الوحدة الخامسة من دليل المعلم: التكامل المحدود وتطبيقاته

الوحدة 5

التكامل المحدود وتطبيقاته

تعلمنا في الوحدة السابقة كيف نجد التكامل غير المحدود للدوال. في هذه الوحدة سنتعرّف إلى التكامل المحدود وتطبيقاته في واقع الحياة. للتكامل المحدود تطبيقات كثيرة: إيجاد المساحات، إيجاد أطوال المسارات المتعرجة، حل مسائل الاحتمال المعقدة وإيجاد التغير الكلي لكمية بمعلومية معدل تغير هذه الكمية، وحساب موقع جسم متحرك بمعلومية سرعته وموقعه الابتدائي. يساعدنا التكامل المحدود أيضًا على معرفة حجوم الأجسام المتناظرة دورانيًا، مثل الأسطوانة والمخروط والكرة.

ولعل أحد أهم المنجزات التي ساعدتنا على إيجاد هذه الحجوم الدورانية كان اكتشاف العالم العربي أبي الحسن ابن الهيثم الذي اكتشف، منذ أكثر من ألف سنة، كيفية إيجاد حجم الشكل الذي ينتج عن دوران المنحنى $y = b\sqrt{\frac{x}{a}}$ حيث $0 \le x \le a$، حول المحور $x = a$، ويمكننا رؤية هذا الشكل في قبب معظم المساجد.

5.1 التكامل المحدود Definite Integration

ما ستتعلّمه

- تعريف التكامل المحدود
- النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل
- خصائص التكامل المحدود

... ولماذا

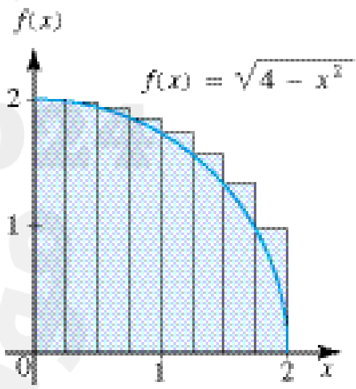
التكامل، الذي يُستعمل عادةً لإيجاد الدوال الأصلية للدوال، يصبح أداةً لا غنى عنها لإيجاد المساحات والحجوم عندما يتخذ شكله المحدود الذي سوف نعرفه وندرسه في هذا الدرس.

معيار الدرس

12A.5.3

المصطلحات

- التكامل المحدود definite integral
- الحد الأعلى للتكامل upper limit of integral
- الحد الأدنى للتكامل lower limit of integral



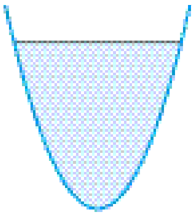
الشكل 5.1.1 نقسم المساحة بين الدالة $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ والمحورين إلى قطع مستطيلة عرض الواحدة $\frac{1}{4}$، بحيث يقع الرأس الأعلى إلى جهة اليسار من كل مستطيل على المنحنى.

الهدف

سيتعرف الطلاب على التكامل المحدود ويتعلمون كيفية استعماله لإيجاد المساحات.

تعريف التكامل المحدود

هناك قواعد محددة لإيجاد مساحات الأشكال الهندسية المعروفة، مثل المستطيل والمربع والمثلث والدائرة وغيرها. ولكن كيف نستطيع إيجاد مساحات ليست من ضمن هذه الأشكال المعروفة؟

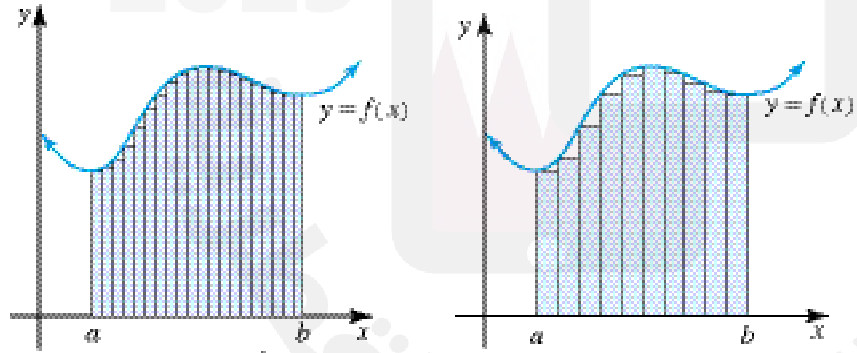


سوف نتعلم لاحقًا كيف نستعمل التكامل لإيجاد مساحات أكثر تنوعًا تحدها منحنيات غير مستقيمة، مثل المساحة المبيّنة في الشكل المجاور. ولكن في البداية سنتعرف على علاقة مفهوم التكامل الذي تمت دراسته في الوحدة السابقة بالمساحة التي يحدها منحنى دالة.

تعود جذور هذه الفكرة إلى عالم الرياضيات اليوناني أرخميدس (287–212 ق. م.) الذي كان أول من اعتمد أسلوبًا دقيقًا أفضى إلى إيجاد الأفكار الأولى لنظرية التكامل. تقوم فكرة أرخميدس، التي أثبتت الرياضيات الحديثة صحتها، على النظر إلى المساحة على أنها عبارة عن مجموعة كبيرة جدًا من القطع المستطيلة المتراصفة جنبًا إلى جنب. (انظر الشكل 5.1.1)

إن مجموع مساحات هذه القطع المستطيلة تساوي تقريبًا المساحة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ والمحورين في الربع الأول. وكلما كان عدد هذه القطع أكبر كان مجموع مساحاتها أقرب إلى المساحة المطلوبة.

لإيضاح هذه الطريقة وتعميمها، سنعمل على إيجاد مساحة المنطقة التي يحدها منحنى الدالة $y = f(x)$ و المحور x والخطان الرأسيان $x = a$ و $x = b$ كما هو مبيّن في الشكل 5.1.2



(a) عشرة مستطيلات متساوية العرض (b) عشرون مستطيلًا متساوون من حيث العرض

الشكل 5.1.2

لإيجاد قيمة تقريبية لهذه المساحة قد نقسمها إلى 10 قطع مستطيلة (انظر الشكل 5.1.2a) أو إلى 20 قطعة مستطيلة (انظر الشكل 5.1.2b)، ثم نجمع مساحات القطع المستطيلة التي مجموع مساحاتها يساوي تقريبًا مساحة المنطقة الواقعة تحت المنحنى $y = f(x)$ الذي نفترض أنه يقع فوق المحور x، أي أن $f(x) \geq 0$ لكل قيم x في الفترة $[a, b]$.

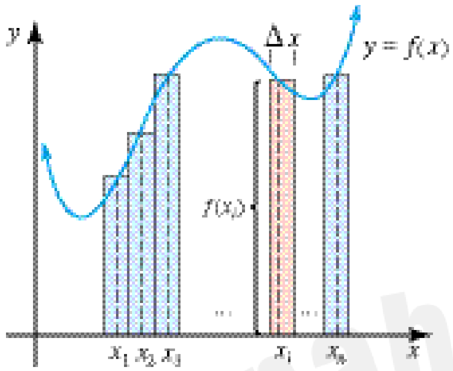
دليل الدرس

1. تعريف التكامل المحدود
2. شرح النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل
3. شرح خصائص التكامل المحدود

تحفيز

اسأل الطلاب ما إذا كانوا يعرفون كيف يبرهنون أن مساحة دائرة تساوي πr^2، حيث r طول نصف قطر الدائرة.

لتطوير عملية تعطينا القيمة الدقيقة للمساحة، سنقوم أولًا بتقسيم الفترة $[a, b]$ إلى n فترة متساوية، بحيث يشكّل طول كل فترة من هذه الفترات عرض كل مستطيل (الشكل 5.1.3).
ليكن x_1 أية قيمة عشوائية في أول فترة و x_2 أية قيمة عشوائية في الفترة الثانية وهكذا حتى بلوغ الفترة n. يمثّل الرمز Δx طول كل فترة من الفترات. وبما أن طول الفترة كلها هو $b - a$، يكون طول كل واحدة من الفترات $\Delta x = \frac{b-a}{n}$



الشكل 5.1.3 n من المستطيلات المتساوية العرض

يسمّى المستطيل الأرجواني، وهو مستطيل تم اختياره عشوائيًّا، المستطيل ذو الرتبة i، حيث تساوي مساحته عرضه مضروبًا بطوله. وبما أن عرض المستطيل ذو الرتبة i هو Δx وطول المستطيل ذو الرتبة i هو $f(x_i)$، فإن

$$\text{مساحة المستطيل ذو الرتبة } i = f(x_i)\ \Delta x$$

يتم إيجاد المساحة التقريبية للمنطقة الواقعة تحت المنحنى من خلال إيجاد مجموع مساحات المستطيلات التي عددها n. نستعمل رمز المجموع لكتابة المجموع التقريبي لكل المساحات:

$$\text{مجموع مساحات المستطيلات التي عددها } n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

تذكير

تذكر أن الرمز $\sum$ يعني "المجموع". نستعمل هنا $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ للدلالة على المجموع $f(x_1)\ \Delta x + f(x_2)\ \Delta x + f(x_3)\ \Delta x + \ldots + f(x_n)\ \Delta x$ حيث نستبدل i بالعدد 1 في الحد الأول، وبالعدد 2 في الحد الثاني، وهكذا حتى نصل إلى الحد n حيث نستبدل i بالعدد n في الحد الأخير.

نعرّف المساحة الدقيقة على أنها نهاية هذا المجموع (إذا كانت موجودة) كلما تزايد عدد المستطيلات:

$$\text{المساحة الدقيقة} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

عندما تكون هذه النهاية موجودة، بغض النظر عن كون $f(x)$ موجبة أو سالبة، سنسميها **التكامل المحدود** للدالة f من a إلى b.

فيما يلي رمز التكامل المحدود للدالة f مع كل ما تشمل من التعاريف.

الحد الأعلى للتكامل

الدالة المكاملة

رمز التكامل

x متغير التكامل

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\ dx}_{\text{تكامل الدالة } f \text{ من } a \text{ إلى } b}$$

الحد الأدنى للتكامل

نلاحظ أن التكامل المحدود للدالة f يمثّل المساحة الواقعة بين الخطين الرأسيين $x = a$ و $x = b$ و منحنى الدالة f والمحور x عندما تكون $f(x) \geq 0$. يمكن أن تكون x_i هي نقطة الوسط للفترة التي أُخذت منها كما يمكن أن تكون حدها الأيمن أو الأيسر. على سبيل المثال، يمكن كتابة المساحة المحددة بين المحور x و المنحنى $y = \sqrt{4 - x^2}$ والمستقيمين $x = 0$ و $x = 2$ باستعمال التكامل المحدود على الشكل التالي

$$\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx$$

ملاحظة

لاحظ أنه على عكس التكامل غير المحدود، الذي هو مجموعة دوال، يمثّل التكامل المحدود عددًا. ستبين الأقسام اللاحقة كيفية استعمال الدوال الأصلية الناتجة عن التكامل غير المحدود في عملية إيجاد التكامل المحدود، وبالتالي إيجاد المساحة تحت منحنى ما.

التكامل المحدود

لتكن f دالة معرّفة في الفترة $[a, b]$. التكامل المحدود للدالة f في الفترة $[a, b]$ يساوي

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

حيث قسمنا الفترة $[a, b]$ إلى n فترة متساوية واخترنا القيمة x_i من الفترة i بشكل عشوائي و $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ هي طول هذه الفترة.

مثال 1 استعمال تعريف التكامل المحدود

تم اختيار كل x_i من الفترة i في تقسيم الفترة $[-7, 5]$ إلى n فترة متساوية طول كل منها Δx. عبّر عن النهاية التالية على شكل تكامل محدود.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - 3x_i)\,\Delta x$$

الحل

نبدأ بتحديد الحد الأعلى للتكامل والذي هو أكبر قيمة في الفترة، أي 5،
والحد الأدنى للتكامل والذي هو أقل قيمة في الفترة، أي -7
نحدّد الدالة التي نريد إيجاد تكاملها وهي الدالة داخل رمز المجموع:

$$f(x) = x^2 - 3x$$

نكتب التكامل المحدود بالنسبة للمتغير x، فنستعمل dx

إذن، $$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 - 3x_i)\,\Delta x = \int_{-7}^{5} (x^2 - 3x)\,dx$$

أسئلة للتفكر

س: هل تتغير قيمة النهاية إذا استبدلنا بالقيمة x_i قيمة أخرى x'_i في الفترة I؟

نموذج إجابة:

لا يكون التكامل المحدود $\int_a^b f(x)\,dx$ معرفًا إلا إذا كانت النهاية $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$ واحدة أيًا تكن المتتالية $(x_i)_n$ حيث تقع x_i في الفترة I و $1 \leq i \leq n$

س: هل تتعلق قيمة التكامل المحدود $\int_a^b f(x)\,dx$ بطول أو قصر الفترة $[a, b]$؟

نموذج إجابة:

من الواضح أن $\int_{-7}^{5} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$، وهذه النهاية تتعلق بقيم الدالة في الفترة $[-7, 5]$ فقط.

إذن لا علاقة لقيمة التكامل المحدود $\int_a^b f(x)\,dx$ بطول الفترة $[a, b]$.

حاول أن تحل التمرين 1

إن تسمية النهاية $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$ بالتكامل المحدود للدالة f وإعطاءها الرمز $\int_a^b f(x)\,dx$ ليست متعمّدة بهدف التماهي مع التكامل غير المحدود ورمزه، بل إن النظرية الأساسية للتحليل الرياضي تبيّن مدى ترابط هذين المفهومين عند فكرة واحدة هي الدالة الأصلية للدالة f .

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل هي النظرية التي تربط بين مفهوم إيجاد الدالة الأصلية (التكامل غير المحدود) والنهاية $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ (التكامل المحدود). تثبت هذه النظرية بالدليل الرياضي أن النهاية $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ ليست سوى التغير الكلي بين a و b للدالة F، التي هي دالة أصلية للدالة f ، بين a و b. ويمكن تلخيص ذلك بالنظرية التالية:

ملاحظة

إن النظرية الأساسية جديرة باسمها باعتبارها النظرية الأهم في التحليل الرياضي. لقد أبرزت الصلة الوثيقة بين التفاضل والتكامل اللذين كانا، في الأصل، اتجاهين مستقلين أحدهما عن الآخر، وكان كل منهما يتطور في معزل عن الآخر.

النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل

إذا كانت f دالة متصلة في الفترة $[a, b]$، وكانت F دالة أصلية للدالة f ، فإن

$$\int_a^b f(x)dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) = \mathrm{F}(x)\Big|_a^b$$

من المفيد الإشارة إلى أن هذه القاعدة تصح حتى لو لم يتحقق الشرط $f(x) \geq 0$ لكل قيم x في $[a, b]$. كما ينبغي التأكيد على أن النظرية الأساسية لا تعرّف التكامل المحدود بل تحدد قيمته، فالمعادلة

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)\ dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

تستند إلى برهان رياضي لن نتطرق إليه في منهاجنا هذا.

مثال 2 **النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل**

A. أوجد أولًا $\int 4t^3\ dt$ ثم أوجد $\int_1^2 4t^3\ dt$.

B. أوجد $\int_0^{\pi} \sin x\ dx$.

الحل

A. $\int 4t^3\ dt = t^4 + \mathrm{C}$

باستعمال النظرية الأساسية للتفاضل وللتكامل، يمكن إيجاد قيمة التكامل المحدود $\int_1^2 4t^3\ dt$ من خلال إيجاد قيمة $t^4\Big|_1^2$ دون أن يكون هناك حاجة لإضافة الثابت C.

$$\int_1^2 4t^3\ dt = t^4\Big|_1^2 = (2)^4 - (1)^4 = 15$$

B. استعمل النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل

$$\int_0^{\pi} \sin x\ dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2$$

حاول أن تحل التمرينين 6 و 8

سؤال للتفكر

س: هل يمكن القول أنه إذا كان $\int_a^b f(x)\ dx = 0$ ، فإن $f(x) = 0$ لكل قيم x في $[a, b]$؟ إذا كانت الإجابة "كلا"، أوجد مثالًا باستعمال النظرية الأساسية.

نموذج إجابة:

كلا، لأن النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل تفيد أن

$$\int_a^b f(x)\ dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

إذن يكفي أن يكون $\mathrm{F}(b) = \mathrm{F}(a)$ حتى يكون

$$\int_a^b f(x)\ dx = 0$$

مثلًا:

$$\int_{-1}^{1} x^3\ dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

مع أن

$$f(x) = x^3 \neq 0$$

يبيّن المثال 2 الفرق بين التكامل المحدود والتكامل غير المحدود، ففي حين يمثّل التكامل المحدود عددًا حقيقيًا، يمثّل التكامل غير المحدود مجموعة من الدوال كل منها دالة أصلية للدالة f.

لاحظ أنه لا داعي لإضافة الثابت C في التكامل المحدود لأنه، إذا أُضيف إلى الدالة الأصلية، سيُحذف مجددًا في عملية الطرح. على سبيل المثال:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (\mathrm{F}(x) + \mathrm{C})\Big|_a^b$$
$$= (\mathrm{F}(b) + \mathrm{C}) - (\mathrm{F}(a) + \mathrm{C})$$
$$= \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

بكلمات أخرى، أي دالة أصلية تفي بالغرض، لذا يمكن الاستغناء عن الثابت لتبسيط المسألة.

إن المتغير المستعمل في الدالة المكاملة لا أهمية له لأن جميع التكاملات المحدودة التالية تساوي المقدار $\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

خصائص التكامل المحدود

بما أن $\int_a^b f(x)\,dx$ يمثّل تجميع المساحة من a إلى b تحت منحنى الدالة f، إذن يمكننا أن نعرّف

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

وهذا يعني أنه بما أننا لم نتحرك من نقطة البداية، فإنه لا يوجد أي تجميع للمساحة.

كما أننا نريد أن يكون كلّ من تجميع المساحة من a إلى c وتجميع المساحة من c إلى b مساويًا لتجميع المساحة من a إلى b (انظر الشكل 5.1.4)، أي

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

نسأل هنا، ماذا يحصل لو عكسنا الترتيب المعتاد بحيث تصبح نقطة النهاية في الفترة هي الحد الأدنى للتكامل بينما تصبح نقطة البداية في الفترة هي الحد الأعلى للتكامل؟

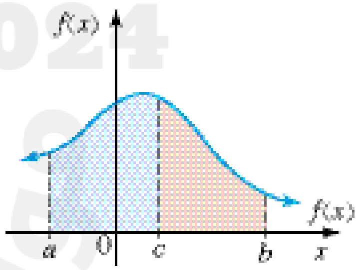
إذا أردنا الالتزام بالقاعدة الأخيرة التي كتبناها لكل قيم a و b و c، ستؤدي عملية التجميع من a إلى b ومن ثم رجوعًا من b إلى a إلى العودة إلى نقطة الانطلاق، وعمليًا نكون قد قمنا بعملية التجميع من a إلى a:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

وبالتالي

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

نستطيع استنتاج قواعد أخرى للتكامل المحدود والتي سنستعملها لإيجاد المساحة. فيما يلي جملة من خصائص التكامل المحدود، بعضها ناشئ عن خواص التكامل غير المحدود وبعضها الآخر ناشئ عن تعريف التكامل المحدود.



الشكل 5.1.4 يمكّننا تعريف التكامل المحدود من استنتاج بعض خصائص هذا التكامل ومنها، كما يبين الشكل، أنه يمكننا حساب مساحة تحت منحنى من خلال تقسيمها إلى مساحتين كل منها على جزء من الفترة الكلية.

خصائص التكامل المحدود

1. **الضرب بثابت** $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$, لكل عدد حقيقي k

2. **الجمع والطرح** $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

3. **الصفر** $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

4. **خاصية الإضافة** $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, لكل عدد حقيقي c

5. **ترتيب حدَّي التكامل** $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

6. **حفظ التباين** إذا كان $f(x) \ge g(x)$ في الفترة $[a, b]$، فإن

$$\int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)dx$$

إذا كان $f(x) \ge 0$ ، فإن $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$

مثال 3 استعمال خصائص التكامل المحدود

إذا كان $\int_{-1}^{1} h(x)\,dx = 7$ و $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 5$ و $\int_{1}^{4} f(x)\,dx = -2$،

أوجد كل تكامل مما يلي، إذا كان ذلك ممكنًا.

A. $\int_4^1 f(x)\,dx$

B. $\int_{-1}^4 f(x)\,dx$

C. $\int_{-1}^1 [2f(x) + 3h(x)]\,dx$

D. $\int_0^1 f(x)\,dx$

E. $\int_{-2}^2 h(x)\,dx$

F. $\int_1^4 [f(x) + h(x)]\,dx$

الحل

A. $\int_4^1 f(x)\,dx = -\int_1^4 f(x)\,dx = -(-2) = 2$

(تابع)

سؤال للتفكر

س: هل يمكننا أن نستنتج من القواعد أنه إذا كانت $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ وكان $f(x) > 0$ في الفترة $[a, b]$ فإن $a = b$؟

نموذج إجابة:

كلا. إذا كان $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ لا يمكن أن نستنتج

$\int_a^b f(x)\,dx = 0 \Longrightarrow a = b$

وإن كانت $f(x) > 0$.

نقصد بذلك أنه لا يمكننا الاستنتاج بما لدينا من معلومات عن التكامل المحدود حتى الآن. على سبيل المثال، فالاستنتاج صحيح للدوال المتصلة ولكن إثبات ذلك متعذر في هذه المرحلة.

B. $\int_{-1}^{4} f(x)\ dx = \int_{-1}^{1} f(x)\ dx + \int_{1}^{4} f(x)\ dx = 5 + (-2) = 3$

C. $\int_{-1}^{1} [2f(x) + 3h(x)]\ dx = 2\int_{-1}^{1} f(x)\ dx + 3\int_{-1}^{1} h(x)\ dx = 2(5) + 3(7) = 31$

.D المعطيات غير كافية لإيجاد التكامل المطلوب. (لا يمكننا القول، مثلًا، إن التكامل المحدود على نصف الفترة يساوي نصف التكامل على الفترة كلها.)

.E المعطيات غير كافية لإيجاد التكامل المطلوب. (لا نعرف شيئًا عن الدالة h خارج الفترة $([-1, 1]$

.F المعطيات غير كافية لإيجاد التكامل المطلوب. (لا نعرف شيئًا عن الدالة h خارج الفترة $[-1, 1]$ وبالتالي لا يمكننا إيجاد التكامل المطلوب حتى لو استعملنا خاصية الجمع للتكامل المحدود)

حاول أن تحل التمرين 15

يمكننا استعمال خصائص التكامل المحدود في إيجاد قيمة التكامل كما يوضح المثال التالي.

مثال 4 إيجاد التكامل المحدود

.A أوجد $\int_{2}^{5} (6x^2 - 3x + 5)\ dx$.

.B أوجد $\int_{1}^{2} \frac{dy}{y}$.

الحل

.A استعمل خواص التكامل المحدود بالإضافة إلى النظرية الأساسية

$$\int_{2}^{5} (6x^2 - 3x + 5)\ dx = 6\int_{2}^{5} x^2 dx - 3\int_{2}^{5} x\ dx + 5\int_{2}^{5} dx$$
$$= 2x^3 \Big|_{2}^{5} - \frac{3}{2}x^2 \Big|_{2}^{5} + 5x \Big|_{2}^{5}$$
$$= 2(5^3 - 2^3) - \frac{3}{2}(5^2 - 2^2) + 5(5-2)$$
$$= 234 - \frac{63}{2} + 15 = 217.5$$

B. $\int_{1}^{2} \frac{dy}{y} = ln\,|y| \Big|_{1}^{2} = ln\,|2| - ln\,|1| = ln\ 2 - ln\ 1 \approx 0.6931 - 0 \approx 0.69$

حاول أن تحل التمرينين 18 و 19

للطلاب الذين يواجهون صعوبات

يحتاج الكثير من الطلاب إلى التدرب على استعمال هذه الخصائص لإيجاد التكامل المحدود.

س: إذا كان

$\int_{1}^{5} f(x)\,dx = 1$ و $\int_{2}^{5} f(x)\,dx = 2$ و $\int_{2}^{7} f(x)\,dx = 3$

.a أوجد $\int_{1}^{2} f(x)\,dx$

.b أوجد $\int_{7}^{2} f(x)\,dx$

.c أوجد $\int_{5}^{7} f(x)\,dx$

نموذج إجابة:

a. $\int_{1}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{5} f(x)\,dx = \int_{1}^{5} f(x)\,dx$

إذن

$$\int_{1}^{2} f(x)\,dx = \int_{1}^{5} f(x)\,dx - \int_{2}^{5} f(x)\,dx$$
$$= 1 - 2 = -1$$

b. $\int_{7}^{2} f(x)\,dx = -\int_{2}^{7} f(x)\,dx = -3$

c. $\int_{5}^{7} f(x)\,dx = \int_{2}^{7} f(x)\,dx - \int_{2}^{5} f(x)\,dx$
$$= 3 - 2 = 1$$

سؤال للتفكر

قد نحتاج أحيانًا إلى اعتماد قواعد الجبر داخل رمز التكامل كما في التكامل، غير المحدود، لنتمكن من الإستفادة من قواعده.

س: أوجد $\int_{1}^{2} (x^3 + 1)^2$

نموذج إجابة:

$$\int_{1}^{2} (x^3 + 1)^2\ dx = \int_{1}^{2} (x^6 + 2x^3 + 1)\ dx$$
$$= \int_{1}^{2} x^6\ dx + 2\int_{1}^{2} x^3\ dx + \int_{1}^{2} dx$$
$$= \frac{x^7}{7}\Big|_{1}^{2} + \frac{2x^4}{4}\Big|_{1}^{2} + x\Big|_{1}^{2}$$
$$= \frac{2^7 - 1}{7} + \frac{2^4 - 1}{2} + 1$$
$$= \frac{127}{7} + \frac{15}{2} + 1 \approx 26.64$$

للطلاب سريعي الإنجاز

(مع المثال 4) قد تكون العلاقة بين خصائص التكامل المحدود والخصائص الجبرية علاقة وثيقة وذات نتائج مهمة. لقد وجدنا في المثال 4 أن

$$\int_{2}^{5} (6x^2 - 3x + 5)\,dx = 217.5 > 0$$

لذا يمكننا أن نتوقع أن التكامل المحدود عدد موجب لأن

$$6x^2 - 3x + 5 > 0$$

ونعرف ذلك لأن $\Delta = (-3)^2 - 4(6)(5) = -111 < 0$

إذن، إشارة التكامل هي دائمًا إشارة المعامل الرئيس وهو $+6$

إن استعمال طرائق التكامل التي درسناها سابقًا كالتكامل بالتعويض والتكامل بالأجزاء والتكامل بالكسور الجزئية مفيد في التكامل المحدود تمامًا كما في التكامل غير المحدود، وذلك لإيجاد الدالة الأصلية. ولكن في التكامل بالتعويض يكون الفرق بين الحالتين هو أننا نجد التكامل المحدود في فترة معيّنة، وهذه الفترة تتغير عند التعويض.

مثال 5 إيجاد التكامل المحدود باستعمال طرائق التكامل

A. أوجد $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \sec^2 x \, dx$.

B. أوجد $\int_1^{e} \frac{\ln x}{x^2} \, dx$.

الحل

A. الطريقة الأولى:

لتكن $u = \tan x$، إذن $du = \sec^2 x \, dx$.

لا بدّ الآن من تغيير حدود التكامل المحدود بالنسبة للمتغير u.

إذا كان $x = 0$، فإن $u(0) = \tan 0 = 0$.

وإذا كان $x = \frac{\pi}{3}$، فإن $u\left(\frac{\pi}{3}\right) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

إذن،

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \sec^2 x \, dx = \int_0^{\sqrt{3}} u \, du = \frac{u^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{3}{2} - 0 = \frac{3}{2}$$

الطريقة الثانية:

يفضل البعض طريقة أخرى تقضي بإيجاد التكامل غير المحدود أولًا ثم إيجاد قيمة التكامل المحدود. لإيجاد التكامل غير المحدود في هذا المثال، نتجاهل حدود التكامل الأصلي ونستعمل التعويض $u = \tan x$ و $du = \sec^2 x \, dx$

إذن

$$\int \tan x \sec^2 x \, dx = \int u \, du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\tan^2 x}{2} + C$$

سنتجاهل الثابت C لأنه لا يؤثر في النتيجة، إذن باستعمال النظرية الأساسية للتفاضل وللتكامل، نكتب

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \sec^2 x \, dx = \frac{\tan^2 x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\left(\tan \frac{\pi}{3}\right)^2}{2} - \frac{(\tan 0)^2}{2} = \frac{3}{2} - 0 = \frac{3}{2}$$

لا ينبغي الخلط بين الطريقتين. في الطريقة الأولى، لا نعود أبدًا إلى المتغير الأصلي. في الطريقة الثانية، من الأساسي أن نعود إلى المتغير الأصلي وأن لا نغير حدود التكامل.

(تابع)

هكذا استطعنا توقع أن
$\int_a^b (6x^2 - 3x + 5) \, dx > 0$
لكل $a < b$

س: حدّد، من دون أن تحل، ما إذا كانت قيمة التكامل المحدود $\int_4^{10} x^2 - 2x - 3 \, dx$ عددًا موجبًا أم سالبًا.

نموذج إجابة:

$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-3) = 16 > 0$

بحلّ المعادلة التربيعية نجد أن

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2}$

إذن، جذور $x^2 - 2x - 3$ هي -1 و 3

لذا فإن قيمة $x^2 - 2x - 3$ موجبة في الفترة $]-\infty, -1[\cup]3, \infty[$ وسالبة في الفترة $]-1, 3[$

إذن، $x^2 - 2x - 3 > 0$ في الفترة $[4, 10]$، وبالتالي

$\int_4^{10} (x^2 - 2x - 3) \, dx > 0$

س: حدّد، من دون أن تحل، ما إذا كانت قيمة التكامل المحدود $\int_{-3}^{-2} (x^2 - 2x - 3) \, dx$ عددًا موجبًا أم سالبًا.

نموذج إجابة:

حسب حل المسألة السابقة، $x^2 - 2x - 3 > 0$ في الفترة $[-3, -2]$، وبالتالي

$\int_{-3}^{-2} (x^2 - 2x - 3) \, dx > 0$

س: حدّد، من دون أن تحل، ما إذا كانت قيمة التكامل المحدود $\int_0^{2} (x^2 - 2x - 3) \, dx$ عددًا موجبًا أم سالبًا.

نموذج إجابة:

حسب حل المسألة الأولى، $x^2 - 2x - 3 \geq 0$ في الفترة $[0, 2]$، وبالتالي

$\int_0^{2} (x^2 - 2x - 3) \, dx > 0$

س: هل يمكن تحديد ما إذا كانت قيمة التكامل المحدود $\int_0^{4} (x^2 - 2x - 3) \, dx$ عددًا موجبًا أم سالبًا؟

نموذج إجابة:

بما أن الفترة $[0, 4]$ لا تنتمي إلى $]-\infty, -1[\cup]3, \infty[$ أو إلى $]-1, 3[$ بشكل كامل، لا يمكننا معرفة إشارة التكامل المحدود إلا من خلال حل المسألة.

B. نستعمل طريقة التكامل بالأجزاء لإيجاد التكامل غير المحدود.

نعوّض u بدلًا من $ln\ x$ أينما وجد. إذن ليكن

$$u = ln\ x\ ,\ dv = \frac{1}{x^2}\,dx$$

إذن

$$du = \frac{1}{x}\,dx\ ,\ v = -\frac{1}{x}$$

عوّض في قاعدة التكامل بالأجزاء

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

نعوّض هذه القيم في صيغة التكامل بالأجزاء ونجد تكامل الجزء الثاني إلى اليمين.

$$\begin{aligned}\int \frac{ln\ x}{x^2}\,dx &= (ln\ x)\left(-\frac{1}{x}\right) - \int -\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx\\ &= -\frac{ln\ x}{x} + \int \frac{1}{x^2}\,dx\\ &= -\frac{ln\ x}{x} - \frac{1}{x} + \mathrm{C}\\ &= \frac{-ln\ x - 1}{x} + \mathrm{C}\end{aligned}$$

نجد الآن التكامل المحدود

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{ln\ x}{x^2}\,dx &= \left.\frac{-ln\ x - 1}{x}\right|_1^e\\ &= \frac{-1-1}{e} - \frac{0-1}{1}\\ &= \frac{-2}{e} + 1\end{aligned}$$

حاول أن تحل التمرين 15

يتضح مما سبق أنه بإمكاننا النظر إلى التكامل المحدود $\int_a^b f(x)\,dx$ على أنه التغير الكلي للدالة الأصلية F في الفترة $[a, b]$، أي $\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$، وأيضًا على أنه نهاية المجموع $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$، وبالتالي يمكننا المتابعة في الاتجاهين. إذا كان إيجاد الدالة الأصلية ميسرًا، يمكننا إيجاد نهاية المجموع $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$ بسهولة. أما إذا كان إيجاد الصيغة الصريحة للدالة الأصلية متعذرًا، فيمكننا إيجاد قيم تقريبية لها باستعمال نهاية المجموع $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$، وبذلك تصبح لدينا طريقة جديدة لتعريف الدوال.

سؤال للتفكر

س: أوجد التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \sec^2 x\,dx$ باستعمال تعويض آخر غير الوارد في الفرع A؟

نموذج إجابة:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \sec^2 x\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx\end{aligned}$$

باستعمال التكامل بالتعويض:

$$u = \cos x$$

$$du = -\sin x\,dx$$

$$x = 0;\ u(0) = \cos 0 = 1$$

$$x = \frac{\pi}{3};\ u\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \sec^2 x\,dx &= -\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{du}{u^3}\,dx\\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} u^{-3}\,du\\ &= \left.\frac{u^{-2}}{-2}\right|_{\frac{1}{2}}^{1}\\ &= -\frac{1}{2} + 2\\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

وهي نفس الإجابة التي حصلنا عليها في الفرع A من المثال 5

س: هل يمكننا إيجاد التكامل في الفرع (B) بطريقة أخرى؟

نموذج إجابة:

نعم يمكننا ذلك باستعمال الجدول لإيجاد التكامل غير المحدود أولًا.

$ln\ x$	$+$	$\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x}$	$-$	$\frac{-1}{x}$

$$\int \frac{ln\ x}{x^2}\,dx = \frac{-ln\ x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = \frac{-ln\ x}{x} - \frac{1}{x}$$

إذن

$$= \int_1^e \frac{ln\ x}{x^2}\,dx = \left.\frac{-ln\ x}{x}\right|_1^e - \left.\frac{1}{x}\right|_1^e$$

$$= \frac{-1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = -\frac{2}{e} + 1$$

دالة أصلية في التكامل المحدود

إذا كانت f دالة متصلة في الفترة $[a, b]$، يمكننا تعريف الدالة

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

هذه الدالة هي دالة أصلية للدالة f أي أن

$$\frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)$$

من الضروري تقدير مفعول المعادلة

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

تقول هذه المعادلة أن كل دالة متصلة f هي مشتقة لدالة ما، تحديدًا، $\int_a^x f(t)\,dt$. تقول إذن أن كل دالة متصلة لها دالة أصلية، وأن عمليتَي التفاضل والتكامل هما عمليتان عكسيتان.

مثال 6 دالة التكامل المحدود

أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل من الحالات التالية:

A. $y = \int_{-\pi}^{x} \cos t\,dt$

B. $y = \int_{0}^{x} \frac{1}{1+t^2}\,dt$

C. $y = \int_{x}^{5} 3t \sin t\,dt$

الحل

A. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\int_{-\pi}^{x} \cos t\,dt\right) = \cos x$

B. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\int_{0}^{x} \frac{1}{1+t^2}\,dt\right) = \frac{1}{1+x^2}$

C. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\int_{x}^{5} 3t \sin t\,dt\right) = -\frac{d}{dx}\left(\int_{5}^{x} 3t \sin t\,dt\right) = -3x \sin x$

حاول أن تحل التمرينين 47 و 49

سؤال للتفكر

س: هل تتغير قيمة المشتقة $\frac{dy}{dx}$ في (A) مثلاً إذا استبدلنا الحد الأدنى $-\pi$ بأي ثابت آخر؟

نموذج إجابة:

لا، لأن الجزء الثابت مهما كانت قيمته ينتج ثابتًا عند استعمال النظرية الأساسية في التفاضل و التكامل وبالتالي يكون اشتقاقه مساويًا للصفر.

ملاحظات على التمارين

التمارين 6-50، تدرب الطالب على إيجاد قيم التكامل المحدود باستعمال خصائصه.

التمارين 55-58، تدرب الطالب على أنماط من الاختبارات.

التقييم المستمر

التقييم الذاتي:

التمارين 2, 6, 13, 16, 21, 33, 36, 39, 43

مراجعة سريعة 5.1

في التمارين 1-4، أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل من الحالات التالية:

1. $y = x\ ln\ x - x$ $\quad \frac{dy}{dx} = 1(ln\ x) + \frac{1}{x}(x) - 1 = ln\ x$

2. $y = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \ (n \neq -1)$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{n+1}{n+1}x^{n+1-1} = x^n$

3. $y = \frac{1}{e^x + 1}$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{0(e^x+1) - e^x(1)}{(e^x+1)^2} = \frac{-e^x}{(e^x+1)^2}$

4. $y = xe^x$ $\quad \frac{dy}{dx} = (1)e^x + e^x(x) = (1+x)\,e^x$

في التمارين 5-8، أوجد التكامل.

5. $\int 6x\sqrt{x^2+4}\ dx$

6. $\int \frac{4x}{x^2+2}\ dx$

7. $\int 15x^2 e^{x^3}\ dx$

8. $\int x\ ln\ x\ dx$

الدرس 5.1 التمارين

في التمارين 1-5، تم اختيار x_i من الفترة I بعد تقسيم الفترة المعطاة إلى n فترة متساوية طول كل منها Δx. اكتب النهاية المعطاة في صورة تكامل محدود.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\ \Delta x,\ [0, 2]$ $\quad \int_0^2 x^2\,dx$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\ \Delta x,\ [1, 4]$ $\quad \int_1^4 \frac{1}{x}\,dx$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{1-x_i}\ \Delta x,\ [2, 3]$ $\quad \int_2^3 \frac{1}{1-x}\,dx$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{4-x_i^2}\ \Delta x,\ [0, 1]$ $\quad \int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \sin^3 x_i\ \Delta x,\ [-\pi, \pi]$ $\quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x\,dx$

في التمارين 6-12، أوجد قيمة التكامل المحدود.

6. $\int_1^3 3x^2\,dx$

7. $\int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx$

8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$

9. $\int_0^1 e^x\,dx$

10. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,dx$

11. $\int_1^4 2x\,dx$

12. $\int_{-1}^2 3x^2\,dx$

13. لنفترض أن $\int_1^2 f(x)\ dx = 5$. أوجد قيمة التكامل المطلوب.

a. $\int_1^2 f(u)\ du$

b. $\int_1^2 \sqrt{3}\,f(z)\ dz$

c. $\int_2^1 f(t)\ dt$

d. $\int_1^2 [-f(x)]\ dx$

14. لنفترض أن $\int_{-3}^{0} g(t)\ dt = \sqrt{2}$. أوجد قيمة التكامل المطلوب.

a. $\int_0^{-3} g(t)\ dt$

b. $\int_{-3}^0 g(u)\ du$

c. $\int_{-3}^0 [-g(x)]\ dx$

d. $\int_{-3}^0 \frac{g(r)}{\sqrt{2}}\ dr$

15. لنفترض أن g و f دالتان متصلتان وأن $\int_1^5 g(x)\ dx = 8$ و $\int_1^5 f(x)\ dx = 6$ و $\int_1^2 f(x)\ dx = -4$.

استعمل خواص التكامل المحدود لإيجاد التكامل المطلوب.

a. $\int_2^2 g(x)\ dx$

b. $\int_5^1 g(x)\ dx$

c. $\int_1^2 3f(x)\ dx$

d. $\int_{2}^{5} f(x)\ dx$

e. $\int_{1}^{5} [f(x) - g(x)]\ dx$

f. $\int_{1}^{5} [4f(x) - g(x)]\ dx$

16. لنفترض أن h و f دالتان متصلتان وأن $\int_{7}^{9} h(x)\ dx = 4$
و $\int_{7}^{9} f(x)\ dx = 5$ و $\int_{1}^{9} f(x)\ dx = -1$.

استعمل خواص التكامل المحدود لإيجاد التكامل المطلوب.

a. $\int_{1}^{9} -2f(x)\ dx$

b. $\int_{7}^{9} [f(x) + h(x)]\ dx$

c. $\int_{7}^{9} [2f(x) - 3h(x)]\ dx$

d. $\int_{9}^{1} f(x)\ dx$

e. $\int_{1}^{7} f(x)\ dx$

f. $\int_{9}^{7} [f(x) - h(x)]\ dx$

في التمارين 17-32، أوجد قيمة التكامل المحدود.

