد الضرب القياسي

أوجد الضرب القياسي في كل من الحالات التالية.

A. $\langle 3, 4\rangle \cdot \langle 5, 2\rangle$

B. $\langle 1, -2\rangle \cdot \langle -4, 3\rangle$

C. $(2\mathbf{i} - \mathbf{j}) \cdot (3\mathbf{i} - 5\mathbf{j})$

الحل

A. $\langle 3, 4\rangle \cdot \langle 5, 2\rangle = (3)(5) + (4)(2) = 23$

B. $\langle 1, -2\rangle \cdot \langle -4, 3\rangle = (1)(-4) + (-2)(3) = -10$

C. $(2\mathbf{i} - \mathbf{j}) \cdot (3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}) = (2)(3) + (-1)(-5) = 11$

حاول أن تحل التمرينين 3 و 5

ما ستتعلّمه
- الضرب القياسي
- الزاوية بين متجهين

... ولماذا
للضرب القياسي لمتجهين والعدد الحقيقي الذي ينتج عنه أهمية كبيرة في الرياضيات وفي سائر العلوم التطبيقية، فيساعدنا في دراسة القوى وتأثيرها على الأجسام والشغل الناشئ عنها.

معايير الدرس
12A.7.6
12A.7.8

المصطلحات
- الضرب الاتجاهي vector product
- الضرب القياسي scalar product

الهدف

سوف يتعلم الطلاب الضرب القياسي للمتجهات وكيفية استعماله لإيجاد قياس زاوية بين متجهين.

دليل الدرس

1. شرح الضرب القياسي للمتجهات
2. شرح كيفية إيجاد قياس زاوية بين متجهين

تحفيز

اطلب من الطلاب أن يرسموا المتجه $\mathbf{u} = \langle 2, 1\rangle$ والمتجه $\mathbf{v} = \langle -1, 2\rangle$، ثم اسألهم إن كانوا يلاحظون أنهما متعامدان، ثم اسألهم ما إذا كانت هناك علاقة بين مركبات المتجهين.

الضرب القياسي ومتجهي الوحدة القياسيين

$$(u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}) \cdot (v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}) = v_1u_1 + u_2v_2$$

أسئلة للتفكر

س: هل إذا كان $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ فإن $\mathbf{u} = 0$ أو $\mathbf{v} = 0$؟ وضّح إجابتك.

نموذج إجابة:

كلا، لنأخذ مثلًا المتجهين $\mathbf{u} = \langle 1, 4\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -4, 1\rangle$،

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \langle 1, 4\rangle\langle -4, 1\rangle = (1)(-4) + (4)(1) = -4 + 4 = 0$$

للضرب القياسي عدد من الخصائص المهمة التي سنعمل على برهان بعضها ونترك بعضها الآخر لنعالجها في التمارين.

خصائص الضرب القياسي

لتكن $\mathbf{w}$ و $\mathbf{v}$ و $\mathbf{u}$ متجهات، وليكن c عددًا حقيقيًا.

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
2. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$
3. $\mathbf{0} \cdot \mathbf{u} = 0$
4. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
5. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$
6. $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v}) = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$

ليكن $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ و $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$.

برهان **الخاصية 1:**

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2$ نستعمل تعريف $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

$= v_1u_1 + v_2u_2$ الخاصية الإبدالية لضرب الأعداد الحقيقية

$= \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ نستعمل تعريف $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

برهان **الخاصية 2:**

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2$ نستعمل تعريف $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

$= \left(\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\right)^2$

$= |\mathbf{u}|^2$ نستعمل تعريف $|\mathbf{u}|$

تعطينا الخاصية 2 للضرب القياسي طريقة ثانية لإيجاد مقادير المتجهات، كما يبيّن المثال التالي.

مثال 2 إيجاد طول المتجه باستعمال الضرب القياسي

أوجد مقدار (طول) المتجه $\mathbf{u} = \langle 4, -3 \rangle$ باستعمال الضرب القياسي.

الحل

استعمل القاعدة الثانية لضرب المتجهات:

$$|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$$

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{\langle 4, -3 \rangle \cdot \langle 4, -3 \rangle}$$

$$= \sqrt{(4)(4) + (-3)(-3)} = \sqrt{25} = 5$$

حاول أن تحل التمرينين 9 و 12

ملاحظة تقنية

تقوم بعض الحاسبات بالعمليات على المتجهات بشكل مباشر، ويقوم بعضها الآخر بهذه العملية باستعمال المصفوفات، وهي طريقة يمكن تعلمها ورقيًا أيضًا.

أسئلة للتفكر

س: إذا كان $\hat{\mathbf{u}}$ متجه وحدة، فهل نحتاج إلى معرفة مركبتيه لإيجاد ناتج الضرب القياسي $\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{u}}$

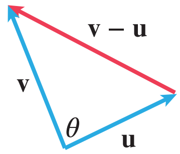
نموذج إجابة:

كلا،

$$\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{u}} = |\hat{\mathbf{u}}|^2 = 1$$

الزاوية بين متجهين

ليكن **u** و **v** متجهين غير صفريين في الوضع القياسي كما هو مبين في الشكل 6.3.1



الشكل 6.3.1 الزاوية بين **u** و **v** هي الزاوية θ حيث $0 \le \theta \le \pi$ أو $0° \le \theta \le 180°$

الزاوية بين متجهين هي الزاوية بين السهمين اللذين يمثّلانهما في الوضع القياسي. سوف نستعمل الضرب القياسي لإيجاد قياس الزاوية بين متجهين كما تبين النظرية التالية.

نظرية الزاوية بين متجهين

إذا كانت θ هي الزاوية بين المتجهين **v** و **u** ($\mathbf{v} \ne 0$ و $\mathbf{u} \ne 0$) فإن

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}\right)$$

البرهان:

نستعمل قاعدة جيب التمام في المثلث الذي يتكوّن من **u** و **v** و **v − u** (انظر الشكل 6.3.1).

$$|\mathbf{v}-\mathbf{u}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta$$

باستعمال خاصية 2 للضرب القياسي: $(\mathbf{v}-\mathbf{u})\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{u}) = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta$

باستعمال الخاصية التوزيعية: $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} - \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta$

باستعمال خاصية 2 للضرب القياسي: $|\mathbf{v}|^2 - 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + |\mathbf{u}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta$

نطرح الحدود المتساوية من طرفي المعادلة: $-2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = -2|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta$

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}\right)$$

للطلاب سريعي الإنجاز

(مع المثال 2) قد يتسرع بعض الطلاب فيكتبون بشكل غير صحيح:

$$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$$

غير أن هذا الخطأ قد يدفع آخرين إلى السؤال عما إذا كانت هناك علاقة بين القيمة المطلقة للضرب القياسي لمتجهين وضرب مقداريهما.

يمكننا أن نثبت أن $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \le |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$ في كل حالة، وهو ما سنتحقق من صحته بعد ربط الضرب القياسي للمتجهين بقياس الزاوية بينهما.

س: أثبت أن $2ab \le a^2 + b^2$ لأي عددين حقيقيين a و b.

نموذج إجابة:

$$(a-b)^2 \ge 0$$
$$a^2 + b^2 - 2ab \ge 0$$

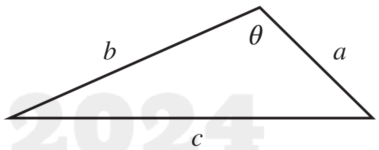
إذن،

$$a^2 + b^2 \ge 2ab$$

قاعدة جيب التمام

إذا كانت θ هي زاوية في مثلث كما يبين الشكل، فإن قاعدة جيب التمام تنص على التالي:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$



(تابع)

س: أثبت أن $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \le |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$.

نموذج إجابة:

ليكن $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2\rangle$:

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$
$$(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2 = (u_1 v_1 + u_2 v_2)^2$$
$$= (u_1 v_1)^2 + (u_2 v_2)^2 + 2\,u_1 v_1 u_2 v_2$$

من جهة أخرى

$$|\mathbf{u}|^2 = u_1^2 + u_2^2$$
$$|\mathbf{v}|^2 = v_1^2 + v_2^2$$
$$|\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 = (u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2)$$
$$= (u_1 v_1)^2 + (u_2 v_2)^2 + (u_1 v_2)^2 + (u_2 v_1)^2$$

بالعودة إلى المعادلة السابقة، لاحظ أن

$$(u_1 v_2)^2 + (u_2 v_1)^2 \ge 2\,u_1 v_1 u_2 v_2$$

إذن،

$$|\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 \ge (u_1 v_1)^2 + (u_2 v_2)^2 + 2\,u_1 v_1 u_2 v_2$$
$$|\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 \ge (u_1 v_1 + u_2 v_2)^2$$
$$|\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2 \ge |\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|^2$$

وبالتالي، $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| \le |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$.

مثال 3 إيجاد قياس زاوية بين متجهين

استعمل طريقة جبرية لإيجاد قياس الزاوية بين المتجهين v و u في الحالتين التاليتين. استعمل الحاسبة عند الحاجة لإيجاد قيمة تقريبية للإجابة الدقيقة.

A. $\mathbf{u} = \langle 2, 3 \rangle, \mathbf{v} = \langle -2, 5 \rangle$

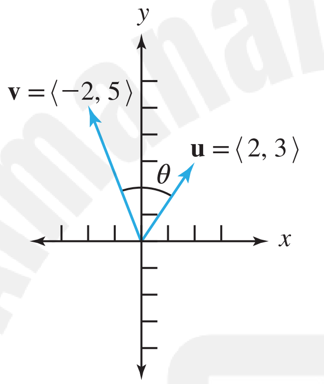
B. $\mathbf{u} = \langle 2, 1 \rangle, \mathbf{v} = \langle -1, -3 \rangle$

الحل

A. انظر الشكل a واستعمل قاعدة إيجاد قياس الزاوية بين متجهين.

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = \frac{\langle 2, 3\rangle \cdot \langle -2, 5\rangle}{|\langle 2, 3\rangle||\langle -2, 5\rangle|} = \frac{11}{\sqrt{13}\sqrt{29}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{11}{\sqrt{13}\sqrt{29}}\right) \approx 55.5°$$

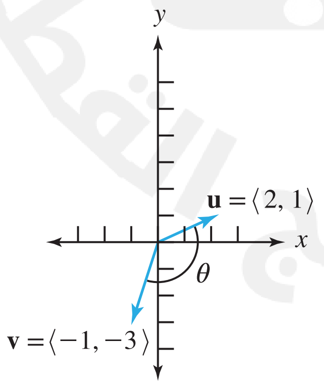


(a)

B. انظر الشكل b واستعمل قاعدة إيجاد قياس الزاوية بين متجهين.

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = \frac{\langle 2, 1\rangle \cdot \langle -1, -3\rangle}{|\langle 2, 1\rangle||\langle -1, -3\rangle|} = \frac{-5}{\sqrt{5}\sqrt{10}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = 135°$$



(b)

حاول أن تحل التمرينين 13 و 17

أسئلة للتفكر

س: هل يمكننا القول إن للمتجهين **u** و **v** نفس الاتجاه فقط إذا كان $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$؟

نموذج إجابة:

نعم، لأن **u** و **v** لا يكون لهما نفس الاتجاه إلا إذا كانت الزاوية بينهما $\theta = 0°$

وبالتالي

$$\cos\theta = 1$$

إذن

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = 1$$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$$

للطلاب الذين يواجهون صعوبات

(مع المثال 3) قد يحتاج بعض الطلاب إلى مزيد من التدرب على إيجاد قياسات الزوايا بين المتجهات.

س: أوجد قياس الزاوية بين المتجهين في كل من الحالتين التاليتين.

1. $\mathbf{u} = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 0 \rangle$

2. $\mathbf{v} = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle, \mathbf{v} = \langle 0, 1 \rangle$

نموذج إجابة:

1. $\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = \frac{\left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle \cdot \langle 1, 0 \rangle}{\sqrt{\frac{2}{4}+\frac{2}{4}} \times \sqrt{1+0}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45°$

2. $\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = \frac{\left\langle \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle \cdot \langle 0, 1 \rangle}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} \times \sqrt{0+1}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30°$

يكون $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ ($\mathbf{u} \neq 0$ و $\mathbf{v} \neq 0$) فقط عندما تكون الزاوية بينهما قائمة لأن

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos 90°$$

و $\cos 90° = 0$.

المتجهان المتعامدان

يكون المتجهان غير الصفريين $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ متعامدين إذا كان $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

وفق هذا التعريف، يمكن القول إن الزاوية بين متجهين غير صفريين تكون قائمة إذا كان المتجهان متعامدين. أما إذا كان أحد المتجهين أو كلاهما صفرًا، فلا تعود هناك إمكانية للحديث عن زاوية بين المتجهين لأن المتجه الصفري لا زاوية اتجاه له.

مثال 4 إثبات تعامد متجهين

أثبت أن المتجه $\mathbf{u} = \langle 2, 3 \rangle$ والمتجه $\mathbf{v} = \langle -6, 4 \rangle$ متعامدان.

الحل

لإثبات أن المتجهين متعامدان يكفي أن تثبت أن ضربهما القياسي يساوي الصفر.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \langle 2, 3 \rangle \cdot \langle -6, 4 \rangle = -12 + 12 = 0$$

إذن المتجهان متعامدان.

أسئلة للتفكر

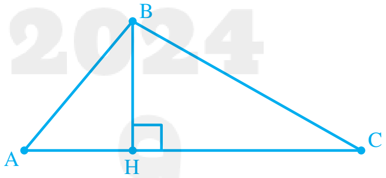
س: إذا كان المتجهان $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ متعامدين، هل يمكننا أن نكتب $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$؟

نموذج إجابة:

نعم، نستعمل خاصية التوزيع

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \\ &= 0 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \end{aligned}$$

س: كيف يمكن الإفادة من ذلك لإثبات أن $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AH\ AC$



نموذج إجابة:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}\right) \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} + 0 \\ &= AH\ AC \cos 0 \\ &= AH\ AC \end{aligned}$$

حاول أن تحل التمرين 23

يعدّ قياس الشغل الناتج عن قوة $\mathbf{F}$ مقدارها ثابت تحرّك جسمًا من النقطة A إلى النقطة B بالاتجاه $\overrightarrow{AB}$ مثالًا على التطبيقات المهمة للضرب القياسي.

إذا كان اتجاه القوة الثابتة $\mathbf{F}$ في نفس اتجاه $\overrightarrow{AB}$، فإن الشغل يساوي

$$\mathbf{W} = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB}$$

وإن لم يكن كذلك فإن الشغل يساوي

$$\mathbf{W} = |\mathbf{F}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos \theta$$

حيث θ هي الزاوية بين $\mathbf{F}$ و $\overrightarrow{AB}$.

بغض النظر عن الإشارة، فإن الشغل هو ناتج ضرب مقدار القوة التي تحرك الجسم من A باتجاه B في $\overrightarrow{AB}$.

أسئلة للتفكر

س: ما هي القوة F التي مقدارها 10 N وتحقق أقصى قيمة للشغل؟

نموذج إجابة:

بما أن الشغل هو $W = F \cdot \overrightarrow{AB} = |F|\ |\overrightarrow{AB}| \cos\theta$

وبما أن $\cos\theta \le 1$، فإن أقصى قيمة للشغل هي عندما يكون اتجاه F نفس اتجاه $\langle 3, 0\rangle$، ويمكننا التحقق من صحة ذلك بالتجربة.

وحدة الشغل

يتم قياس الشغل عادة باستعمال القدم-باوند أو نيوتن-متر. تتم الإشارة عادة إلى 1 نيوتن-متر على أنه 1 جول (1 **J**).

متابعة

ناقش مع الطلاب كيف يمكن تعريف الضرب القياسي بين متجهين من خلال إيجاد الزاوية بينهما.

ملاحظات على التمارين

التمارين 1-12، تدرب الطالب على استعمال الضرب القياسي لمتجهين وإيجاد قيمته.

التمارين 13-34، تدرب الطالب على إيجاد قياس الزاوية بين متجهين.

التمارين 48-51، تدرب الطالب على أنماط من الاختبارات.

مثال 5 **إيجاد الشغل**

أوجد الشغل الناشئ عن قوة مقدارها 10 نيوتن (N) في الاتجاه $\langle 1, 2\rangle$ عند تحريك جسم من النقطة $(0, 0)$ إلى النقطة $(3, 0)$.

الحل

إذا كان مقدار القوة **F** هو 10 نيوتن (N) في الاتجاه $\langle 1, 2\rangle$، فإن

$$\mathbf{F} = 10 \cdot \frac{\langle 1, 2\rangle}{|\langle 1, 2\rangle|} = \frac{10}{\sqrt{5}}\langle 1, 2\rangle$$

المتجه الذي يعبّر عن الحركة من $A(0, 0)$ إلى $B(3, 0)$ هو $\overrightarrow{AB} = \langle 3, 0\rangle$.

إذن الشغل يساوي

$$\mathbf{W} = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{10}{\sqrt{5}}\langle 1, 2\rangle \cdot \langle 3, 0\rangle = \frac{30}{\sqrt{5}} \approx 13.42\ \mathbf{J}$$

التقييم المستمر

التقييم الذاتي:

التمارين 1, 9, 19, 21, 23, 25, 27, 29

حاول أن تحل التمرين 37

مراجعة سريعة 6.3

في التمارين 1-4، أوجد $|\mathbf{u}|$ في كل حالة.

1. $\mathbf{u} = \langle 2, -3\rangle$
2. $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$
3. $\cos 35°\mathbf{i} + \sin 35°\mathbf{j}$
4. $2(\cos 75°\mathbf{i} + \sin 75°\mathbf{j})$

في التمارين 5-7، أوجد $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ و $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ في كل من الحالات التالية.

5. $\mathbf{u} = \langle 6, 5\rangle, \mathbf{v} = \langle -8, 1\rangle$
6. $\mathbf{u} = \langle -1, 10\rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 1\rangle$
7. $\mathbf{u} = \langle -3, 7\rangle, \mathbf{v} = \langle 0, 0\rangle$

في التمارين 8-10، أوجد $k\mathbf{u}$ في كل من الحالات التالية.

8. $\mathbf{u} = \langle -8, -10\rangle, k = 3$
9. $\mathbf{u} = \langle 3, 11\rangle, k = -7$
10. $\mathbf{u} = \langle 5, -2\rangle, k = 1$

الدرس 6.3 التمارين

في التمارين 1-8، أوجد الضرب القياسي للمتجهين **u** و **v**.

1. $\mathbf{u} = \langle 5, 3\rangle, \mathbf{v} = \langle 12, 4\rangle$
2. $\mathbf{u} = \langle -5, 2\rangle, \mathbf{v} = \langle 8, 13\rangle$
3. $\mathbf{u} = \langle 4, 5\rangle, \mathbf{v} = \langle -3, -7\rangle$
4. $\mathbf{u} = \langle -2, 7\rangle, \mathbf{v} = \langle -5, -8\rangle$
5. $\mathbf{u} = -4\mathbf{i} - 9\mathbf{j}, \mathbf{v} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
6. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j}, \mathbf{v} = -8\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$
7. $\mathbf{u} = 7\mathbf{i}, \mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$
8. $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - 11\mathbf{j}, \mathbf{v} = -3\mathbf{j}$

في التمارين 9-12، استعمل الضرب القياسي لإيجاد |**u**|.

9. $\mathbf{u} = \langle 5, -12 \rangle$ **10.** $\mathbf{u} = \langle -8, 15 \rangle$

11. $\mathbf{u} = -4\mathbf{i}$ **12.** $\mathbf{u} = 3\mathbf{j}$

في التمارين 13-22، استعمل الطريقة الجبرية لإيجاد قياس الزاوية بين المتجهين. استعمل الحاسبة لتقريب الإجابة إذا لزم الأمر.