17. $\int_{0}^{2} (7x^2 - 8x + 8)dx$

18. $\int_{3}^{5} (2x^3 - 3x + 4)\ dx$

19. $\int_{1}^{3} \frac{2}{y}\ dy$

20. $\int_{-2}^{3} (-x^2 - 3x + 5)dx$

21. $\int_{0}^{2} 3\sqrt{4u+1}\,du$

22. $\int_{3}^{9} \sqrt{2r-2}\,dr$

23. $\int_{0}^{4} 2\left(t^{\frac{1}{2}} - t\right)dt$

24. $\int_{0}^{4} -\left(3x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\right)dx$

25. $\int_{1}^{4} (5y\sqrt{y} + 3\sqrt{y})dy$

26. $\int_{4}^{9} (4\sqrt{r} - 3r\sqrt{r})dr$

27. $\int_{1}^{4} \frac{3}{(3x+2)^2}dx$

28. $\int_{1}^{4} \frac{-3}{(3p+1)^2}\ dp$

29. $\int_{4}^{5} (8n^{-2} - n^{-3})dn$

30. $\int_{3}^{4} \left(0.4e^{-0.4a} + \frac{3}{a}\right)da$

31. $\int_{0.5}^{1} \left(p^3 - e^{4p}\right)\ dp$

32. $\int_{1}^{64} \frac{\sqrt{z} - 2}{\sqrt[3]{z}}\ dz$

33. أوجد $\int_{-1}^{4} f(x)\ dx$ إذا كان

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & , \quad x \le 0 \\ -\frac{x}{4} + 3 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

34. أوجد $\int_{-2}^{3} f(x)\ dx$ إذا كان

$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & , \quad x \le 0 \\ \frac{x}{2} + 5 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

35. أوجد $\int_{-4}^{1} f(x)\ dx$ إذا كان

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} - 2 & , \quad x \le 0 \\ -2x - 2 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

في التمارين 36-38، قم بالتعويض باستعمال متغيّر u ثم أوجد التكامل من $u(a)$ إلى $u(b)$.

36. $\int_{\frac{-\pi}{4}}^{0} \tan x \sec^2 x\ dx$

37. $\int_{-1}^{1} \frac{5r}{(4+r^2)^2}\ dr$

38. $\int_{0}^{1} \sqrt{t^5 + 2t}\ (5t^4 + 2)\ dt$

في التمارين 39-42 ، استعمل التكامل بالتعويض لايجاد قيمة التكامل.

39. $\int_{0}^{3} m^2 (4m^3 + 2)^3\ dm$

40. $\int_{1}^{3} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\ dx$

41. $\int_{0}^{8} 9x^{\frac{1}{3}} \sqrt{x^{\frac{4}{3}} + 9}\ dx$

42. $\int_{0}^{1} \frac{e^{2z}}{\sqrt{1 + e^{2z}}}\ dz$

في التمارين 43-46، استعمل التكامل بالأجزاء لإيجاد قيمة التكامل.

43. $\int_{0}^{1} \frac{6x+5}{e^x}\ dx$

44. $\int_{0}^{1} \frac{3x+7}{e^x}\ dx$

45. $\int_{1}^{9} \ln 3x\ dx$

46. $\int_{1}^{2} \ln 5x\ dx$

في التمارين 47-50، أوجد $\frac{dy}{dx}$.

47. $y = \int_2^x (\tan^3 u)\, du$

48. $y = \int_4^x e^u \sec u\, du$

49. $y = \int_7^x \frac{1+t}{1+t^2}\, dt$

50. $y = \int_{-\pi}^x \frac{2-\sin t}{3+\cos t}\, dt$

.51 لنفرض أن u و v دالتان قابلتان للاشتقاق بدلالة x بحيث $\int_0^1 v\, du = 4$ ولدينا المعطيات التالية في الجدول أدناه. استعمل هذه المعلومات لإيجاد قيمة $\int_0^1 u\, dv$.

x	$u(x)$	$v(x)$
0	2	1
1	3	−4

.52 لنفرض أن u و v دالتان قابلتان للاشتقاق بدلالة x بحيث $\int_0^{20} v\, du = -1$ ولدينا المعطيات التالية في الجدول. استعمل هذه المعلومات لإيجاد قيمة $\int_0^{20} u\, dv$.

x	$u(x)$	$v(x)$
0	5	−2
20	15	6

.53 لنفرض أننا نعرف أن الدالتين r و s قابلتان للاشتقاق لكل القيم وأن $r(0) = 0$. لنفرض أننا نعرف أيضًا أن في الفترة $0 \le x \le 2$، المساحة بين المحور x والدالة الموجبة $h(x) = s(x)\,\frac{dr}{dx}$ تساوي 5، وأن المساحة ضمن نفس الفترة بين المحور x والدالة الموجبة $k(x) = r(x)\,\frac{ds}{dx}$ تساوي 10، أوجد $r(2)s(2)$.

.54 لنفرض أننا نعرف أن الدالتين u و v قابلتان للاشتقاق لكل القيم وأن $u(3) = 0$. لنفرض أننا نعرف أيضًا أن في الفترة $1 \le x \le 3$، المساحة بين المحور x والدالة الموجبة $h(x) = u(x)\,\frac{dv}{dx}$ تساوي 15، وأن المساحة ضمن نفس الفترة بين المحور x والدالة الموجبة $k(x) = v(x)\,\frac{du}{dx}$ تساوي 20، أوجد $u(1)v(1)$.

أسئلة اختبار معيارية

.55 **صواب أم خطأ** إذا كان $\int_a^b f(x)\, dx > 0$، فإن $f(x)$ موجبة لكل قيم x في الفترة $[a, b]$. برّر إجابتك.

.56 **صواب أم خطأ** إذا كان $\int_a^b f(x)\, dx = 0$، فإن $f(a) = f(b)$. برّر إجابتك.

.57 **اختيار من متعدد** إذا كان $\int_3^7 g(x)\, dx = 3$ و $\int_3^7 f(x)\, dx = 5$ فإن كل الخيارات التالية صحيحة عدا: A

A. $\int_3^7 f(x)\, g(x)\, dx = 15$

B. $\int_3^7 [f(x) + g(x)]\, dx = 8$

C. $\int_3^7 2f(x)\, dx = 10$

D. $\int_3^7 [f(x) - g(x)]\, dx = 2$

E. $\int_7^3 [g(x) - f(x)]\, dx = 2$

.58 **اختيار من متعدد** إذا كان $\int_5^8 f(x)\, dx = 4$ و $\int_2^5 f(x)\, dx = 12$ فإن كل الخيارات التالية صحيحة عدا: D

A. $\int_2^8 f(x)\, dx = 16$

B. $\int_2^5 f(x)\, dx - \int_5^8 3f(x)\, dx = 0$

C. $\int_5^2 f(x)\, dx = -12$

D. $\int_{-5}^{-8} f(x)\, dx = -4$

E. $\int_2^6 f(x)\, dx + \int_6^8 f(x)\, dx = 16$

استكشاف

59. لديك $\int_0^1 e^{x^2}\,dx = 1.46265$ و $\int_0^2 e^{x^2}\,dx = 16.45263$.

استعمل هذه المعلومات لإيجاد

a. $\int_{-1}^{1} e^{x^2}\,dx$

b. $\int_{1}^{2} e^{x^2}\,dx$

60. لتكن الدالة $f(x) = x\left(x^2+3\right)^7$

a. استعمل النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل لإيجاد $\int_{-5}^{5} f(x)\,dx$

b. **الكتابة للتعلم** استعمل التناظر لتصف كيف يمكن إيجاد قيمة التكامل من الفرع السابق من دون استعمال التعويض أو إيجاد الدالة الأصلية.

61. **إيجاد التكلفة من التكلفة الحدية** دالة التكلفة الحدية لطباعة ملصق عند طباعة العدد x من الملصق هي بالريالات:

$$\frac{dc}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

a. أوجد $c(100) - c(1)$، التي تمثّل تكلفة طباعة الملصقات من 2 إلى 100

b. أوجد $c(400) - c(100)$، التي تمثّل تكلفة طباعة الملصقات من 101 إلى 400

توسيع الأفكار

62. **التعويضات المثلثية** لنفرض أن $\sqrt{x} = \sin y$.

a. استعمل التعويض $x = \sin^2 y$ و $dx = 2\sin y\cos y\,dy$ لتبين أن

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin^2 y\,dy$$

b. استعمل المتطابقة $\left(\cos 2y = 1 - 2\sin^2 y\right)$ لتجد قيمة التكامل المحدود دون استعمال الحاسبة.

63. **التخمير** تخبرنا الأبحاث عن عملية الهضم في معدة إحدى فصائل الحيوانات أن نسبة المواد المحللة التي تمر في المعدة دون تخمير في الساعة الأولى بعد الأكل يمكن حسابها من خلال التكامل المحدود

$$\int_0^1 ke^{-kt}(1-t)\,dt$$

حيث تقيس k معدّل تخمير المواد.

أوجد التكامل أعلاه بحسب قيم k المستعملة في الأبحاث: $k = \frac{1}{12}, \frac{1}{24}, \frac{1}{48}$.

إجابات أسئلة مراجعة سريعة 5.1

5. ليكن $u = x^2 + 4$، إذن $du = 2x\,dx$.

$$\int 6x\sqrt{x^2+4}\,dx = 3\int \sqrt{u}\,du = 2u^{\frac{3}{2}} + C = 2\left(x^2+4\right)^{\frac{3}{2}} + C$$

6. ليكن $u = x^2 + 2$، إذن $du = 2x\,dx$. يصبح التكامل:

$$\int \frac{4x}{x^2+2}\,dx = \int \frac{2}{u}\,du = 2\ln|u| + C = 2\ln\left|x^2+2\right| + C = 2\ln\left(x^2+2\right) + C$$

7. ليكن $u = x^3$، إذن $du = 3x^2dx$. يصبح التكامل:

$$\int 15x^2 e^{x^3}\,dx = 5\int e^u du = 5e^u + C = 5e^{x^3} + C$$

8. باستعمال قاعدة التكامل بالأجزاء، ليكن $u = \ln x$ و $dv = x\,dx$

إذن $du = \frac{1}{x}\,dx$ و $v = \frac{x^2}{2}$

$$\int x\ln x\,dx = (\ln x)\left(\frac{x^2}{2}\right) - \int \left(\frac{x^2}{2}\right)\left(\frac{1}{x}\right)du = \frac{x^2\ln x}{2} - \int \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

إجابات أسئلة التمارين 5.1

6. $\displaystyle\int_1^3 3x^2\,dx = x^3\Big|_1^3 = 27 - 1 = 26$

7. $\displaystyle\int_\pi^{2\pi} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_\pi^{2\pi} = -\cos 2\pi + \cos \pi = -1 + (-1) = -2$

8. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$

9. $\displaystyle\int_0^1 e^x\,dx = e^x\Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$

10. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,dx = \tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \tan\frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1 - 0 = 1$

11. $\displaystyle\int_1^4 2x\,dx = x^2\Big|_1^4 = 16 - 1 = 15$

12. $\displaystyle\int_{-1}^2 3x^2\,dx = x^3\Big|_{-1}^2 = 8 - (-1) = 9$

13. a. $\displaystyle\int_1^2 f(u)\,du = 5$

b. $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{3}\,f(z)\,dz = \sqrt{3}\int_1^2 f(z)\,dz = 5\sqrt{3}$

c. $\displaystyle\int_2^1 f(t)\,dt = -\int_1^2 f(t)\,dt = -5$

d. $\displaystyle\int_1^2 [-f(x)]\,dx = -\int_1^2 f(x)\,dx = -5$

14. a. $\displaystyle\int_0^{-3} g(t)\,dt = -\int_{-3}^0 g(t)\,dt = -\sqrt{2}$

b. $\displaystyle\int_{-3}^0 g(u)\,du = \sqrt{2}$

c. $\displaystyle\int_{-3}^0 [-g(x)]\,dx = -\int_{-3}^0 g(x)\,dx = -\sqrt{2}$

d. $\displaystyle\int_{-3}^0 \frac{g(r)}{\sqrt{2}}\,dr = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-3}^0 g(r)\,dr = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$

15. a. $\displaystyle\int_2^2 g(x)\,dx = 0$

b. $\displaystyle\int_5^1 g(x)\,dx = -\int_1^5 g(x)\,dx = -8$

c. $\displaystyle\int_1^2 3f(x)\,dx = 3\int_1^2 f(x)\,dx = 3(-4) = -12$

d. $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,dx = \int_1^5 f(x)\,dx - \int_1^2 f(x)\,dx = 6 + 4 = 10$

e. $\displaystyle\int_1^5 [f(x) - g(x)]\,dx = \int_1^5 f(x)\,dx - \int_1^5 g(x)\,dx = 6 - 8 = -2$

f. $\displaystyle\int_1^5 [4f(x) - g(x)]\,dx = 4\int_1^5 f(x)\,dx - \int_1^5 g(x)\,dx = 4(6) - 8 = 16$

16. a. $\displaystyle\int_1^9 -2f(x)\,dx = -2\int_1^9 f(x)\,dx = -2(-1) = 2$

b. $\displaystyle\int_7^9 [f(x) + h(x)]\,dx = \int_7^9 f(x)\,dx + \int_7^9 h(x)\,dx = 5 + 4 = 9$

c. $\displaystyle\int_7^9 [2f(x) - 3h(x)]\,dx = 2\int_7^9 f(x)\,dx - 3\int_7^9 h(x)\,dx = 2(5) - 3(4) = -2$

d. $\displaystyle\int_9^1 f(x)\,dx = -\int_1^9 f(x)\,dx = -(-1) = 1$

e. $\displaystyle\int_1^7 f(x)\,dx = \int_1^9 f(x)\,dx - \int_7^9 f(x)\,dx = -1 - 5 = -6$

f. $\displaystyle\int_9^7 [f(x) - h(x)]\,dx = -\int_7^9 [f(x) - h(x)]\,dx = \int_7^9 [h(x) - f(x)]\,dx$

$\displaystyle= \int_7^9 h(x)\,dx - \int_7^9 f(x)\,dx = 4 - 5 = -1$

17. $$\int_0^2 (7x^2 - 8x + 8)\,dx = \frac{7}{3}x^3 \Big|_0^2 - 4x^2 \Big|_0^2 + 8x \Big|_0^2$$
$$= \frac{7}{3} \times 8 - 0 - (4 \times 4 - 0) + 8 \times 2 - 0 = \frac{56}{3}$$

18. $$\int_3^5 (2x^3 - 3x + 4)\,dx = \frac{2}{4}x^4 \Big|_3^5 - \frac{3}{2}x^2 \Big|_3^5 + 4x \Big|_3^5$$
$$= \frac{1}{2}\left(5^4 - 3^4\right) - \frac{3}{2}\left(5^2 - 3^2\right) + 4(5 - 3) = 256$$

19. $$\int_1^3 \frac{2}{y}\,dy = 2\,ln\,|y| \Big|_1^3 = 2(ln\,3 - ln\,1) = 2\,ln\,3 \approx 2.2$$

20. $$\int_{-2}^{3} (-x^2 - 3x + 5)\,dx = \frac{-x^3}{3} \Big|_{-2}^3 - \frac{3}{2}x^2 \Big|_{-2}^3 + 5x \Big|_{-2}^3$$
$$= -\frac{1}{3}\left(3^3 - (-2)^3\right) - \frac{3}{2}\left(3^2 - (-2)^2\right) + 5(3 + 2)$$
$$= \frac{35}{6} \approx 5.83$$

21. ليكن $u = 4u + 1$، إذن $dv = 4\,du$.
$$\int_0^2 3\sqrt{4u + 1}\,du = \frac{3}{4}\int_1^9 \sqrt{v}\,dv = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times v^{\frac{3}{2}} \Big|_1^9 = \frac{1}{2}\,v^{\frac{3}{2}} \Big|_1^9 = \frac{1}{2}\,(27 - 1) = 13$$

22. ليكن $u = 2r - 2$، إذن $du = 2dr$.
$$\int_3^9 \sqrt{2r - 2}\,dr = \frac{1}{2}\int_4^{16} \sqrt{u}\,du = \frac{1}{3}\,u^{\frac{3}{2}} \Big|_4^{16} = \frac{1}{3}\left(16^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{56}{3} \approx 18.67$$

23. $$\int_0^4 2\left(t^{\frac{1}{2}} - t\right)dt = \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 - t^2 \Big|_0^4 = \frac{4}{3} \times 4^{\frac{3}{2}} - 0 - \left(4^2 - 0\right) = -\frac{16}{3} \approx -5.33$$

24. $$\int_0^4 -\left(3x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\right)dx = -3 \times \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} \Big|_0^4 - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = -\frac{6}{5} \times 32 + 0 - \frac{16}{3} + 0$$
$$= -\frac{656}{15} \approx -43.73$$

25. $$\int_1^4 (5y\sqrt{y} + 3\sqrt{y})dy = \int_1^4 \left(5y^{\frac{3}{2}} + 3y^{\frac{1}{2}}\right)dy = 2y^{\frac{5}{2}} \Big|_1^4 + 2y^{\frac{3}{2}} \Big|_1^4$$
$$= 2 \times 2^5 - 2 + 2 \times 2^3 - 2 = 76$$

26. $$\int_4^9 (4\sqrt{r} - 3r\sqrt{r})dr = \int_4^9 \left(4r^{\frac{1}{2}} - 3r^{\frac{3}{2}}\right)dr = \frac{8}{3}r^{\frac{3}{2}} \Big|_4^9 - \frac{6}{5}r^{\frac{5}{2}} \Big|_4^9$$
$$= \frac{8}{3}\left(3^3 - 2^3\right) - \frac{6}{5}\left(3^5 - 2^5\right) = -\frac{3\,038}{15} \approx -202.53$$

27. ليكن $u = 3x + 2$، إذن $du = 3\,dx$.
$$\int_1^4 \frac{3}{(3x + 2)^2}\,dx = \int_5^{14} \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} \Big|_5^{14} = -\frac{1}{14} + \frac{1}{5} = \frac{9}{70} \approx 0.13$$

28. ليكن $u = 3p + 1$، إذن $du = 3\,dp$.
$$\int_1^4 \frac{-3}{(3p + 1)^2}\,dp = -\int_4^{13} \frac{du}{u^2} = \frac{1}{u} \Big|_4^{13} = \frac{1}{13} - \frac{1}{4} = -\frac{9}{52} \approx -0.17$$

29. $$\int_4^5 \left(8n^{-2} - n^{-3}\right)dn = -8n^{-1} \Big|_4^5 + \frac{1}{2}\,n^{-2} \Big|_4^5 = -\frac{8}{5} + \frac{8}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{25} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{16}$$
$$= \frac{311}{800} \approx 0.39$$

30. $$\int_3^4 \left(0.4e^{-0.4a} + \frac{3}{a}\right)da = -e^{-0.4a} \Big|_3^4 + 3\,ln|a| \Big|_3^4$$
$$= -e^{-1.6} + e^{-1.2} + 3(ln\,4 - ln\,3) \approx 0.96$$

31. $$\int_{0.5}^1 \left(p^3 - e^{4p}\right)dp = \frac{p^4}{4} \Big|_{0.5}^1 - \frac{e^{4p}}{4} \Big|_{0.5}^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{64} - \frac{e^4}{4} + \frac{e^2}{4} \approx -11.57$$

32. $$\int_1^{64} \frac{\sqrt{z} - 2}{\sqrt[3]{z}}\,dz = \int_1^{64} \left(z^{\frac{1}{6}} - 2z^{\frac{-1}{3}}\right)dz = \frac{6}{7}\,z^{\frac{7}{6}} \Big|_1^{64} - 3z^{\frac{2}{3}} \Big|_1^{64}$$
$$= \frac{6}{7}\left(64^{\frac{7}{6}} - 1\right) - 3\left(64^{\frac{2}{3}} - 1\right) = \frac{447}{7} \approx 63.86$$

33. $$\int_{-1}^4 f(x)\,dx = \int_{-1}^0 (2x + 3)\,dx + \int_0^4 \left(-\frac{x}{4} + 3\right)dx$$
$$= x^2 \Big|_{-1}^0 + 3x \Big|_{-1}^0 - \frac{x^2}{8} \Big|_0^4 + 3x \Big|_0^4$$
$$= 0 - 1 + 0 + 3 - 2 + 0 + 12 - 0 = 12$$

34. $$\int_{-2}^3 f(x)\,dx = \int_{-2}^0 (x + 5)\,dx + \int_0^3 \left(\frac{x}{2} + 5\right)dx$$
$$= \frac{x^2}{2} \Big|_{-2}^0 + 5x \Big|_{-2}^0 + \frac{x^2}{4} \Big|_0^3 + 5x \Big|_0^3$$
$$= 0 - 2 + 0 + 10 + \frac{9}{4} - 0 + 15 - 0 = 25.25$$

35. $$\int_{-4}^1 f(x)\,dx = \int_{-4}^0 \left(\frac{x}{4} - 2\right)dx + \int_0^1 (-2x - 2)\,dx$$
$$= \frac{x^2}{8} \Big|_{-4}^0 - 2x \Big|_{-4}^0 - x^2 \Big|_0^1 - 2x \Big|_0^1$$
$$= 0 - 2 - 0 - 8 - 1 + 0 - 2 + 0 = -13$$

36. ليكن $u = \tan x$، إذن $du = \sec^2 x\,dx$.
$$\int_{\frac{-\pi}{4}}^0 \tan x \sec^2 x\,dx = \int_{-1}^0 u\,du = \frac{u^2}{2} \Big|_{-1}^0 = 0 - \frac{1}{2} = -0.5$$

37. ليكن $u = 4 + r^2$، إذن $du = 2rdr$.
$$\int_{-1}^1 \frac{5r}{(4 + r^2)^2}\,dr = \frac{5}{2}\int_5^5 \frac{du}{u^2} = 0$$

38. ليكن $u = t^5 + 2t$، إذن $du = (5t^4 + 2)$.
$$\int_0^1 \sqrt{t^5 + 2t}\,\left(5t^4 + 2\right)\,dx = \int_0^3 \sqrt{u}\,du = \frac{2}{3}\,u^{\frac{3}{2}} \Big|_0^3 = 2\sqrt{3} \approx 3.46$$

39. ليكن $u = 4m^3 + 2$، إذن $du = 12m^2\,dm$.
$$\int_0^3 m^2\,(4m^3 + 2)^3\,dm = \frac{1}{12}\int_2^{110} u^3 du = \frac{1}{48}\,u^4 \Big|_2^{110}$$
$$= \frac{1}{48}\left(110^4 - 2^4\right) = 3\,050\,208$$

40. ليكن $u = ln\,x$، إذن $du = \frac{1}{x}\,dx$.
$$\int_1^3 \frac{\sqrt{ln\,x}}{x}\,dx = \int_0^{ln\,3} \sqrt{u}\,du = \frac{2}{3}\,u^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{ln\,3} = \frac{2}{3}\left((ln\,3)^{\frac{3}{2}} - 0\right) \approx 0.77$$

41. ليكن $u = x^{\frac{4}{3}} + 9$، إذن $du = \frac{4}{3}\,x^{\frac{1}{3}}\,dx$.
$$\int_0^8 9x^{\frac{1}{3}}\sqrt{x^{\frac{4}{3}} + 9}\,dx = \frac{27}{4}\int_9^{25} \sqrt{u}\,du = \frac{9}{2}\,u^{\frac{3}{2}} \Big|_9^{25} = \frac{9}{2} \times \left(5^3 - 3^3\right) = 441$$

42. ليكن $u = 1 + e^{2z}$، إذن $du = 2e^{2z}\,dz$.
$$\int_0^1 \frac{e^{2z}}{\sqrt{1 + e^{2z}}}\,dz = \frac{1}{2}\int_2^{1 + e^2} \frac{du}{\sqrt{u}} = u^{\frac{1}{2}} \Big|_2^{1 + e^2} = \sqrt{1 + e^2} - \sqrt{2} \approx 1.48$$

43. باستعمال قاعدة التكامل بالأجزاء، ليكن $u = 6x + 5$، و $dv = e^{-x}\,dx$
إذن $du = 6\,dx$ و $v = -e^{-x}$.
$$\int \frac{6x + 5}{e^x}\,dx = -(6x + 5)e^{-x} + 6\int e^{-x}\,dx = -6xe^{-x} - 5e^{-x} - 6e^{-x} + C$$
$$= -(6x + 11)e^{-x} + C$$
$$\int_0^1 \frac{6x + 5}{e^x}\,dx = -(6x + 11)e^{-x} \Big|_0^1 = -17e^{-1} + 11 \approx 4.75$$

.44 باستعمال قاعدة التكامل بالأجزاء، ليكن $u = 3x + 7$، و $dv = e^{-x}\,dx$.
إذن $du = 3dx$ و $v = -e^{-x}$.

$$\int \frac{3x+7}{e^x}\,dx = -(3x+7)e^{-x} + \int 3e^{-x}\,dx = -3e^{-x} - 7e^{-x} - 3xe^{-x} + C$$
$$= -(3x+10)e^{-x} + C$$
$$\int_0^1 \frac{3x+7}{e^x}\,dx = -(3x+10)e^{-x}\Big|_0^1 = -13e^{-1} + 10 \approx 5.22$$

.45 باستعمال قاعدة التكامل بالأجزاء، ليكن $u = \ln 3x$ و $dv = dx$.
إذن $du = \frac{1}{x}\,dx$ و $v = x$.

$$\int \ln 3x\,dx = x\ln 3x - \int 1\,dx = x\ln 3x - x + C$$
$$\int_1^9 \ln 3x\,dx = (x\ln 3x - x)\Big|_1^9 = 9\ln 27 - 9 - \ln 3 + 1 \approx 20.56$$

.46 باستعمال قاعدة التكامل بالأجزاء، ليكن $u = \ln 5x$ و $dv = dx$.
إذن $du = \frac{1}{x}\,dx$ و $v = x$.

$$\int \ln 5x\,dx = x\ln 5x - \int 1\,dx = x\ln 5x - x + C$$
$$\int_1^2 \ln 5x\,dx = (x\ln 5x - x)\Big|_1^2 = 2\ln 10 - 2 - \ln 5 + 1 \approx 2$$

47. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\int_2^x (\tan^3 u)\,du\right) = \tan^3 x$

48. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\int_4^x e^u \sec u\,du\right) = e^x \sec x$

49. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\int_7^x \frac{1+t}{1+t^2}\,dt\right) = \frac{1+x}{1+x^2}$

50. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\int_{-\pi}^x \frac{2-\sin t}{3+\cos t}\,dt\right) = \frac{2-\sin x}{3+\cos x}$

.51 $uv\Big|_0^1 = \int_0^1 udv + \int_0^1 vdu$. إذن، $u(1)v(1) - u(0)v(0) = \int_0^1 udv + 4$،
إذن $\int_0^1 udv = -12 - 2 - 4 = -18$.

.52 $uv\Big|_0^{20} = \int_0^{20} udv + \int_0^{20} vdu$. إذن، $u(20)v(20) - u(0)v(0) = \int_0^{20} udv - 1$،
إذن $\int_0^{20} udv = 90 + 10 + 1 = 101$.

53. $rs = \int r\,ds + \int s\,dr$

$$r(x)s(x)\Big|_0^2 = \int_0^2 r(x)\frac{ds}{dx}\,dx + \int_0^2 r(x)\frac{dr}{dx}\,dx$$
$$r(2)s(2) - r(0)s(0) = 10 + 5$$
$$r(2)s(2) - 0 = 15$$
$$r(2)s(2) = 15$$

54. $uv = \int u\,dv + \int v\,du$

$$u(x)v(x)\Big|_1^3 = \int_1^3 u(x)\frac{dv}{dx}\,dx + \int_1^3 v(x)\frac{du}{dx}\,dx$$
$$u(3)v(3) - u(1)v(1) = 15 + 20$$
$$0 - u(1)v(1) = 35$$
$$u(1)v(1) = -35$$

.55 خطأ. مثال على ذلك: $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$،
حيث $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2} < 0$.

.56 خطأ. مثال على ذلك: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = 0$،
حيث $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 \neq -1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

.59 **a.** بما أن $e^{(-x)^2} = e^{x^2}$ (دالة زوجية)، فإن منحنى الدالة e^{x^2} متناظر بالنسبة للمحور y، وبالتالي

$$\int_{-1}^1 e^{x^2}\,dx = 2\int_0^1 e^{x^2}\,dx = 2 \times 1.46265 = 2.9253$$

b. $\int_1^2 e^{x^2}\,dx = \int_0^2 e^{x^2}\,dx - \int_0^1 e^{x^2}\,dx = 16.45263 - 1.46265 = 14.98998$

.60 **a.** ليكن $u = x^2 + 3$، إذن $du = 2xdx$.

$$\frac{1}{2}\int_{28}^{28} u^7\,du = 0$$

b. $f(-x) = -x\left((-x)^2 + 3\right)^7 = -\left[x(x^2+3)^7\right] = -f(x)$

إذن منحنى الدالة f متناظر بالنسبة لنقطة الأصل O (دالة فردية)،

وبالتالي $\int_{-5}^0 f(x)\,dx = -\int_0^5 f(x)\,dx$،

إذن $\int_{-5}^5 f(x)\,dx = \int_{-5}^0 f(x)\,dx + \int_0^5 f(x)\,dx = 0$

61. **a.** $c(100) - c(1) = \int_1^{100} \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{x}\Big|_1^{100} = \sqrt{100} - \sqrt{1}$

$$= 10 - 1 = 9$$

إذن، تكلفة طباعة الملصقات من 2 إلى 100 هي 9 ريالات.

b. $c(400) - c(100) = \sqrt{x}\Big|_{100}^{400} = \sqrt{400} - \sqrt{100} = 20 - 10 = 10$

إذن، تكلفة طباعة الملصقات من 101 إلى 400 هي 10 ريالات.

62. **a.** $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin y \cdot 2\sin y\cos y}{\sqrt{1-\sin^2 y}}\,dy$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin^2 y\cos y}{\cos y}\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin^2 y\,dy$$

b. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin^2 y\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2y)dy = y\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\sin 2y\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$

$$= \frac{\pi}{4} - 0 - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \approx 0.29$$

.63 باستعمال قاعدة التكامل بالأجزاء، ليكن $u = 1 - t$
و $dv = ke^{-kt}\,dt$. إذن $du = -dt$ و $v = -e^{-kt}$.

$$\int ke^{-kt}(1-t)dt = -(1-t)e^{-kt} - \int e^{-kt}\,dt = -e^{-kt} + te^{-kt} + \frac{e^{-kt}}{k} + C$$
$$= \frac{(-k + tk + 1)e^{-kt}}{k} + C$$
$$\int_0^1 ke^{-kt}(1-t)dt = \frac{(-k+tk+1)e^{-kt}}{k}\Big|_0^1 = \frac{e^{-k}}{k} - \frac{-k+1}{k} = \frac{e^{-k} + k - 1}{k}$$

عندما $k = \frac{1}{12}$،
$$\int_0^1 ke^{-kt}(1-t)dt = \int_0^1 \frac{1}{12}e^{-\frac{1}{12}t}(1-t)dt = \frac{e^{-\frac{1}{12}} + \frac{1}{12} - 1}{\frac{1}{12}} \approx 0.04$$

عندما $k = \frac{1}{24}$،
$$\int_0^1 ke^{-kt}(1-t)dt = \int_0^1 \frac{1}{24}e^{-\frac{1}{24}t}(1-t)dt = \frac{e^{-\frac{1}{24}} + \frac{1}{24} - 1}{\frac{1}{24}} \approx 0.02$$

عندما $k = \frac{1}{24}$،
$$\int_0^1 ke^{-kt}(1-t)dt = \int_0^1 \frac{1}{48}e^{-\frac{1}{48}t}(1-t)dt = \frac{e^{-\frac{1}{48}} + \frac{1}{48} - 1}{\frac{1}{48}} \approx 0.01$$

5.2 المساحة تحت المنحنى The Area Under The Curve

ما ستتعلّمه

- التكامل المحدود وحساب المساحة
- المساحة المحددة بأكثر من منحنى

... ولماذا

إذا كانت رؤية المساحة باعتبارها مجموع مساحات المستطيلات التي تشكّل هذه المساحة هي الفكرة الأولى التي أفضت إلى حساب التكامل، فمن الطبيعي أن يكون حساب المساحات من أولى تطبيقات التكامل المحدود.

معيار الدرس

12A.6.1

الهدف

ستعلم الطلاب كيفية استعمال التكامل المحدود لإيجاد المساحة بين منحنى الدالة والمحور x.

دليل الدرس

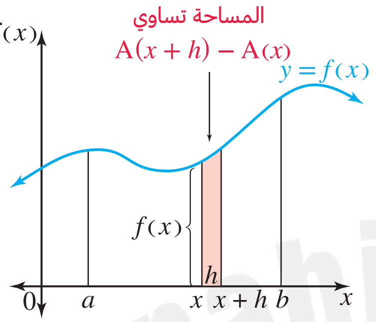
1. شرح العلاقة بين التكامل المحدود وحساب المساحة
2. شرح كيفية حساب المساحة المحددة بأكثر من منحنى

تحفيز

يعلم الطلاب أن مساحة المثلث $\underset{1}{\overset{1}{\triangle}}$ تساوي $\frac{1}{2}$.
اطلب من الطلاب إيجاد المساحة تحت المستقيم $y = x$ بين الإحداثيين $x = 0$ و $x = 1$ من خلال نهاية المجموع $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$.

التكامل المحدود وحساب المساحة

يمكننا أخذ فكرة تقريبية عما جعل الدالة الأصلية تلعب دورًا حاسمًا في إيجاد التكامل المحدود من خلال معاينة مساحة المنطقة الواقعة تحت منحنى الدالة f (انظر الشكل 5.2.1) حيث تكون f متصلة و $f(x) > 0$ إذا كانت $A(x)$ تمثل المساحة بين المنحنى والمحور x من a إلى x.



الشكل 5.2.1

للقيام بذلك علينا أن نتبيّن لماذا مشتقة $A(x)$ هي $f(x)$ أي $A'(x) = f(x)$، وذلك من خلال دراسة الفرق $A(x+h) - A(x)$ حيث h هي زيادة صغيرة. هذا الفرق يمثّل المساحة المبيّنة في الشكل 5.2.1، وهي تساوي تقريبًا مساحة مستطيل عرضه h وطوله $f(x)$.

$$A(x+h) - A(x) \approx h \cdot f(x)$$

وبالتالي

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} \approx f(x)$$

هذه القيمة التقريبية تصبح أدق كلما صغرت قيمة h إلى أن يتساوى المقداران

$$\lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(x)$$

بما أن النهاية تمثّل مشتقة $A(x)$، إذن:

$$A'(x) = f(x)$$

وهذا يعني أن A دالة أصلية للدالة f.

$A(b)$ هي المساحة بين المنحنى والمحور x من $x = a$ إلى $x = b$، و $A(a) = 0$، وبالتالي فإن المساحة تحت المنحنى هي $A(b) - A(a)$ ومن الدرس السابق عرفنا أن المساحة تحت المنحنى تعطى بالتكامل المحدود $\int_a^b f(x)\,dx$، وبوضع النتيجتين معًا نحصل على:

$$\int_a^b f(x)\,dx = A(b) - A(a) = A(x)\Big|_a^b$$

وهذا ينطبق على كل الدوال الأصلية للدالة f.

المساحة تحت المنحنى (على شكل تكامل محدود)

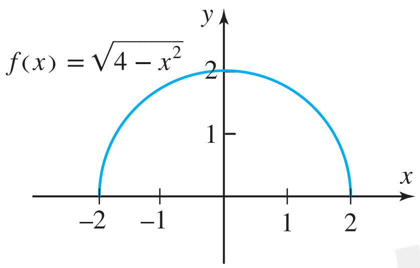
إذا كانت $y = f(x)$ دالة موجبة، وقابلة للتكامل على فترة مغلقة $[a, b]$،
فإن المساحة تحت المنحنى $y = f(x)$ وفوق المحور x من $x = a$ إلى $x = b$ هي التكامل المحدود للدالة f من a إلى b،

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

يصلح هذا التعريف في الاتجاهين: يمكننا استعمال المساحات لحساب التكامل، كذلك يمكننا استعمال التكامل لحساب المساحات.

مثال 1 ايجاد التكامل المحدود باستعمال المساحة

باستعمال الشكل أدناه، أوجد التكامل المحدود $\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx$.



الحل

يمكنك أن تلاحظ أن منحنى الدالة $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ هو نصف دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها 2 (انظر الشكل أعلاه).

يمكن إيجاد المساحة بين المنحنى والمحور x من -2 إلى 2 باستعمال القاعدة الهندسية لمساحة نصف الدائرة:

$$A = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi(2)^2 = 2\pi \text{ (وحدة مربعة)}$$

بما أن قيمة التكامل المطلوب هي المساحة بين المنحنى والمحور x من -2 إلى 2، فإن

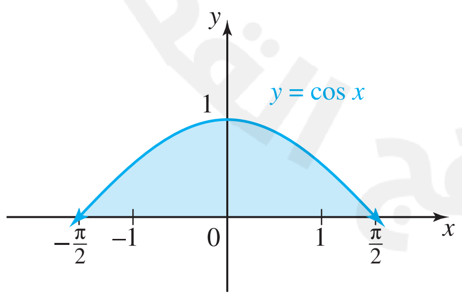
$$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx = 2\pi$$

حاول أن تحل التمرين 3

مثال 2 حساب المساحة تحت المنحنى

A. أوجد المساحة بين منحنى الدالة $f(x) = x^2$ والمحور x من $x = 0$ إلى $x = 4$.

B. أوجد المساحة المظللة في الشكل أدناه.



(تابع)

أسئلة للتفكر

س: هل يمكننا أيضًا استنتاج قيمة التكامل $\int_{0}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx$؟

نموذج إجابة:

نعم، نلاحظ من الشكل أن المنحنى متناظر بالنسبة للمحور y، إذن

$$\int_{-2}^{0} \sqrt{4-x^2}\, dx = \int_{0}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx$$

وبالتالي

$$\int_{0}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx = \frac{1}{2} \times 2\pi = \pi$$

س: هل يمكننا أن نثبت بالتعويض أن

$$\int_{-2}^{0} \sqrt{4-x^2}\, dx = \int_{0}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx$$

نموذج إجابة:

نعم. ليكن $u = -x$ في $\int_{-2}^{0} \sqrt{4-x^2}\, dx$، إذن $du = -dx$

عند $x = -2$، $u = 2$ وعند $x = 0$، $u = 0$.

إذن

$$\int_{-2}^{0} \sqrt{4-x^2}\, dx = \int_{2}^{0} \sqrt{4-u^2}\, (-du)$$

$$= -\int_{2}^{0} \sqrt{4-u^2}\, du$$

$$= \int_{0}^{2} \sqrt{4-u^2}\, du$$

$$= \int_{0}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx$$

س: بشكل عام، متى يكون $\int_{-a}^{0} f(x)\, dx = \int_{0}^{a} f(x)\, dx$ حيث $a > 0$؟

نموذج إجابة:

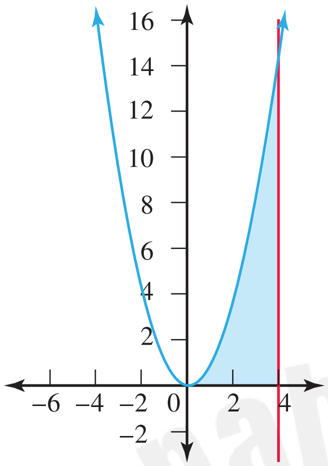
عندما يكون منحنى الدالة متناظرًا بالنسبة للمحور y

أي عندما $f(-x) = f(x)$.

(أي عندما تكون الدالة زوجية)

الحل

A. يبيّن الشكل أدناه أن المساحة المطلوبة تقع تحت منحنى الدالة $f(x) = x^2$ الواقع في الربع الأول وبين المستقيم $x = 0$ والمستقيم $x = 4$ باللون الأحمر.



المساحة المطلوبة بحسب التعريف هي قيمة التكامل

$$A = \int_0^4 x^2 dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_0^4$$

$$= \frac{4^3}{3} - \frac{0^3}{3}$$

$$= \frac{64}{3} \approx 21.33$$

إذن، المساحة المطلوبة تساوي 21.33 وحدة مربعة تقريبًا.

B. يحد المساحة المظللة في الشكل المنحنى $y = \cos x$ والمحور x والمستقيمان $x = -\frac{\pi}{2}$ و $x = \frac{\pi}{2}$. بحسب التعريف، يمكن كتابة المساحة على الشكل

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$$

$$= \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \sin \frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 1 - (-1) = 2$$

إذن، المساحة المطلوبة تساوي 2 وحدة مربعة.