13. $\mathbf{u} = \langle -4, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle -1, 5 \rangle$

14. $\mathbf{u} = \langle 2, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle -3, -3 \rangle$

15. $\mathbf{u} = \langle 2, 3 \rangle, \mathbf{v} = \langle -3, 5 \rangle$

16. $\mathbf{u} = \langle 5, 2 \rangle, \mathbf{v} = \langle -6, -1 \rangle$

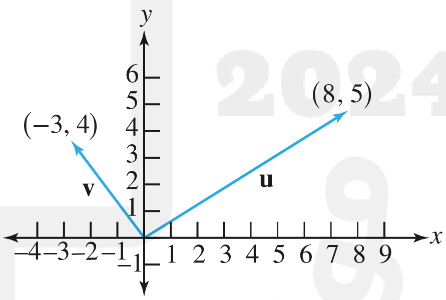
17. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j}, \mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 2\sqrt{3}\mathbf{j}$

18. $\mathbf{u} = -2\mathbf{i}, \mathbf{v} = 5\mathbf{j}$

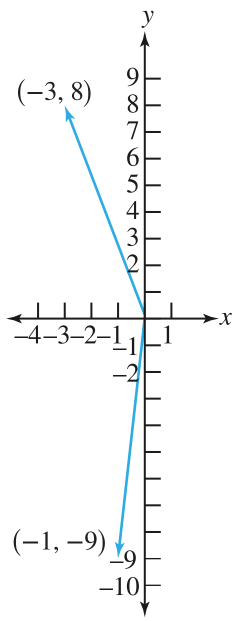
19. $\mathbf{u} = \left(2\cos\frac{\pi}{4}\right)\mathbf{i} + \left(2\sin\frac{\pi}{4}\right)\mathbf{j}, \mathbf{v} = \left(\cos\frac{3\pi}{2}\right)\mathbf{i} + \left(\sin\frac{3\pi}{2}\right)\mathbf{j}$

20. $\mathbf{u} = \left(\cos\frac{\pi}{3}\right)\mathbf{i} + \left(\sin\frac{\pi}{3}\right)\mathbf{j}, \mathbf{v} = \left(3\cos\frac{5\pi}{6}\right)\mathbf{i} + \left(3\sin\frac{5\pi}{6}\right)\mathbf{j}$

21.



22.



في التمرينين 23 و 24، أثبت أن المتجهين **u** و **v** متعامدان.

23. $\mathbf{u} = \langle 2, 3 \rangle, \mathbf{v} = \left\langle \frac{3}{2}, -1 \right\rangle$

24. $\mathbf{u} = \langle -4, -1 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, -4 \rangle$

في التمرينين 25 و 26، أوجد قياسات الزوايا الداخلية للمثلث حسب الرؤوس المعطاة.

25. $(-4, 5), (1, 10), (3, 1)$

26. $(-4, 1), (1, -6), (5, -1)$

في التمرينين 27 و 28، أوجد $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ الذي يحقق الشروط المعطاة حيث θ هي الزاوية بين المتجهين **u** و **v**.

27. $\theta = 150°, |\mathbf{u}| = 3, |\mathbf{v}| = 8$

28. $\theta = \frac{\pi}{3}, |\mathbf{u}| = 12, |\mathbf{v}| = 40$

في التمارين 29-34، حدد ما إذا كان المتجهان **u** و **v** متوازيين أم متعامدين أم غير ذلك.

29. $u = \langle 5, 3\rangle, v = \left\langle \frac{-5}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle$

30. $\mathbf{u} = \langle 2, 5\rangle, \mathbf{v} = \left\langle \frac{10}{3}, \frac{4}{3} \right\rangle$

31. $\mathbf{u} = \langle 15, -12\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 5\rangle$

32. $\mathbf{u} = \langle 5, -6\rangle, \mathbf{v} = \langle -12, -10\rangle$

33. $\mathbf{u} = \langle -3, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle 20, 15\rangle$

34. $\mathbf{u} = \langle 2, -7\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 14\rangle$

.35 **الشغل** أوجد الشغل الناشئ عن رفع سيارة كتلتها 2 600 lb إلى ارتفاع مقداره 5.5 ft

.36 **الشغل** أوجد الشغل الناشئ عن رفع كيس بطاطس كتلته 100 lb إلى ارتفاع مقداره 3 ft

.37 **الشغل** أوجد الشغل الناشئ عن قوة F قيمتها 12 N في اتجاه $\langle 1, 2\rangle$ لتحريك جسم مسافة 4 m من النقطة $(0, 0)$ إلى النقطة $(4, 0)$.

.38 **الشغل** أوجد الشغل الناشئ عن قوة F قيمتها 24 N في اتجاه $\langle 4, 5\rangle$ لتحريك جسم مسافة 5 m من النقطة $(0, 0)$ إلى النقطة $(5, 0)$.

.39 **الشغل** أوجد الشغل الناشئ عن قوة F قيمتها 30 N في اتجاه $\langle 2, 2\rangle$ لتحريك جسم مسافة 3 m من النقطة $(0, 0)$ إلى نقطة في الربع الأول على امتداد المستقيم $y = \frac{1}{2}x$.

.40 **الشغل** أوجد الشغل الناشئ عن قوة F قيمتها 50 N باتجاه $\langle 2, 3\rangle$ لتحريك جسم مسافة 5 m من النقطة $(0, 0)$ إلى نقطة في الربع الأول على امتداد المستقيم $y = x$.

.41 **الشغل** قياس الزاوية بين قوة F قيمتها 200 N والمتجه $\overrightarrow{AB} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ هو $30°$، أوجد الشغل الناشئ عن قيمة F اللازمة لتحريك جسم من A إلى B.

الكتابة للتعلم **الشغل** في التمارين 42-45، لتكن **u** و **v** و **w** متجهات وليكن c عددًا حقيقيًا. استعمل مركبات كل متجه لبرهان الخصائص التالية.

42. $\mathbf{0} \cdot \mathbf{u} = 0$

43. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

44. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

45. $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v}) = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$

.46 **نشاط جماعي** **الربط بين الهندسة والمتجهات** أثبت أن مجموع مربعَي طولَي القطرين في متوازي الأضلاع يساوي مجموع مربعات أطوال أضلاعه.

.47 إذا كان u أي متجه، أثبت أن بالإمكان كتابته في الصورة

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{j})\mathbf{j}$$

أسئلة اختبار معيارية

.48 **صواب أم خطأ** إذا كان $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$، فإن **u** و **v** متعامدان. برّر إجابتك.

.49 **صواب أم خطأ** إذا كان $\hat{\mathbf{u}}$ متجه وحدة، فإن $\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{u}} = 1$. برّر إجابتك.

حل التمرينين التاليين من دون استعمال الحاسبة.

.50 **اختيار من متعدد** ليكن $\mathbf{u} = \langle 1, 1\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -1, 1\rangle$. أي الخيارات التالية يساوي قياس الزاوية الواقعة بين **u** و **v**؟ D

A. $0°$

B. $45°$

C. $60°$

D. $90°$

E. $135°$

.51 **اختيار من متعدد** ليكن $\mathbf{u} = \langle 4, -5\rangle$ و $\mathbf{u} = \langle -2, -3\rangle$. أي الخيارات التالية يساوي $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$؟ C

A. -23

B. -7

C. 7

D. 23

E. $\sqrt{7}$

استكشاف

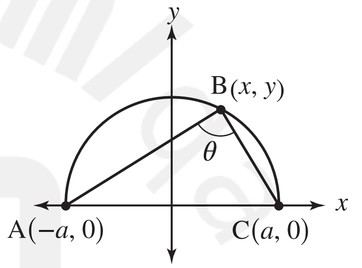
52. الكتابة للتعلم ليكن $\mathbf{w} = (\cos t)\mathbf{u} + (\sin t)\mathbf{v}$ حيث $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ متجهان غير متوازيين.

a. هل يمكن أن يكون المتجه $\mathbf{w}$ موازيًا للمتجه $\mathbf{u}$؟ وضّح إجابتك.

b. هل يمكن أن يكون المتجه $\mathbf{w}$ موازيًا للمتجه $\mathbf{v}$؟ وضّح إجابتك.

c. هل يمكن أن يكون المتجه $\mathbf{w}$ موازيًا للمتجه $\mathbf{u} + \mathbf{v}$؟ وضّح إجابتك.

53. الزوايا المحاطة بنصف الدائرة يبين الشكل أدناه الزاوية $\angle ABC$ المحاطة بالنصف العلوي من الدائرة $x^2 + y^2 = a^2$.



a. إذا كان $a = 2$، أوجد مركبات المتجهين $\mathbf{u} = \overrightarrow{BA}$ و $\mathbf{v} = \overrightarrow{BC}$.

b. أوجد $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ ماذا يمكنك أن تستنتج بالنسبة للزاوية θ بين هذين المتجهين؟

c. أعد حل الفرعين السابقين لأي قيمة عشوائية للعدد a.

توسيع الأفكار

54. إذا كان المتجهان $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ غير متوازيين، أثبت أن

$$a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = c\mathbf{u} + d\mathbf{v} \implies a = c, b = d$$

55. إيجاد المسافة بين نقطة ومستقيم ليكن L المستقيم الذي معادلته $2x + 5y = 10$، ولتكن $P(3, 7)$.

a. أثبت أن $A(0, 2)$ و $B(5, 0)$ هما المقطعان x و y لهذا المستقيم.

b. أثبت أن $\overrightarrow{AB}$ و $\mathbf{u} = \langle 2, 5 \rangle$ متعامدان.

c. لتكن $Q \in L$ بحيث تكون الزاوية بين (PQ) و L زاوية قائمة. أثبت أن $|\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{u}| = |\overrightarrow{PQ}| \cdot |\mathbf{u}|$.

d. أثبت أن $|\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{u}| = |\overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{u}|$ ثم استنتج قيمة المسافة بين P و L.

e. ما القاعدة العامة التي يمكن استنتاجها؟

إجابات أسئلة مراجعة سريعة 6.3

1. $|\mathbf{u}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$
2. $|\mathbf{u}| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$
3. $|\mathbf{u}| = \sqrt{(\cos 35°)^2 + (\sin 35°)^2} = 1$
4. $|\mathbf{u}| = \sqrt{(2\cos 75°)^2 + (2\sin 75°)^2}$
   $= 2\sqrt{(\cos 75°)^2 + (\sin 75°)^2} = 2$
5. $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \langle -2, 6\rangle,\ \mathbf{u}-\mathbf{v} = \langle 14, 4\rangle$
6. $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \langle 0, 11\rangle,\ \mathbf{u}-\mathbf{v} = \langle -2, 9\rangle$
7. $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \langle -3, 7\rangle,\ \mathbf{u}-\mathbf{v} = \langle -3, 7\rangle$
8. $k\mathbf{u} = \langle 3(-8), 3(-10)\rangle = \langle -24, -30\rangle$
9. $k\mathbf{u} = \langle -(73), -7(11)\rangle = \langle -21, -77\rangle$
10. $k\mathbf{u} = \langle 1(5), 1(-2)\rangle = \langle 5, -2\rangle$

إجابات أسئلة التمارين 6.3

1. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \langle 5, 3\rangle\cdot\langle 12, 4\rangle = 5\times 12 + 3\times 4 = 60 + 12 = 72$
2. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \langle -5, 2\rangle\cdot\langle 8, 13\rangle = (-5)\times 8 + 2\times 13 = -40 + 26 = -14$
3. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \langle 4, 5\rangle\cdot\langle -3, -7\rangle = 4\times(-3) + 5\times(-7) = -12 - 35 = -47$
4. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \langle -2, 7\rangle\cdot\langle -5, -8\rangle = (-2)\times(-5) + 7\times(-8) = 10 - 56 = -46$
5. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (-4\mathbf{i} - 9\mathbf{j})\cdot(-3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) = (-4)\times(-3) + (-9)\times(-2)$
   $= 12 + 18 = 30$
6. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (2\mathbf{i} - 4\mathbf{j})\cdot(-8\mathbf{i} + 7\mathbf{j}) = 2\times(-8) + (-4)\times 7$
   $= -16 - 28 = -44$
7. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (7\mathbf{i})\cdot(-2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) = 7\times(-2) + 0\times(5) = -14$
8. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (4\mathbf{i} - 11\mathbf{j})\cdot(-3\mathbf{j}) = 4\times 0 + (-11)\times(-3) = 33$
9. $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}} = \sqrt{\langle 5, -12\rangle\cdot\langle 5, -12\rangle} = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = 13$
10. $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}} = \sqrt{\langle -8, 15\rangle\cdot\langle -8, 15\rangle} = \sqrt{(-8)^2 + 15^2}$
    $= \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17$
11. $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}} = \sqrt{(-4\mathbf{i})\cdot(-4\mathbf{i})} = \sqrt{16} = 4$
12. $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}} = \sqrt{(3\mathbf{j})\cdot(3\mathbf{j})} = \sqrt{9} = 3$
13. $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{4 - 15}{\sqrt{16+9}\cdot\sqrt{1+25}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-11}{5\sqrt{26}}\right)$
    $\approx \cos^{-1}\left(\frac{-11}{5\sqrt{26}}\right) \approx 115.56°$
14. $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-6+6}{\sqrt{4+4}\cdot\sqrt{9+9}}\right) = \cos^{-1}(0) = 90°$
15. $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-6+15}{\sqrt{4+9}\cdot\sqrt{9+25}}\right)$
    $= \cos^{-1}\left(\frac{9}{\sqrt{13\times 34}}\right) \approx 64.65°$
16. $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-30-2}{\sqrt{25+4}\cdot\sqrt{36+1}}\right)$
    $= \cos^{-1}\left(\frac{-32}{\sqrt{29\times 37}}\right) \approx 167.66°$
17. $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-6 - 6\sqrt{3}}{\sqrt{9+9}\cdot\sqrt{4+12}}\right)$
    $= \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) \approx 165°$
18. $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{(-2)\times 0 + 0\times 5}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{25}}\right) = \cos^{-1}(0) \approx 90°$
19. $\mathbf{u} = \left(2\cos\frac{\pi}{4}\right)\mathbf{i} + \left(2\sin\frac{\pi}{4}\right)\mathbf{j} = \left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)\mathbf{j} = \sqrt{2}\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j}$
    $\mathbf{v} = \left(\cos\frac{3\pi}{2}\right)\mathbf{i} + \left(\sin\frac{3\pi}{2}\right)\mathbf{j} = 0\mathbf{i} + (-1)\mathbf{j} = -\mathbf{j}$
    $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{0 - \sqrt{2}}{\sqrt{2+2}\cdot\sqrt{0+1}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = 135°$
20. $\mathbf{u} = \left(\cos\frac{\pi}{3}\right)\mathbf{i} + \left(\sin\frac{\pi}{3}\right)\mathbf{j} = \left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathbf{j}$
    $\mathbf{v} = \left(3\cos\frac{5\pi}{6}\right)\mathbf{i} + \left(3\sin\frac{5\pi}{6}\right)\mathbf{j} \approx \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{3}{2}\right)\mathbf{j}$
    $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-\frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}\cdot\sqrt{\frac{27}{4}+\frac{9}{4}}}\right) = \cos^{-1}(0) = 90°$
21. $\mathbf{u} = \langle 8, 5\rangle,\ \mathbf{v} = \langle -3, 4\rangle$
    $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-24+20}{\sqrt{64+25}\cdot\sqrt{9+16}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-4}{\sqrt{89\times 25}}\right)$
    $\approx 94.86°$
22. $\mathbf{u} = \langle -3, 8\rangle,\ \mathbf{v} = \langle -1, -9\rangle$
    $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{3 - 72}{\sqrt{9+64}\cdot\sqrt{1+81}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-69}{\sqrt{73\times 82}}\right)$
    $\approx 153.10°$
23. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \langle 2, 3\rangle\cdot\left\langle\frac{3}{2}, -1\right\rangle = 3 - 3 = 0$

    إذن، **u** و **v** متعامدان.
24. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \langle -4, -1\rangle\cdot\langle 1, -4\rangle = -4 + 4 = 0$

    إذن، **u** و **v** متعامدان.

27. $\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|}$

$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta = 3\times 8\times\cos 150° = 3\times 8\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -12\sqrt{3}$

28. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta = 12\times 40\times\cos\frac{\pi}{3} = 240$

29. $\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|} = \frac{\left(-\frac{50}{4}-\frac{9}{2}\right)}{\sqrt{(25+9)\cdot\left(\frac{100}{16}+\frac{9}{4}\right)}} = \frac{-17}{\sqrt{289}} = -1$

إذن، **u** و **v** متوازيان وفي اتجاهين متضادين لأن قيمة $\cos\theta = -1$، فيكون قياس الزاوية 180°، بينما عندما $\cos\theta = 1$ يكون قياس الزاوية 0 ويكون المتجهان متوازيين وفي نفس الاتجاه.

30. $\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|} = \frac{\left(\frac{20}{3}+\frac{20}{3}\right)}{\sqrt{(4+25)\cdot\left(\frac{100}{9}+\frac{16}{9}\right)}} = \frac{\frac{40}{3}}{\sqrt{29\times\frac{116}{9}}} = \frac{40}{58} = \frac{20}{29}$

إذن، **u** و **v** غير متوازيين وغير متعامدين.

31. $\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|} = \frac{(-60-60)}{\sqrt{(225+144)\cdot(16+25)}} = \frac{-120}{\sqrt{369\times 41}} = -\frac{40}{41}$

إذن، **u** و **v** غير متوازيين وغير متعامدين.

32. $\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|} = \frac{(-60+60)}{\sqrt{(25+36)\cdot(144+100)}} = 0$

إذن، **u** و **v** متعامدان.

33. $\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|} = \frac{(-60+60)}{\sqrt{(9+16)\cdot(400+225)}} = 0$

إذن، **u** و **v** متعامدان.

34. $\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|} = \frac{(-8-98)}{\sqrt{(4+49)\cdot(16+196)}} = -\frac{106}{\sqrt{53\times 212}} = -1$

إذن، **u** و **v** متوازيان.

35. $\mathbf{F} = 2\,600\mathbf{j}$

$\overrightarrow{AB} = 5.5\mathbf{j}$

$\mathbf{W} = \mathbf{F}\cdot\overrightarrow{AB}$ القوتان لهما نفس الاتجاه لذلك $\cos\theta = 1$

$= 2\,600\times 5.5$

$= 14\,300$ ft.lb

36. $\mathbf{F} = 100\mathbf{j}$

$\overrightarrow{AB} = 3\mathbf{j}$

$\mathbf{W} = \mathbf{F}\cdot\overrightarrow{AB}$ القوتان لهما نفس الاتجاه لذلك $\cos\theta = 1$

$= 100\times 3$

$= 300$ ft.lb

37. $|\mathbf{F}| = 12$ N

$\mathbf{F} = 12\times\frac{\langle 1, 2\rangle}{|\langle 1, 2\rangle|} = \left\langle\frac{12}{\sqrt{5}}, \frac{24}{\sqrt{5}}\right\rangle$

$\overrightarrow{AB} = \langle 4, 0\rangle$

$\mathbf{W} = \mathbf{F}\cdot\overrightarrow{AB} = \left\langle\frac{12}{\sqrt{5}}, \frac{24}{\sqrt{5}}\right\rangle\cdot\langle 4, 0\rangle = \frac{48}{\sqrt{5}} + 0 = \frac{48}{\sqrt{5}} \approx 21.47$ N.m

38. $|\mathbf{F}| = 24$ N

$\mathbf{F} = 24\times\frac{\langle 4, 5\rangle}{|\langle 4, 5\rangle|} = \left\langle\frac{96}{\sqrt{41}}, \frac{120}{\sqrt{41}}\right\rangle$

$\overrightarrow{AB} = \langle 5, 0\rangle$

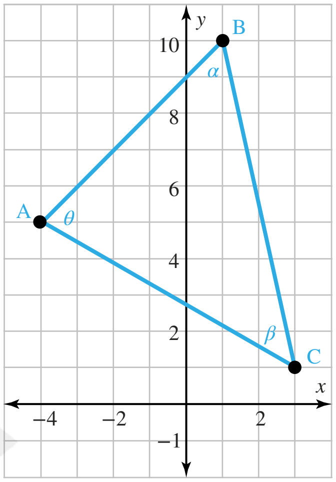
$\mathbf{W} = \mathbf{F}\cdot\overrightarrow{AB} = \left\langle\frac{96}{\sqrt{41}}, \frac{120}{\sqrt{41}}\right\rangle\cdot\langle 5, 0\rangle = \frac{480}{\sqrt{41}} + 0 = \frac{480}{\sqrt{41}} \approx 74.96$ N.m

25. $A(-4, 5), B(1, 10), C(3, 1)$

$\overrightarrow{AB} = \langle 5, 5\rangle, \overrightarrow{AC} = \langle 7, -4\rangle, \overrightarrow{BC} = \langle 2, -9\rangle$

لإيجاد قياس زاوية في مثلث بمعلومية إحداثيات رؤوسه باستعمال المتجهات، لا بد أن يكون للمتجهان نفس نقطة البداية. على سبيل المثال:

نستعمل $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ لإيجاد قياس الزاوية BAC وليس $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CA}$.