حاول أن تحل التمرين 8 و 13

سؤال للتفكر

س: هل يمكننا القول إن

$$\int_0^2 x^2 \, dx = \frac{1}{2}\int_0^4 x^2 \, dx$$

وما هي الملاحظة العامة التي يمكننا استنتاجها من ذلك؟

نموذج إجابة:

كلا، لأن

$$\int_0^2 x^2 \, dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8}{3}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^4 x^2 \, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^4\right) = \frac{1}{2} \times \frac{64}{3} = \frac{32}{3}$$

إذن

$$\int_0^2 x^2 \, dx \neq \frac{1}{2}\int_0^4 x^2 \, dx$$

الملاحظة العامة هي أن المساحة تحت أي منحنى في فترة معينة لا تنقسم إلى نصفين عندما نقسم الفترة إلى نصفين كما أنها لا تتناسب بالضرورة مع طول الفترة.

إذن بشكل عام،

$$\int_0^{\frac{a}{2}} f(x) \, dx \neq \frac{1}{2}\int_0^a f(x) \, dx$$

إلا إذا كان فصل الفترة عند محور التناظر، عندها تنقسم المساحة إلى نصفين.

مساعدة دراسية

يمكنك أيضًا استعمال التناظر لإيجاد نفس المساحة من خلال إيجاد قيمة

$$A = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$$

رأينا فيما سبق أنه إذا كانت $f(x) \geq 0$ في $[a, b]$، يعطينا التكامل المحدود $\int_a^b f(x)\ dx$ المساحة التي تقع تحت المنحنى $y = f(x)$ وفوق المحور x وبين المستقيمين $x = a$ و $x = b$.

أما إذا كانت f دالة متصلة و $f(x) \leq 0$ في الفترة $[a, b]$، فإن $f(x_i)\Delta x$ هي النظير الجمعي لمساحة القطعة المستطيلة. وبالتالي فإن نهاية المجموع هي النظير الجمعي لمساحة المنطقة الواقعة بين منحنى الدالة والمحور x من a إلى b أي أن:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = -\ \mathrm{A}$$

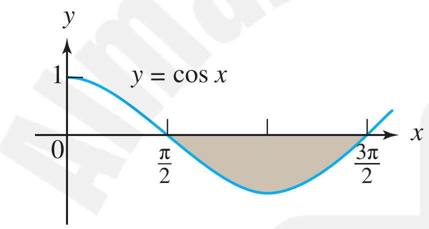
وبالتالي يكون:

$$\int_a^b f(x)\ dx = -\mathrm{A}$$

نكتب إذن:

إذا كانت $f(x) \leq 0$، فإن $\mathrm{A} = -\int_a^b f(x)\ dx$.

انظر الشكل 5.2.2، بما أن $y = \cos x \leq 0$ في الفترة $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$، فإن تكامل الدالة يصبح سالبًا، وتصبح مساحة المنطقة المظللة هي النظير الجمعي لقيمة هذا التكامل،



الشكل 5.2.2

أي أنها تساوي القيمة المطلقة لهذا التكامل.

$$\mathrm{A} = \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\ dx\right| = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\ dx$$

مثال 3 المساحة بين منحنى دالة والمحور x

أوجد مساحة المنطقة بين منحنى الدالة $f(x) = x^2 - 3x$ والمحور x من $x = 1$ إلى $x = 3$.

الحل

لاحظ من التمثيل البياني المجاور أن هذه المنطقة تقع تحت المحور x، وبالتالي فإن مساحتها تساوي $\left|\int_1^3 (x^2 - 3x)\ dx\right|$.

$$\mathrm{A} = \left|\int_1^3 (x^2 - 3x)\ dx\right| = \left|\left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right)\Big|_1^3\right| = \left|\left(\frac{27}{3} - \frac{27}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2}\right)\right| = \left|-\frac{10}{3}\right| = \frac{10}{3}$$

إذن، المساحة المطلوبة تساوي $\frac{10}{3}$ وحدة مربعة.

حاول أن تحل التمرين 14

أسئلة للتفكر

س: (مع المثال 3) هل كان بإمكاننا كتابة $\int_1^3 |(x^2 - 3x)|\ dx$ بدلًا من $\left|\int_1^3 (x^2 - 3x)\ dx\right|$؟

نموذج إجابة:

نعم، لأن $\int_1^3 (x^2 - 3x)\ dx \leq 0$ وذلك لأن $x^2 - 3x \leq 0$ في الفترة $[1, 3]$.

إذن،

$$\left|\int_1^3 (x^2 - 3x)\ dx\right| = -\int_1^3 (x^2 - 3x)\ dx$$

من جهة أخرى، $|x^2 - 3x| = -(x^2 - 3x)$ لكل x في الفترة $[1, 3]$، إذن

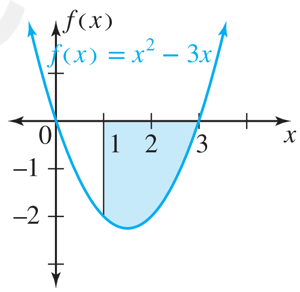
$$\int_1^3 |(x^2 - 3x)|\ dx = \int_1^3 -(x^2 - 3x)\ dx$$
$$= -\int_1^3 (x^2 - 3x)\ dx$$

س: هل يصح أن نكتب دائمًا $\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| = \int_a^b |f(x)|\ dx$؟ إن كان هذا لا يصح دائمًا، أعطِ مثالًا معاكسًا.

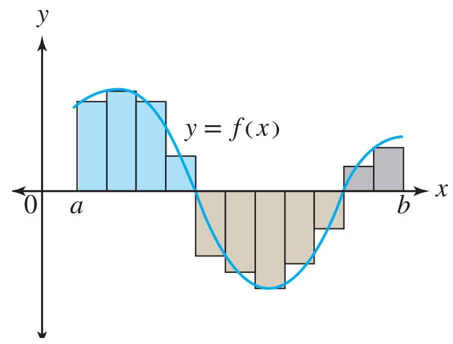
نموذج إجابة:

كلا، إلا إذا كانت إشارة الدالة f هي نفسها لجميع قيم x في الفترة $[a, b]$. مثلًا:

$\left|\int_{-1}^1 x^3\ dx\right| = 0$ بينما $\int_{-1}^1 |x^3|\ dx = \frac{1}{2}$



الشكل 5.2.3 المساحة بين منحنى الدالة $f(x) = x^2 - 3x$ والمحور x من $x = 1$ إلى $x = 3$ تقع تحت المحور x.



الشكل 5.2.4

إذا كانت $f(x_i) > 0$ فإن، $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ تساوي المساحة .

أما إذا كانت $f(x_i) < 0$ فإن، $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ هي النظير الجمعي للمساحة.

للطلاب سريعي الإنجاز

(مع المثال 3) إذا كانت قيمة التكامل $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$ لا تساوي $\int_a^b |f(x)|\,dx$ ، فهل يمكن أن تربط بينهما متباينة صحيحة دائمًا؟

س: أثبت أن $|a+b| \le |a| + |b|$ لكل $a, b \in R$

نموذج إجابة:

$$(|a+b|)^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(|a|+|b|)^2 = |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2$$
$$= a^2 + 2|a||b| + b^2$$

إذن، $|a+b| \le |a| + |b|$ لأن $ab \le |a||b|$

س: أثبت أن $|a_1 + \ldots + a_s| \le |a_1| + \ldots + |a_s|$

لكل $a_1, \ldots, a_s \in \mathbb{R}$

نموذج إجابة:

$$|a_1 + \ldots + a_s| = |a_1 + (a_2 + \ldots + a_s)|$$
$$\le |a_1| + |a_2 + \ldots + a_s|$$

ثم نكتب ثانيةً

$$|a_2 + \ldots + a_s| \le |a_2| + |a_3 + \ldots + a_s|$$

نستنتج أن

$$|a_1 + \ldots + a_s| \le |a_1| + |a_2| + |a_3 + \ldots + a_s|$$

هكذا، بعد تكرار العملية، نستنتج أن

$$|a_1 + \ldots + a_s| \le |a_1| + \ldots + |a_s|$$

$$|a_1| + \ldots + |a_s| \le \sum_{i=1}^{s} |a_i|$$

س: أثبت أن $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

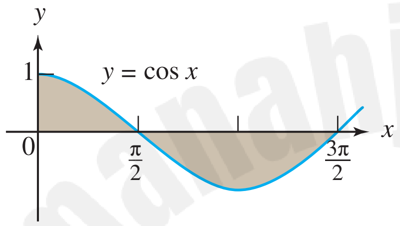
نموذج إجابة:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x\right|$$
$$\le \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} |f(x_i)|\Delta x\right)$$
$$= \int_a^b |f(x)|\,dx$$

إذا كان للدالة f قيمًا موجبة وقيمًا سالبة في الفترة $[a, b]$، فإن المجموع $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ يساوي ناتج جمع مساحات القطع المستطيلة الواقعة فوق المحور x مع النظير الجمعي لمساحات القطع المستطيلة الواقعة تحت المحور x (انظر الشكل 5.2.4)، وبالتالي فإن نهاية هذا المجموع $\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x\right)$ الذي هو التكامل المحدود تصبح:

$$\int_a^b f(x)\ dx = (\text{المساحة فوق المحور } x) - (\text{المساحة تحت المحور } x)$$

يبيّن الشكل 5.2.4 أن المساحة المحددة بالمنحنى $y = \cos x$ في الفترة $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ تنقسم إلى قسمين يقع أحدهما تحت المحور x والآخر فوقه. إذن، لإيجاد المساحة المطلوبة علينا إيجاد المساحة ما فوق المحور x من خلال التكامل المحدود، واستعمال القيمة المطلقة للتكامل المحدود لإيجاد المساحة الثانية التي تقع تحت المحور x.



الشكل 5.2.5

إذن، المساحة المطلوبة هي

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\,dx\right|$$

نلخص في ما يلي الخطوات اللازمة لإيجاد مساحة.

إيجاد المساحة

لإيجاد المساحة بين منحنى الدالة f والمحور x من $x = a$ إلى $x = b$ اتّبع الخطوات التالية:

1. أوجد نقاط تقاطع منحنى الدالة f مع المحور x ضمن الفترة $[a, b]$ وقسّم المساحة تبعًا لهذه النقاط إلى عدة أجزاء وحدّد الأجزاء الواقعة فوق المحور x والاجزاء الواقعة تحت المحور x (يمكن الاستعانة بالتمثيل البياني للدالة إذا لزم الأمر).

2. يمكن إيجاد مساحة الجزء الواقع فوق المحور x من خلال إيجاد التكامل المحدود على هذا الجزء. أما المساحة الواقعة تحت المحور x فهي القيمة المطلقة للتكامل المحدود.

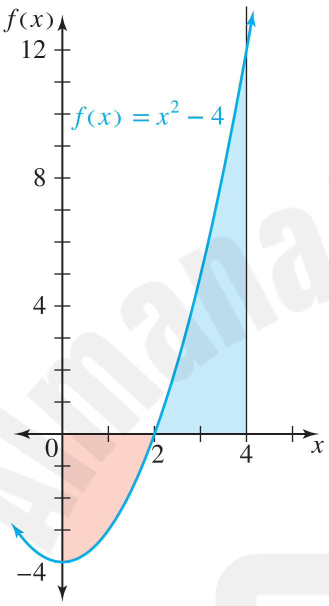
3. المساحة المطلوبة تساوي مجموع مساحات الأجزاء.

مثال 4 استعمال خطوات إيجاد المساحة بين منحنى دالة والمحور x

أوجد مساحة المنطقة الواقعة بين منحنى الدالة $f(x) = x^2 - 4$ والمحور x من $x = 0$ إلى $x = 4$.

الحل

التمثيل البياني للدالة يبيّن أن المساحة تنقسم إلى قسمين يقع أحدهما تحت المحور x والآخر فوقه.



الخطوة 1 يمكنك أن تستنتج من الشكل أعلاه أن المنحنى يقطع المحور x عند $x = 2$، إلا أننا نستطيع أن نتحقق من ذلك جبريًّا على الشكل التالي:

$$f(x) = 0$$
$$x^2 - 4 = 0$$
$$(x - 2)(x + 2) = 0$$

$x = 2 \in [0, 4]$ أو $x = -2 \notin [0, 4]$ وهو حل غير مقبول.

بما أن المنحنى يقطع المحور x عند $x = 2$، تنقسم الفترة $[0, 4]$ إلى الفترتين $[0, 2]$ و $[2, 4]$.

الخطوة 2 يبيّن الشكل أنه لإيجاد المساحة المظللة، عليك إيجاد المساحة ما فوق المحور x من خلال التكامل المحدود في $[2, 4]$ وإيجاد المساحة تحت المحور x من خلال القيمة المطلقة للتكامل المحدود في $[0, 2]$.

(تابع)

سؤال للتفكر

س: إذا طرحنا هذا السؤال نفسه لكن في فترة أخرى غير الفترة $[0, 4]$، كيف نميز متى نستعمل القيمة المطلقة؟

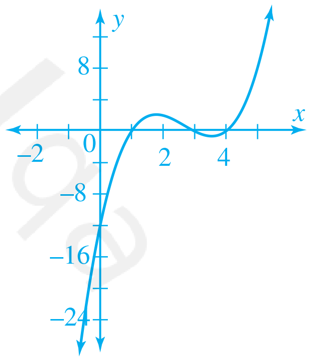
نموذج إجابة:

للدالة $x^2 - 4$ جذران هما -2 و 2، وبالتالي تكون الدالة سالبة في الفترة $]-2, 2[$ وموجبة خارج هذه الفترة.

إذن نستعمل القيمة المطلقة على الجزء الواقع داخل $[-2, 2]$ من المساحة المطلوبة.

للطلاب الذين يواجهون صعوبات

(مع المثال 4) قد يحتاج بعض الطلاب إلى مزيد من التدرب على إيجاد المساحة التي يحدها منحنى يكون فوق المحور x تارةً وتحته تارةً أخرى. في ما يلي التمثيل البياني للدالة $f(x)$.



س: أوجد بدلالة $f(x)$ المساحة المحددة بمنحنى الدالة f بين $x = 0$ و $x = 1$.

نموذج إجابة:

المساحة هي:

$$\int_0^1 |f(x)|\,dx = -\int_0^1 f(x)\,dx$$

س: أوجد بدلالة $f(x)$ المساحة المحددة بمنحنى الدالة f بين $x = 0$ و $x = 3$.

نموذج إجابة:

المساحة المطلوبة تساوي:

$$\int_0^3 |f(x)|\,dx = \int_0^1 |f(x)|\,dx + \int_1^3 f(x)\,dx$$
$$= -\int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^3 f(x)\,dx$$

مساعدة دراسية

يمكننا تحديد الجزء الواقع فوق وتحت المحور x عن طريق بحث إشارة الدالة في الفترات الجزئية والتي هي $[0, 2]$ و $[2, 4]$.

في $[0, 2]$، $f(x) \le 0$ وفي $[2, 4]$، $f(x) \ge 0$

إذن في $[0, 2]$، $f(x)$ تقع تحت المحور x وفي $[2, 4]$، $f(x)$ تقع فوق المحور x.

الخطوة 3 المساحة المطلوبة هي إذن جمع التكاملين:

$$A = \left|\int_0^2 (x^2 - 4)\ dx\right| + \int_2^4 (x^2 - 4)\ dx = \left|\left(\frac{x^3}{3} - 4x\right)\Big|_0^2\right| + \left(\frac{x^3}{3} - 4x\right)\Big|_2^4$$

$$= \left|\frac{8}{3} - 8\right| + \left(\frac{64}{3} - 16\right) - \left(\frac{8}{3} - 8\right)$$

$$= 16$$

إذن المساحة المطلوبة تساوي 16 وحدة مربعة.

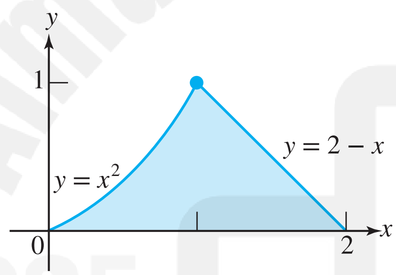
حاول أن تحل التمرينين 18 و 27

المساحة المحددة بأكثر من منحنى

قد تكون المساحة المطلوب إيجادها تقع تحت أكثر من منحنى، كما في المثال التالي.

مثال 5 إيجاد المساحة باستعمال أكثر من تكامل محدود واحد

أوجد المساحة المحددة في التمثيل البياني.



الحل

تقع المساحة تحت منحنى كل من الدالتين $y = 2 - x$ و $y = x^2$، لذا نقسم المساحة إلى قسمين، أحدهما تحت منحنى الدالة $y = 2 - x$ والآخر تحت منحنى الدالة $y = x^2$.

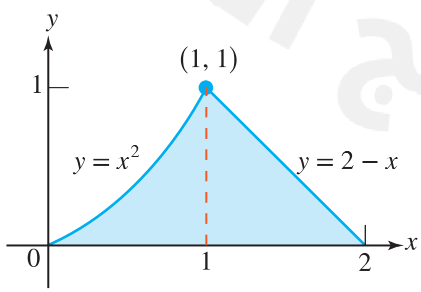
لإيجاد قيمة x التي تفصل بين المساحتين اكتب:

$$x^2 = 2 - x$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x - 1)(x + 2) = 0$$

$x = 1$ أو $x = -2$ (غير مقبول)



(تابع)

تنبيه

إذا حسبنا التكامل المحدود فقط في المثال 4، فسوف نحصل على

$$\int_0^4 (x^2 - 4)\ dx = \left(\frac{x^3}{3} - 4x\right)\Big|_0^4$$

$$= \left(\frac{64}{3} - 16\right) - 0$$

$$= \frac{16}{3}$$

وهذا لا يعطي قيمة المساحة المطلوبة.

للطلاب الذين يواجهون صعوبات

(تابع)

س: أوجد بدلالة $f(x)$ المساحة المحددة بمنحنى الدالة f بين $x = 0$ و $x = 4$.

نموذج إجابة:

المساحة المطلوبة تساوي:

$$\int_0^4 |f(x)|\ dx = \int_0^1 |f(x)|\ dx + \int_1^3 f(x)\ dx + \int_3^4 |f(x)|\ dx$$

$$= -\int_0^1 f(x)\ dx + \int_1^3 f(x)\ dx - \int_3^4 f(x)\ dx$$

سؤال للتفكر

س: (مع المثال 5) كيف يمكن إيجاز الخطوات اللازمة لإيجاد المساحة الواقعة بين المحور x ومنحنيين؟

نموذج إجابة:

لنفترض أننا نريد حساب المساحة المحددة بمنحنى الدالة f_1 في جزء من الفترة $[a, b]$ ومنحنى الدالة f_2 في الجزء الآخر من هذه الفترة.

1. نحدد أولًا نقطة تلاقي المنحنيين c.
2. بعد ذلك نوجد المساحة المحددة بمنحنى f_1 في الفترة $[a, c]$، مع الانتباه إلى إشارة f_1 في هذه الفترة.
3. نوجد المساحة التي يحدها منحنى f_2 في $[c, b]$، مع الانتباه إلى إشارة f_2 في هذه الفترة.
4. وأخيرًا، نجمع المساحتين.

ملاحظات على التمارين

التمارين 1-28، تدرب الطالب على استعمال التكامل المحدود في إيجاد المساحات الواقعة بين منحنيات الدوال والمحور x.

التمارين 29-34، تدرب الطالب على إيجاد مساحات يحدها أكثر من منحنى مع المحور x.

التمارين 47-50، تدرب الطالب على أنماط من الاختبارات.

التقييم المستمر

التقييم الذاتي:

التمارين 4, 5, 10, 17, 26, 31, 32

إذن، المساحة المطلوبة تساوي المساحة الواقعة تحت منحنى الدالة $y = x^2$ بين $x = 0$ و $x = 1$ مضافًا إليها المساحة الواقعة تحت منحنى الدالة $y = 2 - x$ بين $x = 1$ و $x = 2$، وتساوي

$$A = \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 (2 - x)\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2$$
$$= \left(\tfrac{1}{3} - 0\right) + \left(4 - \tfrac{4}{2}\right) - \left(2 - \tfrac{1}{2}\right)$$
$$= \tfrac{1}{3} + 2 - 2 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{6}$$

إذن، المساحة المحددة في التمثيل البياني تساوي 16 وحدة مربعة.

حاول أن تحل التمرين 29

مراجعة سريعة 5.2

في التمارين 1-8، أوجد قيمة التكامل المحدود.

1. $\int_{-2}^{1} 5\,dx$ $\quad \int_{-2}^{1} 5\,dx = 5x\Big|_{-2}^{1} = 5(1+2) = 15$

2. $\int_{3}^{7} (-20)\,dx$ $\quad \int_{3}^{7} (-20)\,dx = -20x\Big|_{3}^{7} = -20(7-3) = -80$

3. $\int_{0}^{3} (-160)\,dx$ $\quad \int_{0}^{3} (-160)\,dx = -160x\Big|_{0}^{3} = -160(3-0) = -480$

4. $\int_{-4}^{-1} \frac{\pi}{2}\,d\theta$ $\quad \int_{-4}^{-1} \frac{\pi}{2}\,d\theta = \frac{\pi}{2}\theta\Big|_{-4}^{-1} = \frac{\pi}{2}(-1+4) = \frac{3\pi}{2}$

5. $\int_{-2.1}^{3.4} 0.5\,ds$ $\quad \int_{-2.1}^{3.4} 0.5\,ds = 0.5s\Big|_{-2.1}^{3.4} = 0.5(3.4+2.1) = 2.75$

6. $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{18}} \sqrt{2}\,dx$ $\quad \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{18}} \sqrt{2}\,dx = \sqrt{2}\,x\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{18}} = \sqrt{36} - \sqrt{4} = 4$

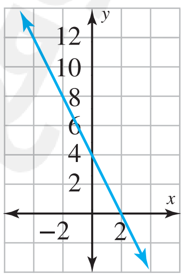
7. $\int_{3}^{5} (2x+6)\,dx$ $\quad \int_{3}^{5} (2x+6)\,dx = x^2\Big|_{3}^{5} + 6x\Big|_{3}^{5} = 25 - 9 + 30 - 18 = 28$

8. $\int_{-2}^{2} (4z+3)\,dz$ $\quad \int_{-2}^{2} (4z+3)\,dz = 2z^2\Big|_{-2}^{2} + 3z\Big|_{-2}^{2} = 8 - 8 + 6 + 6 = 12$

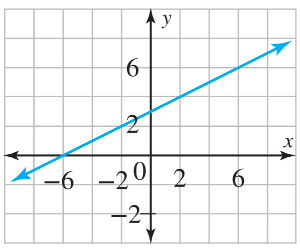
الدرس 5.2 التمارين

في التمارين 1-4، استعمل التمثيل البياني للدالة المكاملة والمساحات لإيجاد قيمة التكامل المحدود.

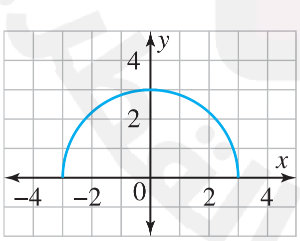
1. $\int_{-2}^{2} (-2x + 4)\,dx$



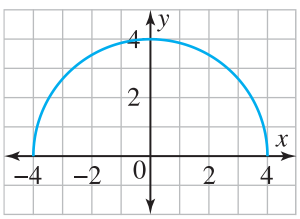
2. $\int_{-2}^{6} \left(\frac{x}{2} + 3\right) dx$



3. $\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\,dx$



4. $\int_{-4}^{0} \sqrt{16 - x^2}\,dx$



في التمارين 5-14، استعمل التكامل المحدود في ايجاد المساحة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x في الفترة المعطاة.

5. $f(x) = 2x + 5,\ [2, 4]$

6. $f(x) = 3x + 2,\ [1, 3]$

7. $f(x) = -x^2 + 5,\ [-2, 2]$

8. $f(x) = x^2,\ [1, 5]$

9. $f(x) = e^x + 2,\ [-2, 2]$

10. $f(x) = e^x - 1,\ [0, 4]$

11. $f(x) = \frac{2}{x},\ [1, 4]$

12. $f(x) = \frac{1}{x},\ [1, 9]$

13. $f(x) = \sin x,\ [0, \pi]$

14. $f(x) = x^2 - 4\ ,\ [0, 2]$

في التمارين 15-23، استعمل التكامل المحدود لإيجاد المساحة الواقعة بين المحور x ومنحنى الدالة f في الفترة المعطاة.
تحقق أولًا مما إذا كان التمثيل البياني للمنحنى يتقاطع مع المحور x في الفترة المعطاة.

15. $f(x) = 2x - 14,\ [6, 10]$

16. $f(x) = 4x - 32,\ [5, 10]$

17. $f(x) = 2 - 2x^2,\ [0, 5]$

18. $f(x) = 9 - x^2,\ [0, 6]$

19. $f(x) = x^3,\ [-1, 3]$

20. $f(x) = x^3 - 2x,\ [-2, 4]$

21. $f(x) = e^x - 1,\ [-1, 2]$

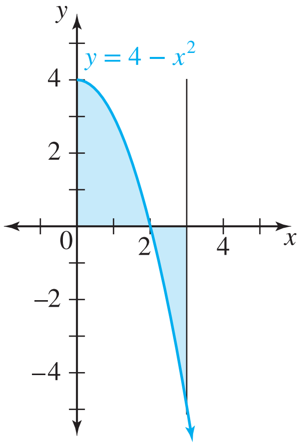
22. $f(x) = 1 - e^{-x},\ [-1, 2]$

23. $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e}\ ,\ [1, e^2]$

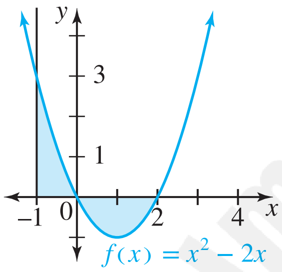
24. أوجد المساحة بين $y = \sec^2\left(\frac{x}{3}\right)$ والمحور x من $x = -\pi$ إلى $x = \pi$.

في التمارين 25-29، أوجد المساحة المظللة في التمثيل البياني.

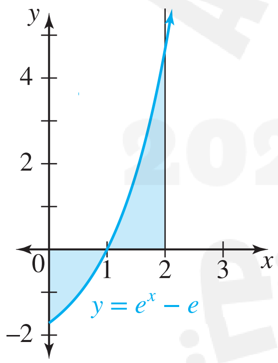
25.



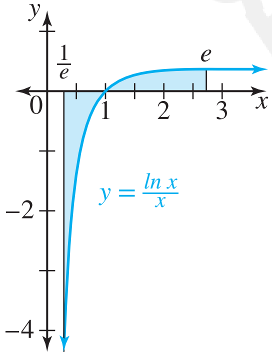
26.



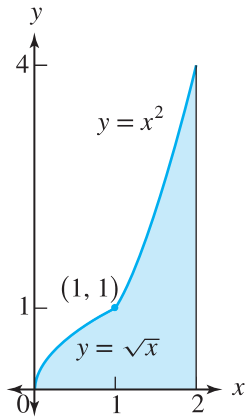
27.



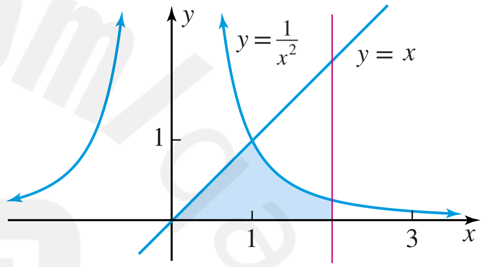
28.



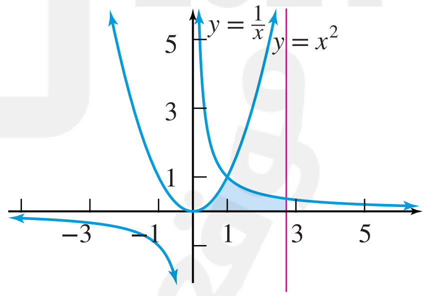
29.



30. أوجد المساحة الواقعة في الربع الأول والمحددة بالمستقيم $y = x$ والمستقيم $x = 2$ ومنحنى الدالة $y = \frac{1}{x^2}$ والمحور x.

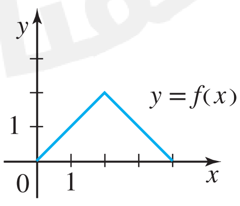


31. أوجد مساحة المنطقة الواقعة في الربع الأول المحددة بالمستقيم $x = e$ والمنحنيين $y = x^2$ و $y = \frac{1}{x}$ والمحور x.

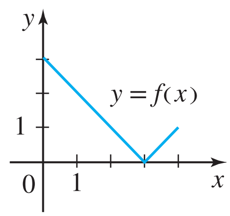


32. أوجد $\int_0^4 f(x)\,dx$ لكل تمثيل بياني للدالة $y = f(x)$.

a.

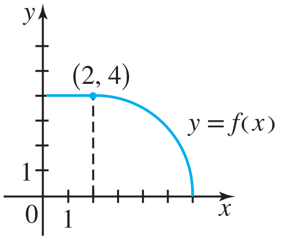


b.

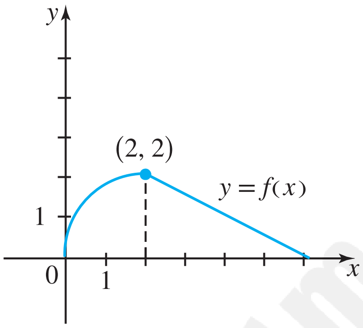


33. أوجد $\int_0^6 f(x)\,dx$ لكل تمثيل بياني للدالة $y = f(x)$، حيث تتألف $f(x)$ من قطع مستقيمة وأقواس من دائرة.

a.

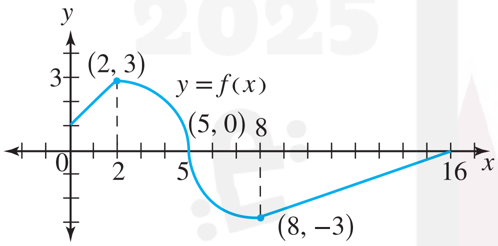


b.

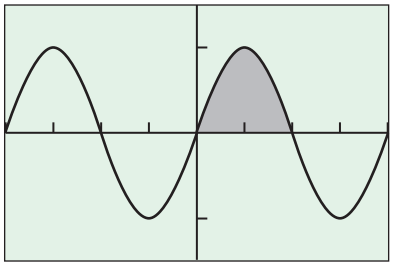


34. يتكون التمثيل البياني للدالة f ، الموضح في الشكل أدناه، من قطعتين مستقيمتين وربعي دائرة.

أوجد قيمة التكامل المحدود $\int_0^{16} f(x)\,dx$.



في التمارين 35-42، أوجد قيمة التكامل باستعمال التمثيل البياني للدالة $y = \sin x$ المبيّن في نافذة العرض ومن خلال $\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2$.



$[-2\pi, 2\pi]$ في $[-1.5, 1.5]$

35. $\int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx$

36. $\int_{0}^{2\pi} \sin x \, dx$

37. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$

38. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \, dx$

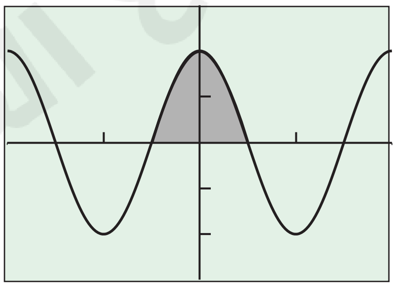
39. $\int_{0}^{\pi} (2 + \sin x) \, dx$

40. $\int_{0}^{\pi} 2 \sin x \, dx$

41. $\int_{2}^{\pi + 2} \sin (x - 2) \, dx$

42. $\int_{0}^{2\pi} \sin \left(\frac{x}{2}\right) dx$

في التمارين 43-46، أوجد قيمة التكامل باستعمال التمثيل البياني للدالة $y = \cos x$ المبيّن في نافذة العرض ومن خلال $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = 2$.



$[-2\pi, 2\pi]$ في $[-1.5, 1.5]$

43. $\int_{0}^{\pi} (\cos x + 2) \, dx$

44. $\int_{0}^{\pi} 3 \cos x \, dx$

45. $\int_{1}^{\pi + 1} \cos(x - 1) \, dx$

46. $\int_{0}^{2\pi} \cos \left(\frac{x}{4}\right) dx$

أسئلة اختبار معيارية

.47 **صواب أم خطأ** لإيجاد المساحة الواقعة تحت المحور x، يكفي إيجاد قيمة التكامل المحدود بغضّ النظر عما إذا كانت هذه القيمة سالبة أم موجبة. برّر إجابتك.

.48 **صواب أم خطأ** المساحة تساوي $\int_{2}^{5} f(x) \, dx$ إذا كانت $f(x) \leq 0$ في الفترة $[2, 5]$. برّر إجابتك.

.49 **اختيار من متعدد** قيمة المساحة الواقعة بين المحور x ومنحنى الدالة $y = \sqrt{1 - x^2}$ التي تمثّل نصف دائرة هي: D

A. 0.886

B. 1.253

C. 1.414

D. 1.571

E. 1.748

.50 **اختيار من متعدد** قيمة المساحة الواقعة بين منحنى الدالة $f(x) = x^2 - 9$ والمحور x من $x = 0$ إلى $x = 6$ هي: C

A. 0.54

B. 108

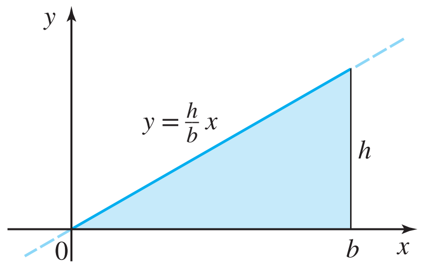
C. 54

D. 44

E. 45

استكشاف

51. مقارنة صيغ المساحات لنفترض أن المنطقة الواقعة في الربع الأول تحت المنحنى $y = \frac{h}{b}x$ تمتد من $x = 0$ إلى $x = b$. (انظر الشكل)



a. استعمل صيغة هندسية لحساب مساحة هذه المنطقة.

$A = \frac{h \times b}{2}$

b. أوجد كل الدوال الأصلية للدالة y.

$\int \frac{h}{b}x\,dx = \frac{h}{2b}x^2 + C$

c. استعمل دالة أصلية للدالة y لإيجاد قيمة $\int_0^b y(x)\,dx$.

$\int_0^b y(x)\,dx = \frac{h}{2b}x^2 \Big|_0^b = \frac{hb}{2}$

52. لتكن $f(x) = 2x + 3$.

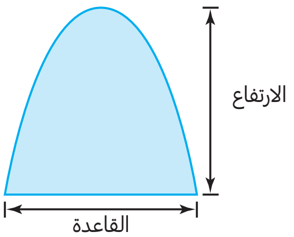
a. أوجد القيمة التقريبية للمساحة الواقعة تحت منحنى الدالة f وفوق المحور x من $x = 0$ إلى $x = 4$ باستعمال أربعة مستطيلات. ليكن ارتفاع كل مستطيل قيمة الدالة على طرف المستطيل من جهة اليسار.

b. أوجد قيمة التكامل المحدود $\int_0^4 (2x + 3)\,dx$

c. **الكتابة للتعلم** قارن بين نتيجتَي الفرعين a و b وناقش أيهما أقرب إلى المساحة الفعلية.

توسيع الأفكار

53. صيغة أرخميدس لمساحة القطع المكافئ اكتشف أرخميدس أن مساحة المنطقة الواقعة تحت منحنى قوس على شكل قطع مكافئ (كما هو مبيّن في الرسم أدناه) تساوي دائمًا ناتج ضرب ثلثَي طول قاعدة القوس في ارتفاعه.



a. أوجد مساحة المنطقة الواقعة تحت قوس القطع المكافئ $y = 6 - x - x^2$، $-3 \le x \le 2$

b. أوجد ارتفاع القوس.

c. أثبت أن هذه المساحة تساوي ناتج ضرب ثلثَي طول القاعدة في الارتفاع.

54. إيجاد المساحة أثبت أن المساحة الواقعة بين المحور x وأحد أقواس المنحنى $y = \sin kx$ تساوي دائمًا $\frac{2}{k}$ إذا كان الثابت k عددًا موجبًا.

إجابات على أسئلة التمارين 5.2

.1 قيمة التكامل تساوي مساحة المثلث القائم المحدد بالمستقيم المعطى والمحور x والمستقيم $x = -2$.

$$\int_{-2}^{2} (-2x + 4)\, dx = \frac{1}{2}(4)(8) = 16$$

.2 قيمة التكامل تساوي مساحة شبه المنحرف المحدد بالمستقيم المعطى والمحور x والمستقيمين $x = -2$ و $x = 6$ والذي طول إحدى قاعدتيه وحدتان، وطول القاعدة الأخرى 6 وحدات، وارتفاعه 8 وحدات.

$$\int_{-2}^{6} \left(\frac{x}{2} + 3\right) dx = \frac{1}{2}(6 + 2)(8) = 32$$

.3 قيمة التكامل تساوي مساحة نصف الدائرة المعطاة التي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها 3

$$\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\pi(3)^2 = \frac{9\pi}{2}$$

.4 قيمة التكامل تساوي مساحة ربع الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها 4

$$\int_{-4}^{0} \sqrt{16 - x^2}\, dx = \frac{1}{4}\pi(4)^2 = 4\pi$$

5. $$\int_{2}^{4} (2x + 5)\, dx = x^2 \Big|_{2}^{4} + 5x \Big|_{2}^{4} = 16 - 4 + 20 - 10 = 22$$

إذن، المساحة تساوي 22 وحدة مربعة.

6. $$\int_{1}^{3} (3x + 2)\, dx = \frac{3}{2}x^2 \Big|_{1}^{3} + 2x \Big|_{1}^{3} = \frac{3}{2}(9 - 1) + 2(3 - 1) = 16$$

إذن، تساوي المساحة 16 وحدة مربعة.

7. $$\int_{-2}^{2} (-x^2 + 5)\, dx = -\frac{1}{3}x^3 \Big|_{-2}^{2} + 5x \Big|_{-2}^{2} = -\frac{1}{3}(8 + 8) + 5(2 + 2)$$

$$= \frac{44}{3} \approx 14.67$$

إذن، المساحة تساوي 14.67 وحدة مربعة تقريبًا.

8. $$\int_{1}^{5} x^2\, dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_{1}^{5} = \frac{1}{3}(125 - 1) = \frac{124}{3} \approx 41.33$$

إذن، المساحة تساوي 41.33 وحدة مربعة تقريبًا.

9. $$\int_{-2}^{2} (e^x + 2)\, dx = e^x \Big|_{-2}^{2} + 2x \Big|_{-2}^{2} = e^2 - e^{-2} + 4 + 4 \approx 15.25$$

إذن، المساحة تساوي 15.25 وحدة مربعة تقريبًا.

10. $$\int_{0}^{4} (e^x - 1)\, dx = e^x \Big|_{0}^{4} - x \Big|_{0}^{4} = e^4 - 1 - 4 + 0 \approx 49.6$$

إذن، المساحة تساوي 49.6 وحدة مربعة تقريبًا.

11. $$\int_{1}^{4} \frac{2}{x}\, dx = 2\, ln\, |x| \Big|_{1}^{4} = 2(ln\, 4 - ln\, 1) = 2\, ln\, 4 \approx 2.77$$

إذن، المساحة تساوي 2.77 وحدة مربعة تقريبًا.

12. $$\int_{1}^{9} \frac{1}{x}\, dx = ln\, |x| \Big|_{1}^{9} = ln\, 9 - ln\, 1 = ln\, 9 \approx 2.2$$

إذن، المساحة تساوي 2.2 وحدة مربعة تقريبًا.

13. $$\int_{0}^{\pi} \sin x\, dx = -\cos x \Big|_{0}^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2$$

إذن، المساحة تساوي وحدتين مربعتين.

14. $$\int_{0}^{2} (x^2 - 4)\, dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_{0}^{2} - 4x \Big|_{0}^{2} = \frac{8}{3} - 0 - 8 + 0 = -\frac{16}{3} \approx -5.33$$

بما أن $y = x^2 - 4 \le 0$ في الفترة $[0, 2]$، إذن المساحة تساوي معكوس هذا التكامل، أي 5.33 وحدة مربعة تقريبًا.

.15 يقطع المنحنى المحور x عند $x = 7$ في الفترة $[6, 10]$.