$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}\right)$

$= \cos^{-1}\left(\frac{35-20}{\sqrt{25+25}\cdot\sqrt{49+16}}\right)$

$= \cos^{-1}\left(\frac{15}{\sqrt{50\times 65}}\right)$

$\approx 74.74°$

$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}\right)$

$= \cos^{-1}\left(\frac{-10+45}{\sqrt{25+25}\cdot\sqrt{4+81}}\right)$

$= \cos^{-1}\left(\frac{35}{\sqrt{50\times 85}}\right)$

$\approx 57.53°$

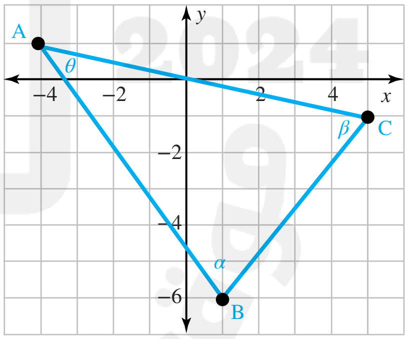
$\beta = 180° - \theta - \alpha \approx 180° - 74.74° - 57.53° \approx 47.73°$

26. $A(-4, 1), B(1, -6), C(5, -1)$

$\overrightarrow{AB} = \langle 5, -7\rangle, \overrightarrow{AC} = \langle 9, -2\rangle, \overrightarrow{BC} = \langle 4, 5\rangle$

لإيجاد قياس زاوية في مثلث بمعلومية إحداثيات رؤوسه باستعمال المتجهات، لا بد أن يكون للمتجهان نفس نقطة البداية. على سبيل المثال:

نستعمل $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ لإيجاد قياس الزاوية BAC وليس $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CA}$.



$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}\right)$

$= \cos^{-1}\left(\frac{45+14}{\sqrt{25+49}\cdot\sqrt{81+4}}\right)$

$= \cos^{-1}\left(\frac{59}{\sqrt{74\times 85}}\right)$

$\approx 41.93°$

$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}\right)$

$= \cos^{-1}\left(\frac{-20+35}{\sqrt{25+49}\cdot\sqrt{16+25}}\right)$

$= \cos^{-1}\left(\frac{15}{\sqrt{74\times 41}}\right)$

$\approx 74.20°$

$\beta = 180° - \theta - \alpha \approx 180° - 41.93° - 74.20° \approx 63.87°$

39. $|\mathbf{F}| = 30$ N

$\mathbf{F} = 30 \times \frac{\langle 2, 2\rangle}{|\langle 2, 2\rangle|} = \left\langle \frac{60}{\sqrt{8}}, \frac{60}{\sqrt{8}} \right\rangle = \left\langle \frac{30}{\sqrt{2}}, \frac{30}{\sqrt{2}} \right\rangle = \langle 15\sqrt{2}, 15\sqrt{2}\rangle$

$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = \sqrt{\left(x - 0\right)^2 + \left(\frac{x}{2} - 0\right)^2} = 3$

$\frac{5x^2}{4} = 9$

$x = \pm \frac{6}{\sqrt{5}}$

$x = \frac{6}{\sqrt{5}}$ لأن النقطة في الربع الأول

$y = \frac{3}{\sqrt{5}}$

$\mathrm{O}(0, 0)$, $\mathrm{B}\left(\frac{6}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \left\langle \frac{6}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}} \right\rangle$

$$\begin{aligned}\mathbf{W} = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} &= \langle 15\sqrt{2}, 15\sqrt{2}\rangle \cdot \left\langle \frac{6}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}} \right\rangle\\ &= 18\sqrt{10} + 9\sqrt{10}\\ &= 27\sqrt{10}\\ &\approx 85.38 \text{ N.m}\end{aligned}$$

40. $|\mathbf{F}| = 50$ N

$\mathbf{F} = 50 \times \frac{\langle 2, 3\rangle}{|\langle 2, 3\rangle|} = \left\langle \frac{100}{\sqrt{13}}, \frac{150}{\sqrt{13}} \right\rangle$

$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = \sqrt{\left(x - 0\right)^2 + (x - 0)^2} = 5$

$\sqrt{2x^2} = 5$

$2x^2 = 25$

$x^2 = \frac{25}{2}$

$x = \pm \frac{5\sqrt{2}}{2}$

$x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ لأن النقطة في الربع الأول

$y = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

إذن، $\mathrm{B}\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$ و $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \left\langle \frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2} \right\rangle$.

$$\begin{aligned}\mathbf{W} = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} &= \left\langle \frac{100}{\sqrt{13}}, \frac{150}{\sqrt{13}} \right\rangle \cdot \left\langle \frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2} \right\rangle\\ &= \frac{250\sqrt{2}}{\sqrt{13}} + \frac{375\sqrt{2}}{\sqrt{13}}\\ &= \frac{625\sqrt{2}}{\sqrt{13}}\\ &\approx 245.15 \text{ N.m}\end{aligned}$$

41. $|\mathbf{F}| = 200$ N

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

$\theta = 30°$

$$\begin{aligned}\mathbf{W} = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} &= |\mathbf{F}||\overrightarrow{\mathrm{AB}}| \cos\theta\\ &= 200 \times \sqrt{4 + 9} \times \cos 30°\\ &= 200 \times \sqrt{13} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\\ &= 100\sqrt{39}\\ &\approx 624.50 \text{ N.m}\end{aligned}$$

42. $0 \cdot \mathbf{u} = \langle 0, 0\rangle \cdot \langle u_1, u_2\rangle = 0 \times u_1 + 0 \times u_2 = 0 + 0 = 0$

43. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \langle u_1, u_2\rangle \cdot (\langle v_1, v_2\rangle + \langle w_1, w_2\rangle)$

$= \langle u_1, u_2\rangle \cdot \langle v_1 + w_1, v_2 + w_2\rangle$

$= u_1(v_1 + w_1) + u_2(v_2 + w_2)$

$= u_1 v_1 + u_1 w_1 + u_2 v_2 + u_2 w_2$ باستعمال خاصية التوزيع

$= (u_1 v_1 + u_2 v_2) + (u_1 w_1 + u_2 w_2)$ باستعمال خاصية الإبدال للجمع

$= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

44. $(\mathbf{v} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\langle u_1, u_2\rangle + \langle v_1, v_2\rangle) \cdot \langle w_1, w_2\rangle$

$= \langle u_1 + v_1, u_2 + v_2\rangle \cdot \langle w_1, w_2\rangle$

$= (u_1 + v_1)\, w_1 + (u_2 + v_2)\, w_2$

$= u_1 w_1 + v_1 w_1 + u_2 w_2 + u_2 w_2$ باستعمال خاصية التوزيع

$= (u_1 w_1 + u_2 w_2) + (v_1 w_1 + v_2 w_2)$ باستعمال خاصية الإبدال للجمع

$= \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

45. $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = (c\langle u_1, u_2\rangle) \cdot \langle v_1, v_2\rangle$

$= \langle cu_1, cu_2\rangle \cdot \langle v_1, v_2\rangle$

$= (cu_1)v_1 + (cu_2)v_2$

$= cu_1v_1 + cu_2v_2$

$= u_1(cv_1) + u_2(cv_2)$ باستعمال خاصية الإبدال للضرب

$= \langle u_1, u_2\rangle \cdot \langle cv_1, cv_2\rangle$

$= \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v})$

$(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = (c\langle u_1, u_2\rangle) \cdot \langle v_1, v_2\rangle$

$= \langle cu_1, cu_2\rangle \cdot \langle v_1, v_2\rangle$

$= (cu_1)v_1 + (cu_2)v_2$

$= cu_1v_1 + cu_2v_2$

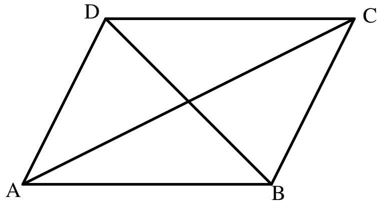
$= c(u_1v_1) + c(u_2v_2)$

$= c(u_1v_1 + u_2v_2)$ خاصية التوزيع للضرب

$= c(\langle u_1, u_2\rangle \cdot \langle v_1, v_2\rangle)$

$= c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$

.46 ليكن متوازي الأضلاع .ABCD



$$|\overrightarrow{DB}|^2 = |\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2 - 2|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AB}| \cos \angle BAD$$

$$|\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 - 2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}| \cos \angle ABC$$

$\angle BAD$ و $\angle ABC$ زاويتان متجاورتان في متوازي الأضلاع،

إذن هما متكاملتان وبالتالي: $B = 180° - \angle BAD$ و $\cos \angle ABC = -\cos \angle BAD$

بما أن

$$|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AD}|, |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$$

$$|\overrightarrow{DB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2 - 2|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AB}| \cos \angle BAD + |\overrightarrow{DC}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2$$
$$+ 2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}| \cos \angle BAD = |\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{DC}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2$$

47. $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} = (\langle u_1, u_2\rangle \cdot \langle 1, 0\rangle)\mathbf{i} + (\langle u_1, u_2\rangle \cdot \langle 0, 1\rangle)\mathbf{j}$
$= u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} = \mathbf{u}$

.48 خطأ. إذ قد يكون $\mathbf{u} = 0$ أو $\mathbf{v} = 0$.

.49 صواب. إذا كان $\hat{\mathbf{u}}$ متجه وحدة فإن: $\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{u}} = |\hat{\mathbf{u}}||\hat{\mathbf{u}}| \cos 0 = 1 \times 1 \times 1 = 1$.

.52 **.a** نعم. يكون المتجه **w** موازيًا للمتجه **u** عندما $\mathbf{v} = 0$ أو $\sin t = 0$
أي عند $t = 180°\, n, n \in \mathbb{Z}$.

.b نعم. يكون المتجه **w** موازيًا للمتجه **v** عندما $\mathbf{u} = 0$ أو $\cos t = 0$
أي عند $t = 90° + 180°\, n, n \in \mathbb{Z}$.

.c نعم، يكون المتجه **w** موازيًا للمتجه $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ عندما $\cos t = \sin t$
أي عند $t = 45° + 180°\, n, n \in \mathbb{Z}$.

53. **a.** $\mathbf{u} = \overrightarrow{BC} = \langle 2 - x, -y\rangle, \mathbf{u} = \overrightarrow{BA} = \langle -2 - x, -y\rangle$

b. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x^2 - 4 + y^2$

بما أن النقطة $B(x, y)$ تقع على نصف الدائرة، إذن $x^2 + y^2 = 4$،
وبالتالي $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ أي أن المتجهين متعامدان. إذن $\theta = 90°$.

c. $\mathbf{v} = \overrightarrow{BC} = \{a - x, -y\rangle, \mathbf{u} = \overrightarrow{BA} = \{-a - x, -y\rangle$

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x^2 - a^2 + y^2$

بما أن النقطة $B(x, y)$ تقع على نصف الدائرة، إذن $x^2 + y^2 = a^2$،
وبالتالي $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ أي أن المتجهين متعامدان. إذن $\theta = 90°$.

.54 لنفترض أن $a \neq c$.

$$a\mathbf{u} - c\mathbf{u} = d\mathbf{v} - b\mathbf{v}$$
$$(a - c)\mathbf{u} = (d - b)\mathbf{v}$$
$$\mathbf{u} = \frac{(d - b)}{a - c}\mathbf{v}$$

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}|} = \frac{\frac{(d-b)\mathbf{v}}{a-c} \cdot \mathbf{v}}{\left|\frac{(d-b)\mathbf{v}}{a-c}\right| \cdot |\mathbf{v}|} = \frac{\frac{d-b}{a-c}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}{\left|\frac{d-b}{a-c}\right||\mathbf{v}||\mathbf{v}|} = \frac{\frac{d-b}{a-c}|\mathbf{v}|^2}{\left|\frac{d-b}{a-c}\right||\mathbf{v}|^2} = \pm 1$$

إذن، **u** و **v** متوازيان وهذا ما يشكل تناقضًا مع المعطى.

إذن $a = c$، وبالتالي $b\mathbf{v} = d\mathbf{v}$ أي $b = d$.

55. **a.** $2 \times 0 + 5 \times 2 = 10$

إذن، $A(0, 2)$ هي المقطع y للمستقيم L.

$2 \times 5 + 5 \times 0 = 10$

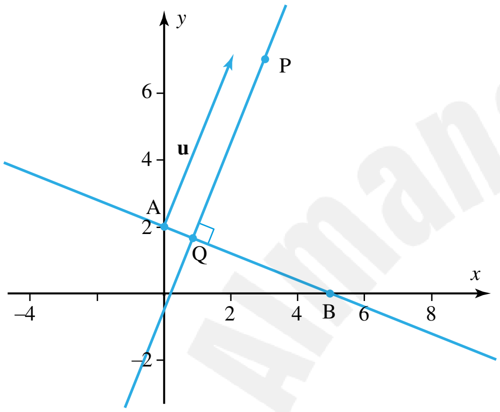
إذن، $B(5, 2)$ هي المقطع x للمستقيم L.

b. $\overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{u} = \langle 5 - 0, 0 - 2\rangle \cdot \langle 2, 5\rangle = 5 \times 2 - 2 \times 5$
$= 10 - 10 = 0$

إذن، $\overrightarrow{AB}$ و **u** متعامدان.

.c A و B يقعان على L. نستنتج من الجزء b أن L و **u** متعامدان.
وبما أنّ (PQ) و L متعامدان، نستنتج أنّ (PQ) و **u** متوازيان، أي
الزاوية θ بينهما تساوي $0°$ أو $180°$:

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{u} = |\overrightarrow{PQ}| \cdot |\mathbf{u}| \cos \theta = \pm \left[|\overrightarrow{PQ}| \cdot |\mathbf{u}|\right]$$



إذن، $|\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{u}| = \left|\pm|\overrightarrow{PQ}| \cdot |\mathbf{u}|\right| = \overrightarrow{PQ} \cdot |\mathbf{u}|$

d. $|\overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{u}| = \left||\overrightarrow{AP}| \cdot |\mathbf{u}| \cdot \cos(180° - \angle QPA)\right|$
$= \left|-|\overrightarrow{AP}| \cdot |\mathbf{u}| \cdot \cos \angle QPA\right|$
$= \left|-|\overrightarrow{AP}| \cdot |\mathbf{u}| \cdot \frac{|\overrightarrow{PQ}|}{|\overrightarrow{AP}|}\right|$ في المثلث قائم الزاوية PQA
$= |\mathbf{u}| \cdot |\overrightarrow{PQ}|$
$= |\overrightarrow{PQ}| \cdot |\mathbf{u}|$
$= |\overrightarrow{PQ}| \cdot |\mathbf{u}|$ باستعمال نتيجة الجزء c

$$|\overrightarrow{PQ}| \cdot |\mathbf{u}| = |\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{u}| = |\overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{u}| = |\langle 3 - 0, 7 - 2\rangle \cdot \langle 2, 5\rangle|$$
$$= |\langle 3, 5\rangle \cdot \langle 2, 5\rangle| = |6 + 25| = 31$$

$$|\overrightarrow{PQ}| = \frac{31}{|\mathbf{u}|} = \frac{31}{\sqrt{4 + 25}} = \frac{31}{\sqrt{29}} \approx 5.76$$

إذن، المسافة بين P و L هي 5.76

.e إذا كانت A نقطة معلومة على المستقيم L المتعامد مع المتجه **u**
و P نقطة خارج المستقيم L، فإن المسافة d بين P و L تكون على
الشكل التالي:

$$d = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{u}|}{|\mathbf{u}|}$$

6.4 المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد Vectors in Space

ما ستتعلّمه

- المتجهات في الفضاء
- الضرب القياسي للمتجهات في الفضاء

... ولماذا

الفضاء الثلاثي الأبعاد هو الفضاء الواقعي الذي نعيش فيه وندرس ظواهره، لذلك لا تُدرس المتجهات إلا في الفضاء الثلاثي الأبعاد.

معايير الدرس

12A.7.7

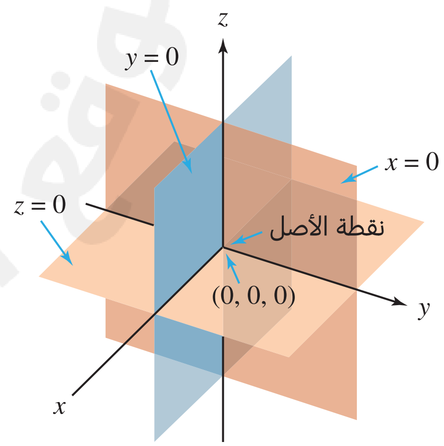
12A.7.8

المصطلحات

- الفضاء الثلاثي الأبعاد
three-dimensional space
- ثلاثي مرتب
ordered triple
- زوايا الاتجاه
direction angles
- جيوب التمام للاتجاه
direction cosines

الهدف

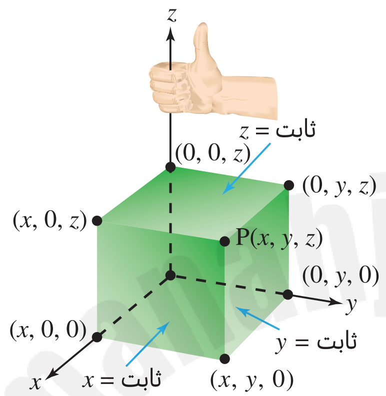
سوف يتعرف الطلاب على المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد وعلى الضرب القياسي لهذه المتجهات.



الشكل 6.4.2 تقسم المستويات الإحداثية الفضاء إلى ثمانية أثمان.

المتجهات في الفضاء

درسنا في الدروس السابقة المتجهات في المستوى الإحداثي الثنائي البعد واستعملنا في سبيل ذلك إحداثيات النقاط. إذا كان تحديد إحداثيَّي أي نقطة في المستوى الإحداثي الثنائي البعد من خلال محورين فقط، فإن تحديد إحداثيات النقاط في **الفضاء الثلاثي الأبعاد** يتطلب ثلاثة محاور، كل اثنان منها متعامدان، كما يبيّن الشكل 6.4.1



الشكل 6.4.1 يبين الشكل إحداثيات النقطة $P(x, y, z)$ في الفضاء الثلاثي الأبعاد.