وبما أن الدالة f متزايدة لكل قيم x، فإن $f(x) > 0$ عندما $6 \le x < 7$، و $f(x) < 0$ عندما $7 < x \le 10$

$$A = \left|\int_{6}^{7} (2x - 14)\, dx\right| + \int_{7}^{10} (2x - 14)\, dx$$

$$= \left|x^2 \Big|_{6}^{7} - 14x \Big|_{6}^{7}\right| + x^2 \Big|_{7}^{10} - 14x \Big|_{7}^{10}$$

$$= |49 - 36 - 98 + 84| + 100 - 49 - 140 + 98 = 10$$

إذن، المساحة المطلوبة تساوي 10 وحدات مربعة.

.16 يقطع المنحنى المحور x عند $x = 8$ في الفترة $[5, 10]$.

وبما أن الدالة f متزايدة لكل قيم x، فإن $f(x) > 0$ عندما $5 \le x < 8$، و $f(x) < 0$ عندما $8 < x \le 10$

$$A = \left|\int_{5}^{8} (4x - 32)\, dx\right| + \int_{8}^{10} (4x - 32)\, dx$$

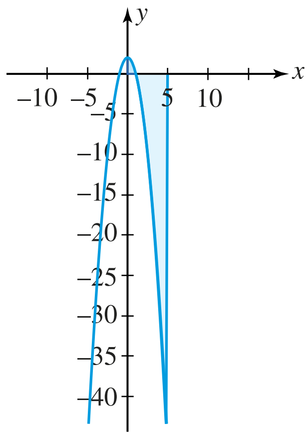
$$= \left|2x^2 \Big|_{5}^{8} - 32x \Big|_{5}^{8}\right| + 2x^2 \Big|_{8}^{10} - 32x \Big|_{8}^{10}$$

$$= |128 - 50 - 256 + 160| + 200 - 128 - 320 + 256$$

$$= 26$$

إذن، المساحة المطلوبة تساوي 26 وحدة مربعة.

17. يقطع المنحنى المحور x عند $x = 1$ في الفترة $[0, 5]$.



$$A = \int_0^1 (2 - 2x^2)\,dx + \left|\int_1^5 (2 - 2x^2)\,dx\right|$$

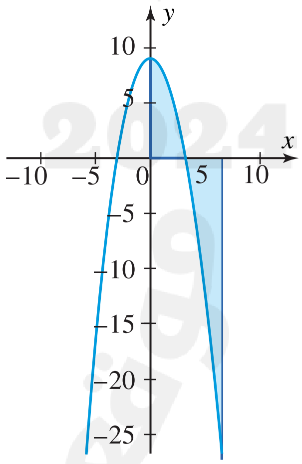
$$= 2x\Big|_0^1 - \frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 + \left|2x\Big|_1^5 - \frac{2}{3}x^3\Big|_1^5\right|$$

$$= 2(1 - 0) - \frac{2}{3}(1 - 0) + \left|2(5 - 1) - \frac{2}{3}(125 - 1)\right|$$

$$= 76$$

إذن، المساحة المطلوبة تساوي 76 وحدة مربعة.

18. يقطع المنحنى المحور x عند $x = 3$ في الفترة $[0, 6]$.



$$A = \int_0^3 (9 - x^2)\,dx + \left|\int_3^6 (9 - x^2)\,dx\right|$$

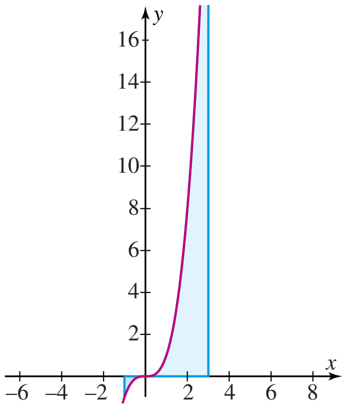
$$= 9x\Big|_0^3 - \frac{1}{3}x^3\Big|_0^3 + \left|9x\Big|_3^6 - \frac{1}{3}x^3\Big|_3^6\right|$$

$$= 9(3 - 0) - \frac{1}{3}(27 - 0) + \left|9(6 - 3) - \frac{1}{3}(216 - 27)\right|$$

$$= 54$$

إذن، المساحة المطلوبة تساوي 54 وحدة مربعة.

19. يقطع المنحنى المحور x عند $x = 0$ في الفترة $[-1, 3]$.

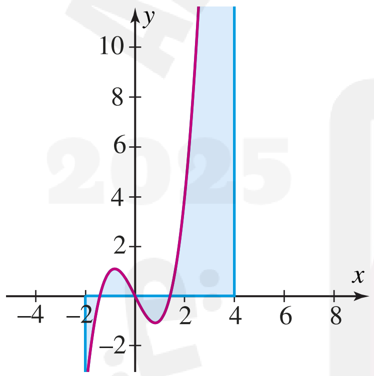


$$A = \left|\int_{-1}^0 x^3\,dx\right| + \int_0^3 x^3\,dx$$

$$= \left|\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^0\right| + \frac{x^4}{4}\Big|_0^3 = \left|0 - \frac{1}{4}\right| + \frac{81}{4} - 0 = 20.5$$

إذن، المساحة المطلوبة تساوي 20.5 وحدات مربعة.

20. يقطع المنحنى المحور x عند $x = 0$ و $x = -\sqrt{2}$ و $x = \sqrt{2}$
في الفترة $[-2, 4]$.



$$A = \left|\int_{-2}^{-\sqrt{2}} (x^3 - 2x)\,dx\right| + \int_{-\sqrt{2}}^0 (x^3 - 2x)\,dx$$

$$+ \left|\int_0^{\sqrt{2}} (x^3 - 2x)\,dx\right| + \int_{\sqrt{2}}^4 (x^3 - 2x)\,dx$$

$$= \left|\left(\frac{x^4}{4} - x^2\right)\Big|_{-2}^{-\sqrt{2}}\right| + \left(\frac{x^4}{4} - x^2\right)\Big|_{-\sqrt{2}}^0 + \left|\left(\frac{x^4}{4} - x^2\right)\Big|_0^{\sqrt{2}}\right|$$

$$+ \left(\frac{x^4}{4} - x^2\right)\Big|_{\sqrt{2}}^4$$

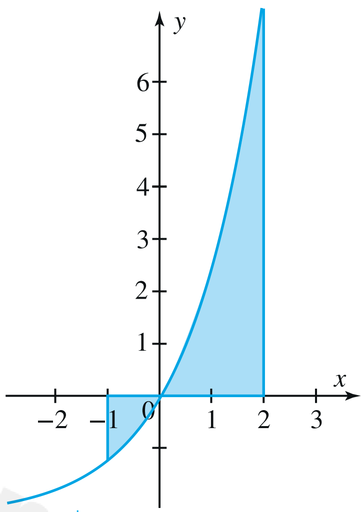
$$= \left|1 - 2 - \frac{16}{4} + 4\right| + (0 - 0 - 1 + 2)$$

$$+ \left|1 - 2 - 0 + 0\right| + (64 - 16 - 1 + 2)$$

$$= 52$$

إذن، المساحة المطلوبة تساوي 52 وحدة مربعة.

21. يقطع المنحنى المحور x عند $x = 0$ في الفترة $[-1, 2]$.



$$A = \left|\int_{-1}^{0} (e^x - 1)\, dx\right| + \int_{0}^{2} (e^x - 1)\, dx$$

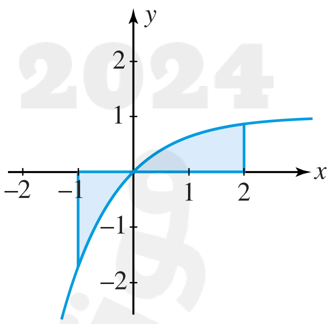
$$= \left| e^x \Big|_{-1}^{0} - x \Big|_{-1}^{0} \right| + e^x \Big|_{0}^{2} - x \Big|_{0}^{2}$$

$$= |1 - e^{-1} - 0 - 1| + e^2 - 1 - 2 + 0 = e^2 + \tfrac{1}{e} - 3$$

$$\approx 4.76$$

إذن، المساحة المطلوبة تساوي 4.76 وحدة مربعة تقريبًا.

22. يقطع المنحنى المحور x عند $x = 0$ في الفترة $[-1, 2]$.



$$A = \left|\int_{-1}^{0} (1 - e^{-x})\, dx\right| + \int_{0}^{2} (1 - e^{-x})\, dx$$

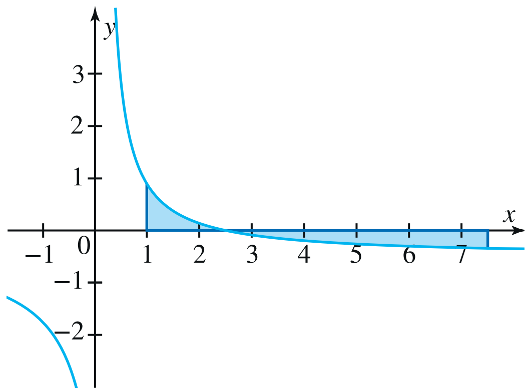
$$= \left| x \Big|_{-1}^{0} + e^{-x} \Big|_{-1}^{0} \right| + x \Big|_{0}^{2} + e^{-x} \Big|_{0}^{2}$$

$$= |0 + 1 + 1 - e| + 2 - 0 + e^{-2} - 1 = e + e^{-2} - 1$$

$$\approx 1.85$$

إذن، المساحة المطلوبة تساوي 1.85 وحدة مربعة تقريبًا.

23. يقطع المنحنى المحور x عند $x = e$ في الفترة $[1, e^2]$.



$$A = \int_{1}^{e} \left(\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{e}\right) dx + \left|\int_{e}^{e^2} \left(\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{e}\right) dx\right|$$

$$= \left(\ln|x| - \tfrac{x}{e}\right) \Big|_{1}^{e} + \left|\left(\ln|x| - \tfrac{x}{e}\right) \Big|_{e}^{e^2}\right|$$

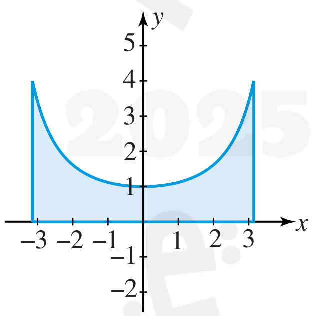
$$= 1 - 1 - 0 + e^{-1} + |2 - e - 1 + 1| = e^{-1} + e - 2$$

$$\approx 1.09$$

إذن، المساحة المطلوبة تساوي 1.09 وحدات مربعة تقريبًا.

24. $$A = \int_{-\pi}^{\pi} \sec^2 \tfrac{x}{3}\, dx = 3 \tan \tfrac{x}{3} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 3\left(\tan \tfrac{\pi}{3} - \tan\left(-\tfrac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 3\left(\sqrt{3} - (-\sqrt{3})\right) = 6\sqrt{3} \approx 10.4$$ وحدة مربعة



إذن، المساحة المطلوبة تساوي 10.4 وحدات مربعة تقريبًا.

25. $$A = \int_{0}^{2} (4 - x^2)\, dx + \left|\int_{2}^{3} (4 - x^2)\, dx\right| = \left(4x - \tfrac{x^3}{3}\right) \Big|_{0}^{2} + \left|\left(4x - \tfrac{x^3}{3}\right) \Big|_{2}^{3}\right|$$

$$= 8 - \tfrac{8}{3} - 0 + 0 + \left|12 - 9 - 8 + \tfrac{8}{3}\right| = \tfrac{23}{3} \approx 7.67$$

إذن، المساحة المطلوبة تساوي 7.67 وحدة مربعة تقريبًا.

26. $$A = \int_{-1}^{0} (x^2 - 2x)\, dx + \left|\int_{0}^{2} (x^2 - 2x)\, dx\right|$$

$$= \left(\tfrac{x^3}{3} - x^2\right) \Big|_{-1}^{0} + \left|\left(\tfrac{x^3}{3} - x^2\right) \Big|_{0}^{2}\right| = 0 - 0 + \tfrac{1}{3} + 1 + \left|\tfrac{8}{3} - 4 - 0 + 0\right|$$

$$= \tfrac{4}{3} + 4 - \tfrac{8}{3} = \tfrac{8}{3} \approx 2.67$$

إذن، المساحة المطلوبة تساوي 2.67 وحدة مربعة تقريبًا.

27. $A = \left|\int_0^1 (e^x - e)\,dx\right| + \int_1^2 (e^x - e)\,dx = \left|(e^x - ex)\Big|_0^1\right| + (e^x - ex)\Big|_1^2$

$= |e - e - 1 + 0| + e^2 - 2e - e + e = 1 + e^2 - 2e$

≈ 2.95

إذن، المساحة المطلوبة تساوي 2.95 وحدة مربعة تقريبًا.

28. $A = \left|\int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{\ln x}{x}\,dx\right| + \int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$

$= \left|\int_{-1}^0 u\,du\right| + \int_0^1 u\,du,\ u = \ln x,\ du = \frac{dx}{x}$

$= \left|\frac{u^2}{2}\Big|_{-1}^0\right| + \frac{u^2}{2}\Big|_0^1 = \left|0 - \frac{1}{2}\right| + \frac{1}{2} - 0 = 1$

إذن، المساحة المطلوبة تساوي وحدة مربعة واحدة.

29. $A = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx + \int_1^2 x^2\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 + \frac{1}{3}x^3\Big|_1^2 = \frac{2}{3} - 0 + \frac{8}{3} - \frac{1}{3}$

$= 3$

إذن، المساحة المطلوبة تساوي 3 وحدات مربعة .

.30 لإيجاد قيمة x التي تفصل بين المساحتين، اكتب: $x = \frac{1}{x^2}$. إذن، $x^3 = 1$، أي $x = 1$.

$A = \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{1}{x}\Big|_1^2 = \frac{1}{2} - 0 - \frac{1}{2} + 1$

$= 1$

إذن، المساحة المطلوبة تساوي وحدة مربعة واحدة.

.31 لإيجاد قيمة x التي تفصل بين المساحتين، اكتب: $x^2 = \frac{1}{x}$.

إذن، $x^3 = 1$، أي $x = 1$.

$A = \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^e \frac{1}{x}\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \ln|x|\Big|_1^e = \frac{1}{3} - 0 + \ln e - 0 = \frac{4}{3}$

≈ 1.33

.32 **a.** قيمة $\int_0^4 f(x)\,dx$ تساوي مساحة المثلث المكوّن من القطعتين المستقيمتين والمحور x، إذن، $\int_0^4 f(x)\,dx = \frac{4 \times 2}{2} = 4$

b. قيمة $\int_0^4 f(x)\,dx$ تساوي مجموع مساحتي المثلثين اللذين تكوّنهما القطعتان المستقيمتان مع المحور x والمستقيم $x = 4$.

$\int_0^4 f(x)\,dx = \frac{3 \times 3}{2} + \frac{1 \times 1}{2} = \frac{10}{2} = 5$

33. **a.** $\int_0^6 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^6 f(x)\,dx$

= مساحة المستطيل + مساحة ربع الدائرة $= 2 \times 4 + \frac{\pi \times 4^2}{4}$

$= 8 + 4\pi$

b. $\int_0^6 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^6 f(x)\,dx$

= مساحة المثلث + مساحة ربع الدائرة $= \frac{\pi \times 2^2}{4} + \frac{2 \times 4}{2}$

$= \pi + 4$

34. $\int_0^{16} f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^5 f(x)\,dx + \int_5^8 f(x)\,dx + \int_8^{16} f(x)\,dx$

$= \frac{1}{2}(3+1)(2) + \frac{\pi \times 3^2}{4} - \frac{\pi \times 3^2}{4} - \frac{8 \times 3}{2} = 4 - 12 = -8$

35. $\int_\pi^{2\pi} \sin x\,dx = -\int_0^\pi \sin x\,dx = -2$

36. $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = \int_0^\pi \sin x\,dx + \int_\pi^{2\pi} \sin x\,dx = 2 - 2 = 0$

37. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin x\,dx = \frac{1}{2} \times 2 = 1$

38. $\int_{-\pi}^\pi \sin x\,dx = \int_{-\pi}^0 \sin x\,dx + \int_0^\pi \sin x\,dx = -2 + 2 = 0$

39. $\int_0^\pi (2 + \sin x)\,dx = \int_0^\pi 2\,dx + \int_0^\pi \sin x\,dx = 2x\Big|_0^\pi + 2 = 2\pi + 2$

40. $\int_0^\pi 2\sin x\,dx = 2\int_0^\pi \sin x\,dx = 2 \times 2 = 4$

.41 ليكن $u = x - 2$، إذن $du = dx$. يصبح التكامل:

$\int_2^{\pi+2} \sin(x-2)\,dx = \int_0^\pi \sin u\,du = \int_0^\pi \sin x\,dx = 2$

.42 ليكن $u = \frac{x}{2}$، إذن $du = \frac{dx}{2}$. يصبح التكامل:

$\int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{x}{2}\right)dx = 2\int_0^\pi \sin u\,du = 2\int_0^\pi \sin x\,dx = 4$

43. $\int_0^\pi (\cos x + 2)\,dx = \int_0^\pi \cos x\,dx + \int_0^\pi 2\,dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos x\,dx + 2x\Big|_0^\pi$

$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx - \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx + 2\pi - 0$

$= 1 - 1 + 2\pi = 2\pi$

44. $\int_0^\pi 3\cos x\,dx = 3\int_0^\pi \cos x\,dx = 3\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos x\,dx\right)$

$= 3\left(\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx - \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx\right) = 3 \times 0 = 0$

.45 ليكن $u = x - 1$، إذن $du = dx$. يصبح التكامل:

$\int_1^{\pi+1} \cos(x-1)\,dx = \int_0^\pi \cos u\,du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u\,du + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos u\,du$

$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos u\,du - \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos u\,du = 0$

.46 ليكن $u = \frac{x}{4}$، إذن $du = \frac{1}{4}\,dx$. يصبح التكامل:

$\int_0^{2\pi} \cos\left(\frac{x}{4}\right)dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u\,du = 2\sin u\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= 2\left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 2(1+1) = 4$

.47 خطأ. لا يمكن أن تكون المساحة سالبة. لإيجاد المساحة، يجب إيجاد القيمة المطلقة لقيمة التكامل.

.48 خطأ. لا يمكن للمساحة أن تساوي قيمة التكامل لأن الأخيرة سالبة. المساحة تساوي النظير الجمعي لقيمة التكامل.

52. a. $A \approx 1 \times 3 + 1 \times 5 + 1 \times 7 + 1 \times 9 = 24$

إذن، المساحة المطلوبة تساوي 24 وحدة مربعة.

b. $\int_0^4 (2x+3)\,dx = (x^2+3x)\Big|_0^4 = 28$

c. نتيجة الجزء b أدق من نتيجة الجزء a بالطبع، لأن $f(x) \geq 0$ في الفترة $[0, 4]$، وهذا يعني أن قيمة التكامل $\int_0^4 (2x+3)\,dx$ تمثل المساحة الفعلية.

53. a. $A = \int_{-3}^{2} (6 - x - x^2)\,dx = \left(6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-3}^{2}$

$= 12 - 2 - \frac{8}{3} + 18 + \frac{9}{2} - 9 = \frac{125}{6} \approx 20.83$

إذن، المساحة المطلوبة تساوي 20.83 وحدة مربعة تقريبًا.

b. الإحداثي y لنقطة منتصف القاعدة يساوي ارتفاع القوس:

$y\left(-\frac{1}{2}\right) = 6 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{25}{4}$

c. طول قاعدة القوس: $2 - (-3) = 5$؛ ارتفاع القوس $= \frac{25}{4}$،

أي $A = \left(\frac{2}{3} \times 5\right) \times \frac{25}{4} = \frac{125}{6}$

إذن، المساحة تساوي ناتج ضرب ثلثي طول القاعدة في الارتفاع.

54. إذا اخترنا بشكل عشوائي أحد أقواس $\sin(kx)$ فهو يقع في الفترة $\left[n\frac{\pi}{k}, (n+1)\frac{\pi}{k}\right]$ حيث n عدد صحيح.

يمكن إيجاد المساحة الواقعة بين المحور x وأحد أقواس المنحنى $y = \sin kx$ على الشكل التالي:

$$\int_{n\frac{\pi}{k}}^{(n+1)\frac{\pi}{k}} \sin(kx)\,dx = \left| -\frac{1}{k}\cos(kx)\Big|_{n\frac{\pi}{k}}^{(n+1)\frac{\pi}{k}} \right|$$

$$= \frac{1}{k}\left|-\cos[(n+1)\pi] + \cos(n\pi)\right| = \frac{2}{k}$$

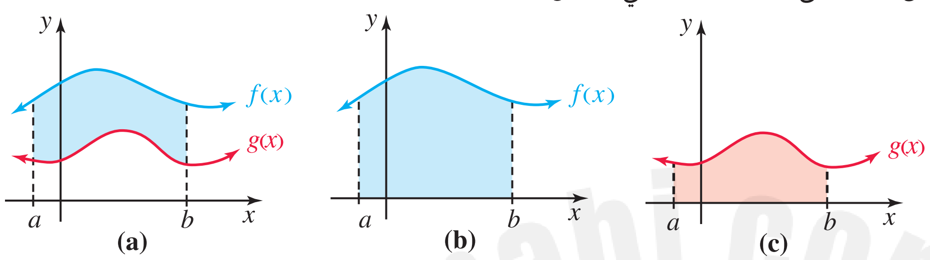
5.3 المساحة بين منحنيين The Area Between Two Curves

ما ستتعلّمه
- حساب المساحة بين منحنيين
- المساحة بين منحنيين متقاطعين

... ولماذا
لا تكون المساحة محددة بمنحنى واحد بالضرورة، فقد تكون محددة بأكثر من منحنى أحيانًا، فإذا عرف مدير الإنتاج في مصنع كيفية تناقص عملية التوفير في عملية إنتاج معينة، وهي منحنى الدالة الأولى، بالإضافة إلى كيفية تزايد التكلفة في نفس العملية، وهي منحنى الدالة الثانية، أمكنه أن يحسب متى ستنتهي عملية التوفير أو ماذا سيكون مبلغ التوفير الكلي وذلك بملاحظة المساحة بين المنحنيين، وهذه المساحة تُحسب دائمًا باستعمال التكامل المحدود.

حساب المساحة بين منحنيين

يعدّ حساب المساحة بين منحنيين من التطبيقات المهمة للتكامل المحدود. يمكننا تعميم الطريقة المتّبعة لإيجاد المساحة بين المنحنى والمحور x من $x = a$ إلى $x = b$ لتشمل حساب مساحة كهذه أيضًا. لنأخذ، على سبيل المثال، المساحة بين منحنى الدالة f ومنحنى الدالة g من $x = a$ إلى $x = b$ المبيّنة في الشكل 5.3.1a



الشكل 5.3.1

هذه المساحة تساوي المساحة تحت منحنى الدالة f (انظر الشكل 5.3.1b) بعد أن نطرح منها المساحة تحت منحنى الدالة g (انظر الشكل 5.3.1c).

$$\int_a^b f(x)\ dx - \int_a^b g(x)\ dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\ dx$$

المساحة بين منحنيين

إذا كانت كل من f و g دالة متصلة، و $f(x) \geq g(x)$ في الفترة $[a, b]$، فإن المساحة بين منحنى f و g من $x = a$ إلى $x = b$ هي

$$\text{A} = \int_a^b [f(x) - g(x)]\ dx$$

مثال 1 المساحة بين منحنيين

أوجد المساحة بين منحنى الدالة $f(x) = -x^2 + 1$ ومنحنى الدالة $g(x) = 2x + 4$ من $x = -1$ إلى $x = 2$.

الحل

التمثيلات البيانية للمعادلات الأربع مبيّنة في الشكل 5.3.2

الخطوة 1 لإيجاد المساحة بين منحنيي الدالتين f و g، لا تحتاج إلى تمثيلها بيانيًّا، إذ يكفي التحقق من أن $f(x) \geq g(x)$ أو $g(x) \geq f(x)$ في الفترة المعطاة، أو أن الدالتين تتقاطعان. لمعرفة ذلك يكفي أن نكتب

$$f(x) = g(x)$$
$$-x^2 + 1 = 2x + 4$$
$$x^2 + 2x + 3 = 0$$

(تابع)

معيار الدرس
12A.6.1

الهدف

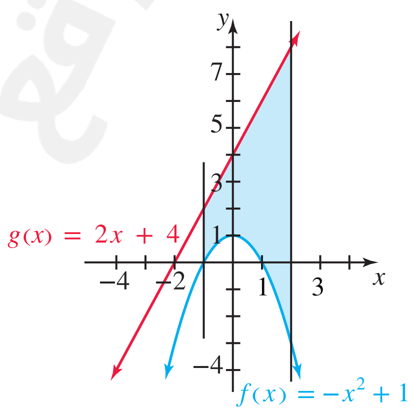
سيتعلم الطلاب كيفية استعمال التكامل المحدود لإيجاد المساحة بين منحنيين.

دليل الدرس

1. شرح كيفية استعمال التكامل المحدود لإيجاد المساحة بين منحنيين
2. شرح كيفية حساب المساحة بين منحنيين متقاطعين.

تحفيز

دع الطلاب يجدون المساحة بين المستقيمين المتوازيين $y = 2x + 1$ و $y = 2x + 3$ ما بين $x = 0$ و $x = 2$.



الشكل 5.3.2 المساحة المظللة بين منحنى الدالة $f(x) = -x^2 + 1$ ومنحنى الدالة $g(x) = 2x + 4$ من $x = -1$ إلى $x = 2$.

بحسب قواعد المعادلات التربيعية، هذه المعادلة لا حل لها، إذن لا يتقاطع المنحنيان وعلينا دراسة الشكل لمعرفة أي الدالتين أكبر من الأخرى في الفترة المطلوبة حتى نجد المساحة بينهما.

الخطوة 2 بما أن منحنى الدالة f قطع مكافئ مفتوح إلى الأسفل ولا يتقاطع مع الخط الذي يمثل الدالة g لأنه يقع تحته حتمًا، فإن $g(x) > f(x)$ في الفترة $[-1, 2]$،

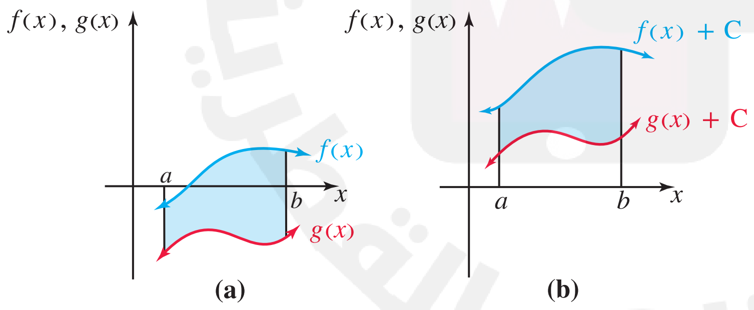
الخطوة 3 المساحة المطلوبة هي

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{2} [g(x) - f(x)]\, dx = \int_{-1}^{2} \left[(2x+4) - \left(-x^2+1\right)\right] dx \\
&= \int_{-1}^{2} \left[2x + 4 + x^2 - 1\right] dx \\
&= \int_{-1}^{2} x^2 + 2x + 3\, dx \\
&= \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right)\Big|_{-1}^{2} \\
&= \left(\frac{8}{3} + 4 + 6\right) - \left(-\frac{1}{3} + 1 - 3\right) \\
&= 15
\end{aligned}
$$

إذن، المساحة المطلوبة هي 15 وحدة مربعة.

حاول أن تحل التمرين 1

يمكن تطبيق القاعدة $\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$ لإيجاد المساحة بين f و g إذا كان $f(x) \geq g(x)$ في الفترة المعطاة حتى لو كان جزء من هذه المساحة يقع تحت المحور x. انظر إلى المساحة المبيّنة في الشكل 5.3.3a التي يقع جزء منها تحت المحور x.



الشكل 5.3.3

إذا أضفنا الثابت C إلى الدالتين بحيث يرتفع منحنياهما إلى الأعلى معًا لتصبح المساحة كلها فوق المحور x من دون أن يطرأ عليها أي تغيير كما في الشكل 5.3.3b، عندئذٍ تصبح المساحة

$$\int_a^b [f(x) + C - (g(x) + C)]\, dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

إذن، يمكن تطبيق هذه القاعدة حتى لو كان جزء من المساحة يقع تحت المحور x طالما أن $f(x) \geq g(x)$ في الفترة المعطاة.

ملاحظة

بما أن منحنيي الدالتين المتصلتين f و g لا يتقاطعان، يمكننا دائمًا معرفة الدالة الأكبر، وذلك باختيار أي قيمة في الفترة. على سبيل المثال: عند $x = 0$، $f(0) = 1$ و $g(0) = 4$. بما أن $g(0) > f(0)$ وكلًا من f و g دالة متصلة وهما لا تتقاطعان، إذن $g(x) > f(x)$ لكل قيم x.

سؤال للتفكر

س: ما الفرق بين حساب مساحة تقع بين منحنيين ومساحة يحدها منحنيان (أو تقع تحت منحنيين)؟

نموذج إجابة:

لاحظنا في الدرس السابق أن إيجاد المساحة تحت منحنيي الدالتين g و f حيث $f > 0$ و $g > 0$ يتطلب تقسيم الفترة $[a, b]$ إلى $[a, c]$ تحت منحنى f و $[c, b]$ تحت منحنى g، ونكتب المساحة على الشكل

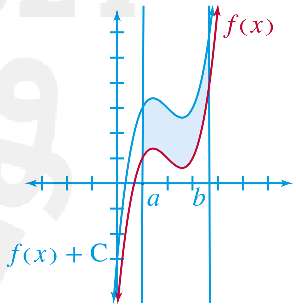
$$\int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b g(x)\, dx$$

أما عندما تكون المساحة التي نريد إيجادها بين منحنيي الدالتين g و f في الفترة $[a, b]$، أي يحدها من الأعلى منحنى f ومن الأسفل منحنى g، على سبيل المثال، فإننا نحسبها باستعمال التكامل المحدود

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

للطلاب سريعي الإنجاز

(مع المثال 1) قد يلاحظ بعض الطلاب من الشكل 5.3.3 ما يمكن استنتاجه إذا كانت $f(x) = g(x) + C$ (مبدأ كافاليري).



س: أوجد المساحة المظللة في الشكل أعلاه حيث $C > 0$

نموذج إجابة:

المساحة المظللة تساوي

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b [(f(x) + C) - f(x)]\, dx \\
&= \int_a^b C\, dx \\
&= Cx\Big|_a^b \\
&= C(b - a)
\end{aligned}
$$

س: ماذا تلاحظ؟

نموذج إجابة:

لقد استطعنا إيجاد المساحة من دون معرفة الدالة f.

المساحة بين منحنيين متقاطعين

قد تكون المساحة محددة بدالتين متقاطعتين، وفي هذه الحالة أيضًا يمكننا اعتماد الطريقة السابقة لإيجاد هذه المساحة.

مثال 2 المساحة بين منحنيين متقاطعين (1)

أوجد المساحة بين منحنى الدالة $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ و منحنى الدالة $g(x) = x^3$.

الحل

التمثيل البياني للدالتين مبيّن في الشكل 5.3.4.

الخطوة 1 لسنا بالضرورة مضطرين لإيجاد مساحة أن نمثلها بيانيًا، كل ما هو مطلوب أن نتأكد من أن $f(x) \geq g(x)$ أو $g(x) \geq f(x)$ في الفترة المطلوبة، أو أن الدالتين تتقاطعان. لمعرفة ذلك يمكن فقط أن نكتب $f(x) = g(x)$ ونحاول إيجاد نقاط الالتقاء بين المنحنيين:

$$x^3 = x^{\frac{1}{2}}$$
$$0 = x^3 - x^{\frac{1}{2}}$$
$$0 = x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{5}{2}} - 1\right)$$
$$x = 1 \text{ أو } x = 0$$

إذن، تقع المساحة المطلوبة بين $x = 0$ و $x = 1$.

الخطوة 2 يمكننا اختبار أي قيمة للمتغير x لمعرفة ما إذا كان $f(x) \geq g(x)$ أم $g(x) \geq f(x)$ في الفترة $[0, 1]$.

لنأخذ مثلًا

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7 \text{ و } g\left(\tfrac{1}{2}\right) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 = \tfrac{1}{8} = 0.125$$

إذن $f\left(\frac{1}{2}\right) > g\left(\frac{1}{2}\right)$،

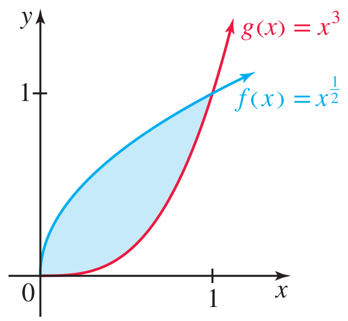
وبالتالي $f(x) \geq g(x)$ في الفترة $[0, 1]$ لأن تقعّر f إلى الأسفل أو تقعّر g إلى الأعلى في هذه الفترة (انظر الشكل 5.3.4).

الخطوة 3 المساحة المطلوبة هي

$$A = \int_0^1 [f(x) - g(x)]\,dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - x^3\right)dx$$
$$= \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1$$
$$= \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1$$
$$= \left(\frac{2}{3}(1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1^4}{4}\right) - \left(\frac{2}{3}\left(0^{\frac{3}{2}}\right) - \frac{0^4}{4}\right)$$
$$= \frac{5}{12}$$

إذن، المساحة المطلوبة تساوي $\frac{5}{12}$ وحدة مربعة.

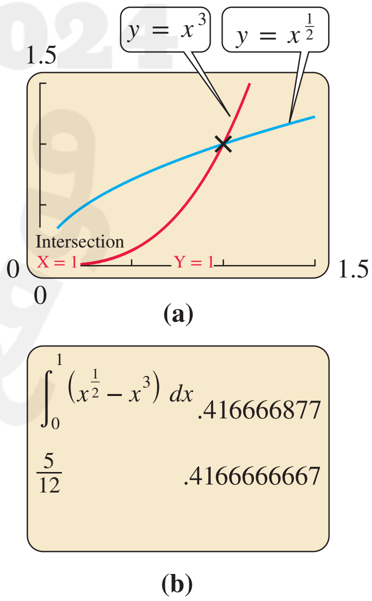
حاول أن تحل التمرين 2



الشكل 5.3.4 يقع التمثيل البياني للدالة f فوق التمثيل البياني للدالة g في الفترة $[0, 1]$

ملاحظة تقنية

يمكن الاستعانة بالحاسبة لإيجاد قيمة تقريبية للمساحة. فمن جهة يبيّن التمثيل البياني في الحاسبة القيم التقريبية لنقاط تقاطع الدوال، ومن جهة أخرى يبيّن الشكل 5.3.5 كيفية القيام بذلك في خطوتين، الأولى تحديد المساحة المطلوب إيجادها، والثانية إيجاد قيمة تقريبية لها، كما هو مبيّن أدناه.



الشكل 5.3.5

قد تتغير العلاقة بين دالتين f و g خلال فترة معينة $[a, b]$ فتكون $f(x) \geq g(x)$ في جزء من هذه الفترة وتكون $g(x) \geq f(x)$ في الجزء الآخر.

لإيجاد المساحة بين منحنيي دالتين في حالة كهذه، لا بدّ من تحديد نقاط تقاطع المنحنيين وتقسيم الفترة إلى أجزاء بحيث تكون العلاقة بين الدالتين في بعضها $f(x) \geq g(x)$ وفي بعضها الآخر $g(x) \geq f(x)$.

مثال 3 إيجاد المساحة بين منحنيين متقاطعين (2)

أوجد المساحة بين منحنى الدالة $y = x^2 - 2x$ ومنحنى الدالة $y = x$ في الفترة $[0, 4]$.

الحل

لتكن $f(x) = x^2 - 2x$ و $g(x) = x$.

التمثيل البياني لكل من الدالتين في الفترة المحددة. مبيّن في الشكل 5.3.6

الخطوة 1 اكتب أولًا المعادلة التي تبيّن نقطة التقاء الدالتين إن وجدت.

$$x^2 - 2x = x$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x - 3) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{أو} \quad x = 3$$

إذن تتقاطع الدالتان عند $x = 0$ و $x = 3$ وتقع المساحة المطلوبة بين $x = 4$ و $x = 0$.
إذن تنقسم المساحة إلى جزئين، الأول من 0 إلى 3، والثاني من 3 إلى 4

الخطوة 2 يمكنك تعويض أية قيمة للمتغير x لمعرفة ما إذا كان $f(x) \geq g(x)$ أو $g(x) \geq f(x)$ في الفترة $[0, 3]$. مثلاً نعوّض $x = 1$، $f(1) = -1$ و $g(1) = 1$.
إذن $f(1) < g(1)$ وبالتالي $f(x) \leq g(x)$ في الفترة $[0, 3]$، والقطع المكافىء $y = x^2 - 2x$ يقع تحت الخط $y = x$ بين $x = 0$ و $x = 3$.

أما في الفترة $[3, 4]$، نعوض $x = \frac{7}{2}$:

$$f\left(\frac{7}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{7}{2}\right) = 5.25 \quad \text{و} \quad g\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{7}{2} = 3.5$$

إذن $f\left(\frac{7}{2}\right) > g\left(\frac{7}{2}\right)$ وبالتالي $f(x) \geq g(x)$ في الفترة $[3, 4]$، والقطع المكافىء $y = x^2 - 2x$ يقع فوق المستقيم $y = x$ بين $x = 3$ و $x = 4$.

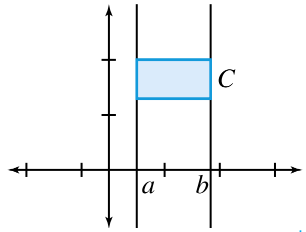
الخطوة 3 المساحة هي

$$A = \int_0^3 \left[x - (x^2 - 2x)\right] dx + \int_3^4 (x^2 - 2x - x)\, dx$$

$$= \int_0^3 (-x^2 + 3x)\, dx + \int_3^4 (x^2 - 3x)\, dx$$

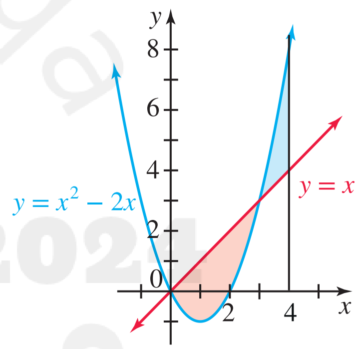
(تابع)

س: هل يمكننا استنتاج أن مساحة المستطيل المبين في الشكل أدناه تساوي المساحة التي وجدناها في السؤال السابق أيًا تكن الدالة f حيث الثابت C هو نفسه؟



نموذج إجابة:
نعم، لأن حساب المساحة في الحالتين يفضي إلى التكامل المحدود $\int_a^b C\, dx$، أي أن المساحة بين منحنى أي دالة ومنحنى إزاحتها مقدار C وحدة رأسيًا على فترة $[a, b]$ تساوي مساحة مستطيل بأبعاد C و $b - a$.

س: ما القاعدة العامة التي يمكن استنتاجها من ذلك؟
نموذج إجابة:
إذا كانت لدينا مساحتان على نفس فترة $[a, b]$، وكان أي مستقيم رأسي يقطع المساحتين يكوّن قطعتين مستقيمتين متساويتين، فإن هاتين المساحتين متساويتان.



الشكل 5.3.6 يتقاطع المنحنيان عند $x = 3$ حيث تنقسم المساحة إلى قسمين وتشكل حدود الفترة عند $x = 0$ و $x = 4$ حدود المساحة الكلية.

سؤال للتفكر

س: (مع المثال 2) لماذا يكفي اختبار قيمة واحدة تقع بين العددين 0 و 1؟
نموذج إجابة:
لنفترض أننا اختبرنا القيمة $x = a$ حيث $0 < a < 1$، ووجدنا أن $f(a) > g(a)$. يمكننا أن نستنتج من ذلك أن $f(x) > g(x)$ لكل $0 < x < 1$، لأنه لو وجد $0 < b < 1$ بحيث يكون $f(b) < g(b)$ (يمكننا أن نفترض أن $a < b$)، فهذا يعني أن لدينا $0 < a < b < 1$ بحيث يكون $f(a) - g(a) > 0$ و $f(b) - g(b) < 0$
إذن يوجد $a < c < b$ بحيث يكون $f(c) - g(c) = 0$
أي أن $f(c) = g(c)$
لكننا أثبتنا أن المساواة $f(x) = g(x)$ لا تتحقق إلا عند $x = 0$ و $x = 1$.

$$= \left(\frac{-x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right)\Big|_0^3 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right)\Big|_3^4$$

$$= \left(-9 + \frac{27}{2} - 0\right) + \left(\frac{64}{3} - 24 - 9 + \frac{27}{2}\right)$$

$$= \frac{19}{3} \approx 6.33$$

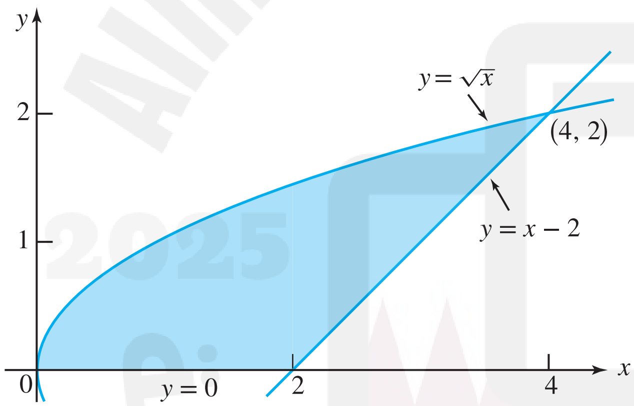
إذن المساحة هي 6.33 وحدة مربعة تقريبًا.

حاول أن تحل التمرين 3

بعض المساحات تكون مركبة من مساحة بين منحنيين ومساحة تحت أحد هذين المنحنيين. يمكن إيجاد هذه المساحة بإيجاد كل مساحة على حدة بعد تجزئة المساحة المركبة وتحديد الفترة التي تكون فيها المساحة بين أحد المنحنيين والمحور x والفترة التي تكون فيها المساحة بين المنحنيين.

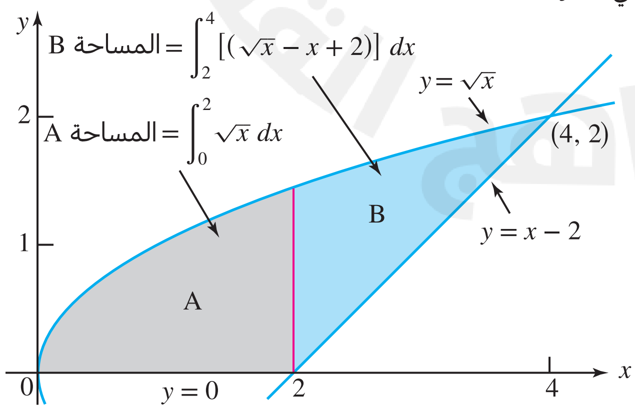
مثال 4 إيجاد مساحة مركبة

أوجد المساحة بين منحنى الدالة $y = \sqrt{x}$ والمستقيم $y = x - 2$ والمحور x المبيّنة في الشكل التالي.



الحل

يبيّن الشكل أدناه المساحة المطلوب إيجادها، وهي تتكون من المساحة A بين المنحنى $y = \sqrt{x}$ والمحور x في الفترة $[0, 2]$ والمساحة B بين منحنيي الدالتين $y = \sqrt{x}$ و $y = x - 2$ في الفترة $[2, 4]$.



(تابع)

أسئلة للتفكر

س: (مع المثال 3) هل كان يمكننا تجربة $x = 4$ بدلًا من $x = \frac{7}{2}$؟ هل كان يمكننا تجربة $x = 3$؟

نموذج إجابة:

نعم يمكننا تجربة $x = 4$، فبما أن $f(4) \neq g(4)$، فيمكن لهذه القيمة أن تعطي نفس الدلالة

$f(4) = 16 - 8 = 8$

$g(4) = 4$

لا يمكننا تجربة $x = 3$، لأن $f(3) = g(3)$.

$f(4) \geq g(4)$، إذن $f(x) \geq g(x)$ لكل قيم x في الفترة $[3, 4]$.

س: ما القاعدة التي يمكن استنتاجها؟

نموذج إجابة:

يمكننا تجربة أي قيمة c في الفترة $[a, b]$ بما في ذلك قيمة a أو b شرط أن يكون $f(c) \neq g(c)$

سؤال للتفكر

س: لخِص الخطوات التي يجب اتباعها لإيجاد المساحات المركبة.

نموذج إجابة:

1. نقسم أولًا الفترة إلى عدة فترات بحسب كل حالة على أن تكون المساحة في كل فترة جزئية واقعة تحت منحنى واحد أو بين منحنيين.
2. ثم نحسب المساحة في كل فترة وفق القواعد التي تعلمناها.
3. وأخيرًا نجمع هذه المساحات لنحصل على الإجابة.

سؤال للتفكر

س: (مع المثال 5) أوجد قيمة b بحيث تساوي المساحة المبينة في الشكل نصف المساحة تحت المنحنى $y = \sqrt{x}$ في الفترة $[0, 4]$.

نموذج إجابة:

$\text{A} = \int_a^b \sqrt{x}\, dx -$ مساحة المثلث الذي وتره المقطع الأحمر

$= \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^4 - \frac{1}{2}(2)(4 - b)$

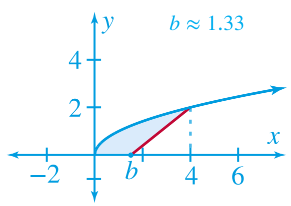
$= \frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}} - (4 - b)$

$= 5.33 - (4 - b)$

نصف المساحة تحت المنحنى $y = \sqrt{x}$ في الفترة $[0, 4]$ تساوي $5.33 \times \frac{1}{2}$ أي 2.66، إذن

$5.33 - (4 - b) = 2.66$

$b \approx 1.33$



$$\text{المساحة} = \text{المساحة } A + \text{المساحة } B$$

$$= \int_0^2 \sqrt{x}\, dx + \int_2^4 [(\sqrt{x} - x + 2)]\, dx$$

$$= \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^2 + \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_2^4$$

$$= \frac{2}{3}(2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(0)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}} - \frac{(4)^2}{2} + 2(4) - \frac{2}{3}(2)^{\frac{3}{2}} + \frac{(2)^2}{2} - 2(2)$$

$$= \frac{10}{3} \approx 3.33$$

إذن، المساحة المطلوب إيجادها هي 3.33 وحدة مربعة تقريبًا.

حاول أن تحل التمرين 31

يمكننا إيجاد المساحة المطلوبة في المثال السابق باستعمال قواعد الهندسة، وهو ما سنبيّنه في المثال التالي.

مثال 5 استعمال قواعد الهندسة

أوجد المساحة المطلوبة في المثال السابق باستعمال قواعد الهندسة.

الحل

يبيّن الشكل 5.3.7 أن المساحة المطلوبة تساوي ناتج طرح مساحة المثلث القائم الزاوية من المساحة بين المنحنى $y = \sqrt{x}$ والمحور x في الفترة $[0, 4]$.

$$\text{المساحة} = \int_0^4 \sqrt{x}\, dx - \frac{1}{2}(2)(2)$$

$$= \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^4 - 2$$

$$= \frac{10}{3} \approx 3.33$$

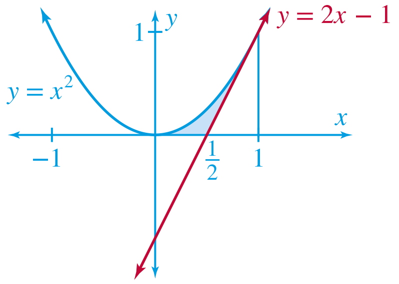
إذن، المساحة هي 3.33 وحدة مربعة تقريبًا، وهي ذات المساحة في المثال السابق مما يعني أننا نستطيع إيجاد المساحة بين منحنيين من خلال استعمال كل ما نعرفه من القواعد والمفاهيم الرياضية في عملية تقسيم المساحة وإيجاد أجزائها.

حاول أن تحل التمرين 33

للطلاب الذين يواجهون صعوبات

(مع المثال 5) قد يجد بعض الطلاب صعوبة في إيجاد المساحات المركبة. دعهم يتدربون على ذلك أكثر.

س: أوجد المساحة المظللة في الشكل أدناه.

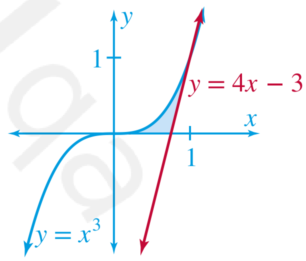


نموذج إجابة:

المساحة هي

$$\int_0^1 x^2\, dx - \left(\frac{1}{2}\right)(1)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

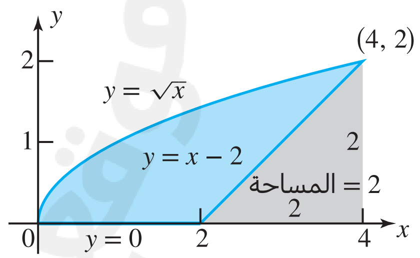
س: أوجد المساحة المظللة في الشكل أدناه.



نموذج إجابة:

المساحة هي

$$\int_0^1 x^3\, dx - \left(\frac{1}{2}\right)(1)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$



الشكل 5.3.7 مساحة المنطقة الزرقاء هي المساحة تحت المنحنى $y = \sqrt{x}$ مطروحًا منها مساحة المثلث.

ملاحظات على التمارين

التمارين 1-23، تدرب الطالب على استعمال التكامل المحدود في إيجاد المساحات بين منحنيي دالتين.

التمارين 24-34، تدرب الطالب على إيجاد المساحات المظللة بين منحنيي دالتين.

التمارين 37-40، تدرب الطالب على أنماط من الاختبارات.

التقييم المستمر

التقييم الذاتي:

التمارين 4, 18, 22, 24, 29, 34, 35

مراجعة سريعة 5.3

في التمارين 1-5، أوجد المساحة بين المحور x ومنحنى الدالة المعطاة في الفترة المحددة.

.1 $y = \sin x$ في الفترة $[0, \pi]$.

.2 $y = e^{2x}$ في الفترة $[0, 1]$.

.3 $y = \sec^2 x$ في الفترة $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

.4 $y = 4x - x^3$ في الفترة $[0, 2]$.

.5 $y = \sqrt{9 - x^2}$ في الفترة $[-3, 3]$.

في التمارين 6-10، باستعمال الحاسبة البيانية أوجد إحداثيات نقاط تقاطع المنحنيين. إذا كان المنحنيان لا يتقاطعان، اكتب "لا يتقاطعان".

6. $y = x^2 - 4x$, $y = x + 6$ $(-1, 5); (6, 12)$

7. $y = e^x$, $y = x + 1$ $(0, 1)$

8. $y = x^2 - \pi x$, $y = \sin x$ $(0, 0); (\pi, 0)$

9. $y = \frac{2x}{x^2+1}$, $y = x^3$ $(-1, -1); (0, 0); (1, 1)$

10. $y = \sin x$, $y = x^3$ $(-0.93, -0.8); (0, 0); (0.93, 0.8)$

الدرس 5.3 التمارين

.1 أوجد المساحة بين منحنى الدالة $f(x) = 4 + x^2$ ومنحنى الدالة $g(x) = x + 2$ من $x = -2$ إلى $x = 1$.

.2 أوجد المساحة بين منحنى الدالة $f(x) = x^{\frac{1}{4}}$ ومنحنى الدالة $g(x) = x^2$.

.3 أوجد المساحة بين منحنى الدالة $y = x^2 - 3x$ ومنحنى الدالة $y = 2x$ في الفترة $[0, 6]$.

في التمارين 4-23، أوجد المساحة بين منحنيي الدالتين والمستقيمات.

4. $y = x^2 - 3$, $y = 2x$, $x = -2$, $x = 1$

5. $y = 3x + 10$, $y = 5x$, $x = 0$, $x = 6$

6. $y = x^2 - 30$, $y = 10 - 3x$

7. $y = x^2 - 18$, $y = x - 6$

8. $y = x^2$, $y = 2x$

9. $y = x^2$, $y = x^3$

10. $y = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$, $x = 6$

11. $y = \frac{x-1}{2}$, $y = \frac{1}{x+1}$, $x = 0$, $x = 4$

12. $y = 3 - e^x$, $y = e^x$, $x = -1$, $x = 1$

13. $y = e^{-x}$, $y = e^x$, $x = -1$, $x = 2$

14. $y = 3e^{2x}$, $y = 2e^{2x} + 1$, $x = -1$, $x = 2$

15. $y = \frac{x-1}{4}$, $y = \frac{1}{x-1}$, $x = 2$, $x = 4$

16. $y = 2x^2 - x + 1$, $y = x^3 - x^2 + x + 1$

17. $y = 2x^3 + x^2 + x + 5$, $y = x^3 + x^2 + 2x + 5$

18. $y = x^4 + ln\,(x + 10)$, $y = x^3 + ln\,(x + 10)$

19. $y = x^3 - 2\,ln\,(x + 5)$ و $y = x^5 - 2\,ln\,(x + 5)$

20. $y = 2x^{\frac{1}{3}}$, $y = x^{\frac{4}{3}}$

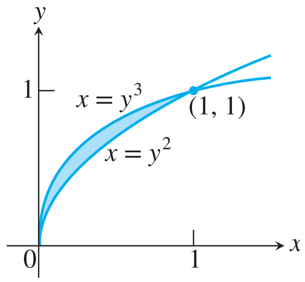
21. $y = x\sqrt{x}$, $y = \sqrt{x}$

22. $y = 2e^{3x}$, $y = e^{3x} + e^6$, $x = 0$, $x = 3$

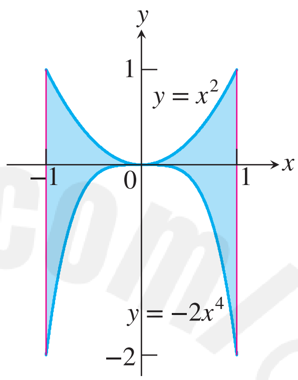
23. $y = e^x$, $y = e^{4-x}$, $x = 0$, $x = 3$

في التمارين 24-32، أوجد مساحة المنطقة المظللة.

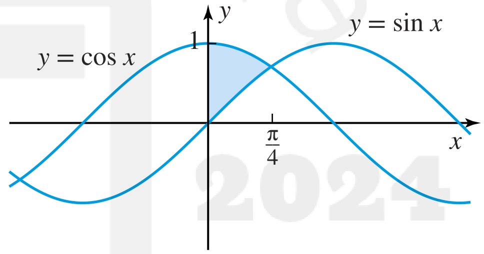
24.



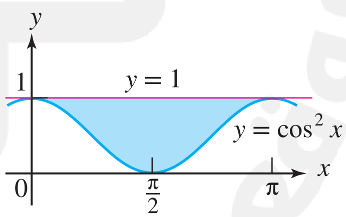
25.



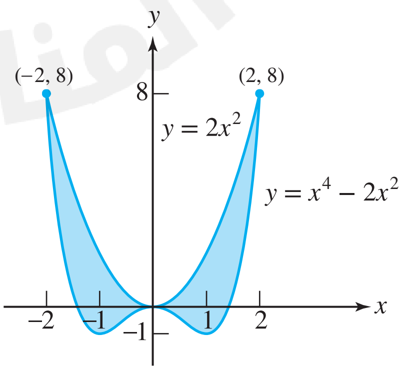
26.



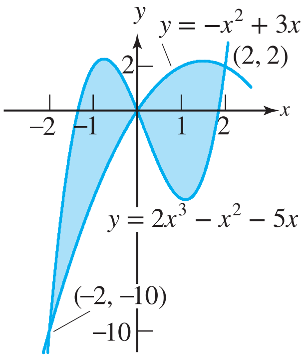
27.



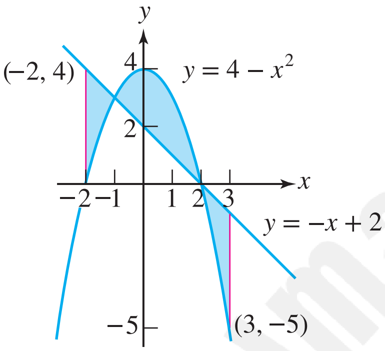
28.



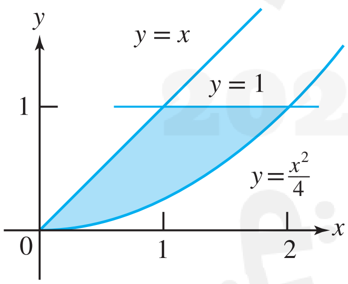
29.



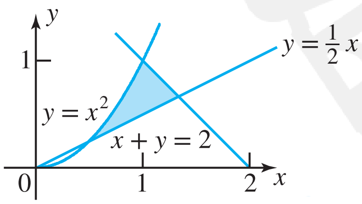
30.



31.

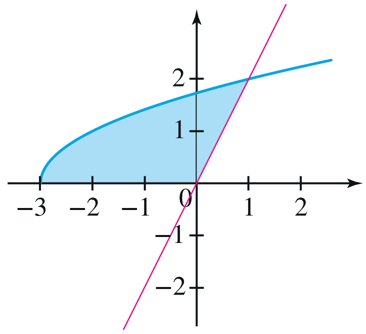


32.

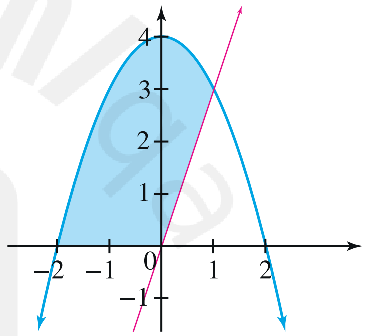


في التمرينين 33 و 34، أوجد المساحة من خلال طرح مساحة مثلث من مساحة أكبر.

33. المساحة فوق المحور x والمحددة بمنحنى الدالة $y = \sqrt{x+3}$ والمستقيم $y = 2x$.



34. المساحة فوق المحور x والمحددة بمنحنى الدالة $y = 4 - x^2$ والمستقيم $y = 3x$.

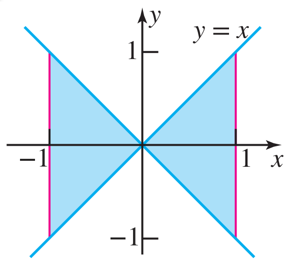


35. أوجد المساحة في الربع الأول والمحددة بالمحور y من اليسار وبالمستقيم $y = \frac{x}{4}$ وبمنحنى الدالة $y = 1 + \sqrt{x}$ من الجهة العلوية اليسرى وبمنحنى الدالة $y = \frac{2}{\sqrt{x}}$ من الجهة العلوية اليمنى.

36. أي من التكاملين التاليين يمكن استعماله لحساب المساحة المظللة المبيّنة أدناه؟ برّر إجابتك.

a. $\int_{-1}^{1} (x - (-x))\, dx = \int_{-1}^{1} 2x\, dx$

b. $\int_{-1}^{1} (-x - (x))\, dx = \int_{-1}^{1} -2x\, dx$



أسئلة اختبار معيارية

37. **صواب أم خطأ** مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $y = x^2 + 1$ والمستقيم $y = 10$ تساوي 36 وحدة مربعة. برّر إجابتك.

38. **صواب أم خطأ** يمكن حساب مساحة المنطقة الواقعة في الربع الأول والمحددة بالمحور y والمستقيم $y = \frac{1}{2}$ ومنحنى الدالة $y = \cos x$ باستعمال التكامل المحدود $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{2} - \cos x\right) dx$. برّر إجابتك.

39. **اختيار من متعدد** لتكن R المنطقة المحددة بالمنحنى $y = -x^3 + 8$ والمنحنى $y = 7x$ والمحور y. أي الخيارات التالية يعطي مساحة R؟ C

A. $\int_{0}^{1} \left(-x^3 + 8 - 7x\right) dx + \int_{1}^{2} \left(-x^3 + 8 - 7x\right) dx$

B. $\left|\int_{-2}^{1} \left(-x^3 + 8 - 7x\right) dx\right| + \int_{1}^{2} \left(-x^3 + 8 - 7x\right) dx$

C. $\int_{0}^{1} \left(-x^3 + 8 - 7x\right) dx$

D. $\int_{0}^{2} \left(-\frac{x^4}{4} + 8x - 7x\right) dx$

E. $\int_{0}^{1} \left(-x^3 + 8 + 7x\right) dx$

40. **اختيار من متعدد** أي الخيارات التالية يعطي قيمة مساحة المنطقة بين منحنى الدالة $y = x^2$ والمستقيم $y = -x$ بين $x = 0$ و $x = 3$؟ E

A. 2

B. $\frac{9}{2}$

C. $\frac{13}{2}$

D. 13

E. $\frac{27}{2}$

استكشاف

41. قُسمت مساحة المنطقة المحددة بمنحنى القطع المكافئ $y = x^2$ من الأسفل وبالمستقيم $y = 4$ من الأعلى إلى مساحتين متساويتين بواسطة المستقيم الأفقي $y = c$.

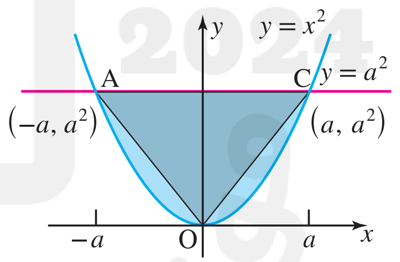
a. ارسم هذه المنطقة والمستقيم $y = c$ الذي يقسمها إلى نصفين متساويين بحيث يبدو الرسم معقولًا. أوجد إحداثيات نقاط تقاطع منحنى القطع المكافئ والمستقيم بدلالة c، ثم عيّن هذه النقاط على الرسم.

b. أوجد قيمة c من خلال التكامل بالنسبة للمتغير y. (يضع هذا الأمر c في حدود التكامل)

c. أوجد قيمة c من خلال التكامل بالنسبة للمتغير x. (يضع هذا الأمر c في حدود التكامل)

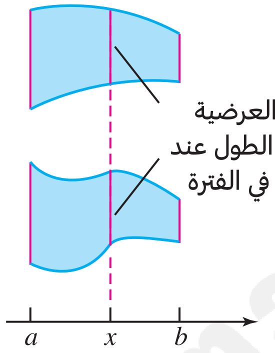
42. أوجد المساحة الواقعة بين منحنى الدالة $y = \sec^2 x$ ومنحنى الدالة $y = \tan^2 x$ من $x = -\frac{\pi}{4}$ إلى $x = \frac{\pi}{4}$.

43. يبيّن الشكل أدناه المثلث AOC المحاط بالجزء المحدد بالمستقيم $y = a^2$ من القطع المكافئ $y = x^2$. أوجد نهاية نسبة مساحة المثلث إلى مساحة المنطقة المجتزأة من القطع المكافئ عندما تقترب قيمة a من الصفر.



توسيع الأفكار

44. **نظرية «كافاليري»** اكتشف عالم الرياضيات الإيطالي بونافينتورا كافاليري (1598-1647) أنه إذا كان شكلان يقعان بين مستقيمين متوازيين في المستوى الإحداثي، وكان كل خط موازٍ لهذين المستقيمين، ضمن نفس الفترة بالنسبة للإحداثي x، يقطع الشكلين إلى مقاطع عرضية متساوية الطول (انظر الشكل أدناه)، فإن لهذين الشكلين نفس المساحة. أثبت صحة هذه النظرية.



45. أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ والمستقيم $y = mx$، حيث $0 < m < 1$

إجابات أسئلة المراجعة السريعة 5.3

1. $A = \int_0^{\pi} \sin x\, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = -(-1) + 1 = 2$

إذن، المساحة تساوي وحدتين مربعتين.

2. $A = \int_0^1 e^{2x}\, dx = \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{e^2 - 1}{2} \approx 3.19$

إذن المساحة تساوي 3.19 وحدة مربعة تقريبًا.

3. $A = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 dx = \tan x \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \tan \frac{\pi}{4} - \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1 - (-1) = 2$

إذن المساحة تساوي وحدتين مربعتين.

4. $A = \int_0^2 (4x - x^3)\, dx = \left(2x^2 - \frac{x^4}{4}\right) \Big|_0^2 = 8 - 4 - 0 = 4$

إذن المساحة تساوي 4 وحدات مربعة.

5. منحنى الدالة $y = \sqrt{9 - x^2}$ هو نصف دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها 3

$A = \frac{1}{2}\pi(3)^2 = \frac{9}{2}\pi \approx 14.14$

إذن المساحة تساوي 14.14 وحدة مربعة تقريبًا.

إجابات أسئلة التمارين 5.3

1. للتحقق مما إذا كان المنحنيان يتقاطعان، نكتب $f(x) = g(x)$

$4 + x^2 = x + 2$

$x^2 - x + 2 = 0$

هذه المعادلة لا حل لها، إذن المنحنيان لا يتقاطعان. وبما أن $f(0) = 4$ و $g(0) = 2$ فإن $f(0) > g(0)$ وبالتالي $f(x) > g(x)$ في الفترة $[-2, 1]$.

$A = \int_{-2}^{1} [f(x) - g(x)]\, dx = \int_{-2}^{1} (4 + x^2 - x - 2)\, dx = \int_{-2}^{1} (x^2 - x + 2)\, dx$

$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_{-2}^{1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \left(-\frac{8}{3} - 2 - 4\right) = \frac{21}{2} = 10.5$

إذن المساحة تساوي 10.5 وحدة مربعة.

2. للتحقق مما إذا كان المنحنيان يتقاطعان، نكتب $f(x) = g(x)$

$x^{\frac{1}{4}} = x^2$

$x^{\frac{1}{4}}\left(1 - x^{\frac{7}{4}}\right) = 0$

$x = 0$ أو $x = 1$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \approx 0.84$ أو $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0.5^2 \approx 0.25$

إذن $f\left(\frac{1}{2}\right) > g\left(\frac{1}{2}\right)$

وبالتالي $f(x) \geq g(x)$ في الفترة $[0, 1]$

$A = \int_0^1 [f(x) - g(x)]\, dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{4}} - x^2\right) dx$

$= \left(\frac{4}{5} x^{\frac{5}{4}} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{3} - 0 = \frac{7}{15} \approx 0.47$

إذن المساحة تساوي 0.47 وحدة مربعة تقريبًا.

3. لنسمّ الدالتين كما يلي: $f(x) = x^2 - 3x,\ g(x) = 2x$

للتحقق مما إذا كان المنحنيان يتقاطعان، نكتب $f(x) = g(x)$

$x^2 - 3x = 2x$

$x^2 - 5x = 0$

$x(x - 5) = 0$

$x = 0$ أو $x = 5$

إذن تنقسم المساحة إلى جزأين، الجزء الأول من 0 إلى 5، والثاني من 5 إلى 6

$g(1) = 2$ و $f(1) = -2$

إذن $f(1) < g(1)$

وبالتالي $f(x) \leq g(x)$ في الفترة $[0, 5]$، والقطع المكافئ $y = x^2 - 3x$

يقع تحت المستقيم $y = 2x$ بين $x = 0$ و $x = 5$.

$g(5.5) = 11$ و $f(5.5) = 13.75$

إذن $f(5.5) > g(5.5)$

وبالتالي $f(x) \geq g(x)$ في الفترة $[5, 6]$، والقطع المكافئ $y = x^2 - 3x$

يقع فوق المستقيم $y = 2x$ بين $x = 5$ و $x = 6$

$A = \int_0^5 [g(x) - f(x)]\, dx + \int_5^6 [f(x) - g(x)]\, dx$

$= \int_0^5 (2x - x^2 + 3x)\, dx + \int_5^6 (x^2 - 3x - 2x)\, dx$

$= \int_0^5 (5x - x^2)\, dx + \int_5^6 (x^2 - 5x)\, dx$

$= \left(\frac{5}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^5 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2\right)\Big|_5^6$

$= \left(\frac{125}{2} - \frac{125}{3} - 0\right) + \left(72 - 90 - \frac{125}{3} + \frac{125}{2}\right)$

$= \frac{125}{6} + \frac{17}{6}$

$= \frac{71}{3}$

≈ 23.67

إذن المساحة تساوي 23.67 وحدة مربعة تقريبًا.

4. $$A = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 3 - 2x)\, dx + \int_{-1}^{1} (2x - x^2 + 3)\, dx$$
$$= \left(\frac{x^3}{3} - 3x - x^2\right)\Big|_{-2}^{-1} + \left(x^2 - \frac{x^3}{3} + 3x\right)\Big|_{-1}^{1}$$
$$= -\frac{1}{3} + 3 - 1 + \frac{8}{3} - 6 + 4 + 1 - \frac{1}{3} + 3 - 1 - \frac{1}{3} + 3 = \frac{23}{3} \approx 7.67$$
إذن المساحة تساوي 7.67 وحدة مربعة تقريبًا.

5. $$A = \int_{0}^{5} (3x + 10 - 5x)\, dx + \int_{5}^{6} (5x - 3x - 10)\, dx$$
$$= \int_{0}^{5} (-2x + 10)\, dx + \int_{5}^{6} (2x - 10)\, dx$$
$$= (-x^2 + 10x)\Big|_{0}^{5} + (x^2 - 10x)\Big|_{5}^{6}$$
$$= -25 + 50 - 0 + 36 - 60 - 25 + 50 = 26$$
إذن المساحة تساوي 26 وحدة مربعة.

6. $$A = \int_{-8}^{5} (10 - 3x - x^2 + 30)\, dx = \int_{-8}^{5} (-x^2 - 3x + 40)\, dx$$
$$= \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 40x\right)\Big|_{-8}^{5} = \frac{2\,197}{6} \approx 366.17$$
إذن المساحة تساوي 366.17 وحدة مربعة تقريبًا.

7. $$A = \int_{-3}^{4} (x - 6 - x^2 + 18)\, dx = \int_{-3}^{4} (-x^2 + x + 12)\, dx$$
$$= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 12x\right)\Big|_{-3}^{4} = \frac{343}{6} \approx 57.17$$
إذن المساحة تساوي 57.17 وحدة مربعة تقريبًا.

8. $$A = \int_{0}^{2} (2x - x^2)\, dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{2} = 4 - \frac{8}{3} - 0 = \frac{4}{3} \approx 1.33$$
إذن المساحة تساوي 1.33 وحدة مربعة تقريبًا.

9. $$A = \int_{0}^{1} (x^2 - x^3)\, dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - (0 - 0) = \frac{1}{12} \approx 0.08$$
إذن المساحة تساوي 0.88 وحدة مربعة تقريبًا.

10. $$A = \int_{1}^{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) dx + \int_{2}^{6} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right) dx = \left(\ln|x| - \frac{x}{2}\right)\Big|_{1}^{2} + \left(\frac{x}{2} - \ln|x|\right)\Big|_{2}^{6}$$
$$= \ln 2 - 1 - \ln 1 + \frac{1}{2} + 3 - \ln 6 - 1 + \ln 2 = 2\ln 2 - \ln 6 + \frac{3}{2}$$
$$\approx 1.09$$
إذن المساحة تساوي 1.09 وحدة مربعة تقريبًا.

11. $$A = \int_{0}^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-1}{2}\right) dx + \int_{\sqrt{3}}^{4} \left(\frac{x-1}{2} - \frac{1}{x+1}\right) dx$$
$$= \left(\ln|x+1| - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}\right)\Big|_{0}^{\sqrt{3}} + \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} - \ln|x+1|\right)\Big|_{\sqrt{3}}^{4}$$
$$= \ln(\sqrt{3} + 1) - \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 0 + 4 - 2 - \ln(5) - \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$+ \ln(\sqrt{3} + 1) = \ln\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{5} + \frac{1}{2} + \sqrt{3} \approx 2.63$$
إذن المساحة تساوي 2.63 وحدة مربعة تقريبًا.

12. $$A = \int_{-1}^{\ln\frac{3}{2}} (3 - e^x - e^x)\, dx + \int_{\ln\frac{3}{2}}^{1} (e^x + e^x - 3)\, dx$$
$$= (3x - 2e^x)\Big|_{-1}^{\ln\frac{3}{2}} + (2e^x - 3x)\Big|_{\ln\frac{3}{2}}^{1}$$
$$= 3\ln\frac{3}{2} - 2 \times \frac{3}{2} + 3 + 2e^{-1} + 2e - 3 - 2 \times \frac{3}{2} + 3\ln\frac{3}{2}$$
$$= 6\ln\frac{3}{2} + 2(e^{-1} + e) - 6 \approx 2.61$$
إذن المساحة تساوي 2.61 وحدة مربعة تقريبًا.

13. $$A = \int_{-1}^{0} (e^{-x} - e^x)\, dx + \int_{0}^{2} (e^x - e^{-x})\, dx = (-e^{-x} - e^x)\Big|_{-1}^{0} + (e^x + e^{-x})\Big|_{0}^{2}$$
$$= -1 - 1 + e^1 + e^{-1} + e^2 + e^{-2} - 1 - 1 \approx 6.61$$
إذن المساحة تساوي 6.61 وحدة مربعة تقريبًا.

14. $$A = \int_{-1}^{0} (2e^{2x} - 3e^{2x} + 1)\, dx + \int_{0}^{2} (3e^{2x} - 2e^{2x} - 1)\, dx$$
$$= \int_{-1}^{0} (-e^{2x} + 1)\, dx + \int_{0}^{2} (e^{2x} - 1)\, dx$$
$$= \left(-\frac{1}{2}e^{2x} + x\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{1}{2}e^{2x} - x\right)\Big|_{0}^{2}$$
$$= -\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}e^{-2} + 1 + \frac{1}{2}e^4 - 2 - \frac{1}{2} + 0 \approx 25.37$$
إذن المساحة تساوي 25.37 وحدة مربعة تقريبًا.

15. $$A = \int_{2}^{3} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x-1}{4}\right) dx + \int_{3}^{4} \left(\frac{x-1}{4} - \frac{1}{x-1}\right) dx$$
$$= \left(\ln|x-1| - \frac{x^2}{8} + \frac{1}{4}x\right)\Big|_{2}^{3} + \left(\frac{x^2}{8} - \frac{1}{4}x - \ln|x-1|\right)\Big|_{3}^{4}$$
$$= \ln 2 - \frac{9}{8} + \frac{3}{4} - \ln 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 2 - 1 - \ln 3 - \frac{9}{8} + \frac{3}{4} + \ln 2 \approx 0.54$$
إذن المساحة تساوي 0.54 وحدة مربعة.

16. $$A = \int_{0}^{1} (x^3 - x^2 + x + 1 - 2x^2 + x - 1)\, dx$$
$$+ \int_{1}^{2} (2x^2 - x + 1 - x^3 + x^2 - x - 1)\, dx$$
$$= \int_{0}^{1} (x^3 - 3x^2 + 2x)\, dx + \int_{1}^{2} (-x^3 + 3x^2 - 2x)\, dx$$
$$= \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right)\Big|_{0}^{1} + \left(-\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2\right)\Big|_{1}^{2} = \frac{1}{2} = 0.5$$
إذن المساحة تساوي 0.5 وحدة مربعة.

17. $$A = \int_{-1}^{0} (2x^3 + x^2 + x + 5 - x^3 - x^2 - 2x - 5)\, dx$$
$$+ \int_{0}^{1} (x^3 + x^2 + 2x + 5 - 2x^3 - x^2 - x - 5)\, dx$$
$$= \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\, dx + \int_{0}^{1} (-x^3 + x)\, dx$$
$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(-\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{1}$$
$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - (0 - 0) - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - (0 - 0) = 0.5$$
إذن المساحة تساوي 0.5 وحدة مربعة.

18. $A = \int_0^1 [x^3 + \ln(x+10) - x^4 - \ln(x+10)]\, dx$

$= \int_0^1 [x^3 - x^4]\, dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - 0 + 0 = \frac{1}{20} = 0.05$

إذن المساحة تساوي 0.05 وحدة مربعة.

19. $A = \int_{-1}^0 [x^5 - 2\ln(x+5) - x^3 + 2\ln(x+5)]\, dx$

$+ \int_0^1 [x^3 - 2\ln(x+5) - x^5 + 2\ln(x+5)]\, dx$

$= \int_{-1}^0 [x^5 - x^3]\, dx + \int_0^1 [x^3 - x^5]\, dx$

$= \left(\frac{x^6}{6} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{-1}^0 + \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6}\right)\Big|_0^1 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \approx 0.17$

إذن المساحة تساوي 0.17 وحدة مربعة تقريبًا.

20. $A = \int_0^2 \left(2x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{4}{3}}\right) dx = \left(\frac{3}{2}x^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}\right)\Big|_0^2$

$= 3\sqrt[3]{2} - \frac{12 \times \sqrt[3]{2}}{7} - 0 = \frac{9\sqrt[3]{2}}{7} \approx 1.62$

إذن المساحة تساوي 1.62 وحدة مربعة تقريبًا.

21. $A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x\sqrt{x})\, dx = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_0^1 = \frac{4}{15} \approx 0.27$

إذن المساحة تساوي 0.27 وحدة مربعة تقريبًا.

22. $A = \int_0^2 \left(e^{3x} + e^6 - 2e^{3x}\right) dx + \int_2^3 \left(2e^{3x} - e^{3x} - e^6\right) dx$

$= \int_0^2 \left(-e^{3x} + e^6\right) dx + \int_2^3 \left(e^{3x} - e^6\right) dx$

$= \left(-\frac{1}{3}e^{3x} + e^6 x\right)\Big|_0^2 + \left(\frac{1}{3}e^{3x} - e^6 x\right)\Big|_2^3$

$= -\frac{1}{3}e^6 + 2e^6 + \frac{1}{3} - 0 + \frac{1}{3}e^9 - 3e^6 - \frac{1}{3}e^6 + 2e^6$

$= \frac{1}{3}e^6 + \frac{1}{3}e^9 + \frac{1}{3} \approx 2835.84$

إذن المساحة تساوي 2835.84 وحدة مربعة تقريبًا.

23. $A = \int_0^2 \left(e^{4-x} - e^x\right) dx + \int_2^3 \left(e^x - e^{4-x}\right) dx$

$= \left(-e^{4-x} - e^x\right)\Big|_0^2 + \left(e^x + e^{4-x}\right)\Big|_2^3$

$= -e^2 - e^2 + e^4 + 1 + e^3 + e - e^2 - e^2$

$= 1 + e - 4e^2 + e^3 + e^4 \approx 48.85$

إذن المساحة تساوي 48.85 وحدة مربعة تقريبًا.

24. $A = \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{2}}\right) dx = \left(\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12} \approx 0.08$

إذن المساحة تساوي 0.08 وحدة مربعة تقريبًا.

25. $A = \int_{-1}^1 (x^2 + 2x^4)\, dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{2}{5}x^5\right)\Big|_{-1}^1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{22}{15} \approx 1.47$

إذن المساحة تساوي 1.47 وحدة مربعة تقريبًا.

26. $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\, dx = (\sin x + \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 1$

$= \sqrt{2} - 1 \approx 0.41$

إذن المساحة تساوي 0.41 وحدة مربعة تقريبًا.

27. $A = \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 x)\, dx = \int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} [1 - \cos(2x)]\, dx$

$= \frac{1}{2}\left[x\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos u\, du\right] = \frac{1}{2}\left[\pi - 0 - \frac{1}{2}\sin u\Big|_0^{2\pi}\right]$

$= \frac{1}{2}(\pi - 0 + 0) = \frac{\pi}{2} \approx 1.57$

إذن المساحة تساوي 1.57 وحدة مربعة تقريبًا.

28. $A = \int_{-2}^2 (2x^2 - x^4 + 2x^2)\, dx = \int_{-2}^2 (4x^2 - x^4)\, dx$

$= \left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_{-2}^2 = \frac{32}{3} - \frac{32}{5} + \frac{32}{3} - \frac{32}{5} = \frac{128}{15} \approx 8.53$

إذن المساحة تساوي 8.53 وحدة مربعة تقريبًا.

29. $A = \int_{-2}^0 (2x^3 - x^2 - 5x + x^2 - 3x)\, dx + \int_0^2 (-x^2 + 3x - 2x^3 + x^2 + 5x)\, dx$

$= \int_{-2}^0 (2x^3 - 8x)\, dx + \int_0^2 (-2x^3 + 8x)\, dx$

$= \left(\frac{x^4}{2} - 4x^2\right)\Big|_{-2}^0 + \left(-\frac{x^4}{2} + 4x^2\right)\Big|_{-2}^2 = -8 + 16 - 8 + 16 = 16$

إذن المساحة تساوي 16 وحدة مربعة.

30. $A = \int_{-2}^{-1} (-x + 2 - 4 + x^2)\, dx + \int_{-1}^2 (4 - x^2 + x - 2)\, dx$

$+ \int_2^3 (-x + 2 - 4 + x^2)\, dx$

$= \int_{-2}^{-1} (x^2 - x - 2)\, dx + \int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2)\, dx + \int_2^3 (x^2 - x - 2)\, dx$

$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right)\Big|_{-2}^{-1} + \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_{-1}^2 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right)\Big|_2^3$

$= \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 + \frac{8}{3} + 2 - 4\right) + \left(-\frac{8}{3} + 2 + 4 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right)$

$+ \left(9 - \frac{9}{2} - 6 - \frac{8}{3} + 2 + 4\right) = \frac{11}{6} + \frac{9}{2} + \frac{11}{6} \approx 8.17$

إذن المساحة تساوي 8.17 وحدة مربعة تقريبًا.