لاحظ أن الشكل يبيّن خصائص مهمة للنظام الإحداثي الديكارتي الثلاثي الأبعاد:

- المحاور هي المحور x والمحور y والمحور z، وهي مرسومة بحيث أنك لو وجهت أصابعك نحو القيم الموجبة للمحور x وحركتها دائريًّا باتجاه القيم الموجبة للمحور y، فسيكون اتجاه إبهامك في اتجاه القيم الموجبة للمحور z.
- يمكن التعبير عن أي نقطة P في الفضاء من خلال **ثلاثي مرتب** (x, y, z) حيث x و y و z أعداد حقيقية تمثّل **الإحداثيات الديكارتية** للنقطة P.
- إحداثيات النقاط الواقعة على المحور x هي $(x, 0, 0)$ وإحداثيات النقاط الواقعة على المحور y هي $(0, y, 0)$، وإحداثيات النقاط الواقعة على المحور z هي $(0, 0, z)$.

يبيّن الشكل 6.4.2 **المستويات الإحداثية** الثلاثة.

- المستويات الإحداثية هي المستوى xy والمستوى xz والمستوى yz، ومعادلات هذه المستويات هي بالترتيب $x = 0$، $y = 0$، $z = 0$.
- إحداثيات النقاط الواقعة في المستوى xy هي $(x, y, 0)$ وإحداثيات النقاط الواقعة في المستوى xz هي $(x, 0, z)$، وإحداثيات النقاط الواقعة في المستوى yz هي $(0, y, z)$.
- تتقاطع هذه المستويات الثلاثة عند نقطة الأصل $(0, 0, 0)$.
- تقسم المستويات الإحداثية الفضاء إلى ثمانية أثمان، حيث يتضمن أول ثمن النقاط التي إحداثياتها الثلاثة موجبة.

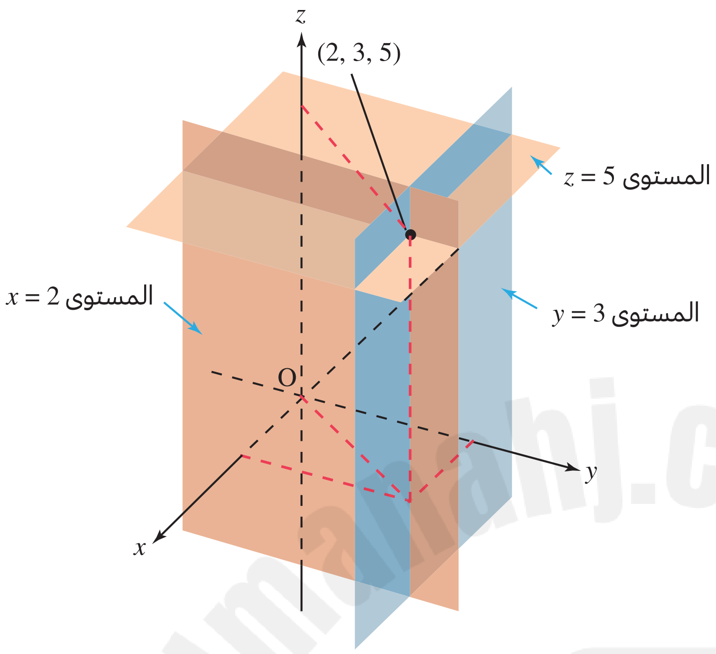
دليل الدرس

1. شرح المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد
2. شرح الضرب القياسي للمتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

تحفيز

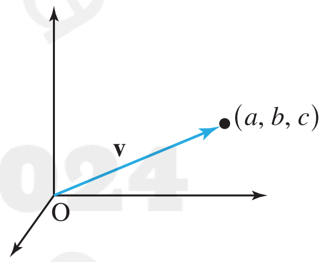
دع الطلاب يرسمون فضاءً ثلاثي الأبعاد، ثم اطلب منهم رسم متجهات في المستوى xy وكذلك متجهات (أسهم) خارج هذا المستوى.

لتحديد النقطة $(2, 3, 5)$ في الفضاء الإحداثي، نرسم المستويات $x = 2$ و $y = 3$ و $z = 5$ وهي تتوازى بالترتيب مع المستوى yz والمستوى xz والمستوى xy. النقطة $(2, 3, 5)$ هي نقطة تقاطع هذه المستويات كما يبيّن الشكل 6.4.3



الشكل 6.4.3 يبين الشكل النقطة $(2, 3, 5)$ التي تشكل تقاطع المستويات $x = 2$ و $y = 3$ و $z = 5$.

في الفضاء الإحداثي، تمامًا كما في المستوى الثنائي البعد، نسمي مجموعة القطع المستقيمة المتجهة (أو الأسهم) متجهات. يمكن تمثيل المتجه في الفضاء، باعتباره اتجاهًا ومقدارًا، بسهم يبدأ من نقطة الأصل وينتهي عند النقطة (a, b, c)، فنكتب أن المتجه هو الثلاثي المرتب $\langle a, b, c\rangle$ لتمييزه عن النقطة (a, b, c) (انظر الشكل 6.4.4).

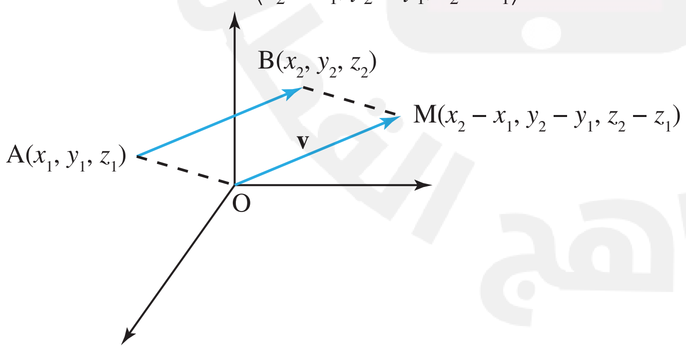


الشكل 6.4.4 يبين الشكل تمثيل المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b, c\rangle$ من خلال سهم يبدأ من نقطة الأصل وينتهي عند النقطة (a, b, c).

إذا لم تكن نقطة البداية للمتجه عند نقطة الأصل، تُعمِّم النظرية التالية الرمز السابق ليستعمل في التعبير عن المتجه في أية وضعية:

إذا كان $\overrightarrow{AB}$ متجهًا بنقطة بداية هي $A(x_1, y_1, z_1)$ ونقطة نهاية هي $B(x_2, y_2, z_2)$، يكون عندها

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\rangle$$



الشكل 6.4.5 يبين الشكل كيف يمكننا من خلال تطبيق قاعدة المسافة أو باستعمال التكافؤ بين المتجه $\overrightarrow{AB}$ و المتجه $\mathbf{v}$، أن نجد مقدار المتجه $\overrightarrow{AB}$.

يبيّن الشكل 6.4.5 أنه إما من خلال تطبيق قاعدة المسافة، أو باستعمال التكافؤ بين المتجه $\overrightarrow{AB}$ و المتجه **v**، يمكننا أن نكتب

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

وهو يمثّل طول المتجه $\overrightarrow{AB}$.

المتجه في الفضاء الإحداثي

المتجه **v** الثلاثي الأبعاد هو ثلاثي مرتب من الأعداد الحقيقية $\langle a, b, c\rangle$. تمثّل الأعداد a و b و c مركبات المتجه **v**.

التمثيل القياسي للمتجه $\mathbf{v} = \langle a, b, c\rangle$ هو السهم من نقطة الأصل إلى النقطة (a, b, c).

مقدار المتجه **v** هو طول السهم الذي يمثّله واتجاه **v** هو اتجاه السهم.

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

المتجه الصفري هو المتجه $\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0\rangle$

مثال 1 المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

ليكن $A(-2, 3, 5)$ و $B(1, 0, -4)$.

A. أوجد المتجه $\overrightarrow{AB}$ بالصورة التركيبية.

B. أوجد المتجه $\overrightarrow{BA}$ بالصورة التركيبية.

C. أوجد المتجه $3\overrightarrow{AB}$ بالصورة التركيبية.

D. أوجد المتجه $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ بالصورة التركيبية.

E. أوجد $|\overrightarrow{AB}|$، $|\overrightarrow{BA}|$، $|3\overrightarrow{AB}|$، $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}|$.

الحل

A. $\overrightarrow{AB} = \langle 1 - (-2), 0 - 3, -4 - 5\rangle = \langle 3, -3, -9\rangle$

B. $\overrightarrow{BA} = \langle -2 - 1, 3 - 0, 5 - (-4)\rangle = \langle -3, 3, 9\rangle$

يمكنك أن تلاحظ أيضًا أن $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

C. $3\overrightarrow{AB} = 3\langle 3, -3, -9\rangle = \langle 9, -9, -27\rangle$

D. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \langle -2, 3, 5\rangle + \langle 1, 0, -4\rangle = \langle -2 + 1, 3 + 0, 5 - 4\rangle = \langle -1, 3, 1\rangle$

E. $|\overrightarrow{AB}| = |\langle 3, -3, -9\rangle| = \sqrt{3^2 + (-3)^2 + (-9)^2} = \sqrt{9 + 9 + 81} = 3\sqrt{11}$

$|\overrightarrow{BA}| = |\langle -3, 3, 9\rangle| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + 9^2} = \sqrt{9 + 9 + 81} = 3\sqrt{11}$

$|3\overrightarrow{AB}| = |\langle 9, -9, -27\rangle| = \sqrt{9^2 + (-9)^2 + (-27)^2} = \sqrt{81 + 81 + 729} = 9\sqrt{11}$

(تابع)

أسئلة للتفكر

س: هل المتجه $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ يساوي المتجه $\overrightarrow{AB}$ أو المتجه $\overrightarrow{BA}$؟

نموذج إجابة:

لا يساوي كليهما.

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \langle -1, 3, 1\rangle \neq \langle 3, -3, -9\rangle = \overrightarrow{AB}$

وكذلك

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \neq \overrightarrow{BA}$

س: هل الأمر كذلك بالنسبة للمتجه $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$؟

نموذج إجابة:

كلا،

$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \langle -2, 3, 5\rangle - \langle 1, 0, -4\rangle$

$= \langle -3, 3, 9\rangle$

$= \overrightarrow{BA}$

يمكننا أن نكتب أيضًا $\left|3\overrightarrow{AB}\right| = 3\left|\overrightarrow{AB}\right| = 3 \times 3\sqrt{11} = 9\sqrt{11}$

كما في المستوى الإحداثي الثنائي البعد، يمكنك أن تلاحظ أن $|k\mathbf{v}| = |k||\mathbf{v}|$ لأي متجه $\mathbf{v}$ في الفضاء الثلاثي الأبعاد ولأي كمية قياسية k.

$$\left|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right| = |\langle -1, 3, 1\rangle| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 9 + 1} = \sqrt{11}$$

لاحظ أن $\left|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right| \neq \left|\overrightarrow{OA}\right| + \left|\overrightarrow{OB}\right|$.

لأن $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{4 + 9 + 25} = \sqrt{38}$ و $\left|\overrightarrow{OB}\right| = \sqrt{1 + 0 + 16} = \sqrt{17}$:

$$\sqrt{11} \neq \sqrt{38} + \sqrt{17}$$

حاول أن تحل التمرين 1

نقول أن سهمين متكافئان إذا كانا يعبران عن نفس المتجه. (انظر الشكل 6.4.6)

في الفضاء، نستعمل الثلاثي المرتب للتعبير عن المتجهات:

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$$

يمكن ضرب المتجه $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ بكمية قياسية (k عدد حقيقي) كما يلي:

$$k\mathbf{v} = k\langle v_1, v_2, v_3\rangle = \langle kv_1, kv_2, kv_3\rangle$$

إذا كان k عدد حقيقي موجب، يكون $k\mathbf{v}$ متجهًا مقداره $k|\mathbf{v}|$ وبنفس اتجاه $\mathbf{v}$. وإذا كان k سالبًا، يكون مقدار $k\mathbf{v}$ هو $|k||\mathbf{v}|$، ويكون بعكس اتجاه $\mathbf{v}$.

نقول أن متجهين متعاكسان إذا كان لهما نفس المقدار ولكن اتجاهيهما متعاكسان (انظر الشكل 6.4.7).

نقول أن متجهين **متوازيان** إذا كان أحدهما هو ناتج ضرب المتجه الثاني بكمية قياسية. (انظر الشكل 6.4.8)

على سبيل المثال، المتجه $\langle -3, 4, -2\rangle$ متوازٍ مع المتجه $\langle 4.5, -6, 3\rangle$ لأن

$$\langle -3, 4, -2\rangle = -\frac{2}{3}\langle 4.5, -6, 3\rangle$$

حيث $k = -\frac{2}{3}$.

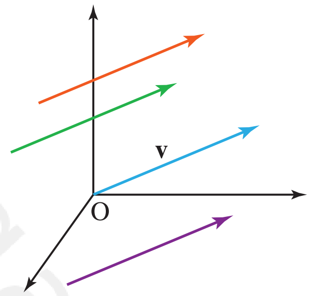
المتجهات المتوازية في الفضاء الإحداثي

يكون المتجهان $\mathbf{w}$ و $\mathbf{v}$ متجهين متوازيين في الفضاء الإحداثي إذا كان

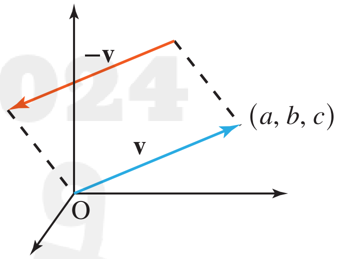
$$\mathbf{w} = k\mathbf{v}$$

حيث $k \in \mathbb{R}$ و $k \neq 0$

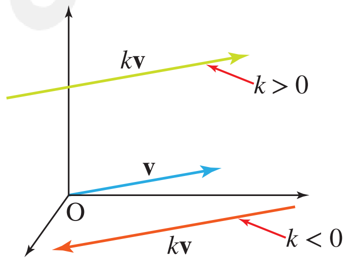
تطبق خصائص أخرى كثيرة على المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد كما في المستوى الثنائي البعد وبطريقة مشابهة. فيما يلي بعض التعاريف التي نعتمدها أيضًا للمتجهات في الفضاء الإحداثي.



الشكل 6.4.6 يبيّن الشكل متجهات مكافئة للمتجه $\mathbf{v}$



الشكل 6.4.7 المتجهان المتعاكسان المبينان في الشكل لهما نفس المقدار لكن باتجاهين متعاكسين.



الشكل 6.4.8 يبين الشكل المتجهات المتوازية الناتجة عن ضرب المتجه بكمية قياسية.

العمليات على المتجهات في الفضاء الإحداثي

ليكن $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3\rangle$ و $\mathbf{w} = \langle w_1, w_2, w_3\rangle$ متجهين في الفضاء الإحداثي، و $k \in \mathbb{R}$.

المساواة: $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ إذا وفقط إذا $v_1 = w_1$ و $v_2 = w_2$ و $v_3 = w_3$

الجمع: $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \langle v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3\rangle$

الطرح: $\mathbf{v} - \mathbf{w} = \langle v_1 - w_1, v_2 - w_2, v_3 - w_3\rangle$

الضرب في كمية قياسية: $k\mathbf{v} = \langle kv_1, kv_2, kv_3\rangle$

المقدار: $|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

متجه الوحدة: $\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$

هو متجه الوحدة للمتجه $\mathbf{v}$ حيث $\mathbf{v} \neq 0$

يبين المثال التالي بعض العمليات على المتجهات في الفضاء الإحداثي.

مثال 2 العمليات على المتجهات في الفضاء الاحداثي

أوجد ناتج كل مما يلي:

A. $3\langle -2, 1, 4\rangle$

B. $\langle 0, 6, -7\rangle + \langle -5, 5, 8\rangle$

C. $\langle 1, -3, 4\rangle - \langle -2, -4, 5\rangle$

D. $|\langle 2, 0, -6\rangle|$

الحل

A. $3\langle -2, 1, 4\rangle = \langle 3(-2), 3(1), 3(4)\rangle = \langle -6, 3, 12\rangle$

B. $\langle 0, 6, -7\rangle + \langle -5, 5, 8\rangle = \langle 0 - 5, 6 + 5, -7 + 8\rangle = \langle -5, 11, 1\rangle$

C. $\langle 1, -3, 4\rangle - \langle -2, -4, 5\rangle = \langle 1 - (-2), -3 - (-4), 4 - 5\rangle = \langle 3, 1, -1\rangle$

D. $|\langle 2, 0, -6\rangle| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-6)^2} = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40}$

حاول أن تحل التمرين 5

سؤال للتفكر

س: كيف يمكن إيجاد المتجه $\langle a, b, c\rangle$ إذا كان $\langle 0, 6, -7\rangle + \langle a, b, c\rangle = \langle -5, 5, 8\rangle$

نموذج إجابة:

$0 + a = -5$

$a = -5$

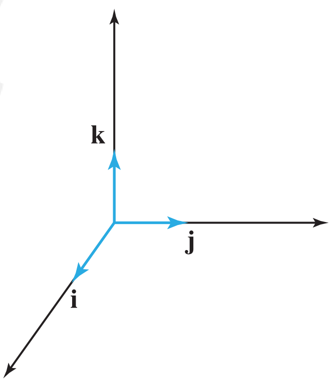
$6 + b = 5$

$b = -1$

$-7 + c = 8$

$c = 15$

يُسمّى المتجه الذي مقداره 1 متجه الوحدة. في المستوى الإحداثي، المتجهان $\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle$ و $\mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$ هما متجهي الوحدة في اتجاه المحور x والمحور y. في الفضاء ثلاثي الأبعاد، متجهات الوحدة القياسية هي: $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0\rangle$، وهو متجه الوحدة للمحور x، و $\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0\rangle$ وهو متجه الوحدة للمحور y، و $\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1\rangle$، وهو متجه الوحدة للمحور z. تُسمّى المتجهات $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ متجهات الوحدة الأساسية للفضاء ثلاثي الأبعاد. (انظر الشكل 6.4.9)



الشكل 6.4.9 متجهات الوحدة القياسية في الفضاء ثلاثي الأبعاد

ينتج مباشرة عن تعريفنا لمتجهات الوحدة الأساسية للمحاور **i** و **j** و **k** أن بالإمكان كتابة أي متجه $\mathbf{v} = \langle x, y, z\rangle$ في الصورة

$$\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

لأن

$$\begin{aligned}\mathbf{v} = \langle x, y, z\rangle &= \langle x, 0, 0\rangle + \langle 0, y, 0\rangle + \langle 0, 0, z\rangle \\ &= x\,\langle 1, 0, 0\rangle + y\,\langle 0, 1, 0\rangle + z\,\langle 0, 0, 1\rangle \\ &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}\end{aligned}$$

إذن، المتجه **v** في الفضاء ثلاثي الأبعاد الذي يعبر عنه السهم من $P(a, b, c)$ إلى $Q(x, y, z)$ هو المتجه

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} = \langle x - a, y - b, z - c\rangle = (x - a)\mathbf{i} + (y - b)\mathbf{j} + (z - c)\mathbf{k}$$

يمكننا أن نلاحظ أيضًا أن $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ هو متجه وحدة له نفس اتجاه أي متجه **v** في الفضاء الإحداثي. $\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ يُسمّى متجه الوحدة للمتجه **v**.

مثال 3 متجهات في الفضاء ثلاثي الأبعاد

A. أوجد متجه الوحدة للمتجه $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

B. أوجد متجهًا مقداره 6 وله نفس اتجاه المتجه $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

C. أوجد متجهًا مقداره 8 واتجاهه عكس اتجاه $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

الحل

A. مقدار المتجه **v** هو $\mathbf{v} = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$.

إذن، متجه الوحدة للمتجه **v** هو $\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{3}\mathbf{v} = \frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}$.

B. المتجه الذي مقداره 6 واتجاهه نفس اتجاه **v** هو $6\mathbf{u}$، حيث $\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ هو متجه الوحدة للمتجه **v**.