31. $A = \int_0^1 \left(x - \frac{x^2}{4}\right) dx + \int_1^2 \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) dx$

$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12}\right)\Big|_0^1 + \left(x - \frac{x^3}{12}\right)\Big|_1^2$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{12} + 2 - \frac{8}{12} - 1 + \frac{1}{12} = \frac{5}{6} \approx 0.83$

إذن المساحة تساوي 0.83 وحدة مربعة تقريبًا.

32. $A = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(x^2 - \frac{1}{2}x\right) dx + \int_1^{\frac{4}{3}} \left(2 - x - \frac{1}{2}x\right) dx$

$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{4}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^1 + \left(2x - \frac{3}{4}x^2\right)\Big|_1^{\frac{4}{3}}$

$= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{24} + \frac{1}{16} + \frac{8}{3} - \frac{4}{3} - 2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{16} \approx 0.19$

إذن المساحة تساوي 0.19 وحدة مربعة تقريبًا.

33. $A = \int_{-3}^{1} \sqrt{x+3}\,dx - \frac{1\times 2}{2} = \frac{2}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-3}^{1} - 1$

$= \frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}}\right) - \frac{2}{3}(0) - 1 = \frac{13}{3} \approx 4.33$

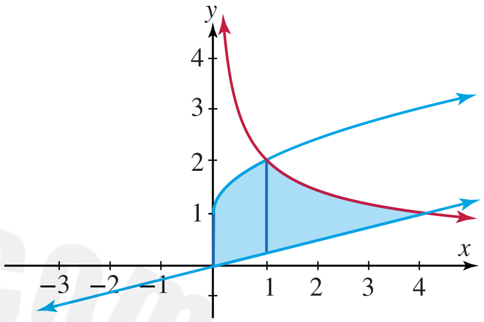
إذن المساحة تساوي 4.33 وحدة مربعة تقريبًا.

34. $A = \int_{-2}^{1}\left(4-x^2\right)dx - \frac{1\times 3}{2} = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{1} - \frac{3}{2}$

$= 4 - \frac{1}{3} + 8 - \frac{8}{3} - \frac{3}{2} = \frac{15}{2} = 7.5$

إذن المساحة تساوي 7.5 وحدة مربعة.

35.



$A = \int_{0}^{1}\left(1+\sqrt{x} - \frac{x}{4}\right)dx + \int_{1}^{4}\left(\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{x}{4}\right)dx$

$= \left(x + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{8}\right)\Big|_{0}^{1} + \left(4\sqrt{x} - \frac{x^2}{8}\right)\Big|_{1}^{4}$

$= \left(1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{8} - 0\right) + \left(8 - 2 - 4 + \frac{1}{8}\right) = \frac{11}{3} \approx 3.67$

إذن المساحة تساوي 3.67 وحدة مربعة تقريبًا.

36. لا يمكن إيجاد المساحة المطلوبة بأي من الطريقتين، لكن يمكننا إيجادها بالطريقة التالية:

$$A = \int_{-1}^{0}[-x-x]\,dx + \int_{0}^{1}[x-(-x)]\,dx$$

37. صواب لأن

$$x^2+1=10$$
$$(x-3)(x+3)=0$$
$$x=\pm 3$$

وبما أن تقعّر الدالة $y=x^2+1$ إلى الأعلى، فإنّ المستقيم $y=10$ يقع فوق منحنى الدالة $y=x^2+1$ في الفترة $[-3, 3]$.

$$\int_{-3}^{3}\left(10-x^2-1\right)dx = \int_{-3}^{3}\left(9-x^2\right)dx = \left(9x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-3}^{3} = 27-9+27 = 36$$

38. خطأ لأن

$$f(x) = \cos x$$
$$g(x) = \frac{1}{2}$$

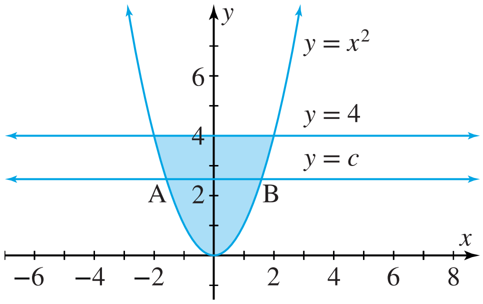
$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

إذن، $f\left(\frac{\pi}{6}\right) > g\left(\frac{\pi}{6}\right)$

وبالتالي $f(x) \ge g(x)$ في الفترة $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$، ومنحنى الدالة $y=\cos x$ يقع فوق المستقيم $y=\frac{1}{2}$ بين $x=0$ و $x=\frac{\pi}{3}$.

إذن، $A = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)dx$

41. a.



$x^2 = c$

$x = \pm\sqrt{c}$

$A(-\sqrt{c}, c),\ B(\sqrt{c}, c)$

b. $\int_{0}^{c}\sqrt{y}\,dy = \int_{c}^{4}\sqrt{y}\,dy$

$\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{c} = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\Big|_{c}^{4}$

$\frac{2}{3}c^{\frac{3}{2}} = \frac{16}{3} - \frac{2}{3}c^{\frac{3}{2}}$

$c = 2^{\frac{4}{3}}$

كان من الممكن اختيار $-\sqrt{y}$ بدلًا من $\sqrt{y}$ في التكامل لأن نصف مساحتين متساويتين متساويان.

c. $\int_{0}^{\sqrt{c}}\left(c-x^2\right)dx = (4-c)\sqrt{c} + \int_{\sqrt{c}}^{2}\left(4-x^2\right)dx$

$\left(cx - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{\sqrt{c}} = (4-c)\sqrt{c} + \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{\sqrt{c}}^{2}$

$c\sqrt{c} - \frac{c\sqrt{c}}{3} = (4-c)\sqrt{c} + 8 - \frac{8}{3} - 4\sqrt{c} + \frac{c\sqrt{c}}{3}$

$\frac{4}{3}c\sqrt{c} = \frac{16}{3}$

$c = 2^{\frac{4}{3}}$

42. $f(x) = \sec^2 x,\ g(x) = \tan^2 x,\ x = -\frac{\pi}{4},\ x = \frac{\pi}{4}$

$\sec^2 x = \tan^2 x$

بما أن $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$، إذن المعادلة ليس لها حل.

إذن، منحنيا الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ لا يتقاطعان في الفترة $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

$f(0) = \sec^2(0) = 1$ و $g(0) = \tan^2(0) = 0$

إذن، $f(0) > g(0)$

وبالتالي $f(x) > g(x)$ في الفترة $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

$$A = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[\sec^2 x - \tan^2 x\right]dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sec^2 x\left(1-\sin^2 x\right)dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sec^2 x\cos^2 x\,dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}1\,dx = x\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \approx 1.57$$

إذن المساحة تساوي 1.57 وحدة مربعة تقريبًا.

43. $A_{\text{القطع المكافئ}} = \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)\ dx = \left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-a}^{a}$

$= a^3 - \frac{a^3}{3} + a^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{4}{3}a^3$

$A_{\text{المثلث}} = \frac{a^2 \times 2a}{2} = a^3$

$\lim\limits_{a \to 0} \frac{A_{\text{المثلث}}}{A_{\text{القطع المكافئ}}} = \frac{a^3}{\frac{4}{3}a^3} = \frac{3}{4}$

44. بما أن قيمة $f(x) - g(x)$ هي نفسها في كلا الشكلين، حيث تمثل $f(x)$ الحد العلوي و $g(x)$ الحد السفلي، فإن المساحة $\int_a^b [f(x) - g(x)]\ dx$ هي نفسها في الشكلين.

45. $\frac{x}{x^2+1} = mx$

$x(mx^2 + m - 1) = 0$

$x = 0$ أو $x = \pm\sqrt{\frac{1-m}{m}}$

الطريقة الأولى:

$A = \int_{-\sqrt{\frac{1-m}{m}}}^{0} \left(mx - \frac{x}{x^2+1}\right) dx + \int_{0}^{\sqrt{\frac{1-m}{m}}} \left(\frac{x}{x^2+1} - mx\right) dx$

$= \left[\frac{mx^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]\Big|_{-\sqrt{\frac{1-m}{m}}}^{0} + \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{mx^2}{2}\right]\Big|_{0}^{\sqrt{\frac{1-m}{m}}}$

$= -\frac{1-m}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{m} + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{m} - \frac{1-m}{2} = m - 1 - \ln m$

إذن المساحة تساوي $m - 1 - \ln m$ وحدة مربعة.

الطريقة الثانية:

بما أن دالة الفرق فردية، يصبح التكامل:

$A = 2\int_{0}^{\sqrt{\frac{1-m}{m}}} \left(\frac{x}{x^2+1} - mx\right) dx$

$= 2\left[\frac{1}{2}\ln\ (x^2+1) - \frac{mx^2}{2}\right]\Big|_{0}^{\sqrt{\frac{1-m}{m}}}$

$= 2\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{m} - \frac{1-m}{2}\right)$

$= m - 1 - \ln m$

5.4 الحجوم الدورانية The Solid of Revolution

ما ستتعلّمه

- تعريف الحجوم الدورانية
- الحجوم الأسطوانية والمخروطية

... ولماذا

بما أن الحجوم الدورانية هي تلك التي يمكن تكوينها من خلال دوران مساحة معينة، فإن التكامل المحدود يساعدنا في حساب أحجام أجسام معينة يتعذر إيجادها باستعمال القواعد الجبرية لحجوم المجسمات الهندسية كحجم جرة فخار مثلًا.

معيار الدرس

12A.6.2

المصطلحات

- حجم دوراني solid of revolution

الهدف

سيتعلم الطلاب كيفية استعمال التكامل المحدود لإيجاد الحجوم الدورانية.

دليل الدرس

1. تعريف الحجوم الدورانية وكيفية حسابها

2. حساب الحجوم الأسطوانية والمخروطية

تحفيز

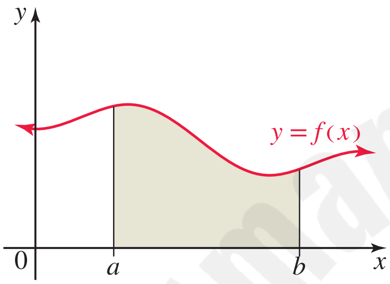
اطلب من الطلاب تدوير ورقة حول إحدى حوافها ورسم الشكل المتخيَّل الناتج عن دورانها.

نشاط المصطلحات

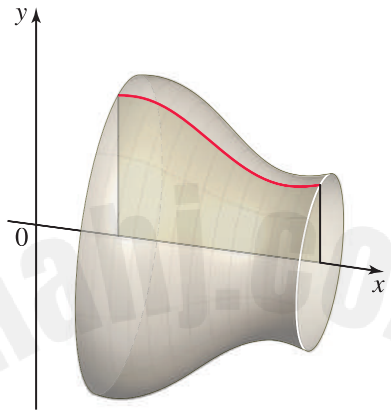
ارسم جرة على السبورة، ثم اطلب من الطلاب إيجاد الخصائص الهندسية التي تميز شكل الجرة.

تعريف الحجوم الدورانية

يبيّن الشكل 5.4.1 مساحة المنطقة بين منحنى الدالة f والمحور x من $x = a$ إلى $x = b$. لقد تعلمنا في الدروس السابقة كيفية إيجاد هذه المساحة باستعمال التكامل المحدود. يبيّن الشكل 5.4.2 المجسّم الناتج عن دوران هذه المساحة حول المحور x. حجم هذا المجسّم يسمّى **الحجم الدوراني**، ويمكن إيجاده باستعمال التكامل المحدود.

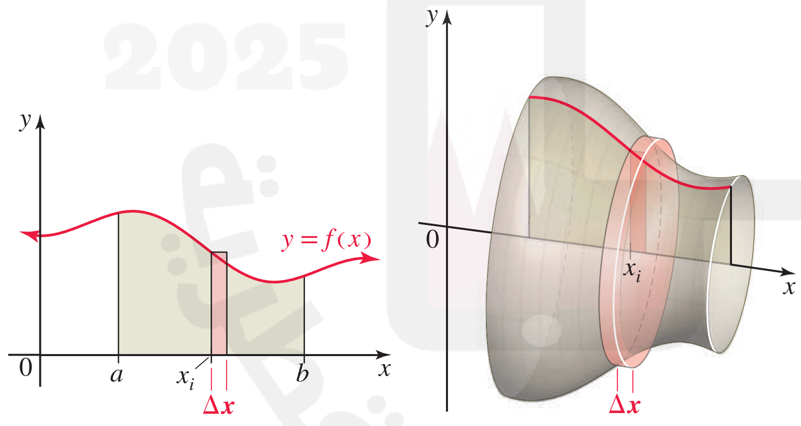


الشكل 5.4.1



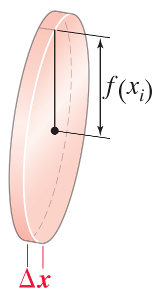
الشكل 5.4.2

للقيام بذلك نقسم الفترة $[a, b]$ إلى n فترة صغيرة بطول $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ كما فعلنا عند حساب المساحة، ولتكن $a = x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n = b$ حدود هذه الفترات (انظر الشكل 5.4.3a).



الشكل 5.4.3

ثم نتخيل أننا نقسّم الحجم الدوراني إلى شرائح رقيقة سُمك كل منها Δx.
كلما صغرت قيمة Δx، اقترب شكل الشريحة من الشكل الأسطواني الدائري القائم كما هو مبيّن في الشكل 5.4.3b، ونعلم أن حجم الإسطوانة القائمة يساوي $\pi r^2 h$ حيث r طول نصف قطر القاعدة الدائرية للأسطوانة و h هو ارتفاع الأسطوانة. نلاحظ من الشكل 5.4.4 أن ارتفاع الشريحة يساوي سُمكها الذي يساوي Δx. أما طول نصف قطر القاعدة الدائرية لكل شريحة فهو $f(x_i)$.



الشكل 5.4.4

إذن الحجم التقريبي لكل شريحة هو $\pi[f(x_i)]^2\ \Delta x$، وبالتالي فإن الحجم التقريبي للحجم الدوراني هو

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \pi[f(x_i)]^2 \Delta x$$

يمكننا بهذه الطريقة أن نستنتج أن القيمة الدقيقة للحجم الدوراني تساوي نهاية هذا المجموع عندما تقترب قيمة Δx من الصفر، أي أن

$$V = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi[f(x_i)]^2 \Delta x$$

هذه النهاية هي التكامل المحدود كما بيّنا سابقًا.

الحجم الدوراني

إذا كانت R هي المنطقة بين منحنى الدالة f والمحور x (حيث $f(x) \geq 0$) من $x = a$ إلى $x = b$، فإن الحجم الدوراني الناتج عن دوران هذه المنطقة حول المحور x هو

$$V = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi[f(x_i)]^2 \Delta x = \int_a^b \pi[f(x)]^2\, dx$$

لا يتغير الحجم الدوراني سواء كانت المساحة أعلى محور x أو أسفل محور x او مقسمة إلى جزئين يقع أحدهما فوق المحور x والآخر تحته، حيث أن المساحة تدور دورة كاملة حول محور x.

مثال 1 إيجاد الحجم الدوراني

أوجد الحجم الدوراني الناتج عن دوران المنطقة بين منحنى الدالة $y = \sqrt{x}$ والمحور x من $x = 0$ إلى $x = 4$ حول المحور x.

الحل

يبيّن الشكل 5.4.5 دوران المساحة المحصورة بين $y = \sqrt{x}$ والمحور x والمستقيم $x = 4$ حول المحور x.

باستعمال قاعدة الحجم الدوراني:

$$V = \int_0^4 \pi\,[f(x)]^2\, dx$$

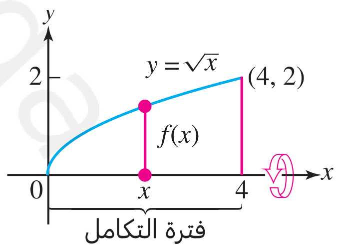
$$= \int_0^4 \pi(\sqrt{x})^2\, dx = \int_0^4 \pi x\, dx = \pi \frac{x^2}{2}\Big|_0^4 = \pi\frac{4^2}{4} - \pi\frac{0^2}{4} = \frac{16\pi}{2} = 8\pi$$

إذن، الحجم الدوراني المطلوب هو 8π وحدة مكعبة.

حاول أن تحل التمرين 1

ملاحظة

يعود اكتشاف تقنية إيجاد الحجم الدوراني التقريبي من خلال تجميع عدد كبير من الشرائح الدائرية إلى عالم الفلك الألماني المعروف يوهانس كيبلر (1571-1630) الذي اكتشف ثلاثة قوانين لحركة الكواكب. كان كيبلر يعمل على إيجاد القيم التقريبية لحجوم البراميل باعتبارها حجومًا دورانية.



الشكل 5.4.5 نصف قطر المقطع العرضي هو $f(x)$. إذن، مساحة المقطع العرضي هي:

$$Ax = \pi[f(x)]^2 = \pi[\sqrt{x}]^2 = \pi x$$

سؤال للتفكر

س: إذا أردنا إنقاص قيمة الحجم الدوراني من 8π إلى π، ما هي الفترة $[0, a]$ التي يجب اختيارها؟

نموذج إجابة:

$$\int_0^a \pi(\sqrt{x})^2\, dx = \int_0^a \pi x\, dx$$

$$= \pi\frac{x^2}{2}\Big|_0^a$$

$$= \pi\frac{a^2}{2}$$

إذا كان الحجم الجديد يساوي π، إذن

$$\pi\frac{a^2}{2} = \pi$$

$$\frac{a^2}{2} = 1$$

$$a = \sqrt{2}$$

يبيّن المثال التالي كيفية إيجاد الحجم الدوراني باستعمال التكامل المحدود وباتباع خطوات محددة.

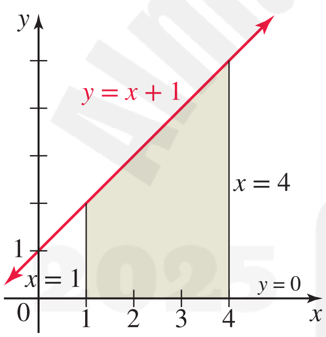
مثال 2 الحجم الدوراني لمساحة محددة بمستقيمين رأسيين

أوجد الحجم الدوراني الناتج عن دوران المنطقة بين منحنى الدالة $y = x + 1$ و $y = 0$ من $x = 1$ إلى $x = 4$ حول المحور x.

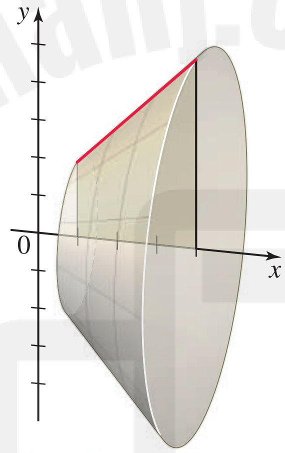
الحل

يحدد الرسم البياني للدالة $y = x + 1$ مع المستقيمين $x = 1$ و $x = 4$ المنطقة المطلوب دورانها لينتج الحجم الدوراني.

المنطقة والحجم الناتج عن دورانها مبيّنان في الشكل أدناه مع ملاحظة الفرق الطفيف في رسم المحور x بين الشكل a والشكل b بهدف إبراز الحجم الدوراني في صورة ثلاثية الأبعاد.



(a)



(b)

الخطوة 1 بما أن المنطقة المطلوب دورانها تقع بين $x = 1$ و $x = 4$، فإن حدود التكامل تصبح $a = 1$ و $b = 2$.

الخطوة 2 باستعمال قاعدة الحجم الدوراني:

$$V = \int_1^4 \pi\left(f(x)\right)^2 dx$$

$$= \int_1^4 \pi(x+1)^2\, dx = \pi\,\frac{(x+1)^3}{3}\Bigg|_1^4 = \frac{\pi}{3}\left(5^3 - 2^3\right) = \frac{117\pi}{3} = 39\pi$$

إذن، الحجم الدوراني الناتج عن دوران المنطقة بين منحنى الدالة $y = x + 1$ و $y = 0$ من $x = 1$ إلى $x = 4$ حول المحور x هو 39π وحدة مكعبة.

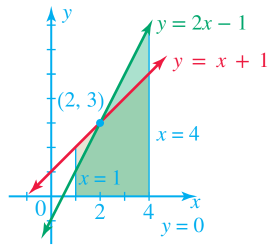
حاول أن تحل التمرين 2

سؤال للتفكر

س: (مع مثال 2) كيف تقارن قيمة الحجم الدوراني في المثال بقيمة الحجم الدوراني الناتج عن دوران منحنى الدالة $y = 2x - 1$؟

نموذج إجابة:

عند رسم المستقيم $y = 2x - 1$ نجد أنه يقطع المستقيم $y = x + 1$ عند النقطة $(2, 3)$ ثم يرتفع صعودًا مما يؤدي إلى زيادة في قيمة الحجم الناتج عن دورانه.



للطلاب الذين يواجهون صعوبات

(مع المثال 2) قد يعتقد بعض الطلاب أن الحجوم الدورانية التي يمكن إيجاد قيمها هي فقط تلك التي تنشأ عن دوران مستقيم معين. دعهم يتدربون على حساب مزيد من الحجوم الدورانية.

س: أوجد الحجم الدوراني الناتج عن دوران المنطقة الواقعة بين منحنى الدالة $y = x^2$ والمستقيم $y = 0$ بين $x = 1$ و $x = 4$

نموذج إجابة:

$$\int_1^4 \pi\left(x^2\right)^2 dx = \pi\int_1^4 x^4\, dx$$
$$= \pi\,\frac{x^5}{5}\Bigg|_1^4$$
$$= \pi\left(\frac{1\,024}{5} - \frac{1}{5}\right)$$
$$= \pi\left(\frac{1\,023}{5}\right)$$
$$\approx 642.77$$

قيمة الحجم هي 642.77 وحدة مكعبة تقريبًا.

س: أوجد الحجم الدوراني الناتج عن دوران المنطقة الواقعة بين منحنى الدالة $y = x^3$ والمستقيم $y = 0$ بين $x = 1$ و $x = 4$

نموذج إجابة:

$$\int_1^4 \pi\left(x^3\right)^2 dx = \pi\int_1^4 x^6\, dx$$
$$= \pi\,\frac{x^7}{7}\Bigg|_1^4$$
$$= \pi\left(\frac{16\,383}{7}\right)$$
$$\approx 7\,352.67$$

قيمة الحجم هي 7 352.67 وحدة مكعبة تقريبًا.

قد يكون الحجم الدوراني مغلقًا، بمعنى أن لا جهة مسطحة له، وذلك عندما يكون ناتجًا عن دوران مساحة محددة بمنحنى دالة والمحور x فقط، كما يبيّن المثال التالي.

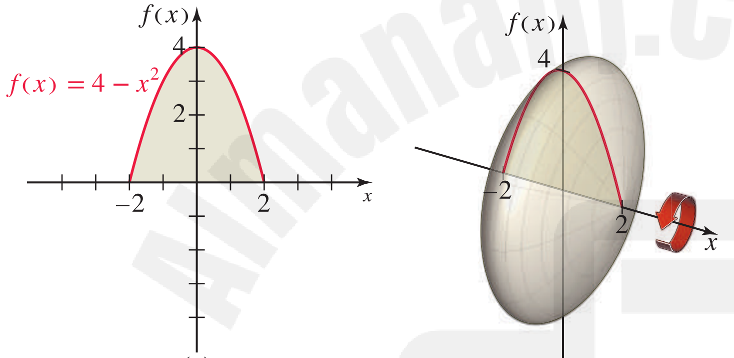
مثال 3 الحجم الدوراني لمجسم مغلق

أوجد الحجم الدوراني الناتج عن دوران المساحة بين منحنى الدالة $f(x) = 4 - x^2$ و $y = 0$ حول المحور x.

الحل

الرسم البياني للدالة $f(x) = 4 - x^2$ يحدد المنطقة المراد دورانها لينتج الحجم الدوراني.

يبيّن الشكل a أدناه أن المساحة تحت منحنى الدالة تقع بين المنحنى والمحور x فقط، أي أن كل من a و b هي مقطع x للدالة.



(a) (b)

الخطوة 1 أوجد حدود التكامل بإيجاد نقاط التقاطع مع محور x.

$$4 - x^2 = 0$$

$$(2 + x)(2 - x) = 0$$

$$x = -2 \text{ أو } x = 2$$

بما أن المنطقة المطلوب دورانها تقع بين $x = -2$ و $x = 2$، فإن حدود التكامل تصبح $a = -2$ و $b = 2$

الخطوة 2 باستعمال قاعدة الحجم الدوراني:

$$V = \int_{-2}^{2} \pi\left(4 - x^2\right)^2 dx$$

$$= \int_{-2}^{2} \pi\left(16 - 8x^2 + x^4\right) dx$$

$$= \pi\left(16x - 8\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-2}^{2}$$

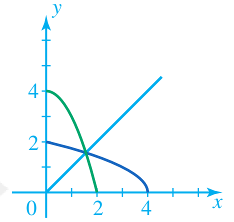
(تابع)

أسئلة للتفكر

س: ما الرابط بين منحنى الدالة $f(x) = \sqrt{4 - x}$ في الفترة $[0, 4]$ ومنحنى الدالة $g(x) = 4 - x^2$ في الفترة $[0, 2]$؟

نموذج إجابة:

الدالة $f(x) = \sqrt{4 - x}$ هي معكوس الدالة $g(x) = 4 - x^2$، إذن منحنى الدالة f يناظر منحنى الدالة g عبر المنصف الأول.



س: قارن الحجم الدوراني V_1 الناشئ عن دوران المساحة تحت منحنى الدالة f حول المحور x في الفترة $[0, 4]$ مع الحجم الدوراني V_2 الناشئ عن دوران المساحة تحت منحنى الدالة g حول المحور x في الفترة $[0, 2]$. ماذا تلاحظ؟

نموذج إجابة:

نلاحظ أولًا أن V_2 هو نصف الحجم الدوراني الذي وجد في المثال، إذن

$$V_2 = \frac{256}{15}\pi$$

$$V_1 = \int_0^4 \pi\,(4 - x)\,dx = 8\pi$$

إذن، $V_1 \neq V_2$. بالرغم من تناظر المساحتين حول المنصف الأول وبالتالي تساويهما، فإن الحجمين الدورانيين الناشئين عن دورانهما حول المحور x غير متساويين.

$$= \pi\left(16 \times 2 - 8\left(\frac{2^3}{3}\right) + \frac{2^5}{5}\right) - \pi\left(16 \times (-2) - 8\left(\frac{(-2)^3}{3}\right) + \frac{(-2)^5}{5}\right)$$

$$= \frac{512}{15}\pi$$

إذن، الحجم الدوراني الناتج عن دوران المنطقة بين منحنى الدالة $f(x) = 4 - x^2$ و $y = 0$ حول المحور x هو $\frac{512}{15}\pi$ وحدة مكعبة.

حاول أن تحل التمرين 19

الحجوم الأسطوانية والمخروطية

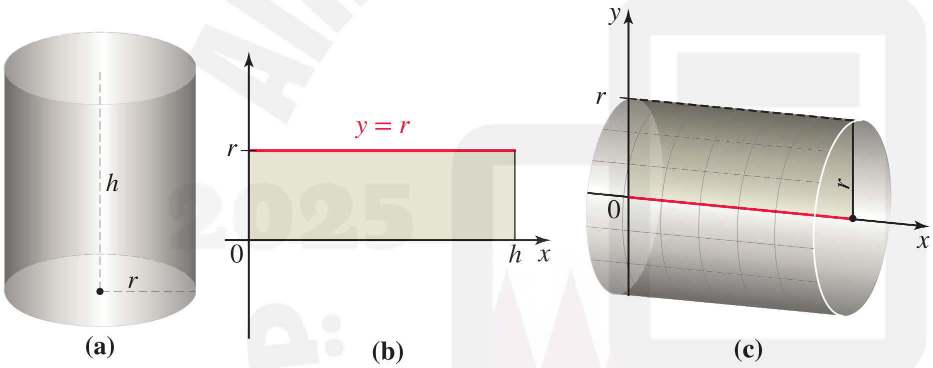
لإيجاد الحجوم الدورانية الأسطوانية والمخروطية نحتاج إلى قواعد هندسية، ويمكننا إيجاد هذه القواعد من خلال التكامل المحدود المستعمل في إيجاد الحجوم الدورانية.

في حالة الحجوم الأسطوانية، طول نصف قطر الشريحة الدائرية ثابت يساوي r.

وبالتالي الحجم هو

$$V = \int_0^h \pi r^2\, dx$$
$$= \pi r^2 h$$

وهي قاعدة إيجاد حجم الأسطوانة التي نعرفها (انظر الشكل 5.4.6).



الشكل 5.4.6 حجم أسطوانة طول نصف قطر قاعدتها r وارتفاعها h يساوي $\int_0^h \pi r^2\, dx$

أما في حالة الحجوم المخروطية فهي كذلك من تطبيقات التكامل المحدود في إيجاد الحجوم الدورانية.

مثال 4 حجم مخروط

أوجد حجم المخروط القائم الذي طول نصف قطر قاعدته r و وارتفاعه h.

الحل

يبيّن الشكل a المخروط المطلوب وهو يمكن أن يُرى على أنه ناتج عن دوران المنطقة في الشكل b حول المحور x كما يبيّن الشكل c.

(تابع)

ملاحظة تكنولوجية

تعطي حاسبة التمثيل البياني بوضعية fnInt القيمة على شكل 107.2330292، والذي يتفق مع تقريب $\frac{512\pi}{15}$ إلى أقرب 7 وحدات عشرية.

للطلاب سريعي الإنجاز

(مع المثال 3) قد يسأل بعض الطلاب عما قد يحدث عند دوران مساحة معينة حول محور غير المحور x.

س: هل يمكننا استنتاج قيمة الحجم الدوراني الناتج عن دوران المساحة الواقعة بين منحنى الدالة $y = x^2 + x + 4$ والمستقيم $y = \frac{1}{4}$ حول المحور $y = \frac{1}{4}$؟

نموذج إجابة:

نلاحظ أن

$$y = x^2 + x + 4$$
$$= -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} + 4$$
$$y - \frac{1}{4} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4$$

ليكن $Y = y - \frac{1}{4}$ و $X = x - \frac{1}{2}$، إذن

$$Y = 4 - X^2$$

إذن الحجم الدوراني ناتج عن دوران المساحة الواقعة بين منحنى الدالة $Y = 4 - X^2$ والمحور X حول المحور X، لأن المحور X والمحور Y ناتجان عن إزاحة نقطة الأصل إلى النقطة $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ من دون أي دوران للمحاور.

سؤال للتفكر

س: أوجد قيمة الحجم الدوراني في المثال 2 باستعمال قاعدة المخروط.

نموذج إجابة:

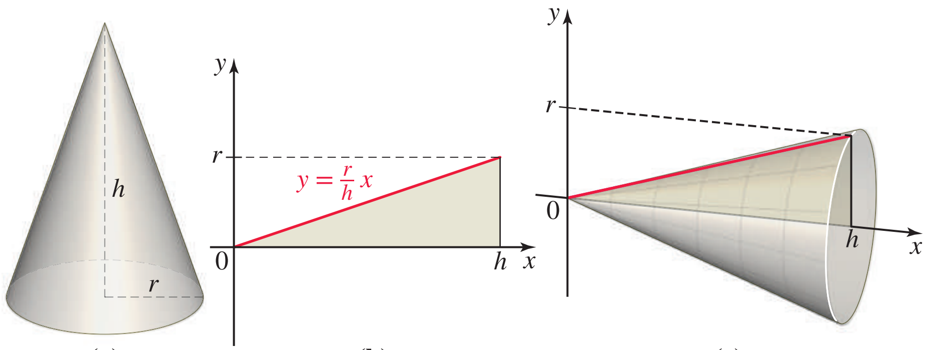
نكمل المستقيم $y = x + 1$ إلى أن يتقاطع مع المحور x عند النقطة $(-1, 0)$

الحجم = حجم المخروط الكبير − حجم المخروط الصغير

أي

$$\frac{1}{3}\pi(5)^2(5) - \frac{1}{3}\pi(2)^2(2)$$
$$= \frac{117}{3}\pi = 39\pi$$

وهي نفس الإجابة التي حصلنا عليها في المثال 2



(a) (b) (c)

الخطوة 1 تقع المنطقة تحت الخط الذي يمر بالنقطتين $(0, 0)$ و (h, r)، والذي معادلته هي $y = mx$ حيث m هي ميل المستقيم والذي يساوي $m = \frac{r-0}{h-0} = \frac{r}{h}$.

إذن، معادلة المستقيم هي $y = \frac{r}{h}x$.

الخطوة 2 باستعمال قاعدة الحجم الدوراني:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h \pi\left[\frac{r}{h}x\right]^2 dx \\ &= \pi\int_0^h \left(\frac{r^2}{h^2}x^2\right) dx \\ &= \pi\left(\frac{r^2}{3h^2}x^3\right)\Big|_0^h \\ &= \frac{1}{3}\pi r^2 h \end{aligned}$$

وهي القاعدة المعروفة لإيجاد حجم المخروط.

حاول أن تحل التمرين 24

تذكير

قانون معادلة المستقيم: معادلة المستقيم المار بالنقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) هي $y = mx + b$ حيث m هي ميل المستقيم ويساوي $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ و b هو المقطع y للمستقيم.

ملاحظات على التمارين

التمارين 1-27، تدرب الطالب على استعمال التكامل المحدود لإيجاد الحجوم الدورانية.

التمارين 28-31، تدرب الطالب على أنماط من الاختبارات.

التقييم المستمر

التقييم الذاتي:

التمارين 9, 13, 15, 17, 20, 21

مراجعة سريعة 5.4

في التمارين 1-6، أوجد قيمة التكامل المحدود.

1. $\int_0^2 (x+5)^2\, dx$

2. $\int_0^3 (6-x^2)^2\, dx$

3. $\int_{-2}^1 \sqrt{x+3}\, dx$

4. $\int_2^7 \frac{7}{\sqrt{x+2}}\, dx$

5. $\int_0^1 (e^x)^2\, dx$

6. $\int_1^3 x \ln x\, dx$

الدرس 5.4 التمارين

.1 أوجد الحجم الدوراني الناتج عن دوران المساحة المحددة بمنحنى الدالة $y = 2\sqrt{x}$ والمستقيم $y = 0$ من $x = 0$ إلى $x = 1$ حول المحور x.

.2 أوجد الحجم الدوراني الناتج عن دوران المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $y = x^2 + 1$ والمستقيم $y = 0$ من $x = -1$ إلى $x = 1$.

في التمارين 3-21، أوجد الحجم الدوراني الناتج عن دوران المنطقة المحددة بمنحنيات الدوال المعطاة حول المحور x.

3. $f(x) = x \,,\, y = 0 \,,\, x = 0 \,,\, x = 3$

4. $f(x) = 3x \,,\, y = 0 \,,\, x = 0 \,,\, x = 2$

5. $f(x) = 2x + 1 \,,\, y = 0 \,,\, x = 0 \,,\, x = 4$

6. $f(x) = x - 4 \,,\, y = 0 \,,\, x = 4 \,,\, x = 10$

7. $f(x) = \frac{1}{3}x + 2 \,,\, y = 0 \,,\, x = 1$ و $x = 3$

8. $f(x) = \frac{1}{2}x + 4 \,,\, y = 0 \,,\, x = 0 \,,\, x = 5$

9. $f(x) = \sqrt{x} \,,\, y = 0 \,,\, x = 1 \,,\, x = 9$

10. $f(x) = \sqrt{x + 5} \,,\, y = 0 \,,\, x = 1 \,,\, x = 3$

11. $f(x) = \sqrt{2x + 1} \,,\, y = 0 \,,\, x = 1 \,,\, x = 4$

12. $f(x) = \sqrt{4x + 2} \,,\, y = 0 \,,\, x = 0 \,,\, x = 2$

13. $f(x) = e^x \,,\, y = 0 \,,\, x = 0 \,,\, x = 2$

14. $f(x) = 2e^x \,,\, y = 0 \,,\, x = -2 \,,\, x = 1$

15. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} \,,\, y = 0 \,,\, x = 1 \,,\, x = 3$

16. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x + 2}} \,,\, y = 0 \,,\, x = -1 \,,\, x = 2$

17. $f(x) = x^2 \,,\, y = 0 \,,\, x = 1 \,,\, x = 5$

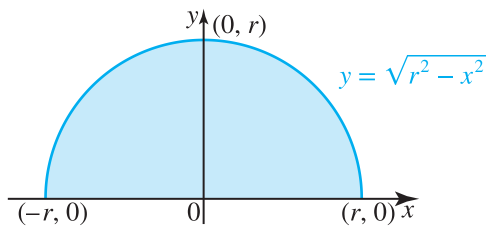
18. $f(x) = \frac{x^2}{2} \,,\, y = 0 \,,\, x = 0 \,,\, x = 4$

19. $f(x) = 1 - x^2 \,,\, y = 0$

20. $f(x) = 2 - x^2 \,,\, y = 0$

21. $f(x) = x - x^2 \,,\, y = 0$

في التمارين 22-24، التمثيل البياني للدالة المعرفة بالصيغة $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ هو نصف دائرة طول نصف قطرها r ومركزها $(0, 0)$ (انظر الشكل أدناه).
أوجد الحجم الدوراني الناتج عن دوران نصف الدائرة حول المحور x (تعطي نتيجة التمرين 24 صيغة حجم كرة طول نصف قطرها r).

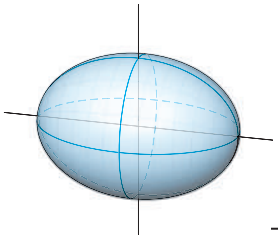


22. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

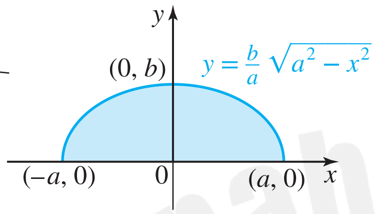
23. $f(x) = \sqrt{36 - x^2}$

24. $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

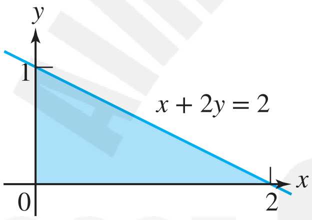
25. **مجسم إهليجي** أوجد صيغة حجم المجسم الناتج عن دوران القطع الناقص. انظر التمارين 22-24 والشكلين التاليين.



مجسم إهليجي



26. أوجد الحجم الدوراني الناشىء عن دوران المساحة المظللة حول المحور x.



27. استعمل طرائق حل التمارين السابقة لإيجاد حجم أسطوانة ارتفاعها h وطول نصف قطرها r.

أسئلة اختبار معيارية

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية للإجابة عن الأسئلة التالية.

28. **صواب أم خطأ** الحجم الدوراني لمقطع عرضي قابل للتكامل مساحته $A(x)$ بين $x = a$ و $x = b$ هو $\int_a^b A(x)\, dx$. برّر إجابتك.

29. **صواب أم خطأ** عند دوران المساحة المحددة بالمحور x والمستقيم $x = 2$ ومنحنى الدالة $y = \sqrt{x}$ حول المحور x نحصل على مجسّم حجمه الدوراني يساوي $\int_0^2 \pi x^2\, dx$.

برّر إجابتك.

30. **اختيار من متعدد** لتكن R المنطقة في الربع الأول المحددة بالمحور x والخط $x = 0$ والتمثيل البياني للمنحنى $y = 8 - x^{\frac{3}{2}}$.
أي الإجابات التالية يعطي أفضل تقريب للحجم الناتج عن دوران R حول المحور x؟ E

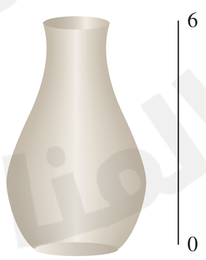
A. 60.3
B. 115.2
C. 225.4
D. 319.7
E. 361.9

31. **اختيار من متعدد** لتكن R المنطقة المحددة بالمحور x والمستقيم $x = 4$ ومنحنى الدالة $y = x^2$.
أي الإجابات التالية تعطي القيمة التقريبية الأفضل لحجم المجسّم الناتج عن دوران R بين $x = 0$ و $x = 4$ حول المحور x؟ D

A. 64π
B. 128π
C. 256π
D. 204.8π
E. 409.6π

استكشاف

32. **زهريّة** نريد تقدير حجم الزهرية التالية باستعمال حاسبة وخيط ومسطرة. نقيس ارتفاع الزهريّة فنجده 6 in نستعمل بعد ذلك الخيط والمسطرة لنجد قياس محيط الزهريّة (بالإنش) بفترات طول كل منها نصف إنش. نضع قائمة بالقياسات من الأعلى إلى الأسفل كما هو مبيّن في الشكل أدناه.



محيطات الزهرية	
5.4	10.8
4.5	11.6
4.4	11.6
5.1	10.8
6.3	9.0
7.8	6.3
9.4	

a. أوجد مساحات المقاطع العرضية التي أوجدت محيطاتها.

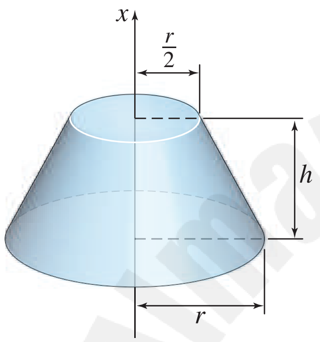
b. أوجد صيغة حجم الزهرية في صورة تكامل محدود بالنسبة للمتغير x في الفترة $[0, 6]$. (تخيل الزهرية موضوعة بشكل أفقي بحيث يكون محورها الأساسي هو المحور x.)

توسيع الأفكار

33. المخروط الناقص هو ما يتبقى من مخروط عند قطع جزئه العلوي بمستوٍ موازٍ لقاعدته.

افترض أن لمخروط ناقص دائري قائم (وهو الذي نحصل عليه من مخروط دائري قائم) قاعدة سفلية طول نصف قطرها r وقاعدة علوية طول نصف قطرها $\frac{r}{2}$ وأن ارتفاعه h. (انظر الشكل أدناه).

أوجد حجم هذا المخروط الناقص عبر تدوير المنطقة الواقعة تحت القطعة المستقيمة الممتدة من $(0, r)$ إلى $\left(h, \frac{r}{2}\right)$ حول المحور x.



34. **تعبئة وعاء**

a. **الحجم** وعاء على شكل نصف كرة طول نصف قطرها a. إذا كان ارتفاع الماء في الوعاء h، فما حجم الماء؟

b. **المعدلات المرتبطة** خزان على شكل نصف كرة طول نصف قطرها 5 m، يمتلىء الخزان بمعدل $0.2\ m^3/sec$، أوجد سرعة ارتفاع مستوى الماء في الخزان بعد أن يبلغ ارتفاعه 4 m

إجابات أسئلة مراجعة سريعة 5.4

1. $\int_0^2 (x+5)^2\,dx = \frac{(x+5)^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{7^3}{3} - \frac{5^3}{3} = \frac{218}{3} \approx 72.67$

2. $\int_0^3 (6-x^2)^2\,dx = \int_0^3 (36-12x^2+x^4)\,dx = \left(36x - 4x^3 + \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^3$

$= 108 - 108 + \frac{243}{5} = 48.6$

3. $\int_{-2}^1 \sqrt{x+3}\,dx = \frac{2}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-2}^1 = \frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{14}{3} \approx 4.67$

4. $\int_2^7 \frac{7}{\sqrt{x+2}}\,dx = 14\sqrt{x+2}\Big|_2^7 = 14(3-2) = 14$

5. $\int_0^1 (e^x)^2\,dx = \int_0^1 e^{2x}\,dx = \frac{e^{2x}}{2}\Big|_0^1 = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \approx 3.19$

6. $dv = x\,dx,\ u = \ln x,$

$v = \frac{x^2}{2},\ du = \frac{1}{x}\,dx.$

$\int x\ln x\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{x}\right)dx$

$= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$

$\int_1^3 x\ln x = \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right)\Big|_1^3 = \frac{9}{2}\ln 3 - \frac{9}{4} - 0 + \frac{1}{4} = \frac{9}{2}\ln 3 - 2 \approx 2.94$

إجابات أسئلة التمارين 5.4

1. $V = \int_0^1 \pi(2\sqrt{x})^2\,dx = 4\pi\int_0^1 x\,dx = 2\pi x^2\Big|_0^1 = 2\pi - 0 = 2\pi$

إذن، الحجم الدوراني المطلوب يساوي 2π وحدة مكعبة.

2. $V = \int_{-1}^1 \pi(x^2+1)^2\,dx = \int_{-1}^1 \pi(x^4+2x^2+1)\,dx = \pi\left(\frac{x^5}{5} + \frac{2}{3}x^3 + x\right)\Big|_{-1}^1$

$= \pi\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 + \frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1\right) = \frac{56}{15}\pi$

إذن، الحجم الدوراني المطلوب يساوي $\frac{56}{15}\pi$ وحدة مكعبة.

3. $V = \int_0^3 \pi x^2\,dx = \frac{\pi x^3}{3}\Big|_0^3 = 9\pi$

إذن، الحجم الدوراني المطلوب يساوي 9π وحدة مكعبة.

4. $V = \int_0^2 \pi(3x)^2\,dx = \frac{9\pi x^3}{3}\Big|_0^2 = 24\pi$

إذن، الحجم الدوراني المطلوب يساوي 24π وحدة مكعبة.

5. $V = \int_0^4 \pi(2x+1)^2\,dx = \int_0^4 \pi(4x^2+4x+1)\,dx = \pi\left(\frac{4x^3}{3} + 2x^2 + x\right)\Big|_0^4$

$= \pi\left(\frac{256}{3} + 32 + 4\right) = \frac{364}{3}\pi$

إذن، الحجم الدوراني المطلوب يساوي $\frac{364}{3}\pi$ وحدة مكعبة.

6. $V = \int_4^{10} \pi(x-4)^2\,dx = \frac{\pi(x-4)^3}{3}\Big|_4^{10} = \pi \times \frac{6^3}{3} - \pi \times \frac{0^3}{3} = 72\pi$

إذن، الحجم الدوراني المطلوب يساوي 72π وحدة مكعبة.

7. $V = \int_1^3 \pi\left(\frac{1}{3}x+2\right)^2 dx = \int_1^3 \pi\left(\frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{3}x + 4\right)dx$

$= \pi\left(\frac{1}{27}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + 4x\right)\Big|_1^3 = \pi\left(1 + 6 + 12 - \frac{1}{27} - \frac{2}{3} - 4\right) = \frac{386}{27}\pi$

إذن، الحجم الدوراني المطلوب يساوي $\frac{386}{27}\pi$ وحدة مكعبة.

8. $V = \int_0^5 \pi\left(\frac{1}{2}x+4\right)^2 dx = \int_0^5 \pi\left(\frac{1}{4}x^2 + 4x + 16\right)dx$

$= \pi\left(\frac{1}{12}x^3 + 2x^2 + 16x\right)\Big|_0^5 = \pi\left(\frac{125}{12} + 50 + 80\right) = \frac{1\,685}{12}\pi$

إذن، الحجم الدوراني المطلوب يساوي $\frac{1\,685}{12}\pi$ وحدة مكعبة.

9. $V = \int_1^9 \pi(\sqrt{x})^2\,dx = \int_1^9 \pi x\,dx = \frac{\pi x^2}{2}\Big|_1^9 = \pi\left(\frac{81}{2} - \frac{1}{2}\right) = 40\pi$

إذن، الحجم الدوراني المطلوب يساوي 40π وحدة مكعبة.

10. $V = \int_1^3 \pi\left(\sqrt{x+5}\right)^2 dx = \int_1^3 \pi(x+5)\,dx = \frac{\pi(x+5)^2}{2}\Big|_1^3$

$= \pi(32 - 18) = 14\pi$

إذن، الحجم الدوراني المطلوب يساوي 14π وحدة مكعبة.

11. $V = \int_1^4 \pi\left(\sqrt{2x+1}\right)^2 dx = \int_1^4 \pi(2x+1)\,dx = \pi\left(x^2 + x\right)\Big|_1^4$

$= \pi(20 - 2) = 18\pi$

إذن، الحجم الدوراني المطلوب يساوي 18π وحدة مكعبة.

12. $V = \int_0^2 \pi\left(\sqrt{4x+2}\right)^2 dx = \int_0^2 \pi(4x+2)\,dx = \pi\left(2x^2 + 2x\right)\Big|_0^2$

$= \pi(8 + 4) = 12\pi$

إذن، الحجم الدوراني المطلوب يساوي 12π وحدة مكعبة.

13. $V = \int_0^2 \pi(e^x)^2\,dx = \int_0^2 \pi e^{2x}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{2x}\Big|_0^2 = \frac{\pi}{2}\left(e^4 - 1\right)$

إذن، الحجم الدوراني المطلوب يساوي $\frac{\pi}{2}\left(e^4 - 1\right)$ وحدة مكعبة.

14. $V = \int_{-2}^1 \pi(2e^x)^2\,dx = \int_{-2}^1 \pi\left(4e^{2x}\right)dx = 2\pi e^{2x}\Big|_{-2}^1 = 2\pi\left(e^2 - e^{-4}\right)$

إذن، الحجم الدوراني المطلوب يساوي $2\pi\left(e^2 - e^{-4}\right)$ وحدة مكعبة.

15. $V = \int_1^3 \pi \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2 dx = 4\pi\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx = 4\pi\ln|x|\Big|_1^3 = 4\pi\ln 3$

إذن، الحجم الدوراني المطلوب يساوي $4\pi\ln 3$ وحدة مكعبة.

16. $V = \int_{-1}^2 \pi \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{x+2}}\right)^2 dx = 4\pi\int_{-1}^2 \frac{1}{x+2}\,dx = 4\pi\ln|x+2|\Big|_{-1}^2 = 4\pi\ln 4$

إذن، الحجم الدوراني المطلوب يساوي $4\pi\ln 4$ وحدة مكعبة.

17. $V = \int_1^5 \pi \cdot (x^2)^2\,dx = \frac{\pi}{5}x^5\Big|_1^5 = \frac{\pi}{5}(3\,125 - 1) = \frac{3\,124}{5}\pi$

إذن، الحجم الدوراني المطلوب يساوي $\frac{3\,124}{5}\pi$ وحدة مكعبة.

18. $V=\int_0^4 \pi\times\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 dx=\frac{\pi}{20}x^5\Big|_0^4=\frac{\pi}{20}(1\,024-0)=\frac{256}{5}\pi$

19. $1-x^2=0$

$x=1$ أو $x=-1$

$$V=\int_{-1}^{1}\pi\left(1-x^2\right)^2 dx=\int_{-1}^{1}\pi\left(1-2x^2+x^4\right)dx=\pi\left(x-\frac{2}{3}x^3+\frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-1}^{1}$$

$$=\pi\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)=\frac{16}{15}\pi$$

إذن، الحجم الدوراني المطلوب يساوي $\frac{16}{15}\pi$ وحدة مكعبة.

20. $2-x^2=0$

$x=-\sqrt{2}$ أو $x=\sqrt{2}$

$$V=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\pi\left(2-x^2\right)^2 dx=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\pi\left(4-4x^2+x^4\right)dx$$

$$=\pi\left(4x-\frac{4}{3}x^3+\frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}$$

$$=\pi\left(4\sqrt{2}-\frac{8}{3}\sqrt{2}+\frac{4}{5}\sqrt{2}+4\sqrt{2}-\frac{8}{3}\sqrt{2}+\frac{4}{5}\sqrt{2}\right)=\frac{64\sqrt{2}}{15}\pi$$

إذن، الحجم الدوراني المطلوب يساوي $\frac{64\sqrt{2}}{15}\pi$ وحدة مكعبة.

21. $x-x^2=0$

$x=1$ أو $x=0$

$$V=\int_0^1\pi\left(x-x^2\right)^2 dx=\int_0^1\pi\left(x^2-2x^3+x^4\right)dx=\pi\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1$$

$$=\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)=\frac{\pi}{30}$$

إذن، الحجم الدوراني المطلوب يساوي $\frac{\pi}{30}$ وحدة مكعبة.

22. $V=\int_{-1}^{1}\pi\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx=\left|\pi\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\right|_{-1}^{1}=\pi\left(1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi$

إذن، الحجم الدوراني المطلوب يساوي $\frac{4}{3}\pi$ وحدة مكعبة.

23. $V=\int_{-6}^{6}\pi\left(\sqrt{36-x^2}\right)^2 dx=\pi\left(36x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-6}^{6}$

$=\pi(216-72+216-72)=288\pi$

إذن، الحجم الدوراني المطلوب يساوي 288π وحدة مكعبة.

24. $V=\int_{-r}^{r}\pi\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 dx=\pi\left(r^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-r}^{r}$

$=\pi\left(r^3-\frac{r^3}{3}+r^3-\frac{r^3}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi r^3$

إذن، الحجم الدوراني المطلوب يساوي $\frac{4}{3}\pi r^3$ وحدة مكعبة.

25. $V=\int_{-a}^{a}\pi\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)^2 dx=\int_{-a}^{a}\pi\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)dx$

$=\pi\frac{b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-a}^{a}=\pi\frac{b^2}{a^2}\left(a^3-\frac{a^3}{3}+a^3-\frac{a^3}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi ab^2$

إذن، حجم المجسم الناتج عن دوران القطع الناقص يساوي $\frac{4}{3}\pi ab^2$ وحدة مكعبة.

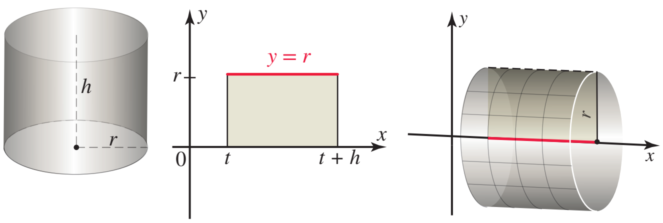
26. $V=\int_0^2\pi\left(1-\frac{x}{2}\right)^2 dx=\int_0^2\pi\left(1-x+\frac{x^2}{4}\right)dx=\pi\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{12}\right)\Big|_0^2$

$=\pi\left(2-2+\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}\pi$

إذن، الحجم الدوراني المطلوب يساوي $\frac{2}{3}\pi$ وحدة مكعبة.

27. $V=\int_t^{t+h}\pi y^2\,dx=\int_t^{t+h}\pi r^2\,dx=\pi r^2x\Big|_t^{t+h}=\pi r^2(t+h)-\pi r^2t=\pi r^2h$

إذن، حجم الأسطوانة يساوي πr^2h وحدة مكعبة.



28. صواب. $V=\int_a^b\pi[f(x)]^2\,dx$ و $A(x)=\pi[f(x)]^2$، إذن $V=\int_a^b A(x)\,dx$.

29. خطأ. لتكن $f(x)=\sqrt{x}$. إذن،

$V=\int_0^2\pi[f(x)]^2\,dx=\int_0^2\pi(\sqrt{x})^2\,dx=\int_0^2\pi x\,dx$.

32. **a.** لنفترض أن r_C هو طول نصف قطر الزهرية عند ارتفاع معين C، وبالتالي فإن المحيط هو: $C=2\pi r_C$

$r_C=\frac{C}{2\pi}$

إذن، المساحة عند هذا المحيط هي:

$A_C=\pi r_C{}^2=\pi\frac{C^2}{4\pi^2}=\frac{C^2}{4\pi}$

إذن، مساحات المقاطع العرضية هي:

$A_{5.4}=\frac{5.4^2}{4\pi}\approx 2.32$

$A_{4.5}=\frac{4.5^2}{4\pi}\approx 1.61$

$A_{4.4}=\frac{4.4^2}{4\pi}\approx 1.54$

$A_{5.1}=\frac{5.1^2}{4\pi}\approx 2.07$

$A_{6.3}=\frac{6.3^2}{4\pi}\approx 3.16$

$A_{7.8}=\frac{7.8^2}{4\pi}\approx 4.84$

$A_{9.4}=\frac{9.4^2}{4\pi}\approx 7.03$

$A_{10.8}=\frac{10.8^2}{4\pi}\approx 9.28$

$A_{11.6}=\frac{11.6^2}{4\pi}\approx 10.71$

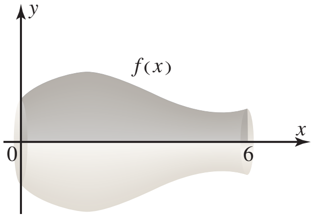
$A_{11.6}=\frac{11.6^2}{4\pi}\approx 10.71$

$A_9=\frac{9^2}{4\pi}\approx 6.45$

$A_{6.3}=\frac{6.3^2}{4\pi}\approx 3.16$

b. إذا تخيلنا الزهرية موضوعة بشكل أفقي، ومحورها الأساسي هو المحور x، فإن التقاء محيط الزهرية مع المستوى الإحداثي، حيث $y \geq 0$، يشكلّ الدالة $f(x)$. نشير إلى أن $f(x)$ تمثل نصف قطر الدائرة المكونة من محيط الزهرية عند x. يمكن كتابة صيغة حجم الزهرية في الفترة $[0, 6]$ كالتالي:

$$V = \int_0^6 \pi[f(x)]^2\,dx$$



33. معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(0, r)$ و $\left(h, \frac{r}{2}\right)$ تحسب بالشكل التالي:

$$y - r = \left(\frac{r - \frac{r}{2}}{0 - h}\right)(x - 0)$$

$$y = \frac{r}{2h}(2h - x)$$

إذن، حجم المخروط الناقص يساوي الحجم الدوراني لمنحنى الدالة $f(x) = \frac{r}{2h}(2h - x)$ حول المحور x من $x = 0$ إلى $x = h$.

$$V = \int_0^h \pi\,[f(x)]^2\,dx = \int_0^h \pi\left[\frac{r}{2h}(2h - x)\right]^2 dx$$

$$= \int_0^h \pi\left(\frac{r}{2h}\right)^2 (2h - x)^2\,dx$$

$$= -\frac{\pi r^2}{4h^2}\cdot\frac{(2h - x)^3}{3}\bigg|_0^h$$

$$= \frac{\pi r^2}{4h^2}\cdot\frac{(x - 2h)^3}{3}\bigg|_0^h$$

$$= \frac{\pi r^2}{12h^2}\left[(h - 2h)^3 - (-2h)^3\right]$$

$$= \frac{\pi r^2}{12h^2}\left(-h^3 + 8h^3\right)$$

$$= \frac{7\pi r^2 h}{12}$$

إذن، حجم المخروط الناقص يساوي $\frac{7\pi r^2 h}{12}$ وحدة مكعبة.

34. a. إذا كان V حجم الوعاء فإنّ $V = \frac{V_S}{2} = \frac{\frac{4}{3}\pi a^3}{2} = \frac{2}{3}\pi a^3$ حيث V_S يمثل حجم الكرة.

إذا اعتبرنا أنّ قطر نصف الكرة يقع على المحور y وأنّ مركز نصف الكرة هو نقطة الأصل في المستوى الإحداثي، وأن نصف الكرة تقع في الربعين الأول والرابع في المستوى الإحداثي، فإن تقاطع نصف الكرة مع الربع الأول من المستوى الإحداثي يشكّل منحنى الدالة $f(x) = y = \sqrt{a^2 - x^2}$، ويمكننا إيجاد حجم الماء V_W كما يلي:

$$V_W = V - \int_0^{a-h} \pi[f(x)]^2\,dx = V - \int_0^{a-h} \pi\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 dx$$

$$= V - \int_0^{a-h} \pi\left(a^2 - x^2\right)dx = \frac{2}{3}\pi a^3 - \pi\left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\bigg|_0^{a-h}$$

$$= \frac{2}{3}\pi a^3 - \pi\left[a^2(a - h) - \frac{(a - h)^3}{3}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\pi a^3 - \pi\left[\frac{3a^3 - 3a^2h - \left(a^3 - 3a^2h + 3ah^2 - h^3\right)}{3}\right]$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(2a^3 - 3a^3 + 3a^2h + a^3 - 3a^2h + 3ah^2 - h^3\right) = \frac{\pi}{3}\left(3ah^2 - h^3\right)$$

b. $V_W = \frac{\pi}{3}\left(3ah^2 - h^3\right) = \frac{\pi}{3}\left(3 \times 5 \times h^2 - h^3\right) = \frac{\pi}{3}\left(15h^2 - h^3\right)$

سرعة ارتفاع مستوى الماء في الخزان بعد أن يبلغ ارتفاعه 4 m هي $\frac{dV_W}{dh}$ حيث $\frac{dV_W}{dt} = 0.2$ ونجد قيمتها على الشكل التالي:

$$\frac{dV_W}{dt} = \frac{dV_W}{dh}\cdot\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\frac{dV_W}{dt}}{\frac{dV_W}{dh}} = \frac{0.2}{\pi\left(10h - h^2\right)}$$

سرعة ارتفاع مستوى الماء في الخزان بعد أن يبلغ ارتفاعه 4 m هي:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{0.2}{\pi\left(10h - h^2\right)} = \frac{0.2}{\pi\left(10 \times 4 - 4^2\right)} = \frac{1}{120\pi}\ \text{m/sec}$$

5.5 تطبيقات التكامل المحدود Applications of Definite Integrals

ما ستتعلّمه
- التغير الكلي
- تطبيقات فيزيائية

... ولماذا

لم يتحدد مفهوما السرعة والتسارع بشكل دقيق في الفيزياء إلا بعد إيجاد مفهوم المشتقة في الرياضيات، وبذلك صار الانتقال من المسافة إلى السرعة فالتسارع في المسائل الفيزيائية يتم عن طريق المشتقة، وبالعكس عن طريق التكامل.

معايير الدرس

12A.6.3

12A.4.4

المصطلحات
- التغير الكلي total change

التغير الكلي

التغير الكلي من المسائل المهمة، بالإضافة إلى إيجاد المساحة، التي نحتاج فيها إلى التكامل المحدود، وفي طليعة ما نحتاج إلى تحديد تغيره الكلي دالة التكلفة. لقد عرّفنا التكلفة الحدية بالنسبة للمتغير x، سابقًا، بأنها معدل تغير التكلفة عند تغير الإنتاج من x قطعة إلى $x+1$ قطعة. على سبيل المثال، إذا كانت التكلفة الحدية لمنتج ما عند x هي $f(x) = x^2 + 20$، فإن $f(2) = 24$ يعني أن معدل تغير التكلفة عند زيادة الإنتاج عند $x = 2$ بمقدار وحدة واحدة يساوي 24، كذلك $f(3) = 29$ يعني أن زيادة الإنتاج عند $x = 3$ بمقدار وحدة واحدة يؤدي إلى تغير متوسط معدله ليصبح 29

غير أن هذا التقريب غير دقيق لأن هناك فرقًا بين التغير ومتوسط معدل التغير. لمعرفة قيمة التغير الدقيق عند زيادة الإنتاج من 2 إلى 3، علينا أن نقسم الفترة $[2, 3]$ إلى فترات صغيرة من خلال الأعداد $x_0 = 2, x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n = 3$ بحيث تكون الفترة i هي $[x_{i-1}, x_i]$، وكلما صغرت هذه الفترة، اقتربت قيمة التغير في دالة التكلفة من $f(x_i)\,\Delta x$ أكثر، وبالتالي يصبح المجموع $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ أقرب إلى القيمة الفعلية لتغير التكلفة كلما كبرت n، أي أن القيمة الدقيقة لتغير التكلفة هي

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

لذا نستعمل التكامل المحدود لإيجاد مقدار التغير في قيمة التكلفة. وفي التمثيل البياني تصبح قيمة المساحة بين منحنى دالة التكلفة الحدية والمحور x من $x = a$ إلى $x = b$ هي قيمة التغير الكلي للتكلفة من a إلى b.

تنبيه

لا معنى لتغير التكلفة من a إلى b إلا إذا كان a و b عددين صحيحين، أما تغير دالة التكلفة فلا يصحّ رياضيًا إلا بين عددين حقيقيين. هذا الانتقال من التكلفة إلى دالة التكلفة هو ما سمح باستعمال التكامل المحدود.

الهدف

سيتعرف الطلاب على تطبيقات أخرى للتكامل المحدود.

دليل الدرس
1. تعريف التغير الكلي
2. استعمال التكامل المحدود في التطبيقات الفيزيائية

تحفيز

أسأل الطلاب عن طريقة لإيجاد القيمة التقريبية للصيغة $ln\,3 - ln\,2$

التغير الكلي للدالة f

إذا كانت الدالة f تعطي معدل تغير الدالة F في الفترة $[a, b]$، فإن التغير الكلي للدالة F في هذه الفترة هو

$$\mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

مثال 1 استهلاك الغاز الطبيعي

تعطي الدالة التالية المعدل السنوي لاستهلاك الغاز الطبيعي في إحدى المدن (بتريليونات الأقدام المكعبة).

$$\mathrm{C}'(t) = t + e^{0.01t}$$

حيث t الزمن (بالسنوات) بدءًا من العام 2000، أي $t = 0$. أوجد كمية الغاز الطبيعي التي استهلكتها هذه المدينة من العام 2005 إلى العام 2015

(تابع)

الحل

لإيجاد الاستهلاك الكلي للمدينة من الغاز الطبيعي خلال 10 سنوات بين العامين 2005 و 2015، استعمل التكامل المحدود.

$$\begin{aligned} C(15) - C(5) &= \int_5^{15} \left(t + e^{0.01t}\right) dt \\ &= \left(\frac{t^2}{2} + \frac{e^{0.01t}}{0.01}\right)\Bigg|_5^{15} \\ &= \left(112.5 + 100e^{0.15}\right) - \left(12.5 + 100e^{0.05}\right) \\ &\approx 111 \end{aligned}$$

إذن، استهلكت المدينة 111 تريليون قدم مكعب تقريبًا من الغاز الطبيعي بين العامين 2005 و 2015

سؤال للتفكر

س: ما المفردات التي تشير إلى مشتقة دالة تغير كلي؟

نموذج إجابة:

المصطلحات "معدل التغير"، و"معدل الاستهلاك"، و"معدل الاضمحلال"، و"معدل النمو"، و"معدل التزايد أو التناقص"، وكل ما يدل على التغير، جميعها تشير إلى مشتقة دالة كلية.

حاول أن تحل التمرين 1

لمزيد من فهم تطبيقات التكامل المحدود نورد المثال التالي.

مثال 2 توفير

اعتمدت إحدى الشركات إجراءات جديدة في الإنتاج في إحدى منشآتها يؤدي إلى توفير قيمة مالية يمكن حسابها باستعمال دالة التوفير $S(t)$، حيث t الزمن بالسنوات و $S(t)$ التوفير بآلاف الريالات. تتناقص قيمة التوفير وفق دالة المعدل

$$S'(t) = 100 - t^2$$

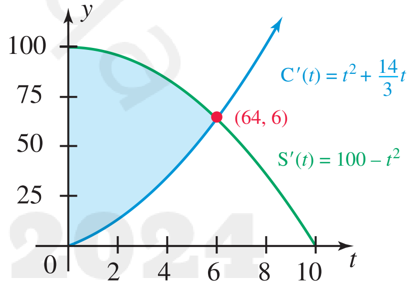
غير أن هذه الإجراءات الجديدة في الإنتاج ينتج عنها تكاليف إضافية $C(t)$ تزداد بمعدل

$$C'(t) = t^2 + \frac{14}{3}t$$

حيث t الزمن بالسنوات و $C(t)$ التكاليف الإضافية بآلاف الريالات.

A. حدّد المدة الزمنية التي تحقق فيها الشركة توفيرًا صافيًا.

B. أوجد مبلغ التوفير الصافي الكلي الذي وفرته الشركة خلال هذه المدة.



الشكل 5.5.1 يبيّن الشكل أنه قبل حد الست سنوات يكون معدل التوفير أكبر من معدل التكلفة، أما ابتداء من حد 6 سنوات يصبح معدل التكلفة أكبر من معدل التوفير.

الحل

A. التوفير الصافي يساوي ناتج طرح التكلفة من التوفير.

$$f(t) = S(t) - C(t)$$

يبين الشكل 5.5.1 منحنى كل من دالة معدل التوفير ودالة معدل التكلفة. دالة معدل التكلفة في تزايد بينما دالة معدل التوفير في تناقص. على الشركة أن تعتمد هذه الإجراءات الجديدة إلى أن يصبح الفرق بين الكميتين يساوي الصفر، أي إلى الزمن الذي يتقاطع فيه المنحنيان.

يتقاطع المنحنيان عندما

$$C'(t) = S'(t)$$

$$t^2 + \frac{14}{3}t = 100 - t^2$$

سؤال للتفكر

س: اذكر مثالًا من واقع الحياة على هذا النوع من المواقف.

نموذج إجابة:

عندما بدأت الآلة تحل محل الإنسان، تمكنت الشركات الصناعية الكبرى من توفير أموال طائلة عبر استغنائها عن عدد كبير من العمال الذين أصبحت الآلات تقوم بأعمالهم. غير أن هذه الآلات تحتاج إلى تكلفة صيانة وتكلفة تشغيل وما إلى ذلك. لذلك، إذا أردنا أن نحسب مبلغ التوفير الصافي خلال مدة معيّنة، يجب أن نطرح تكلفة تشغيل الآلات من المبالغ التي وفرتها الشركة عبر استغنائها عن العمال.

(تابع)

سؤال للتفكر

س: كيف نعرّف المدة الزمنية التي تحقق فيها الشركة توفيرًا صافيًا بحيث يتناسب ذلك مع الخصائص الرياضية في هذا الزمن؟

نموذج إجابة:

نريد تحديد المدة التي تكون فيها دالة التوفير الصافي $f(t) = S(t) - C(t)$ متزايدة. أي أن $f'(t) \geq 0$.

إذن، $S'(t) - C'(t) \geq 0$.

إذن، تنتهي هذه المدة عند t حيث $S'(t) = C'(t)$.

أوجد حل المعادلة كما يلي:

$$-2t^2 - \frac{14}{3}t + 100 = 0$$

اضرب في $-\frac{3}{2}$

$$3t^2 + 7t - 150 = 0$$

حلّل إلى العوامل

$$(t-6)(3t+25) = 0$$

استعمل خاصية ناتج الضرب الصفري

$t = 6$ أو $t = -\frac{25}{3}$

فقط $t = 6$ يشكل حلًّا ذا معنى هنا.

إذن، على الشركة أن تعتمد الإجراءات الجديدة مدة 6 سنوات فقط.

B. التوفير الصافي الكلي خلال هذه المدة هو $F(6) - F(0)$

ويمكن الحصول على هذه القيمة من خلال التكامل المحدود:

$$\begin{aligned} F(6) - F(0) &= \int_0^6 \left[\left(100 - t^2\right) - \left(t^2 + \frac{14}{3}t\right)\right]dt \\ &= \int_0^6 \left(-2t^2 - \frac{14}{3}t + 100\right)dt \\ &= \left(-\frac{2}{3}t^3 - \frac{7}{3}t^2 + 100t\right)\Big|_0^6 \\ &= -\frac{2}{3}(216) - \frac{7}{3}(36) + 100(6) \\ &= 372 \end{aligned}$$

لقد وفّر اعتماد هذه الإجراءات على الشركة خلال 6 سنوات مبلغًا مقداره QR 372 000.

حاول أن تحل التمرين 6

تطبيقات فيزيائية

في الفيزياء، إذا كانت $s(t)$ هي الدالة التي تحدد موقع جسيم يتحرك على خط مستقيم خلال الزمن t، فإن متوسط سرعة الجسيم بين الزمن t_1 والزمن t_2 هو

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

أما السرعة اللحظية عند الزمن t فهي مشتقة دالة الموقع

$$v(t) = s'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$

كما أن التسارع عند اللحظة t هو مشتقة دالة السرعة اللحظية عند هذا الزمن.

$$a(t) = v'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{v(t+h) - v(t)}{h}$$

بذلك يتضح أن دالة الموقع هي دالة أصلية لدالة السرعة: $s(t) = \int v(t)\, dt$.

وبالتالي فإن دالة السرعة هي دالة أصلية لدالة التسارع: $v(t) = \int a(t)\, dt$.

السرعة والتسارع

إذا كانت الدالة s هي الدالة التي تحدد موقع جسيم يتحرك على خط مستقيم وكانت v هي دالة السرعة و a دالة التسارع، إذن:

$$s(t) = \int v(t)\, dt$$

$$v(t) = \int a(t)\, dt$$

مثال 3 السرعة والتسارع

لنفترض أن جسيمًا يتحرك على خط مستقيم وكانت $s(t)$ هي دالة الموقع و $v(t)$ دالة السرعة و $a(t)$ دالة التسارع.

A. إذا كانت دالة السرعة هي $v(t) = 6t^2 - 8t$ وكان الجسيم يبعد 5 وحدات عن نقطة الأصل من الجهة الموجبة عند $t = 0$ (أي أن $s(0) = 5$). أوجد $s(t)$.

B. أثبتت تجارب عديدة أن أي جسم يلقى من مكان مرتفع يسقط بتسارع ثابت (مع تجاهل مقاومة الهواء) يساوي $32\ \text{ft/sec}^2$
إذن، إذا كانت نقطة الأصل عند سطح الأرض فإن $a(t) = -32$ (الإشارة سالبة نظرًا لسقوط الجسم واقترابه من الأرض/ نقطة الأصل).
لنفترض أن الجسم أُلقي من أعلى برج ارتفاعه 1 100 ft بسرعة ابتدائية قيمتها -20 ft/sec
أوجد ارتفاع الجسم عن سطح الأرض، $s(t)$، عند الزمن t.

C. استعمل المعادلات السابقة (في الفرع B) لإيجاد سرعة الجسم لحظة ارتطامه بالأرض. ما الزمن الذي يستغرقه وصول الجسم إلى الأرض؟

الحل

A. بما أن $v(t) = s'(t)$، فإن $s(t)$ هي دالة أصلية للدالة $v(t)$.

$$s(t) = \int v(t)\, dt = \int \left(6t^2 - 8t\right) dt$$
$$= 2t^3 - 4t^2 + C$$

لإيجاد الثابت C استعمل المعلومة $s(0) = 5$.

$$s(t) = 2t^3 - 4t^2 + C$$

$$s(0) = 5$$

$$2(0)^3 - 4(0)^2 + C = 5$$

$$C = 5$$

$$s(t) = 2t^3 - 4t^2 + 5$$

(تابع)

أسئلة للتفكر

س: هل تتأثر القيمة المطلقة لسرعة الجسم عند وصوله إلى الأرض بالارتفاع الذي يسقط منه؟ وضح إجابتك.

نموذج إجابة:

نعم، لأن زمن الذي يستغرقه وصول الجسم إلى الأرض مرتبط بالارتفاع الذي يسقط منه. فلو استبدلنا 1100 ft بالارتفاع h وأعدنا الحساب، نجد أن الزمن اللازم لوصول الجسم إلى الأرض هو:

$$t = \frac{-5 + \sqrt{25 + 4h}}{8}$$

لذلك كلما ازداد الارتفاع h ازداد زمن وصول الجسم إلى الأرض وكبرت القيمة المطلقة للسرعة

$$|v(t)| = +32t + 20$$

س: هل تتأثر القيمة المطلقة لسرعة الجسم الساقط عند وصوله إلى الأرض بكتلته؟

نموذج إجابة:

واضح من خلال العمليات الحسابية المستخدمة في حل المثال أن كتلة الجسم الملقى لا تدخل في أي معادلة من المعادلات. لذلك، إذا ألقينا قطعة صغيرة من الحديد مثلاً وكتلة كبيرة من الحديد في نفس اللحظة، ستصلان معًا إلى الأرض (إذا أهملنا مقاومة الهواء).

B. أوجد أولًا $v(t)$ من تكامل $a(t)$:

$$v(t) = \int (-32)\, dt = -32t + C$$

عند $t = 0$، $v(t) = -20$. إذن:

$$-20 = -32(0) + C$$

$$C = -20$$

$$v(t) = -32t - 20$$

يجب إيجاد قيمة C قبل استعمال التكامل من جديد لإيجاد $s(t)$.

الدالة $s(t)$ هي الدالة الأصلية للدالة $v(t)$.

$$s(t) = \int v(t)\, dt$$

$$= \int (-32t - 20)\, dt$$

$$= -16t^2 - 20t + C$$

بما أن $s(t) = 1\,100$ عند $t = 0$، عوّض لإيجاد C.

$$1\,100 = -16(0)^2 - 20(0) + C$$

$$C = 1\,100$$

$$s(t) = -16t^2 - 20t + 1\,100.$$

وهو ارتفاع الجسم عن الأرض في اللحظة t التي تسبق ارتطامه بالأرض.

C. عند ارتطام الجسم بالأرض يكون $s = 0$. إذن:

$$0 = -16t^2 - 20t + 1\,100$$

$$0 = -4\left(4t^2 + 5t - 275\right)$$

$$0 = 4t^2 + 5t - 275$$

باستعمال الصيغة العامة لحل المعادلة التربيعية، اكتب:

$$t = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 4400}}{8} \approx \frac{-5 \pm 66.5}{8}$$

اختر القيمة الموجبة لأن الزمن لا يمكن أن يكون سالبًا. إذن، $t \approx 7.69$.

يستغرق الجسم 7.69 ثانية تقريبًا ليرتطم بالأرض، وتكون سرعته عند ارتطامه بالأرض:

$$v(7.69) = -32(7.69) - 20 \approx -266 \text{ ft/sec}$$

إذن، يرتطم الجسم بالأرض بسرعة تساوي 266 ft/sec

حاول أن تحل التمرين 7

للطلاب الذين يواجهون صعوبات

(مع المثال 3) من المستحسن أن يتلمس بعض الطلاب المعطيات الواقعية التي يمكن أن تحصل في مواقف كثيرة من واقع الحياة.

س: إذا سقط الجسم من ارتفاع 1 100 ft من دون سرعة ابتدائية، فكم ستبلغ سرعته عند ارتطامه بالأرض؟

نموذج إجابة:

$$v(t) = \int a(t)\, dt\ ,\ a(t) = -32$$
$$= -32t + C$$
$$v(0) = 0$$
$$C = 0$$
$$v(t) = -32t$$
$$s(t) = \int v(t)\, dt$$
$$= -16t^2 + C$$
$$s(0) = 1\,100$$
$$C = 1\,100$$
$$s(t) = -16t^2 + 1\,100$$

إذا كان $s(t) = 0$

$$-16t^2 + 1100 = 0$$
$$t^2 = \frac{1100}{16} = 68.75$$
$$t \approx 8.3$$

لذلك تبلغ سرعة الجسم عند ارتطامه بالأرض:

$$v(8.3) \approx -265.6 \text{ ft/sec}$$

ملاحظة

إشارة السرعة سالبة لأن الجسم يسقط من الأعلى إلى الأسفل أي أنه يتحرّك عكس اتجاه المحور الرأسي.

يمكننا استعمال التكامل المحدود للسرعة أيضًا، باعتباره تغيرًا كليًا، لإيجاد الإزاحة بين زمنين. إذا كانت السرعة ثابتة، لا نحتاج، بالطبع، إلى حساب التكامل المحدود لأن الإزاحة ببساطة هي السرعة × الزمن.

أما إذا كانت السرعة غير ثابتة، فإنه يلزمنا حساب الإزاحة في الفترة الزمنية من $t = a$ إلى $t = b$ أي $s(b) - s(a)$ حيث

$$s(b) - s(a) = \int_a^b v(t)\, dt$$

ليس مهمًا أن تكون قيمة $v(t)$ سالبة أو موجبة، لأن الإزاحة $s(b) - s(a)$ يمكن أن تكون سالبة أو موجبة، وذلك بحسب اتجاه الحركة.

لتوضيح ذلك نأخذ جسمًا يتحرك على خط مستقيم بسرعة

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = t^2 - \frac{8}{(t+1)^2}$$

نلاحظ أن $v(0) = -8$ و $v(5) \approx 24.78$ و $v(1.25) \approx -0.018$.

تكون الإزاحة في الفترة الزمنية من $t = 0$ إلى $t = 5$ هي $s(5) - s(0) = \int_0^5 v(t)\, dt$.

مثال 4 إيجاد الموقع باستعمال الإزاحة

لنفترض أن جسيمًا يتحرك على خط مستقيم بسرعة

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = t^2 - \frac{8}{(t+1)^2}$$

وأن موقع الجسيم لحظة انطلاقه $t = 0$ كان عند 9 $s(0) = 9$. أوجد موقع الجسيم في كل من الحالتين التاليتين.

A. عند $t = 1$

B. عند $t = 5$

الحل

A. يمكن إيجاد إزاحة الجسيم في الفترة الزمنية من $t = 0$ إلى $t = 1$ باستعمال التكامل المحدود:

$$\begin{aligned} s(1) - s(0) &= \int_0^1 v(t)\, dt \\ &= \int_0^1 \left(t^2 - \frac{8}{(t+1)^2}\right) dt \\ &= \left(\frac{t^3}{3} + \frac{8}{t+1}\right)\Bigg|_0^1 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{8}{2} - 8 \\ &= -\frac{11}{3} \end{aligned}$$

(تابع)

سؤال للتفكر

س: باستعمال معطيات المثال 4 أوجد دالة موقع الجسيم.