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{\sqrt{14}}\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{14}}\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{14}}\mathbf{j} + \frac{3}{\sqrt{14}}\mathbf{k}$$

$$6\hat{\mathbf{v}} = \frac{6}{\sqrt{14}}\mathbf{i} - \frac{12}{\sqrt{14}}\mathbf{j} + \frac{18}{\sqrt{14}}\mathbf{k}$$

وهو المتجه المطلوب.

C. المتجه الذي مقداره 8 وهو في عكس اتجاه **v** هو $-8\mathbf{u}$، حيث $\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ هو متجه الوحدة للمتجه **v**.

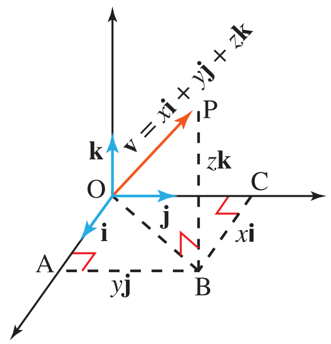
$$|\mathbf{v}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 16 + 9} = \sqrt{29}$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{\sqrt{29}}\mathbf{v} = \frac{2}{\sqrt{29}}\mathbf{i} + \frac{4}{\sqrt{29}}\mathbf{j} - \frac{3}{\sqrt{29}}\mathbf{k}$$

$$-8\hat{\mathbf{v}} = -\frac{16}{\sqrt{29}}\mathbf{i} - \frac{32}{\sqrt{29}}\mathbf{j} + \frac{24}{\sqrt{29}}\mathbf{k}$$

وهو المتجه المطلوب.

حاول أن تحل التمرينين 10 و 13



الشكل 6.4.10 يمكن كتابة أي متجه في الفضاء ثلاثي الأبعاد بدلالة **i** و **j** و **k**.

للطلاب سريعي الإنجاز

(مع المثال 2) قد يتساءل بعض الطلاب عن العملية المعاكسة للعملية المستعملة في السؤال السابق، أي إذا كانت لدينا ثلاثة متجهات **u** و **v** و **w**،

س: فهل يمكننا دائمًا إيجاد ثلاثة أعداد حقيقية a و b و c بحيث يكون

$$T = a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w}$$

لأي متجه معطى T؟

نموذج إجابة:

ليكن $\mathbf{u} = \langle 0, 1, 1\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle 1, 0, 0\rangle$ و $\mathbf{w} = \langle 1, 1, 1\rangle$، نجد a و b و c بحيث يكون

$$\langle 2, 1, 1\rangle = a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w}$$

$$\begin{aligned}\langle 2, 1, 1\rangle &= a\langle 0, 1, 1\rangle + b\langle 1, 0, 0\rangle + c\langle 1, 1, 1\rangle \\ &= \langle 0, a, a\rangle + \langle b, 0, 0\rangle + \langle c, c, c\rangle \\ &= \langle b + c, a + c, a + c\rangle\end{aligned}$$

إذن

$$b + c = 2$$
$$a + c = 1$$

نختار $c = 0$، إذن $a = 1$ و $b = 2$

س: هل يوجد حل واحد للمسألة السابقة؟

نموذج إجابة:

كلا، لكل قيمة من قيم c يمكن إيجاد عددين a و b غير العددين السابقين.

سؤال للتفكر

س: (مع المثال 3) كيف يمكن الإجابة عن سؤال الفرع B بطريقة مختلفة؟

نموذج إجابة:

ليكن **u** هو المتجه الذي له نفس اتجاه **v** ومقداره 6

إذن $\mathbf{u} = a\mathbf{v}$، حيث a عدد حقيقي موجب.

$$|\mathbf{u}| = a|\mathbf{v}| = 6$$

$$a = \frac{6}{|\mathbf{v}|} = \frac{6}{\sqrt{14}}$$

إذن،

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \frac{6}{\sqrt{14}}\mathbf{v} = \frac{6}{\sqrt{14}}(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \\ &= \frac{6}{\sqrt{14}}\mathbf{i} - \frac{12}{\sqrt{14}}\mathbf{j} + \frac{18}{\sqrt{14}}\mathbf{k}\end{aligned}$$

الضرب القياسي للمتجهات في الفضاء

لتعريف الضرب القياسي للمتجهات في الفضاء، نستعين بتعريف وخصائص الضرب القياسي للمتجهات في المستوى الثنائي البعد.

الضرب القياسي للمتجهات في الفضاء

الضرب القياسي للمتجهين $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ و $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ هو:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1\, v_1 + u_2\, v_2 + u_3\, v_3$$

لتكن $\mathbf{w}$ و $\mathbf{v}$ و $\mathbf{u}$ متجهات في الفضاء، ولتكن k كمية قياسية. إذن:

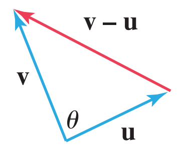
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$$

$$\mathbf{0} \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$$

$$k\,(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (k\,\mathbf{v}) = (k\,\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$$



الشكل 6.4.11 يبين الشكل الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ والتي يمكن إيجاد قياسها من خلال الضرب القياسي.

يمكننا أيضًا الاستعانة بالشكل 6.4.11 لإيجاد قياس الزاوية بين متجهين باستعمال الضرب القياسي وذلك عن طريق البرهان في المستوى الثنائي البعد.

الزاوية بين متجهين في الفضاء

إذا كانت θ هي الزاوية بين المتجهين $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ حيث $0 \le \theta \le 180°$ و $\mathbf{v} \ne 0$ و $\mathbf{u} \ne 0$، فإن

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}\right)$$

ويكون المتجهان $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ متعامدين إذا كان $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$

مثال 4 إيجاد قياس زاوية بين متجهين في الفضاء

A. أوجد قياس الزاوية بين المتجهين $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ و $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

B. حدّد المتجهين المتعامدين من بين المتجهات الثلاثة التالية:

$$\mathbf{u} = 7\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$$

الحل

A. إذا كانت θ هي الزاوية بين $\mathbf{v}$ و $\mathbf{u}$، فإن

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = \frac{(1)(-3) + (-2)(6) + (2)(2)}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}\,\sqrt{(-3)^2 + 6^2 + 2^2}} = \frac{-11}{3 \times 7} = \frac{-11}{21}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-11}{21}\right) \approx 122°$$

(تابع)

سؤال للتفكر

س: (مع المثال 4) إذا كانت لدينا ثلاثة متجهات $\mathbf{u} \ne 0$ و $\mathbf{v} \ne 0$ و $\mathbf{w} \ne 0$، ونعرف أن كل اثنين منهما متعامدان، فهل يمكننا استعمال الضرب القياسي لإثبات أنه لا يمكن إيجاد ثلاثة أعداد a و b و c تحقق المعادلة

$$a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w} = 0$$

غير القيم $a = b = c = 0$؟

نموذج إجابة:

$$a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w} = 0$$

$$\mathbf{u} \cdot (a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot 0 = 0$$

$$a\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + b\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + c\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0$$

لدينا $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0$ لأنها متعامدة، إذن

$$a\,|\mathbf{u}|^2 + b \times 0 + c \times 0 = 0$$

$$a\,|\mathbf{u}|^2 = 0$$

لدينا $|\mathbf{u}| \neq 0$، إذن $a = 0$

$$\mathbf{v} \cdot (a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot 0 = 0$$
$$a\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + b\,|\mathbf{v}|^2 + c\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$$
$$b\,|\mathbf{v}|^2 = 0$$

لدينا $|\mathbf{v}| \neq 0$، إذن $b = 0$

$$\mathbf{w} \cdot (a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot 0 = 0$$
$$a\,\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} + b\,\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} + c\,|\mathbf{w}|^2 = 0$$
$$c\,|\mathbf{w}|^2 = 0$$

لدينا $|\mathbf{w}| \neq 0$، إذن $c = 0$

إذن، لا يمكننا إيجاد قيم غير صفرية للأعداد a و b و c تحقق المعادلة $a\,\mathbf{u} + b\,\mathbf{v} + c\,\mathbf{w} = 0$.

B. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (7)(-3) + (3)(5) + (2)(3) = 0$

إذن، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{u}$ متعامدان.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = (7)(1) + (3)(0) + (2)(1) = 9$$

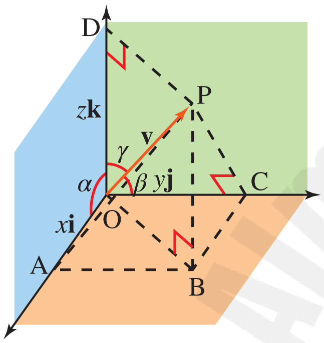
إذن، $\mathbf{w}$ و $\mathbf{u}$ غير متعامدين.

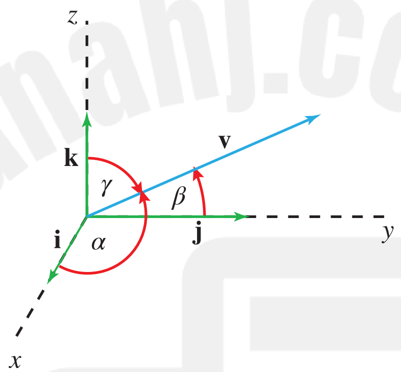
$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (-3)(1) + (5)(0) + (3)(1) = 0$$

إذن، $\mathbf{w}$ و $\mathbf{v}$ متعامدان.

حاول أن تحل التمرين 30

يبيّن الشكل 6.4.12 متجهًا غير صفري $\mathbf{v}$ في التمثيل البياني، والزوايا α و β و γ هي الزوايا بين المتجه $\mathbf{v}$ والمحاور الإحداثية.





الشكل 6.4.12 الزوايا بين المتجه $\mathbf{v}$ والمحاور الثلاثة

نستعمل الضرب القياسي لإيجاد قياسات هذه الزوايا التي تسمى **زوايا اتجاه** $\mathbf{v}$ في حين تُسمّى $\cos\alpha$، $\cos\beta$ و $\cos\gamma$ **جيوب التمام للاتجاه** $\mathbf{v}$.

لدينا $\mathbf{v} \cdot \mathbf{i} = |\mathbf{v}||\mathbf{i}| \cos\alpha$.

من جهة أخرى، إذا كان $\mathbf{v} = \langle x, y, z\rangle$، فإن

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{i} = \langle x, y, z\rangle \cdot \langle 1, 0, 0\rangle = x$$

وبما أن $|\mathbf{i}| = 1$، فإن

$$x = |\mathbf{v}| \cos\alpha$$

نلاحظ كذلك أن

$$y = |\mathbf{v}| \cos\beta$$

$$z = |\mathbf{v}| \cos\gamma$$

إذن

$$|\mathbf{v}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$$
$$= |\mathbf{v}|^2 \left(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma\right)$$

بالتالي

$$1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$$

سؤال للتفكر

س: (مع المثال 5) إذا كانت α و β و γ زوايا اتجاه للمتجه $\mathbf{v}$، ماذا يمكن أن نستنتج عن المتجه $\hat{\mathbf{v}} = \langle \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\rangle$

نموذج إجابة:

المتجه $\hat{\mathbf{v}}$ هو متجه الوحدة للمتجه $\mathbf{v}$.

كتابة المتجه باستعمال زوايا الاتجاه

إذا كانت α و β و γ هي الزوايا بين المتجه **v** والمحاور الإحداثية x و y و z، فإن

$$\mathbf{v} = |\mathbf{v}|(\cos\alpha)\mathbf{i} + |\mathbf{v}|(\cos\beta)\mathbf{j} + |\mathbf{v}|(\cos\gamma)\mathbf{k}$$

وبالتالي فإن متجه الوحدة للمتجه **v** هو

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = (\cos\alpha)\mathbf{i} + (\cos\beta)\mathbf{j} + (\cos\gamma)\mathbf{k}$$

مثال 5 زوايا الاتجاه

أوجد قياسات زوايا الاتجاه للمتجه $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

الحل

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{16+4+16} = \sqrt{36} = 6$$

إذن

$$4 = |\mathbf{v}| \cdot \cos\alpha$$
$$\cos\alpha = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$
$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 48°$$
$$\cos\beta = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$$
$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{3}\right) \approx 109°$$
$$\cos\gamma = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$
$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 48°$$

يمكننا أن نستنتج من هذا المثال قاعدة عامة تفيد أنه إذا كانت α و β و γ هي الزوايا بين متجه والمحاور الثلاثة على التوالي، فإن

$$1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$$

حاول أن تحل التمرين 43

للطلاب الذين يواجهون صعوبات

قد يحتاج بعض الطلاب إلى مزيد من التدرب على إيجاد قياسات زوايا الاتجاه في الفضاء الثلاثي الأبعاد ليترسخ هذا المفهوم في أذهانهم.

س: أوجد قياس زوايا الاتجاه للمتجه المعطى في كل من الحالتين التاليتين.

1. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
2. $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

نموذج إجابة:

1. $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{14}}, \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{14}}, \cos\gamma = \frac{-3}{\sqrt{14}}$
$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right) \approx 57.7°$$
$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right) \approx 74.5°$$
$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{-3}{\sqrt{14}}\right) \approx 143.3°$$
2. $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 54.7°$$
$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 54.7°$$
$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 54.7°$$

متابعة

ناقش الطلاب عن القاسم المشترك بين الضرب القياسي لمتجهين في المستوى الإحداثي ثنائي البعد والضرب القياسي لمتجهين في الفضاء ثلاثي الأبعاد.

ملاحظات على التمارين

التمارين 1-23، تدرب الطالب على إيجاد مركبات المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد وتنفيذ العمليات عليها.
التمارين 24-32، تدرب الطالب على إيجاد قياس الزاوية بين متجهين في الفضاء الثلاثي الأبعاد.
التمارين 54-57، تدرب الطالب على أنماط من الاختبارات.

التقييم المستمر

التقييم الذاتي:

التمارين 8, 9, 16, 21, 24, 28

مراجعة سريعة 6.4

في التمارين 1-3، أوجد قيمة $|\mathbf{u}|$ في كل من الحالات التالية.

1. $\mathbf{u} = \langle 1, 3\rangle$
2. $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$
3. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$

في التمارين 4-7، أوجد متجه الوحدة للمتجه المعطى.

4. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
5. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$
6. $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$
7. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

في التمرينين 8 و 9، أوجد المتجه **u** حسب المقدار المعطى وباتجاه **v**.

8. $\mathbf{v} = \langle 2, 3\rangle, |\mathbf{u}| = 3$
9. $\mathbf{v} = -4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}, |\mathbf{u}| = 4$

الدرس 6.4 التمارين

في التمارين 1-4، أوجد المتجهات $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BA}$ و $5\overrightarrow{AB}$ بالصورة التركيبية في كل من الحالات التالية.

1. $A\left(\frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}, 1\right), B\left(1, \frac{-5}{2}, 1\right)$

2. $A\left(-2, -\sqrt{3}, \frac{-1}{2}\right), B\left(1, \sqrt{3}, \frac{-1}{2}\right)$

3. $A(2, -3, 5), B(1, -1, 3)$

4. $A(a, -a, 2a), B(-a, -2a, a)$

في التمارين 5-7، إذا كان المعطى إحداثيات إحدى النقطتين P أو Q ومركبات المتجه $\overrightarrow{PQ}$، أوجد المعلومات الناقصة.

5. $\overrightarrow{PQ} = \left\langle 1, \frac{-5}{2}, 1\right\rangle, P\left(\frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}, 1\right)$

6. $\overrightarrow{PQ} = \left\langle \frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}, 1\right\rangle, Q\left(1, \frac{-5}{2}, 1\right)$

7. $\overrightarrow{PQ} = \langle -a, -2a, a\rangle, P(a, -2a, 2a)$

.8 أوجد كلًّا مما يلي:

a. $4\langle 2, 0, 4\rangle$

b. $\langle 1, 6, 7\rangle + \langle 5, 1, 8\rangle$

c. $\langle 1, -3, 4\rangle + \langle 2, 0, 1\rangle$

d. $|\langle 3, 1, 6\rangle|$

.9 أوجد قيمة كل من m و n بحيث يكون للمتجهين $\mathbf{w} = \langle 2, 4, -6\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle m-2, m+n, -2m+n\rangle$ نفس الاتجاه.

في التمارين 10-12، أوجد متجه الوحدة للمتجه المعطى.

10. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

11. $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

12. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

في التمارين 13-15، أوجد المتجه u حسب المقدار المعطى وباتجاه $\mathbf{v}$.

13. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}, |\mathbf{u}| = 2$

14. $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, |\mathbf{u}| = 4$

15. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}, |\mathbf{u}| = 5$

في التمارين 16-20، ليكن $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ و $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. أوجد المطلوب في كل من الحالات التالية.

16. $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|$

17. $|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$

18. $|-3\mathbf{u}| + |3\mathbf{v}|$

19. $\frac{1}{|\mathbf{u}|}\mathbf{u}$

20. $\left|\frac{1}{|\mathbf{u}|}\mathbf{u}\right|$

في التمارين 21-23، أوجد الكمية القياسية t (أو أثبت أنها غير موجودة) بحيث يكون المتجه $\mathbf{v}$ متجه وحدة.

21. $\mathbf{v} = t\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$

22. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$

23. $\mathbf{v} = 0.5\mathbf{i} - t\mathbf{j} + 1.5t\mathbf{k}$

في التمارين 24-29، أوجد الضرب القياسي للمتجهين وقياس الزاوية بينهما (إن لم تكن معطاة).

24. $\mathbf{u} = \langle 3, -2, 4\rangle, \mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

25. $\mathbf{u} = \langle 2, -6, 0\rangle, \mathbf{v} = \langle -1, 3, 5\rangle$

26. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}, \mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

27. $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j}, \mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$

.28 $|\mathbf{u}| = 3, |\mathbf{v}| = 4$ والزاوية بين المتجهين $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ هي $\frac{\pi}{3}$.

.29 $|\mathbf{u}| = 3, |\mathbf{v}| = 4$ والزاوية بين المتجهين $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ هي $\frac{2\pi}{3}$.

في التمارين 30-32، حدّد ما إذا كان المتجهان متعامدين. إن لم يكونا كذلك، حدّد ما إذا كانت الزاوية بينهما حادة أم لا.

30. $\mathbf{u} = \langle 2, -6, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle -1, 3, 5\rangle$

31. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 7\mathbf{j}, \mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

32. $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}, \mathbf{v} = 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

في التمارين 33-42، ليكن $\mathbf{r} = \langle 0, 1, 3\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle 3, -4, 5\rangle$ و $\mathbf{w} = \langle 1, 4, -9\rangle$. أوجد المطلوب في كل من الحالات التالية.

33. $\mathbf{r} + \mathbf{v}$

34. $\mathbf{r} - \mathbf{w}$

35. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

36. $|\mathbf{w}|$

37. $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

38. $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{w})$

39. $\frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$

40. $\mathbf{i} \cdot \mathbf{r}$

41. $\langle \mathbf{i} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{j} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}\rangle$

42. $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$

في التمارين 43-46،

i. أوجد جيوب التمام لاتجاه $\mathbf{v}$.

ii. أثبت أنها تحقق الصيغة $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

iii. قرّب قياسات زوايا الاتجاه إلى أقرب درجة.

43. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

44. $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

45. $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

46. $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{k}$

47. أوجد قيمة m بدلالة n بحيث يكون المتجهان $\mathbf{u} = \langle 3, 5, 0\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle m - 2, n + 3, 0\rangle$ متعامدين.

48. أوجد قيمة m بحيث يكون المتجهان $\mathbf{w} = \langle 6, 3, 4\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle m + 2, 3, m\rangle$ متكافئين.

49. أوجد قيمة كل من m و n بحيث يكون المتجهان $\mathbf{w} = \langle -1, 5, 6\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle m - 2, n + 4, 6\rangle$ متكافئين.

في التمرينين 50 و 51، حدّد ما إذا كان المتجهين $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ متوازيين أم لا.

50. $\mathbf{u} = \langle 2, -7, 5\rangle, \mathbf{v} = \langle 3, -9, 10\rangle$

51. $\mathbf{u} = \langle 9, -12, -9\rangle, \mathbf{v} = \langle -3, 4, 3\rangle$

في التمرينين 52 و 53، أوجد قيمة كل من a و b علمًا بأن المتجهين $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ متوازيين.

52. $\mathbf{u} = \langle 8, 7, 2\rangle, \mathbf{v} = \langle 2a, 3b, 4\rangle$

53. $\mathbf{u} = \langle 12, -5, -3\rangle, \mathbf{v} = \langle -6, 2a, -5b\rangle$

أسئلة اختبار معيارية

54. **صواب أم خطأ** تعتقد خولة أن $|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{AB}|$، هل هذا صحيح؟ برّر إجابتك.

55. **صواب أم خطأ** تعتقد ماجدة أن $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$، هل هذا صحيح؟ برّر إجابتك.

56. **اختيار من متعدد** إذا كان $\mathbf{w}$ و $\mathbf{v}$ متجهين وكانت c كمية قياسية، أي الخيارات التالية كمية قياسية؟ C

A. $\mathbf{w} + \mathbf{v}$

B. $\mathbf{w} - \mathbf{v}$

C. $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$

D. $c\mathbf{v}$

E. $|\mathbf{v}|\,\mathbf{w}$

57. **اختيار من متعدد** ليكن $A = (2, 0, 2)$ و $B = (2, 1, 0)$. أي الخيارات التالية يمثّل مركبات $\overrightarrow{AB}$؟ E

A. $\langle 0, 2, -2\rangle$

B. $\langle 2, 1, -2\rangle$

C. $\langle 0, 1, 2\rangle$

D. $\langle 1, 1, -2\rangle$

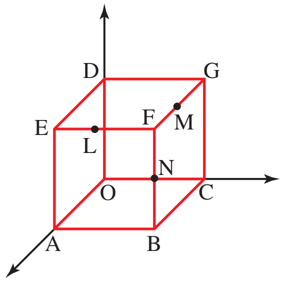
E. $\langle 0, 1, -2\rangle$

استكشاف

.58 أوجد قيمة a بحيث يكون

$$|a\mathbf{i} + (a - 1)\mathbf{j} + (a + 1)\mathbf{k}| = 2$$

.59 يبيّن الشكل أدناه مكعبًا طول ضلعه 8 وحدات.



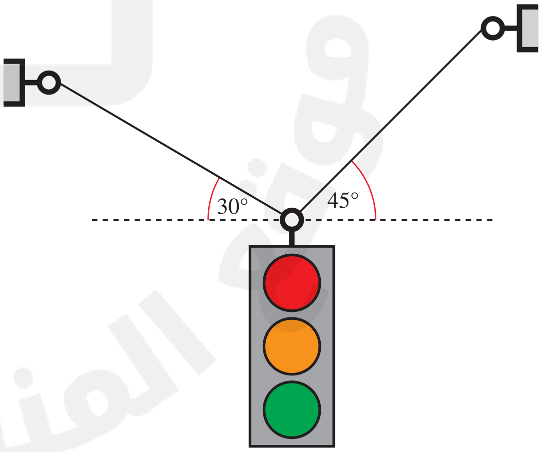
a. أوجد متجه الموضع لكل رأس من رؤوس المكعب.

b. النقاط M و L و N هي نقاط منتصف الأضلاع الثلاثة كما هو مبيّن. أوجد متجه الموضع لكل من النقاط M و L و N.

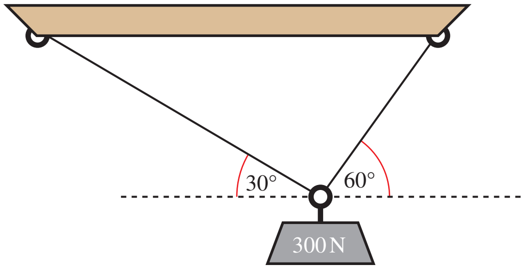
c. أثبت أن $\overrightarrow{LM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NL} = \vec{0}$.

توسيع الأفكار

.60 تتدلى إشارة ضوئية من سلكين مرنين بقوة مقدارها 125 N مقدار القوة التي يطبّقها كل سلك على الدائرة المعدنية التي في الوسط تُسمّى "قوة الشد في السلك". أوجد قوة الشد في كل سلك إذا كانت الإشارة الضوئية متوازنة.



.61 أوجد قوة الشد في السلك لسلكين يحملان وزنًا مقداره 300 N كما هو مبيّن في الرسم.

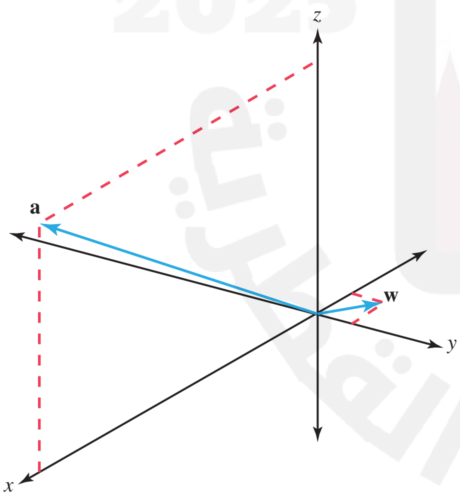


.62 إذا كانت قياسات كل زوايا الاتجاه لمتجه متساوية، فما قياس كل زاوية؟

.63 أثبت أن المتجه $|\mathbf{a}|\mathbf{b} + |\mathbf{b}|\mathbf{a}$ يقسم الزاوية بين المتجهين $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ إلى زاويتين متساويين.

.64 **السرعة الثلاثية الأبعاد** أقلعت طائرة في اتجاه الغرب بسرعة 200 mph وبزاوية قياسها 20° مع سطح الأرض. إذا كانت الرياح تهب من الشمال الشرقي بسرعة 10 mph، أوجد المتجه الذي يمثّل سرعة الطائرة لحظة إقلاعها.

.65 **المتجهات في الفضاء** أقلعت طائرة في اتجاه الشرق بسرعة 250 mph وبزاوية قياسها 30° مع مستوى سطح الأرض. إذا كانت الرياح تهب باتجاه الجنوب الشرقي بسرعة 32 mph، أوجد المتجه الذي يمثّل سرعة الطائرة لحظة إقلاعها (انظر الشكل أدناه).



إجابات أسئلة مراجعة سريعة 6.4

1. $|\mathbf{u}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

2. $|\mathbf{u}| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$

3. $|\mathbf{u}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

4. $\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \frac{1}{\sqrt{1+4}}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{j}$

5. $\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \frac{1}{\sqrt{4+1}}(2\mathbf{i} - \mathbf{j}) = \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{j}$

6. $\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \frac{1}{\sqrt{16+16}}(4\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) = \frac{4}{\sqrt{32}}\mathbf{i} - \frac{4}{\sqrt{32}}\mathbf{j} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$

7. $\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \frac{1}{\sqrt{1+36}}(\mathbf{i} + 6\mathbf{j}) = \frac{1}{\sqrt{37}}\mathbf{i} + \frac{6}{\sqrt{37}}\mathbf{j}$

8. $\mathbf{u} = |\mathbf{u}|\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = 3 \times \frac{\langle 2, 3\rangle}{\sqrt{4+9}} = \frac{3}{\sqrt{13}}\langle 2, 3\rangle = \left\langle \frac{6}{\sqrt{13}}, \frac{9}{\sqrt{13}} \right\rangle$

9. $\mathbf{u} = |\mathbf{u}|\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = 4 \times \frac{\langle -4, -2\rangle}{\sqrt{16+4}} = \frac{4}{2\sqrt{5}}\langle -4, -2\rangle = \left\langle \frac{-8}{\sqrt{5}}, \frac{-4}{\sqrt{5}} \right\rangle$

إجابات على أسئلة التمارين 6.4

1. $\overrightarrow{AB} = \left(1 + \frac{3}{2}, -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}, 1 - 1\right) = \left(\frac{5}{2}, -2, 0\right)$

$\overrightarrow{BA} = \left(\frac{-5}{2}, 2, 0\right)$

$5\overrightarrow{AB} = 5\left(\frac{5}{2}, -2, 0\right) = \left(\frac{25}{2}, -10, 0\right)$

2. $\overrightarrow{AB} = \left(1 + 2, \sqrt{3} + \sqrt{3}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = (3, 2\sqrt{3}, 0)$

$\overrightarrow{BA} = (-3, -2\sqrt{3}, 0)$

$5\overrightarrow{AB} = 5(3, 2\sqrt{3}, 0) = (15, 10\sqrt{3}, 0)$

3. $\overrightarrow{AB} = (1 - 2, -1 + 3, 3 - 5) = (-1, 2, -2)$

$\overrightarrow{BA} = (1, -2, 2)$

$5\overrightarrow{AB} = 5(-1, 2, -2) = (-5, 10, -10)$

4. $\overrightarrow{AB} = (-a - a, -2a + a, a - 2a) = (-2a, -a, -a)$

$\overrightarrow{BA} = (2a, a, a)$

$5\overrightarrow{AB} = 5(-2a, -a, -a) = (-10a, -5a, -5a)$

5. $x + \frac{3}{2} = 1, x = \frac{-1}{2}$

$y + \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}, y = -3$

$z - 1 = 1, z = 2$

$Q\left(-\frac{1}{2}, -3, 2\right)$

6. $1 - x = -\frac{3}{2}, x = \frac{5}{2}$

$-\frac{5}{2} - y = -\frac{1}{2}, y = -2$

$1 - z = 1, z = 0$

$P\left(\frac{5}{2}, -2, 0\right)$

7. $x - a = -a, x = 0$

$y + 2a = -2a, y = -4a$

$z - 2a = a, z = 3a$

$Q(0, -4a, 3a)$

8. **a.** $4\langle 2, 0, 4\rangle = \langle 8, 0, 16\rangle$

b. $\langle 1, 6, 7\rangle + \langle 5, 1, 8\rangle = \langle 6, 7, 15\rangle$

c. $\langle 1, -3, 4\rangle + \langle 2, 0, 1\rangle = \langle 3, -3, 5\rangle$

d. $|\langle 3, 1, 6\rangle| = \sqrt{9 + 1 + 36} = \sqrt{46} \approx 6.78$

9. $\mathbf{v} = k\mathbf{w}, \langle m - 2, m + n, -2m + n\rangle = k\langle 2, 4, -6\rangle$

حيث k عدد حقيقي

$m - 2 = 2k, m = 2k + 2$

$m + n = 4k, 2k + 2 + n = 4k, n = 2k - 2$

$-2m + n = -6k, -4k - 4 + 2k - 2 = -6k, k = \frac{3}{2}$

$m = 5, n = 1$

10. $\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \frac{1}{\sqrt{4+4+1}} \times (2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k}$

11. $\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \frac{1}{\sqrt{36+16+4}} \times (6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = \frac{6}{\sqrt{56}}\mathbf{i} - \frac{4}{\sqrt{56}}\mathbf{j} + \frac{2}{\sqrt{56}}\mathbf{k}$

$= \frac{3}{\sqrt{14}} - \frac{2}{\sqrt{14}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{14}}\mathbf{k}$

12. $\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \frac{1}{\sqrt{4+1+4}} \times (2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}$

13. $\mathbf{u} = |\mathbf{u}|\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = 2 \times \frac{2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{2}{3}(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) = \frac{4}{3}\mathbf{i} + \frac{4}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}$

14. $\mathbf{u} = |\mathbf{u}|\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = 4 \times \frac{6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{36+16+4}} = \frac{2}{\sqrt{14}}(6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$

$= \frac{12}{\sqrt{14}}\mathbf{i} - \frac{8}{\sqrt{14}}\mathbf{j} + \frac{4}{\sqrt{14}}\mathbf{k}$

15. $\mathbf{u} = |\mathbf{u}|\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = 5 \times \frac{2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{5}{3}(2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = \frac{10}{3}\mathbf{i} - \frac{5}{3}\mathbf{j} - \frac{10}{3}\mathbf{k}$

16. $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = |2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}| = |3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}| = \sqrt{9 + 16 + 4}$

$= \sqrt{29} \approx 5.39$

17. $|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}| = |\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}| + |2\mathbf{i} + \mathbf{j}|$

$= \sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2} + \sqrt{2^2 + 1^2}$

$= \sqrt{14} + \sqrt{5}$

≈ 5.98

18. $|-3\mathbf{u}| + |3\mathbf{v}| = 3(|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|) = 3(\sqrt{14} + \sqrt{5}) \approx 17.93$

36. $|\mathbf{w}| = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-9)^2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2} \approx 9.90$

37. $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \langle 0, 1, 3\rangle \cdot \langle 3 + 1, -4 + 4, 5 + (-9)\rangle$

$= 0 \times 4 + 1 \times 0 + 3 \times (-4) = -12$

38. $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{w}) = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = -12$

39. $\frac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|} = \frac{\langle 1, 4, -9\rangle}{7\sqrt{2}} = \left\langle \frac{1}{7\sqrt{2}}, \frac{4}{7\sqrt{2}}, \frac{-9}{7\sqrt{2}} \right\rangle$

40. $\mathbf{i} \cdot \mathbf{r} = \langle 1, 0, 0\rangle \cdot \langle 0, 1, 3\rangle = 0 + 0 + 0 = 0$

41. $\langle \mathbf{i} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{j} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}\rangle = \langle 3, -4, 5\rangle = \mathbf{v}$

42. $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\, \mathbf{w} = (0 \times 3 + 1 \times (-4) + 3 \times 5)\mathbf{w} = 11\langle 1, 4, -9\rangle$

$= \langle 11, 44, -99 \rangle$

43. i. $\cos\alpha = \frac{x}{|\mathbf{v}|} = \frac{2}{\sqrt{14}}$

$\cos\beta = \frac{y}{|\mathbf{v}|} = \frac{-3}{\sqrt{14}}$

$\cos\gamma = \frac{z}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{\sqrt{14}}$

ii. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right)^2 + \left(\frac{-3}{\sqrt{14}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)^2$

$= \frac{4+9+1}{14} = \frac{14}{14} = 1$

iii. $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right) \approx 58°$

$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{-3}{\sqrt{14}}\right) \approx 143°$

$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right) \approx 74°$

44. i. $\cos\alpha = \frac{x}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}$

$\cos\beta = \frac{z}{|\mathbf{v}|} = \frac{-2}{\sqrt{6}}$

$\cos\gamma = \frac{z}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}$

ii. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{-2}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2$

$= \frac{1+4+1}{6} = \frac{6}{6} = 1$

iii. $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \approx 66°$

$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \approx 145°$

$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \approx 66°$

45. i. $\cos\alpha = \frac{x}{|\mathbf{v}|} = \frac{3}{\sqrt{14}}$

$\cos\beta = \frac{y}{|\mathbf{v}|} = \frac{-2}{\sqrt{14}}$

$\cos\gamma = \frac{z}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{\sqrt{14}}$

ii. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \left(\frac{3}{\sqrt{14}}\right)^2 + \left(\frac{-2}{\sqrt{14}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)^2$

$= \frac{9+4+1}{14} = \frac{14}{14} = 1$

19. $\frac{1}{|\mathbf{u}|}\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{4+1}} \times (2\mathbf{i} + \mathbf{j}) = \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{j}$

20. $\left|\frac{1}{|\mathbf{u}|}\mathbf{u}\right| = \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = 1$

يمكن إيجادها مباشرة لأن $\left|\frac{1}{|\mathbf{u}|}\mathbf{u}\right| = \frac{1}{|\mathbf{u}|}|\mathbf{u}| = 1$

21. $|\mathbf{v}| = |t\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}| = \sqrt{t^2 + 4t^2 + 9t^2} = |t|\sqrt{1+4+9} = |t|\sqrt{14}$

$|t|\sqrt{14} = 1,\ t = \pm\frac{1}{\sqrt{14}}$

22. $|\mathbf{v}| = |2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}| = \sqrt{4 + 4t^2 + 9t^2} \geq \sqrt{4} > 1$

لا يوجد أي قيمة للكمية القياسية t تجعل $\mathbf{v}$ متجه وحدة.

23. $|\mathbf{v}| = |0.5\mathbf{i} - t\mathbf{j} + 1.5t\mathbf{k}| = \sqrt{\frac{1}{4} + t^2 + \frac{9}{4}t^2}$

$\frac{1}{4} + t^2 + \frac{9}{4}t^2 = 1$

$1 + 4t^2 + 9t^2 = 4$

$13t^2 = 3$

$t = \pm\sqrt{\frac{3}{13}}$

24. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3 \times 2 + (-2) \times (-1) + 4 \times (-6) = 6 + 2 - 24 = -16$

$|\mathbf{u}| = \sqrt{9 + 4 + 16} = \sqrt{29}$

$|\mathbf{v}| = \sqrt{4 + 1 + 36} = \sqrt{41}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-16}{\sqrt{29}\sqrt{41}}\right) \approx 117.65°$

25. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2 \times (-1) + (-6) \times 3 + 0 \times 5 = -2 - 18 + 0 = -20$

$|\mathbf{u}| = \sqrt{4 + 36 + 0} = \sqrt{40}$

$|\mathbf{v}| = \sqrt{1 + 9 + 25} = \sqrt{35}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-20}{\sqrt{40}\sqrt{35}}\right) \approx 122.31°$

26. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3 \times 5 + (-1) \times 2 = 15 - 2 = 13$

$|\mathbf{u}| = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$

$|\mathbf{v}| = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{13}{\sqrt{10}\sqrt{29}}\right) \approx 40.24°$

27. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \times 5 + (-3) \times 0 + 0 \times 2 = 5$

$|\mathbf{u}| = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$

$|\mathbf{v}| = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{10}\sqrt{29}}\right) \approx 72.93°$

28. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta = 3 \times 4 \times \cos\frac{\pi}{3} = 3 \times 4 \times \frac{1}{2} = 6$

29. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta = 3 \times 4 \times \cos\frac{2\pi}{3} = 3 \times 4 \times \left(-\cos\frac{\pi}{3}\right) = -6$

30. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \langle 2, -6, 4\rangle \cdot \langle -1, 3, 5\rangle = -2 - 18 + 20 = 0$

إذن، المتجهان متعامدان.

31. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (3\mathbf{i} - 7\mathbf{j}) \cdot (5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) = 15 - 14 = 1 > 0$

إذن، الزاوية بين المتجهين حادة.

32. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) \cdot (6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = 0 - 18 + 18 = 0$

إذن، المتجهان متعامدان.

33. $\mathbf{r} + \mathbf{v} = \langle 0, 1, 3\rangle + \langle 3, -4, 5\rangle = \langle 3, -3, 8\rangle$

34. $\mathbf{r} - \mathbf{w} = \langle 0 - 1, 1 - 4, 3 - (-9)\rangle = \langle -1, -3, 12\rangle$

35. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 3 \times 1 + (-4) \times 4 + 5 \times (-9) = 3 - 16 - 45 = -58$

iii. $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{14}}\right) \approx 37°$

$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{-2}{\sqrt{14}}\right) \approx 122°$

$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right) \approx 74°$

46. i. $\cos\alpha = \frac{x}{|\mathbf{v}|} = \frac{3}{5}$

$\cos\beta = \frac{y}{|\mathbf{v}|} = \frac{0}{5} = 0$

$\cos\gamma = \frac{z}{|\mathbf{v}|} = \frac{-4}{5}$

ii. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + (0)^2 + \left(\frac{-4}{5}\right)^2$

$= \frac{9+0+16}{25} = \frac{25}{25} = 1$

iii. $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) \approx 53°$

$\beta = \cos^{-1}(0) = 90°$

$\gamma = \cos^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right) \approx 143°$

47. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$

$\langle 3, 5, 0\rangle \cdot \langle m-2, n+3, 0\rangle = 0$

$3(m-2) + 5(n+3) + 0 \times 0 = 0$

$3m - 6 + 5n + 15 = 0$

$3m + 5n = -9$

$m = \frac{-5n-9}{3}$

48. $\mathbf{w} = \mathbf{v}$

$\langle 6, 3, 4\rangle = \langle m+2, 3, m\rangle$

$m = 4$

49. $\mathbf{w} = \mathbf{v}$

$\langle -1, 5, 6\rangle = \langle m-2, n+4, 6\rangle$

$m - 2 = -1,\ m = 1$

$n + 4 = 5,\ n = 1$

.50 لا يوجد عدد حقيقي حيث يشكل كمية قياسية تعطي $\mathbf{u} = a\mathbf{v}$، إذن المتجهان $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ غير متوازيين.

.51 $\mathbf{u} = -3\mathbf{v}$، إذن المتجهان $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ متوازيان.

.52 يوجد عدد حقيقي $k \neq 0$ حيث $\mathbf{u} = k\mathbf{v}$.

$\langle 8, 7, 2\rangle = k\langle 2a, 3b, 4\rangle$

$2 = 4k,\ k = \frac{1}{2}$

$8 = 2ak,\ 8 = 2a\left(\frac{1}{2}\right),\ a = 8$

$7 = 3bk,\ 7 = 3b\left(\frac{1}{2}\right),\ b = \frac{14}{3}$

.53 يوجد عدد حقيقي $k \neq 0$ حيث $\mathbf{u} = k\mathbf{v}$.

$\langle 12, -5, -3\rangle = k\langle -6, 2a, -5b\rangle$

$12 = -6k,\ k = -2$

$-5 = 2ak,\ -5 = 2a(-2),\ a = \frac{5}{4}$

$-3 = -5bk,\ -3 = -5b(-2),\ b = \frac{3}{10}$

.54 صواب.

$$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + R(z_B - z_A)^2}$$
$$= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + R(z_A - z_B)^2}$$
$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$$

.55 خطأ. مثال على ذلك: لنفترض أن $\mathbf{u} = \mathbf{i}$ و $\mathbf{v} = \mathbf{j}$.

إذن، $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = |\mathbf{i} + \mathbf{j}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \neq 2 = 1 + 1 = |\mathbf{i}| + |\mathbf{j}| = |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$

58. $|a\mathbf{i} + (a-1)\,\mathbf{j} + (a+1)\,\mathbf{k}| = 2$

$\sqrt{a^2 + (a-1)^2 + (a+1)^2} = 2$

$a^2 + (a-1)^2 + (a+1)^2 = 4$

$a^2 + 2a^2 + 2 = 4$

$3a^2 = 2$

$a = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

59. a. $\overrightarrow{OA} = \langle 8, 0, 0\rangle$

$\overrightarrow{OC} = \langle 0, 8, 0\rangle$

$\overrightarrow{OD} = \langle 0, 0, 8\rangle$

$\overrightarrow{OB} = \langle 8, 8, 0\rangle$

$\overrightarrow{OE} = \langle 8, 0, 8\rangle$

$\overrightarrow{OG} = \langle 0, 8, 8\rangle$

$\overrightarrow{OF} = \langle 8, 8, 8\rangle$

$\overrightarrow{OO} = \langle 0, 0, 0\rangle$

b. $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM} = \langle 0, 8, 8\rangle + \langle 4, 0, 0\rangle = \langle 4, 8, 8\rangle$

$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BN} = \langle 8, 8, 0\rangle + \langle 0, 0, 4\rangle = \langle 8, 8, 4\rangle$

$\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EL} = \langle 8, 0, 8\rangle + \langle 0, 4, 0\rangle = \langle 8, 4, 8\rangle$

c. $\overrightarrow{LM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NL} = \overrightarrow{LO} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OL}$

$= \overrightarrow{LO} + \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NO}$

$= \vec{0}$

.60 لتكن $\mathbf{F}_1$ قوة الشد في السلك الأيمن، و $\mathbf{F}_2$ قوة الشد في السلك الأيسر، و $\mathbf{F}_3$ وزن الإشارة الضوئية. بما أن الوضع في حالة توازن، فإن:

$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = 0$

$\langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_2\rangle + \langle x_3, y_3\rangle = \langle 0, 0\rangle$

$\langle x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3\rangle = \langle 0, 0\rangle$

$x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$y_1 + y_2 + y_3 = 0$

$|\mathbf{F}_1|\cos 45° + |\mathbf{F}_2|\cos(180° - 30°) + |\mathbf{F}_3|\cos(-90°) = 0$

$|\mathbf{F}_1|\sin 45° + |\mathbf{F}_2|\sin(180° - 30°) + |\mathbf{F}_3|\sin(-90°) = 0$

$\frac{\sqrt{2}}{2}|\mathbf{F}_1| - \frac{\sqrt{3}}{2}|\mathbf{F}_2| + 0 = 0$

$\frac{\sqrt{2}}{2}|\mathbf{F}_1| + \frac{|\mathbf{F}_2|}{2} - 125 = 0$

إذن $|\mathbf{F}_1| \approx 112.7$ N و $|\mathbf{F}_2| \approx 91.5$ N.

وبالتالي تكون قوة الشد في كل سلك:

$\mathbf{F}_1 \approx \langle 112.7\cos 45°, 112.7\sin 45°\rangle \approx \langle 79.7, 79.7\rangle$

$\mathbf{F}_2 \approx \langle 91.5\cos(180° - 30°), 91.5\sin(180° - 30°)\rangle \approx \langle -79.2, 45.6\rangle$

61. لتكن $\mathbf{F}_1$ قوة الشد في السلك الأيمن، و $\mathbf{F}_2$ قوة الشد في السلك الأيسر، و $\mathbf{F}_3$ الوزن المحمول. بما أن الوضع في حالة توازن، فإن:

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = 0$$
$$\langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle + \langle x_3, y_3 \rangle = \langle 0, 0 \rangle$$
$$\langle x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3 \rangle = \langle 0, 0 \rangle$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$y_1 + y_2 + y_3 = 0$$

$$|\mathbf{F}_1| \cos 60° + |\mathbf{F}_2| \cos (180° - 30°) + |\mathbf{F}_3| \cos (-90°) = 0$$
$$|\mathbf{F}_1| \sin 60° + |\mathbf{F}_2| \sin (180° - 30°) + |\mathbf{F}_3| \sin (-90°) = 0$$
$$\frac{|\mathbf{F}_1|}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}|\mathbf{F}_2| + 0 = 0$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2}|\mathbf{F}_1| + \frac{|\mathbf{F}_2|}{2} - 300 = 0$$

إذن $|\mathbf{F}_1| = 150$ N و $|\mathbf{F}_2| \approx 259.8$ N.
وبالتالي تكون قوة الشد في كل سلك:

$$\mathbf{F}_1 \approx \langle 259.8 \cos 60°, 259.8 \sin 60° \rangle \approx \langle 129.9, 225 \rangle$$
$$\mathbf{F}_2 \approx \langle 150 \cos (180° - 30°), 150 \sin (180° - 30°) \rangle \approx \langle -129.9, 75 \rangle$$

62. $\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$3 \cos^2 \alpha = 1$$
$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{3}$$
$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\alpha = \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 54.74°$$

63. لنفترض أنّ $\mathbf{v} = |\mathbf{a}|\mathbf{b} + |\mathbf{b}|\mathbf{a}$.
نلاحظ ما يلي: $||\mathbf{a}|\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| + ||\mathbf{b}|\mathbf{a}|$
إذن، **v** يمثّل جمع متجهين لهما نفس المقدار، أي أنّ متوازي الأضلاع الذي يشكله هذين المتجهين والذي يمثل **v** أحد أقطاره هو معين، والقطر في المعين هو منصف زاوية أيضًا، أي أنّ **v** هو منصف الزاوية المكونة من المتجهين $|\mathbf{a}|\mathbf{b}$ و $|\mathbf{b}|\mathbf{a}$. وبما أنّ $|\mathbf{a}|\mathbf{b}$ موازٍ للمتجه **b** و $|\mathbf{b}|\mathbf{a}$ موازٍ للمتجه **a**، نستنتج أنّ **v** يقسم الزاوية بين المتجهين **a** و **b** إلى زاويتين متساويتين.

64. إذا افترضنا أنّ المحور x يمثّل اتجاه الغرب والمحور y يمثّل اتجاه الشمال، والمحور z الارتفاع عن سطح الأرض، و **v** يمثّل سرعة الطائرة لحظة إقلاعها.
إذن:

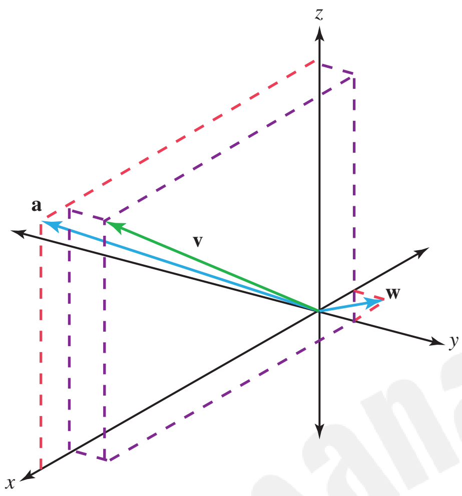
$$\mathbf{v} = 200 \cos 20° \,\mathbf{i} + 200 \sin 20° \,\mathbf{k} - 10 \cos 45° \,\mathbf{i} + 10 \sin 45° \,\mathbf{j}$$
$$\approx (187.94 - 7.07)\,\mathbf{i} + 7.07\,\mathbf{j} + 68.40\,\mathbf{k}$$
$$= 180.87\,\mathbf{i} + 7.07\,\mathbf{j} + 68.40\,\mathbf{k}$$

65. $\mathbf{a} = 250 \cos 30° \,\mathbf{i} + 250 \sin 30° \,\mathbf{k} = 125\sqrt{3}\,\mathbf{i} + 125\,\mathbf{k}$

$$\mathbf{w} = -32 \cos 45° \,\mathbf{i} + 32 \sin 45° \,\mathbf{j} = -16\sqrt{2}\,\mathbf{i} + 16\sqrt{2}\,\mathbf{j}$$

لنفترض أنّ **v** هو المتجه الذي يمثّل سرعة الطائرة. إذن:

$$\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{w} = (125\sqrt{3} - 16\sqrt{2})\mathbf{i} + 16\sqrt{2}\,\mathbf{j} + 125\,\mathbf{k}$$
$$\approx 193.88\,\mathbf{i} + 22.63\,\mathbf{j} + 125\,\mathbf{k}$$



الوحدة 6 مراجعة الوحدة

في التمارين 1-4، ليكن $A(2, -1)$ و $B(3, 1)$ و $C(-4, 2)$ و $D(1, -5)$. اكتب المتجه بالصورة التركيبية ثم أوجد مقداره.

1. $3\,\overrightarrow{AB}$

2. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

3. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$

4. $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}$

5. ليكن $A\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ و $B(8, -6)$. أوجد ما يلي:

   a. متجه وحدة اتجاهه نفس اتجاه $\overrightarrow{AB}$.

   b. متجه مقداره 3 واتجاهه عكس اتجاه $\overrightarrow{AB}$.

في التمارين 6-11، ليكن $\mathbf{u} = \langle 2, -1 \rangle$ و $\mathbf{v} = \langle 4, 2 \rangle$ و $\mathbf{w} = \langle 1, -3 \rangle$. أوجد المطلوب في كل من الحالات التالية.

6. $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ $\langle -2, -3 \rangle$

7. $3\mathbf{u} - 3\mathbf{w}$ $\langle 3, 6 \rangle$

8. $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|$ $|\langle 6, 1 \rangle| = \sqrt{36 + 1} = \sqrt{37} \approx 6.08$

9. $|\mathbf{w} - 2\mathbf{u}|$ $|\langle -3, -1 \rangle| = \sqrt{10} \approx 3.16$

10. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ $8 - 2 = 6$

11. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ $2 + 3 = 5$

12. ليكن $\mathbf{u} = \langle 4, 3 \rangle$ و $\mathbf{v} = \langle 2, 5 \rangle$. أوجد ما يلي:

   a. قياس زاوية الاتجاه للمتجهين $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$.

   b. قياس الزاوية بين المتجهين $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$.

في التمارين 13-16، أوجد مقدار المتجه الذي تشكل فيه النقطتان A و B نقطتا البداية والطرف.

13. $A(-1, 2, 5)$, $B(3, -4, 6)$

14. $A(6, -3, 4)$, $B(2, -1, -8)$

15. $A(1, -3, 2)$, $B(a, b, c)$

16. $A(p, q, r)$, $B(x, y, z)$

في التمارين 17-26، ليكن $\mathbf{r} = \langle 1, 0, -3 \rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -3, 4, -5 \rangle$ و $\mathbf{w} = \langle 4, -3, 12 \rangle$. أوجد المطلوب في كل من الحالات التالية.

17. $\mathbf{r} + \mathbf{v}$ $\langle -2, 4, -8 \rangle$

18. $\mathbf{r} - \mathbf{w}$ $\langle -3, 3, -15 \rangle$

19. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ $-12 - 12 - 60 = -84$

20. $|\mathbf{w}|$ $\sqrt{16 + 9 + 144} = 13$

21. $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ $\langle 1, 0, -3 \rangle \cdot \langle 1, 1, 7 \rangle = 1 + 0 - 21 = -20$

22. $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{w})$ $-3 + 0 + 15 + 4 + 0 - 36 = -20$

23. $\dfrac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}$ $\dfrac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|} = \dfrac{\langle 4, -3, 12 \rangle}{13} = \left\langle \dfrac{4}{13}, -\dfrac{3}{13}, \dfrac{12}{13} \right\rangle$

24. $\mathbf{i} \cdot \mathbf{r}$ 1

25. $\langle \mathbf{i} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{j} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \rangle$ $\langle -3, 4, -5 \rangle$

26. $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$ $12\langle 4, -3, 12 \rangle = \langle 48, -36, 144 \rangle$

في التمارين 27-29، أوجد المتجه $\mathbf{u}$ حسب المقدار المعطى وباتجاه $\mathbf{v}$.

27. $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, |\mathbf{u}| = 3$

28. $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}, |\mathbf{u}| = 2$

29. $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}, |\mathbf{u}| = 6$

في التمارين 30-34،

i. أوجد جيوب التمام لاتجاه $\mathbf{v}$.

ii. أثبت أنها تحقق الصيغة

$$\cos^2\alpha + \cos^2\gamma + \cos^2\beta = 1$$

30. $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$

31. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

32. $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

33. $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$

34. أوجد قيمة كل من m و n بحيث يكون للمتجهين $\mathbf{w} = \langle 2, 6, -4 \rangle$ و $\mathbf{v} = \langle m + 2, m - n, m - 2n \rangle$ نفس الاتجاه.

35. أوجد قيمة كل من m و n بحيث يكون المتجهان $\mathbf{u} = \langle 3, 4, 1 \rangle$ و $\mathbf{v} = \langle m + 1, m - 3, 2 \rangle$ متعامدين.

36. أوجد الزاوية بين المتجهين $\mathbf{v} = \langle 1, 3, 2 \rangle$ و $\mathbf{u} = \langle 3, -4, -1 \rangle$ والزاوية بين $\mathbf{u}$ و $\mathbf{u} + \mathbf{v}$.

37. **هندسة الطيران** تحلق طائرة بزاوية مسار مع الشمال $285°$ بسرعة 480 mph، وتهبّ الرياح بزاوية مسار مع الشمال قياسها $265°$ بسرعة 30 mph

a. أوجد مركبتي المتجه الذي يمثّل السرعة الابتدائية للطائرة.

b. أوجد مركبتي المتجه الذي يمثّل سرعة الرياح.

c. أوجد مركبتي المتجه الذي يمثّل سرعة الطائرة.

38. **جمع القوى** تُطبّق قوة مقدارها 180 lb على جسم بزاوية قياسها $20°$، وتطبَّق على الجسم في الوقت نفسه قوة أخرى مقدارها 300 lb بزاوية قياسها $-5°$. أوجد مقدار واتجاه القوة الناتجة.

39. **الشغل** أوجد الشغل الناشئ عن قوة $\mathbf{F}$ قيمتها 12 N في اتجاه $\langle 1, 2 \rangle$ لتحريك جسم مسافة 5 m من النقطة $(0, 0)$ إلى النقطة $(5, 0)$.

40. **السرعة الثلاثية الأبعاد** أقلعت طائرة في اتجاه الغرب بسرعة 200 mph بزاوية قياسها $20°$ مع سطح الأرض. إذا هبت الرياح من الشمال الشرقي بسرعة 10 mph، أوجد المتجه $\mathbf{v}$ الذي يمثّل سرعة الطائرة لحظة إقلاعها.

الوحدة 6 مراجعة الوحدة

1. $3\,\overrightarrow{AB} = 3\langle 1, 2\rangle = \langle 3, 6\rangle$

$\left|3\,\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \approx 6.71$

2. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \langle 1, 2\rangle + \langle 5, -7\rangle = \langle 6, -5\rangle$

$\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{36+25} = \sqrt{61} \approx 7.81$

3. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \langle -6, 3\rangle + \langle -2, -6\rangle = \langle -8, -3\rangle$

$\left|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right| = \sqrt{64+9} = \sqrt{73} \approx 8.54$

4. $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \langle 6, -5\rangle$

$\left|\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{61} \approx 7.81$

5. a. $\hat{\mathbf{u}} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \dfrac{\left\langle \frac{36}{5}, \frac{-27}{5}\right\rangle}{\sqrt{\left(\frac{36}{5}\right)^2 + \left(-\frac{27}{5}\right)^2}} = \left\langle \frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right\rangle$

b. $-3\hat{\mathbf{u}} = -3\left\langle \frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right\rangle = \left\langle -\frac{12}{5}, \frac{9}{5}\right\rangle$

12. a. لتكن α زاوية اتجاه المتجه $\mathbf{u}$.

$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 36.87°$

لتكن β زاوية اتجاه المتجه $\mathbf{v}$.

$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right) \approx 68.20°$

b. $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = \dfrac{8+15}{\sqrt{16+9}\times\sqrt{4+25}} = \dfrac{23}{5\sqrt{29}} \approx 0.85$

$\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{23}{5\sqrt{29}}\right) \approx 31.33°$

13. $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{16+36+1} = \sqrt{53} \approx 7.28$

14. $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{16+4+144} = 2\sqrt{41} \approx 12.81$

15. $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(a-1)^2 + (b+3)^2 + (c-2)^2}$

$= \sqrt{a^2+b^2+c^2-2a+6b-4c+1+9+4}$

$= \sqrt{a^2+b^2+c^2-2a+6b-4c+14}$

16. $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2 + (z-r)^2}$

$= \sqrt{x^2+y^2+z^2+p^2+q^2+r^2-2xp-2yq-2zr}$

27. $\mathbf{u} = |\mathbf{u}|\dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \dfrac{3}{\sqrt{4+4+9}}(-2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$

$= -\dfrac{6}{\sqrt{17}}\mathbf{i} - \dfrac{6}{\sqrt{17}}\mathbf{j} + \dfrac{9}{\sqrt{17}}\mathbf{k}$

28. $\mathbf{u} = |\mathbf{u}|\dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \dfrac{2}{\sqrt{1+36+4}}(\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$

$= \dfrac{2}{\sqrt{41}}\mathbf{i} - \dfrac{12}{\sqrt{41}}\mathbf{j} - \dfrac{4}{\sqrt{41}}\mathbf{k}$

29. $\mathbf{u} = |\mathbf{u}|\dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \dfrac{6}{\sqrt{25+9+1}}(5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k})$

$= \dfrac{30}{\sqrt{35}}\mathbf{i} + \dfrac{18}{\sqrt{35}}\mathbf{j} + \dfrac{6}{\sqrt{35}}\mathbf{k}$

30. $|\mathbf{v}| = \sqrt{4+9+16} = \sqrt{29}$

$\cos\alpha = \dfrac{-2}{\sqrt{29}} \approx -0.37$

$\cos\beta = \dfrac{3}{\sqrt{29}} \approx 0.56$

$\cos\gamma = \dfrac{-4}{\sqrt{29}} \approx -0.74$

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{4}{29} + \frac{9}{29} + \frac{16}{29} = 1$

31. $|\mathbf{v}| = \sqrt{4+4+9} = \sqrt{17}$

$\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{17}} \approx 0.49$

$\cos\beta = \dfrac{2}{\sqrt{17}} \approx 0.49$

$\cos\gamma = \dfrac{-3}{\sqrt{17}} \approx -0.73$

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{4}{17} + \frac{4}{17} + \frac{9}{17} = 1$

32. $|\mathbf{v}| = \sqrt{9+1+36} = \sqrt{46}$

$\cos\alpha = \dfrac{-3}{\sqrt{46}} \approx -0.44$

$\cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{46}} \approx 0.15$

$\cos\gamma = \dfrac{6}{\sqrt{46}} \approx 0.88$

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{9}{46} + \frac{1}{46} + \frac{36}{46} = 1$

33. $|\mathbf{v}| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$\cos\alpha = \dfrac{-3}{\sqrt{13}} \approx -0.83$

$\cos\beta = \dfrac{0}{\sqrt{13}} = 0$

$\cos\gamma = \dfrac{2}{\sqrt{13}} \approx 0.55$

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{9}{13} + 0 + \frac{4}{13} = 1$

34. ليكن k عددًا حقيقيًّا غير صفري حيث $\mathbf{v} = k\mathbf{w}$. إذن،

$m + 2 = 2k,\ m - n = 6k,\ m - 2n = -4k$

$(1): m - 2k = -2$

$(2): m - n - 6k = 0$

$(3): m - 2n + 4k = 0$

حل نظام معادلات:

$(1): m = 2k - 2$

$(2): n = -6k + m = -6k + 2k - 2 = -4k - 2$

$(3): m - 2n + 4k = 2k - 2 + 8k + 4 + 4k = 14k + 2 = 0$

إذن، $m = -\frac{16}{7},\ n = -\frac{10}{7},\ k = -\frac{1}{7}$ (تحقق باستعمال الحاسبة).

35. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$

$3m + 3 + 4m - 12 + 2 = 0$

$7m = 7$

$m = 1$

36. $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}\right) = \cos^{-1}\left(\dfrac{3-12-2}{\left(\sqrt{1+9+4}\right)\left(\sqrt{9+16+1}\right)}\right)$

$= \cos^{-1}\left(\dfrac{-11}{\left(\sqrt{14}\right)\left(\sqrt{26}\right)}\right) \approx 125.21°$

$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle 4, -1, 1\rangle$

$\alpha = \cos^{-1}\left(\dfrac{(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{u}}{|\mathbf{u}+\mathbf{v}||\mathbf{u}|}\right) = \cos^{-1}\left(\dfrac{12+4-1}{\left(\sqrt{16+1+1}\right)\left(\sqrt{9+16+1}\right)}\right)$

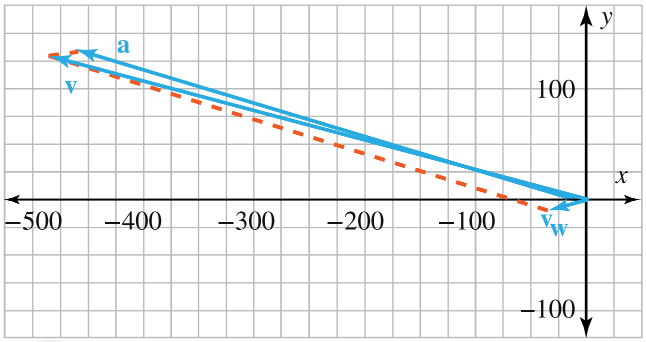
$= \cos^{-1}\left(\dfrac{15}{\left(\sqrt{18}\right)\left(\sqrt{26}\right)}\right) \approx 46.10°$

37. **a.** $\mathbf{a} = 480\cos(165°)\,\mathbf{i} + 480\sin(165°)\,\mathbf{j} \approx -463.64\,\mathbf{i} + 124.23\,\mathbf{j}$

b. $\mathbf{v}_W = 30\cos(185°)\,\mathbf{i} + 30\sin(185°)\,\mathbf{j} \approx -29.89\,\mathbf{i} - 2.61\,\mathbf{j}$

c. $\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{v}_w \approx (-463.64\,\mathbf{i} + 124.23\,\mathbf{j}) + (-29.89\,\mathbf{i} - 2.61\,\mathbf{j})$

$= -493.53\,\mathbf{i} + 121.62\,\mathbf{j}$



38. $\mathbf{F} = [180\cos(20°) + 300\cos(-5°)]\,\mathbf{i}$

$+[180\sin(20°) + 300\sin(-5°)]\,\mathbf{j}$

$\approx 468\,\mathbf{i} + 35.42\,\mathbf{j}$

$|\mathbf{F}| \approx \sqrt{468^2 + 35.42^2} \approx 469.34$ lb

$\theta \approx \tan^{-1}\left(\frac{35.42}{468}\right) \approx 4.33°$

39. $\mathbf{F} = 12\,\frac{\langle 1, 2\rangle}{\sqrt{1+4}} = \left\langle \frac{12}{\sqrt{5}}, \frac{24}{\sqrt{5}} \right\rangle$

$\mathbf{w} = \mathbf{F} \cdot \langle 5, 0\rangle = \left\langle \frac{12}{\sqrt{5}}, \frac{24}{\sqrt{5}} \right\rangle \cdot \langle 5, 0\rangle = \frac{60}{\sqrt{5}} + 0 = 12\sqrt{5} \approx 26.83$ N.m

40. $\mathbf{v} = 200\cos 160°\,\mathbf{i} + 200\sin 160°\,\mathbf{k} + 10\cos 225°\,\mathbf{i} + 10\sin 225°\,\mathbf{j}$

$\approx -195.01\,\mathbf{i} - 7.07\,\mathbf{j} + 68.40\,\mathbf{k}$

الوحدة 6 تقويم

في التمرينين 1 و 2، ليكن $A(-2, 1)$ و $B(-3, 2)$ و $C(-2, 3)$.
اكتب المتجه بالصورة التركيبية ثم أوجد مقداره.

1. $3\overrightarrow{CB}$

2. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

في التمارين 3-6، ليكن $\mathbf{u} = \langle 2, 1\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -3, 2\rangle$ و $\mathbf{w} = \langle 2, 3\rangle$. أوجد المطلوب في كل من الحالات التالية.

3. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ $\langle -1, 3\rangle$

4. $2\mathbf{v} - \mathbf{w}$ $\langle -6, 4\rangle - \langle 2, 3\rangle = \langle -8, 1\rangle$

5. $|\mathbf{u} - \mathbf{v}|$ $|\langle 5, -1\rangle| = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26} \approx 5.10$

6. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ $-6 + 6 = 0$

7. ليكن $\mathbf{u} = \langle -2, 4\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle 6, 4\rangle$. أوجد ما يلي:

a. قياس زاوية الاتجاه للمتجهين **u** و **v**.

b. قياس الزاوية بين المتجهين **u** و **v**.

8. ليكن $A(3, 1)$ و $B(5, 1)$. أوجد ما يلي:

a. متجه وحدة اتجاهه نفس اتجاه $\overrightarrow{AB}$.

b. متجه مقداره 3 واتجاهه عكس اتجاه $\overrightarrow{AB}$.

في التمارين 9-14، ليكن $\mathbf{r} = \langle 1, 0, -3\rangle$ و $\mathbf{v} = \langle -3, 4, -5\rangle$ و $\mathbf{w} = \langle 4, -3, 12\rangle$. أوجد المطلوب في كل من الحالات التالية.

9. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}$ 12

10. $|\mathbf{r}|$ $\sqrt{1 + 0 + 9} = \sqrt{10} \approx 3.16$

11. $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{w})$ $\langle 1, 0, -3\rangle \cdot \langle -7, 7, -17\rangle = -7 + 0 + 51 = 44$

12. $\dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ $\dfrac{\langle -3, 4, -5\rangle}{\sqrt{9 + 16 + 25}} = \dfrac{\langle -3, 4, -5\rangle}{5\sqrt{2}} = \left\langle -\dfrac{3}{5\sqrt{2}}, \dfrac{4}{5\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle$

13. $\mathbf{j} \cdot \mathbf{w}$ -3

14. $\langle \mathbf{i} \cdot \mathbf{r}, \mathbf{j} \cdot \mathbf{r}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}\rangle$ $\langle 1, 0, -3\rangle$

في التمرينين 15 و 16، أوجد المتجه **u** حسب المقدار المعطى وباتجاه **v**.

15. $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, |\mathbf{u}| = 1$ $\mathbf{u} = |\mathbf{u}| \dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \dfrac{1}{\sqrt{14}}\mathbf{i} + \dfrac{2}{\sqrt{14}}\mathbf{j} - \dfrac{3}{\sqrt{14}}\mathbf{k}$

16. $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}, |\mathbf{u}| = 4$ $\mathbf{u} = |\mathbf{u}| \dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \dfrac{16}{\sqrt{41}}\mathbf{i} - \dfrac{12}{\sqrt{41}}\mathbf{j} + \dfrac{16}{\sqrt{41}}\mathbf{k}$

في التمارين 17-19،

i. أوجد جيوب التمام لاتجاه **v**.

ii. أثبت أنها تحقق الصيغة
$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

iii. قرّب زوايا الاتجاه إلى أقرب درجة.

17. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$

18. $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

19. $\mathbf{v} = 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

20. أوجد قيمة كل من m و n بحيث يكون المتجهان $\mathbf{v} = \langle m + 1, 3, m\rangle$ و $\mathbf{u} = \langle 3, -4, 1\rangle$ متعامدين.

21. إذا كان $\mathbf{v} = \langle -1, -3, 2\rangle$ و $\mathbf{u} = \langle 3, 4, 1\rangle$
أوجد الزاوية بين **v** و **u + v**.

22. تحلق طائرة بزاوية مسار مع الشمال قياسها 80° بسرعة 540 mph، و تهب رياح بزاوية مسار مع الشمال قياسها 100° بسرعة 55 mph

a. أوجد مركبتي المتجه الذي يمثل السرعة الابتدائية للطائرة.

b. أوجد مركبتي المتجه الذي يمثل سرعة الرياح.

c. أوجد مركبتي المتجه الذي يمثّل سرعة الطائرة.

23. تُطبّق قوة مقدارها 160 lb على جسم بزاوية قياسها 100°، وتطبّق على الجسم في الوقت نفسه قوة أخرى مقدارها 250 lb بزاوية قياسها −8°. أوجد مقدار واتجاه القوة الناتجة.

24. أوجد الشغل الناشئ عن قوة **F** قيمتها 10 N في اتجاه $\langle 1, 3\rangle$ لتحريك جسم مسافة 6 m من النقطة $(0, 0)$ إلى النقطة $(6, 0)$.

الوحدة 6 تقويم

1. $3\,\overrightarrow{CB} = 3\langle -1, -1\rangle = \langle -3, -3\rangle$

$\left|3\,\overrightarrow{CB}\right| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2} \approx 4.24$

2. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \langle -1, 1\rangle + \langle 1, 1\rangle = \langle 0, 2\rangle$

$\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{0+4} = 2$

7. a. $\alpha_u = \tan^{-1}\left(\frac{4}{-2}\right) \approx 180° - 63.43° = 116.57°$

$\alpha_v = \tan^{-1}\left(\frac{4}{6}\right) \approx 33.69°$

b. $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-12+16}{\sqrt{4+16}\times\sqrt{36+16}}\right)$

$= \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{65}}\right) \approx 82.87°$

8. a. $\hat{\mathbf{u}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{\langle 2, 0\rangle}{\sqrt{4}} = \langle 1, 0\rangle$

b. $\mathbf{v} = -3\hat{\mathbf{u}} = \langle -3, 0\rangle$

17. i. $|\mathbf{v}| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{5}}$

$\cos\gamma = 0$

ii. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} + 0 = 1$

iii. $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \approx 27°$

$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right) \approx 117°$

$\gamma = \cos^{-1}(0) = 90°$

18. i. $|\mathbf{v}| = \sqrt{9+4+16} = \sqrt{29}$

$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{29}}$

$\cos\beta = \frac{-2}{\sqrt{29}}$

$\cos\gamma = \frac{4}{\sqrt{29}}$

ii. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{9}{29} + \frac{4}{29} + \frac{16}{29} = 1$

iii. $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{29}}\right) \approx 56°$

$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{-2}{\sqrt{29}}\right) \approx 112°$

$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{29}}\right) \approx 42°$

19. i. $|\mathbf{v}| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$\cos\alpha = 0$

$\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{13}}$

$\cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{13}}$

ii. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 0 + \frac{9}{13} + \frac{4}{13} = 1$

iii. $\alpha = \cos^{-1}(0) = 90°$

$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right) \approx 34°$

$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) \approx 56°$

20. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 3m + 3 - 12 + m = 0$

$4m = 9$

$m = \frac{9}{4} = 2.25$

21. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle 2, 1, 3\rangle$

$\mathbf{v} = \langle -1, -3, 2\rangle$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{(u+v)\cdot v}{|u+v||v|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-2-3+6}{\sqrt{4+1+9}\times\sqrt{1+9+4}}\right)$

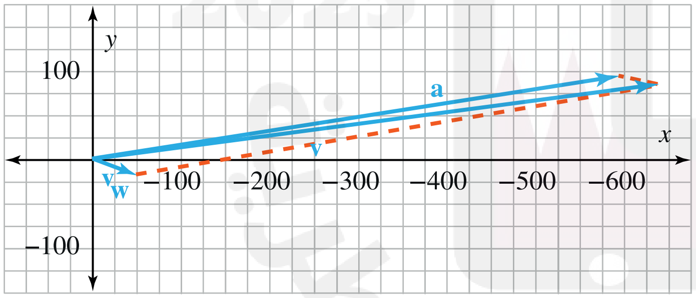
$= \cos^{-1}\left(\frac{1}{14}\right) \approx 85.90°$

22. a. $\mathbf{a} = 540\cos(10°)\,\mathbf{i} + 540\sin(10°)\,\mathbf{j} \approx 531.80\,\mathbf{i} + 93.77\,\mathbf{j}$

b. $\mathbf{v}_W = 55\cos(350°)\,\mathbf{i} + 55\sin(350°)\,\mathbf{j} \approx 54.16\,\mathbf{i} - 9.55\,\mathbf{j}$

c. $\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{v}_w \approx (531.80\,\mathbf{i} + 93.77\,\mathbf{j}) + (54.16\,\mathbf{i} - 9.55\,\mathbf{j})$

$= 585.96\,\mathbf{i} + 84.22\,\mathbf{j}$



23. $\mathbf{F} = [160\cos(100°) + 250\cos(-8°)]\,\mathbf{i}$

$+ [160\sin(100°) + 250\sin(-8°)]\,\mathbf{j}$

$\approx 219.78\,\mathbf{i} + 122.78\,\mathbf{j}$

$|\mathbf{F}| = \sqrt{219.78^2 + 122.78^2} \approx 251.75$ lb

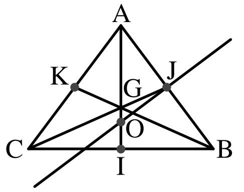
$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{122.78}{219.78}\right) \approx 29.19°$

24. $\mathbf{F} = 10\,\frac{\langle 1, 3\rangle}{\sqrt{10}} = \langle\sqrt{10}, 3\sqrt{10}\rangle$

$\mathbf{W} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{d} = \langle\sqrt{10}, 3\sqrt{10}\rangle\cdot\langle 6, 0\rangle = 6\sqrt{10} \approx 18.97$ N.m

الوحدة 6 المشروع

ليكن المثلث ABC ولتكن G نقطة ارتكازه، و O مركز الدائرة المحيطة به، و H ملتقى الارتفاعات.



نريد استعمال المتجهات لإثبات أن هذه النقاط الثلاث متسامتة (أي تقع على خط واحد).

1. أثبت أن

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$$

2. أثبت أن

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\,\overrightarrow{OG}$$

3. لتكن E النقطة بحيث يكون

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE}$$

a. أثبت أن

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CE}$$

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AE}$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BE}$$

b. أثبت أن $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ متجه متعامد مع $\overrightarrow{AB}$ وأن $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ متجه متعامد مع $\overrightarrow{BC}$ وأن $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ متجه متعامد مع $\overrightarrow{AC}$.

c. استنتج أن $\overrightarrow{AE}$ متعامد مع $\overrightarrow{BC}$ وأن $\overrightarrow{BE}$ متعامد مع $\overrightarrow{AC}$ وأن $\overrightarrow{CE}$ متعامد مع $\overrightarrow{AB}$.

d. استنتج أن $E = H$.

4. أثبت أن $\overrightarrow{OH} = 3\,\overrightarrow{OG}$ ثم استنتج أن النقاط O و G و H متسامتة.

الوحدة 6 المشروع

1. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA}+(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IB})+(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IC})=\overrightarrow{GA}+(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GI})+(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC})=\overrightarrow{GA}+2\,\overrightarrow{GI}+\vec{0}=\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GA}=\vec{0}$

2. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA})+(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GB})+(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GC})=3\,\overrightarrow{OG}+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})=3\,\overrightarrow{OG}+\vec{0}=3\,\overrightarrow{OG}$

3. **a.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OE}$
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{CE}$
$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{AE}$
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{BE}$

b. بما أن النقطة O هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث، إذن $|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}|$.
لإيجاد $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OL}$ نكمل رسم متوازي الأضلاع OALB، ونستنتج أنه معيّن لأن $|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}|$،
وبالتالي قطراه متعامدان، أي أن $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ متعامد مع $\overrightarrow{AB}$.
لإيجاد $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}$ نكمل رسم متوازي الأضلاع OBMC، ونستنتج أنه معيّن لأن $|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OB}|$،
وبالتالي قطراه متعامدان، أي أن $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ متعامد مع $\overrightarrow{BC}$.
لإيجاد $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{ON}$ نكمل رسم متوازي الأضلاع OANC، ونستنتج أنه معيّن لأن $|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OA}|$،
وبالتالي قطراه متعامدان، أي أن $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$ متعامد مع $\overrightarrow{AC}$.

c. بما أن $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان، فإن $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان، وبما أن $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BE}$ و $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$ و $\overrightarrow{AC}$ متعامدان،
فإن $\overrightarrow{BE}$ و $\overrightarrow{AC}$ متعامدان، وبما أن $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CE}$ و $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{AB}$ متعامدان، فإن $\overrightarrow{CE}$ و $\overrightarrow{AB}$ متعامدان.

d. بما أن $\overrightarrow{AE}$ متعامد مع $\overrightarrow{BC}$، و $\overrightarrow{BE}$ متعامد مع $\overrightarrow{AC}$، و $\overrightarrow{CE}$ متعامد مع $\overrightarrow{AB}$، إذن النقطة E هي نقطة التقاء الارتفاعات في المثلث ABC، أي أن E = H.

4. $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\,\overrightarrow{OG}$

إذن، للمتجهين، $\overrightarrow{OH}$ و $\overrightarrow{OG}$ نفس الاتجاه، وبما أن O نقطة مشتركة بينهما، إذن يقع المتجهان على نفس المستقيم، وبالتالي النقاط O و G و H متسامتة.