نموذج إجابة:

في الثانية t،

$$\begin{aligned} s(t) - s(0) &= \int_0^t v(u)\, du \\ &= \int_0^t \left(u^2 - \frac{8}{(u+1)^2}\right) du \\ &= \frac{u^3}{3} + \frac{8}{u+1}\Bigg|_0^t = \frac{t^3}{3} + \frac{8}{t+1} - 8 \\ s(t) &= s(0) + \frac{t^3}{3} + \frac{8}{t+1} - 8 \\ &= 9 + \frac{t^3}{3} + \frac{8}{t+1} - 8 = \frac{t^3}{3} + \frac{8}{t+1} + 1 \end{aligned}$$

احسب موقع الجسيم عندما $t = 1$:

$$s(1) = s(0) - \frac{11}{3} = 9 - \frac{11}{3} = \frac{16}{3}$$

في الثانية الأولى تحرك الجسيم مسافة مقدارها $\frac{11}{3}$ إلى يسار موقعه الأصلي حيث $s(0) = 9$، ووصل إلى النقطة عند $t = 1$ حيث $s(1) = \frac{16}{3}$.

B. يمكن إيجاد إزاحة الجسيم في الفترة الزمنية من $t = 0$ إلى $t = 5$ باستعمال التكامل المحدود:

$$\begin{aligned} s(5) - s(0) &= \int_0^5 v(t)\, dt \\ &= \int_0^5 \left(t^2 - \frac{8}{(t+1)^2}\right) dt \\ &= \left(\frac{t^3}{3} + \frac{8}{t+1}\right)\Big|_0^5 \\ &= 35 \end{aligned}$$

احسب موقع الجسيم عندما $t = 5$:

$$s(5) = s(0) + 35 = 9 + 35 = 44$$

حاول أن تحل التمرين 8

للتوسّع أكثر في تطبيقات التكامل المحدود نورد المثال التالي.

مثال 5 إيجاد السرعة والإزاحة من التسارع

تحرك جسم في خط مستقيم بسرعة ابتدائية تساوي $v(0) = 5$ m/sec.
ثم أخذ يزيد من سرعته خلال 8 ثوان بتسارع يساوي $a(t) = 2.4\, t$ m/sec^2.

A. أوجد سرعة الجسم بعد مرور 8 ثوان.

B. أوجد إزاحة الجسم خلال هذا الزمن.

الحل

A. إذا كانت السرعة $v(t)$ هي دالة أصلية لدالة التسارع $a(t)$، فإن تغير السرعة يتمثل بالتكامل المحدود:

$$\begin{aligned} v(8) - v(0) &= \int_0^8 a(t)\, dt \\ &= \int_0^8 (2.4t)\, dt \\ &= \left(1.2t^2\right)\Big|_0^8 \\ &= 76.8 \end{aligned}$$

إذن

$$v(8) = v(0) + 76.8 = 5 + 76.8 = 81.8 \text{ m/sec}$$

(تابع)

ملاحظة

موقع الجسم = الموقع الإبتدائي + الإزاحة

للطلاب سريعي الإنجاز

(مع المثال 4) يمكن لبعض الطلاب الاستعانة بقواعد الجبر لوصف ظاهرة معينة فيزيائيًا.

س: صف حركة هذا الجسيم بالكامل.

نموذج إجابة:

ينطلق الجسيم من النقطة $s(0) = 9$ باتجاه نقطة الأصل لأن $v(0) = -8 < 0$.

السرعة هي:

$$\begin{aligned} v(t) &= t^2 - \frac{8}{(t+1)^2} \\ &= \frac{[t\,(t+1)]^2 - 8}{(t+1)^2} \\ &= \frac{\left(t\,(t+1) - 2\sqrt{2}\right)\left(t\,(t+1) + 2\sqrt{2}\right)}{(t+1)^2} \end{aligned}$$

بما أن $t\,(t+1) + 2\sqrt{2} > 0$ و $(t+1)^2 > 0$،

إذن الصيغة التي تحدد إشارة $v(t)$ هي $t\,(t+1) - 2\sqrt{2}$

عند حل المعادلة التربيعية

$$t^2 + t - 2\sqrt{2} = 0$$

نجد أن الجذور هي

$$t = \frac{-1 - \sqrt{1 + 8\sqrt{2}}}{2} \quad \text{أو} \quad t = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8\sqrt{2}}}{2}$$

وبما أن $t > 0$

إذن، تكون $v(t)$ سالبة في الفترة $\left[0, \frac{-1 + \sqrt{1 + 8\sqrt{2}}}{2}\right[$

وتساوي الصفر عند $t = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8\sqrt{2}}}{2}$

ثم موجبة في الفترة $\left]\frac{-1 + \sqrt{1 + 8\sqrt{2}}}{2}, \infty\right[$

إذن، يتحرك الجسم من النقطة $s(0) = 9$ باتجاه نقطة الأصل حتى الثانية

$$t_0 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8\sqrt{2}}}{2} \approx 1.25$$

وفي تلك اللحظة تكون $s(t_0) \approx 5.2$، وبعد ذلك يبدأ بالابتعاد عن نقطة الأصل.

سؤال للتفكر

س: (مع المثال 5) هل هناك فرق بين "إزاحة الجسم" و "التغير الكلي لدالة الموقع"؟

نموذج إجابة:

كلا، عندما يتعلق الأمر بجسم يتحرك، نسمي تغير موقعه بين زمنين "إزاحة" له، وهذا التغير هو "التغير الكلي لدالة الموقع" الذي هو التكامل المحدود للسرعة بين هذين الزمنين.

ملاحظات على التمارين

التمارين 1-20، تدرب الطالب على أنواع مختلفة من تطبيقات التكامل المحدود في حساب التغير الكلي أو دراسة الأجسام المتحركة.

التمارين 21-25، تدرب الطالب على أنماط من الاختبارات.

التقييم المستمر

التقييم الذاتي:

التمارين 2, 3, 9, 12, 15, 19

B. لإيجاد إزاحة الجسم يجب إيجاد دالة السرعة، ويمكنك القيام بذلك أيضًا باستعمال التكامل المحدود. تغير السرعة بين 0 و t هو

$$v(t) - v(0) = \int_0^t a(u)\,du$$
$$= \int_0^t (2.4u)\,du$$
$$= \left(1.2u^2\right)\Big|_0^t$$
$$= 1.2t^2$$
$$v(t) = v(0) + 1.2t^2 = 5 + 1.2t^2$$

إذن الإزاحة بين $t = 0$ و $t = 8$ هي

$$s(t) = \int_0^8 v(t)\,dt$$
$$= \int_0^8 \left(5 + 1.2t^2\right)dt$$
$$= 5t + 0.4t^3\Big|_0^8$$
$$= 5(8) + 0.4(8)^3 - \left(5(0) + 0.4(0)^3\right)$$
$$= 244.8\text{ m}$$

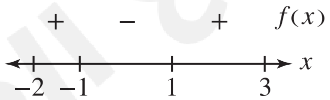
إذن، إزاحة الجسم في غضون 8 ثوان هي 244.8 m

حاول أن تحل التمرين 16

مراجعة سريعة 5.5

في التمارين 1-8، أوجد كل قيم x (إن وجدت) حيث تغير الدالة إشارتها في الفترة المعطاة. ارسم خط الأعداد الذي يمثل تلك الفترة وحدد عليه إشارة الدالة في كل فترة جزئية. على سبيل المثال:

$f(x) = x^2 - 1$ في $[-2\,,\,3]$



تغير الدالة إشارتها عند $x = \pm 1$

1. $f(x) = \sin 2x,\ [-3, 2]$

2. $f(x) = x^2 - 3x + 2,\ [-2, 4]$

3. $f(x) = x^2 - 2x + 3,\ [-4, 2]$

4. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1,\ [-2, 2]$

5. $f(x) = x\cos 2x,\ [0, 4]$

6. $f(x) = xe^{-x},\ [0, \infty[$

7. $f(x) = \frac{x}{x^2+1},\ [-5, 30]$

8. $f(x) = \frac{x^2-2}{x^2-4},\ [-3, 3]$

الدرس 5.5 التمارين

1. استهلاك الوقود ينمذِج معدل الاستهلاك السنوي للوقود (بمليارات البراميل) في إحدى الدول خلال فترة الثمانينيات من القرن العشرين بالدالة $C'(t) = 27.08\ e^{\frac{t}{25}}$، حيث t عدد السنوات بعد الأول من يناير 1980. أوجد الاستهلاك الكلي للوقود في هذه الدولة من 1 يناير 1980 إلى 1 يناير 1990

2. استهلاك الكهرباء يقاس الاستهلاك المنزلي للكهرباء بالكيلوواط. افترض أن الدالة التالية تنمذج معدل استهلاك أحد المنازل من الكهرباء.

$$C'(t) = 3.9 - 2.4 \sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)$$

حيث تقاس $C(t)$ بالكيلوواط، و t عدد الساعات بعد منتصف الليل. أوجد الاستهلاك اليومي لهذا المنزل من الكهرباء بالكيلوواط ساعة.

3. حركة السير تنمذج الدالة $f'(t) = 74 + \cos\frac{t}{3}$ حركة المركبات عند إحدى نقاط التقاطع (بالسيارة في الدقيقة)، حيث t عدد الدقائق بعد منتصف النهار. أوجد عدد السيارات التي تمر في هذا التقاطع بين منتصف النهار والساعة 12:30 بعد الظهر.

4. التوفير الصافي اعتمدت إحدى الشركات إجراءات جديدة في الإنتاج في إحدى منشآتها يؤدي إلى توفير قيمة مالية يمكن حسابها باستعمال دالة التوفير $S(t)$، حيث t الزمن بالسنوات و $S(t)$ التوفير بآلاف الريالات. تتناقص قيمة التوفير وفق دالة المعدل.

$$S'(t) = 150 - t^2$$

غير أن هذه الإجراءات الجديدة في الإنتاج ينتج عنها تكاليف إضافية $C(t)$ تزداد بمعدل

$$C'(t) = t^2 + \frac{11}{4}t$$

حيث t الزمن بالسنوات و $C(t)$ التكاليف الإضافية بآلاف الريالات.

a. حدّد المدة الزمنية التي تحقق فيها الشركة توفيرًا صافيًا.

b. أوجد مبلغ التوفير الصافي الذي وفرته الشركة خلال السنة الأولى من اعتماد الإجراءات الجديدة.

c. أوجد مبلغ التوفير الصافي الكلي الذي وفرته الشركة خلال المدة التي تحقق فيها الشركة توفيرًا صافيًا.

5. التوفير الصافي يقوم جهاز جديد لضبط العادم بتخفيض انبعاث غاز أوكسيد الكبريت من عوادم المركبات الآلية.
يقدر معدل التوفير المجتمعي (بملايين الريالات سنويًا) بعد t سنة من استعمال الجهاز، من خلال دالة المعدل

$$S'(t) = -t^2 + t + 8$$

يخفّض الجهاز الجديد من انتاج أوكسيد الكبريت ولكنه يزيد من انتاج أوكسيد النيترات. يُقدر معدل التكلفة الإضافية المجتمعية (بملايين الريالات سنويًا) من جراء استعمال هذا الجهاز لمدة t سنوات من خلال دالة المعدل

$$C'(t) = \frac{3}{25}t^2$$

a. حدد المدة الزمنية التي يكون استعمال الجهاز فيها مربحًا.

b. أوجد مبلغ التوفير الصافي الكلي الممكن توفيره خلال تلك المدة.

6. توفير اشترى سعد سيارة جديدة. ستتيح له السيارة الجديدة توفير مبلغ شهري (بالريالات) يمكن حسابه من خلال الصيغة

$$R'(t) = 60 - 0.001\ e^{0.1t}$$

حيث t الزمن بالأشهر. تكلفة صيانة السيارة الجديدة هي

$$C'(t) = 0.01\ e^{0.1t}$$

a. متى يصبح استعمال هذه السيارة الجديدة ليس مربحًا؟

b. أوجد مبلغ التوفير الصافي الكلي حتى ذلك الزمن.

7. بالعودة للمثال 3، أعد حل الفرعين b و c، على أن يكون ارتفاع البرج هذه المرة 2 717 قدمًا، وتكون السرعة الابتدائية -20 ft/sec

في التمارين 8-15، لنفترض أن جسيمًا يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t)$. أوجد إزاحة الجسيم خلال الفترة المعطاة.

8. $v(t) = 5\cos t,\ 0 \le t \le 2\pi.$

9. $v(t) = 6\sin 3t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$

10. $v(t) = 49 - 9.8t,\ 0 \le t \le 10.$

11. $v(t) = 6t^2 - 18t + 12,\ 0 \le t \le 2$

12. $v(t) = 5\sin^2 t \cos t,\ 0 \le t \le 2\pi$

13. $v(t) = \sqrt{4-t}\,, 0 \le t \le 4.$

14. $v(t) = e^{\sin t}\cos t, 0 \le t \le 2\pi$

15. $v(t) = \frac{t}{1+t^2}, 0 \le t \le 3$

.16 يتسارع جسيم من السكون وفق القاعدة $1 + 3\sqrt{t}$ m/sec^2 حيث t الزمن بالثواني.

.a أوجد سرعة الجسيم بعد 9 ثوان.
.b أوجد إزاحة الجسيم خلال هذه الفترة.

.17 يتحرك جسيم بسرعة

$$v(t) = (t-2)\sin t \text{ m/sec}$$

حيث $0 \le t \le 4$ بالثواني.

أوجد إزاحة الجسيم خلال هذه الفترة.

.18 التلوث يصب التلوث من مصنع في بحيرة قريبة. يحسب معدل تركيز المادة الملوثة عند الزمن t باستعمال المعادلة

$$P'(t) = 140\, t^{\frac{5}{2}}$$

حيث t هو عدد السنوات منذ بدء المصنع بإلقاء ملوثاته في البحيرة. يقدّر البيئيون أنه عندما يصل مستوى التلوث إلى 850 4 وحدة، تكون كل الحياة السمكية في البحيرة قد نفقت. هل يمكن للمصنع أن يعمل لمدة 4 سنوات دون قتل كل الحياة السمكية في البحيرة؟

.19 نمو الأشجار استنتج العلماء بعد دراسة وافية أن معدل نمو بعض الأشجار هو $0.6 + \frac{4}{(t+1)^3}$ قدم سنويًا، حيث t هو الزمن بالسنوات.

.a أوجد مقدار نمو الشجرة بالأقدام في السنة الثانية.

.b أوجد مقدار نمو الشجرة بالأقدام في السنة الثالثة.

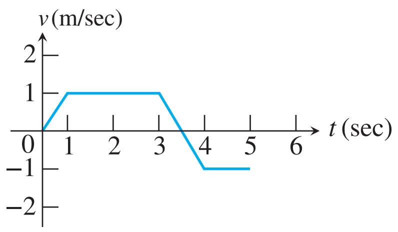
.20 قذيفة تم إطلاق قذيفة رأسيًا من مستوى سطح الأرض بسرعة 90 ft/sec (تذكر أن التسارع الذي سببه جاذبية الأرض يساوي 32 ft/sec^2).

.a أوجد سرعة القذيفة بعد 3 ثوان.
.b في أي لحظة ترتطم القذيفة بالأرض؟
.c أوجد المسافة الكلية التي تقطعها القذيفة عند ارتطامها بالأرض.

أسئلة اختبار معيارية

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية للإجابة عن الأسئلة في هذا القسم.

.21 صواب أم خطأ يبين الشكل أدناه سرعة جسيم يتحرك على طول المحور x. الإزاحة لهذا الجسيم سالبة.
برّر إجابتك.



.22 صواب أم خطأ إذا كانت سرعة جسيم يتحرك على طول المحور x موجبة دائمًا، فإن إزاحة الجسيم تساوي المسافة الكلية التي يقطعها الجسيم. برّر إجابتك.

.23 اختيار من متعدد تنمذج الدالة $F(t)$ معدل عدد الزبائن الوافدين إلى المكتب:

$$F(t) = 12 + 6\cos\left(\frac{t}{\pi}\right) \quad ; \quad 0 \le t \le 60$$

حيث $F(t)$ عدد الزبائن في الدقيقة و t الزمن بالدقائق.
أيّ مما يلي يمثّل عدد الزبائن الوافدين إلى المكتب خلال 60 دقيقة؟ (الإجابات مقرّبة إلى أقرب عدد كليّ؟)
B

A. 720
B. 725
C. 732
D. 744
E. 756

.24 اختيار من متعدد تنمذج الدالة التالية معدل كمية الملوثات (بالأطنان) المزالة من إحدى البحيرات. $y = 20e^{-0.5t}$ حيث t عدد السنوات المنقضية منذ 2005، قدّر كمية الملوثات المزالة من البحيرة بين العامين 2005 و 2015، قرّب الإجابة إلى أقرب طن.
A

A. 40
B. 47
C. 56
D. 61
E. 71

25. اختيار من متعدد تستهلك إحدى الدول النامية الوقود بمعدل $r(t) = 20\,e^{0.2t}$ مليون برميل سنويًا، حيث t الزمن بالسنوات و $0 \le t \le 10$. أي الخيارات التالية يعطي كمية الوقود الذي تستهلكه هذه الدولة في الفترة الزمنية $0 \le t \le 10$؟ D

A. $r(10)$

B. $r(10) - r(0)$

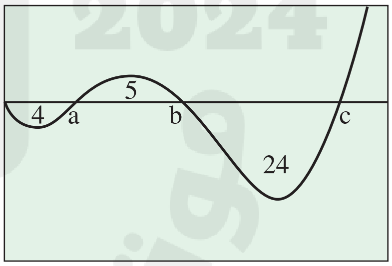
C. $\int_0^{10} r'(t)\,dt$

D. $\int_0^{10} r(t)\,dt$

E. $10\,r(10)$

استكشاف

في التمارين 26-30، يتحرك جسيم على طول المحور x (المسافة مقيسة بالسنتمترات). موقعه الأصلي عند $t = 0$ sec هو $x(0) = 15$. يبيّن الشكل أدناه التمثيل البياني لسرعة الجسيم $v(t)$. الأعداد هي مساحات المناطق المغلقة علمًا بأن المسافة الكلية التي يقطعها الجسيم في الفترة الزمنية $[a, b]$ تساوي $\int_a^b |v(t)|\,dt$



26. أوجد إزاحة الجسيم بين $t = 0$ و $t = c$.

27. أوجد المسافة الكلية التي يقطعها الجسيم في نفس الفترة الزمنية.

28. حدّد موقع الجسيم عند الزمن $t = a$ والزمن $t = b$ والزمن $t = c$.

29. عند أي زمن تقريبًا تتحقق القيمة العظمى التقريبية الموجبة لتسارع الجسيم في الفترة $[0, b]$.

30. عند أي زمن تقريبًا تتحقق القيمة العظمى التقريبية الموجبة لتسارع الجسيم في الفترة $[0, c]$.

توسيع الأفكار

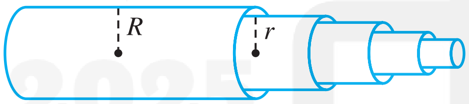
31. تدفق النفط يتدفق النفط عبر أنبوب أسطواني الشكل طول نصف قطره 3 in، لكن سرعة تدفق النفط تتباطأ كلما اتجهنا نحو جدار الأنبوب بسبب الاحتكاك. سرعة تدفق النفط على مسافة r in من المركز تساوي $8(10 - r^2)$ in/sec

a. في مقطع عرضي مسطح من الأنبوب، تتحول حلقة رفيعة بسماكة Δr على مسافة r in من المركز إلى شكل شريط مستطيل عندما نمددها. أوجد مساحة الشريط (وبالتالي المساحة التقريبية للحلقة).

b. وضّح لماذا نعرف أن النفط يمر عبر هذه الحلقة بسرعة $8(10 - r^2)(2\pi r)\,\Delta r$ in^3/sec

c. اكتب التكامل المحدود الذي يعطي معدل تدفق النفط عبر الأنبوب، ثم أوجد قيمته.

32. تدفق الدم يبين الشكل أدناه تدفق الدم في شريان صغير في الجسم. تدفق الدم صفائحي (رقائقي)، حيث تكون سرعة التدفق في أقل قيمة لها قرب جدران الشريان و في أعلى قيمة لها في منتصف الشريان. في نموذج التدفق هذا سوف نحسب التدفق الكلي في الشريان من خلال التفكير بالتدفق على أنه مكون من عدة طبقات من الأنابيب التي لها نفس المركز.



لنفترض أن R هو نصف قطر شريان ما وأن r هي المسافة بين طبقة ما ومركز الشريان.
يمكن نمذجة سرعة الدم في طبقة ما من الشريان باستعمال القاعدة

$$v(r) = k\left(\mathrm{R}^2 - r^2\right)$$

حيث k عدد ثابت.

بما أن مساحة الدائرة $\mathrm{A} = \pi r^2$، فيمكن تقريب التغير في مساحة مقطع إحدى الطبقات، بالنسبة إلى تغير بسيط في نصف القطر، Δr، من خلال التفاضل. إذا كان $dr = \Delta r$، يكون تفاضل المساحة A:

$$d\mathrm{A} = 2\pi r\,dr = 2\pi r\,\Delta r$$

حيث Δr هي سماكة الطبقة. التدفق الكلي في الطبقة يعرف على أنه حاصل ضرب السرعة بمساحة المقطع، أو

$$\mathrm{F}(r) = 2\pi r k\left(\mathrm{R}^2 - r^2\right)\,\Delta r$$

a. أكتب تكاملًا محدودًا لإيجاد التدفق الكلي في الشريان.

b. أوجد قيمة هذا التكامل.

إجابات أسئلة مراجعة سريعة 5.5

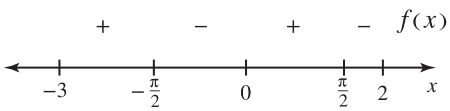
1. $\sin 2x = 0$

$2x = \pi + 2k\pi$ أو $2x = 0 + 2k\pi$

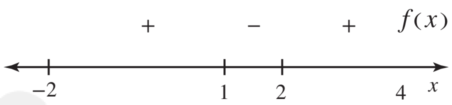
$x = k\pi$ أو $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

الحلول الموجودة في الفترة $[-3, 2]$ هي: $x = 0$ و $x = \pm\frac{\pi}{2}$

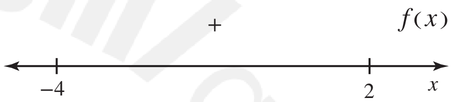
تتغير إشارة الدالة عند $x = \pm\frac{\pi}{2}$ و $x = 0$ في الفترة $[-3, 2]$.



2. تتغير إشارة الدالة عند $x = 1$ و $x = 2$ في الفترة $[-2, 4]$.



3. لا تتغير إشارة الدالة في الفترة $[-4, 2]$. الدالة موجبة دائمًا.



4. بما أن العدد 1 هو حل للمعادلة $f(x) = 0$، نكتب

$2x^3 - 3x^2 + 1 = (x-1)(ax^2 + bx + c)$ حيث a و b و c أعداد حقيقية.

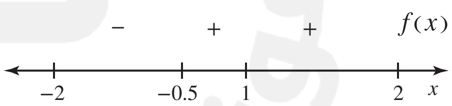
باستعمال تطابق كثيرات الحدود، نحصل على $a = 2, b = -1, c = -1$.

إذن

$$f(x) = (x-1)(2x^2 - x - 1)$$
$$= (x-1)(x-1)(2x+1)$$
$$= (x-1)^2(2x+1)$$

عندما $f(x) = 0$، $x = 1$ أو $x = -\frac{1}{2}$.

تتغير إشارة الدالة عند $x = -\frac{1}{2}$ في الفترة $[-2, 2]$.



5. $f(x) = 0$

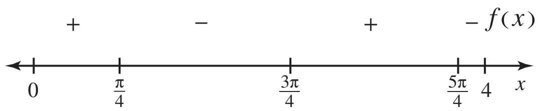
$\cos 2x = 0$ أو $x = 0$

$2x = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ أو $x = 0$

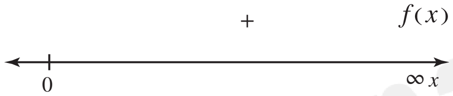
$x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$ أو $x = 0$

الحلول الموجودة في الفترة $[0, 4]$ هي: $x = 0$ و $x = \frac{\pi}{4}$ و $x = \frac{3\pi}{4}$ و $x = \frac{5\pi}{4}$

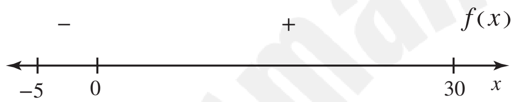
تتغير إشارة الدالة عند $x = \frac{\pi}{4}$ و $x = \frac{3\pi}{4}$ و $x = \frac{5\pi}{4}$ و في الفترة $[0, 4]$.



6. لا تتغير إشارة الدالة في الفترة $[0, \infty[$. الدالة غير سالبة دائمًا.



7. تتغير إشارة الدالة عند $x = 0$ ، أي في الفترة $[-5, 30[$.



8. $f(x) = 0$

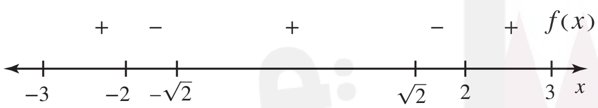
$x^2 - 2 = 0$ و $x^2 - 4 \neq 0$

$x^2 = 2$ و $x^2 = 4$

$x = \pm\sqrt{2}$ و $x = \pm 2$

تتغير إشارة الدالة عند $x = -2$ و $x = -\sqrt{2}$ و $x = \sqrt{2}$ و $x = 2$

في الفترة $[-3, 3]$.



إجابات أسئلة التمارين 5.5

1. $C(10) - C(0) = \int_0^{10} 27.08e^{\frac{t}{25}}\,dt = 25 \times 27.08\, e^{\frac{t}{25}} \Big|_0^{10}$

$= 677\, e^{\frac{10}{25}} - 1 \approx 332.97$

إذن، الاستهلاك الكلي للوقود في هذه الدولة من 1 يناير 1980 إلى 1 يناير 1990 هو 332.97 مليار برميل تقريبًا.

2. $C(24) - C(0) = \int_0^{24} \left[3.9 - 2.4 \sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)\right] dt$

$= \left[3.9t + 2.4 \times \frac{12}{\pi} \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)\right]\Big|_0^{24}$

$= 3.9 \times 24 + \frac{28.8}{\pi} \cos(2\pi) - 0 - \frac{28.8}{\pi} \cos(0) = 93.6$

إذن، الاستهلاك اليومي لهذا المنزل من الكهرباء هو 93.6 كيلوواط ساعة.

3. $f(30) - f(0) = \int_0^{30} \left[74 + \cos\left(\frac{t}{3}\right)\right] dt$

$= \left[74t + 3\sin\left(\frac{t}{3}\right)\right]\Big|_0^{30}$

$= 74 \times 30 + 3\sin 10$

$\approx 2\,218$

إذن، عدد السيارات هو 2 218 سيارات تقريبًا.

4. a. $S'(t) = C'(t)$

$150 - t^2 = t^2 + \frac{11}{4}t$

$2t^2 + \frac{11}{4}t - 150 = 0$

$8t^2 + 11t - 600 = 0$

$t = -9.375$ أو $t = 8$

الحل $t = 8$ فقط له معنى في هذه الحالة. إذن، المدة الزمنية التي تحقق فيها الشركة توفيرًا صافيًا هي 8 سنوات.

b. التوفير الصافي يساوي ناتج طرح التكلفة من مبلغ التوفير:

$F(t) = S(t) - C(t)$

$F(1) - F(0) = \int_0^1 \left[\left(150 - t^2\right) - \left(t^2 + \frac{11}{4}t\right)\right] dt$

$= \int_0^1 \left[-2t^2 - \frac{11}{4}t + 150\right] dt$

$= \left(-\frac{2t^3}{3} - \frac{11t^2}{8} + 150t\right)\Big|_0^1 = -\frac{2}{3} - \frac{11}{8} + 150 \approx 148$

إذن، مبلغ التوفير الصافي الذي وفرته الشركة خلال السنة الأولى من اعتماد الإجراءات الجديدة يساوي 148 000 ريال تقريبًا.

c. $F(8) - F(0) = \int_0^8 \left[\left(150 - t^2\right) - \left(t^2 + \frac{11}{4}t\right)\right] dt$

$= \int_0^8 \left[-2t^2 - \frac{11}{4}t + 150\right] dt$

$= \left(-\frac{2t^3}{3} - \frac{11t^2}{8} + 150t\right)\Big|_0^8$

$= -\frac{1\,024}{3} - 88 + 1\,200$

≈ 771

إذن، مبلغ التوفير الصافي الذي وفرته الشركة خلال المدة التي حققت فيها توفيرًا صافيًا هو 771 000 ريال تقريبًا.

5. a. $S'(t) = C'(t)$

$-t^2 + t + 8 = \frac{3}{25}t^2$

$-\frac{28}{25}t^2 + t + 8 = 0$

$t \approx -2.263,\ t \approx 3.156 \approx 3$

الحل $t = -2.263$ ليس له معنى في هذه الحالة. إذن، المدة الزمنية التي يكون استعمال الجهاز فيها مربحًا هي 3 سنوات تقريبًا.

b. $F(3) - F(0) = \int_0^3 \left[\left(-t^2 + t + 8\right) - \left(\frac{3}{25}t^2\right)\right] dt$

$= \int_0^3 \left[-\frac{28}{25}t^2 + t + 8\right] dt$

$= \left(-\frac{28}{75}t^3 + 0.5t^2 + 8t\right)\Big|_0^3$

$= -\frac{252}{25} + 4.5 + 24 = \frac{921}{50}$

≈ 18.42

إذن، مبلغ التوفير الصافي الكلي الممكن توفيره خلال تلك المدة هو 18.42 مليون ريال تقريبًا سنويًّا.

6. a. $R'(t) = C'(t)$

$60 - 0.001\, e^{0.1t} = 0.01\, e^{0.1t}$

$60 = 0.011\, e^{0.1t}$

$\frac{60}{0.011} = e^{0.1t}$

$\ln\left(\frac{60}{0.011}\right) = 0.1t$

$10 \ln\left[\left(\frac{60}{0.011}\right)\right] = t$

$t \approx 86.04$

استعمال هذه السيارة لا يعود مربحًا بعد 86 شهرًا تقريبًا، أي بعد مرور 7 سنوات وشهرين تقريبًا.

b. التوفير الصافي يساوي ناتج طرح التكلفة من مبلغ التوفير:

$F(t) = S(t) - C(t)$

$F(86) - F(0) = \int_0^{86} \left[60 - 0.001\, e^{0.1t} - 0.01\, e^{0.1t}\right] dt$

$= \int_0^{86} \left[60 - 0.011\, e^{0.1t}\right] dt$

$= \left(60t - 0.11\, e^{0.1t}\right)\Big|_0^{86}$

$\approx 4\,563$

إذن، مبلغ التوفير الصافي الكلي حتى ذلك الزمن هو 4 563 ريالًا تقريبًا.

7. b. أوجد أولًا $v(t)$ من تكامل $a(t)$:

$v(t) = \int (-32)\, dt = -32t + C$

عند $t = 0$، $v(t) = -20$. إذن:

$-20 = -32(0) + C$

$C = -20$

$v(t) = -32t - 20$

الدالة $s(t)$ هي الدالة الأصلية للدالة $v(t)$.

$s(t) = \int v(t)dt = \int (-32t - 20)dt = -16t^2 - 20t + C$

بما أن $s(t) = 2\,717$ عند $t = 0$، عوّض لإيجاد قيمة C.

$$2\,717 = -16(0)^2 - 20(0) + C$$
$$C = 2\,717$$
$$s(t) = -16t^2 - 20t + 2\,717$$

وهو ارتفاع الجسم عن الأرض في اللحظة t التي تسبق ارتطامه بالأرض.

c. عند ارتطام الجسم بالأرض يكون $s = 0$. إذن:

$$0 = -16t^2 - 20t + 2\,717$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = 400 + 4 \times 16 \times 2\,717 = 174\,288$$
$$t = \frac{20 \pm \sqrt{174\,288}}{-32} \approx \frac{10 \pm 208.74}{-16}$$

نختار القيمة الموجبة لأن الزمن لا يمكن أن يكون سالبًا. إذن، $t \approx 12.42$.

يستغرق الجسم 12.42 ثانية تقريبًا ليرتطم بالأرض، وتكون سرعته عند ارتطامه بالأرض:

$$v(12.42) = -32(12.42) - 20 \approx -417.44 \text{ ft/sec}$$

إذن، يرتطم الجسم بالأرض بسرعة 417.44 ft/sec

8. $s(2\pi) - s(0) = \int_0^{2\pi} v(t)\,dt = \int_0^{2\pi} 5\cos t\,dt = 5\sin t\Big|_0^{2\pi}$

$= 5(\sin(2\pi) - \sin 0) = 5(0 - 0) = 0$

9. $s\left(\frac{\pi}{2}\right) - s(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} v(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 6\sin 3t\,dt = -2\cos 3t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= -2\left(\cos\frac{3\pi}{2} - \cos 0\right) = 2$

10. $s(10) - s(0) = \int_0^{10} v(t)\,dt = \int_0^{10} (49 - 9.8t)\,dt = \left(49t - 4.9t^2\right)\Big|_0^{10}$

$= 490 - 490 = 0$

11. $s(2) - s(0) = \int_0^2 v(t)\,dt = \int_0^2 \left(6t^2 - 18t + 12\right)dt = \left(2t^3 - 9t^2 + 12t\right)\Big|_0^2$

$= 16 - 36 + 24 - 0 = 4$

12. $u = \sin t,\ du = \cos t\,dt$

$s(2\pi) - s(0) = \int_0^{2\pi} v(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \left(5\sin^2 t\cos t\right)dt = 5\int_0^0 u^2\,du = 0$

(من خواص التكامل المحدود)

13. $u = 4 - t,\ du = -dt$

$s(4) - s(0) = \int_0^4 \sqrt{4 - t}\,dt = -\int_4^0 \sqrt{u}\,du = \int_0^4 \sqrt{u}\,du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4$

$= \frac{16}{3} - 0 = \frac{16}{3} \approx 5.33$

14. $u = \sin t,\ du = \cos t\,dt$

$s(2\pi) - s(0) = \int_0^{2\pi} v(t)\,dt = \int_0^{2\pi} e^{\sin t}\cos t\,dt = \int_0^0 e^u\,du = 0$

(من خواص التكامل المحدود)

15. $u = 1 + t^2,\ du = 2t\,dt$

$s(3) - s(0) = \int_0^3 v(t)\,dt = \int_0^3 \frac{t}{1 + t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_1^{10} \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u|\Big|_1^{10}$

$= \ln\sqrt{10} - \ln\sqrt{1} = \ln\sqrt{10} \approx 1.15$

16. a. $v(9) - v(0) = \int_0^9 a(t)\,dt$

$= \int_0^9 (1 + 3\sqrt{t})\,dt$

$= \left(t + 2t^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^9$

$= 9 + 2(9)^{\frac{3}{2}} - 0$

$= 63$

$v(0) = 0$

$v(9) = v(0) + 63 = 63$ m/sec

b. $v(t) - v(0) = \int_0^t a(u)\,du = \int_0^t (1 + 3\sqrt{u})\,du = \left(u + 2u^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^t = t + 2t^{\frac{3}{2}}$

$v(t) = v(0) + t + 2t^{\frac{3}{2}} = t + 2t^{\frac{3}{2}}$

إذن الإزاحة بين $t = 0$ و $t = 9$ هي

$s(9) - s(0) = \int_0^9 v(t)\,dt = \int_0^9 \left(t + 2t^{\frac{3}{2}}\right)dt = \left(\frac{t^2}{2} + \frac{4}{5}t^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_0^9$

$= \frac{81}{2} + \frac{4}{5} \times 243 = 234.9$ m

17. $s(4) - s(0) = \int_0^4 v(t)\,dt = \int_0^4 (t - 2)\sin t\,dt$

باستعمال قاعدة التكامل بالأجزاء، $u = t - 2$، $dv = \sin t\,dt$ و $du = dt$ و $v = -\cos t$.

$\int (t - 2)\sin t\,dt = -(t - 2)\cos t - \int(-\cos t)\,dt$

$= -(t - 2)\cos t + \sin t + C$

$s(4) - s(0) = \int_0^4 (t - 2)\sin t\,dt = [-(t - 2)\cos t + \sin t]\Big|_0^4$

$= -2\cos 4 + \sin 4 - 2 \approx -1.45$ m

18. $P(4) - P(0) = \int_0^4 140\,t^{\frac{5}{2}}\,dt = 140\left(\frac{t^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}\right)\Big|_0^4 = 40t^{\frac{7}{2}}\Big|_0^4 = 40 \times 2^7 - 0$

$= 5\,120 > 4\,850$

$P(0) = 0$

$P(4) = 5\,120 > 4\,850$

إذن، لا يمكن للمصنع أن يعمل مدة 4 سنوات من دون القضاء على كل الحياة السمكية في البحيرة.

19. a. $\int_1^2 \left(0.6 + \frac{4}{(t+1)^3}\right)dt = \left(0.6t - \frac{2}{(t+1)^2}\right)\Big|_1^2$

$= 0.6(2) - \frac{2}{3^2} - 0.6 + \frac{2}{2^2}$

≈ 0.88

إذن، تنمو الشجرة بمقدار 0.88 قدمًا في السنة الثانية.

b. $\int_2^3 \left(0.6 + \frac{4}{(t+1)^3}\right) dt = \left(0.6t - \frac{2}{(t+1)^2}\right)\Big|_2^3$

$= 0.6(3) - \frac{2}{4^2} - 0.6(2) + \frac{2}{3^2}$

≈ 0.7

إذن، تنمو الشجرة بمقدار 0.7 قدمًا تقريبًا في السنة الثانية.

20. a. $v(0) = 90$ ft/sec

$v(3) - v(0) = \int_0^3 a(t)\, dt = \int_0^3 (-32)\, dt = -32t\Big|_0^3 = -96$

$v(3) = v(0) - 96 = 90 - 96 = -6$ m/sec

b. $v(t) = \int a(t)\, dt$

$v(t) = \int (-32)dt = -32t + C$

$v(0) = 90$

$90 = -32(0) + C$

$C = 90$

$v(t) = -32t + 90$

$s(t) = \int v(t)\, dt = \int (-32t + 90)dt = -16t^2 + 90t + C$

$s(0) = 0$

$0 + C = 0$

$C = 0$

$s(t) = -16t^2 + 90t$

ترتطم القذيفة بالأرض عندما $s(t) = 0$، أي: $-16t^2 + 90t = 0$

$8t^2 - 45t = 0$

$t(8t - 45) = 0$

$t = 0$ sec أو $t = \frac{45}{8} = 5.625$ sec

إذن، ترتطم القذيفة بالأرض بعد 5.625 ثانية من إطلاقها.

.c تصل القذيفة إلى ارتفاعها الأقصى عندما $v(t) = 0$

$v(t) = -32t + 90 = 0$

$t = \frac{90}{32} = 2.8125$ sec

$s\left(\frac{90}{32}\right) = -16 \times \left(\frac{90}{32}\right)^2 + 90 \times \frac{90}{32} = 126.5625$ ft

إذن، المسافة التي قطعتها القذيفة صعودًا هي 126.5625 ft، أي أن المسافة الكلية التي قطعتها القذيفة عند ارتطامها بالأرض هي:

2×126.5625 ft $= 253.125$ ft

.21 خطأ.

يتألف منحنى دالة السرعة v من 4 قطع مستقيمة:

الأولى: من $t = 0$ إلى $t = 1$ وتمر بالنقاط $(0, 0)$ و $(1, 1)$ ومعادلتها: $v = t$

الثانية: من $t = 1$ إلى $t = 3$ وتمر بالنقاط $(1, 1)$ و $(3, 1)$ ومعادلتها: $v = 1$

الثالثة: من $t = 3$ إلى $t = 4$ وتمر بالنقاط $(3, 1)$ و $(4, -1)$. نجد معادلتها على الشكل التالي:

$v - 1 = \frac{1+1}{3-4}(t - 3)$

$v - 1 = -2(t - 3)$

$v = -2t + 7$

الرابعة: من $t = 4$ إلى $t = 5$ وتمر بالنقاط $(4, -1)$ و $(5, -1)$ ومعادلتها:

$v = -1$

$s(5) - s(0) = \int_0^5 v(t)\, dt = \int_0^1 t\, dt + \int_1^3 1\, dt + \int_3^4 (-2t + 7)\, dt + \int_4^5 (-1)\, dt$

$= \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 + t\Big|_1^3 + \left(-t^2 + 7t\right)\Big|_3^4 + (-t)\Big|_4^5 = \frac{1}{2} + 3 - 1 + (-16 + 28 + 9 - 21)$

$-5 + 4 = 2.5 + 0 - 1 = 1.5 > 0$

.22 صواب. بما أنّ السرعة قيمة موجبة دائمًا، فإنّ قيمة تكامل السرعة (أي الإزاحة) موجبة أيضًا، وتساوي المسافة الكلية التي يقطعها الجسيم.

26. $x(c) - x(0) = \int_0^c v(t)\, dt = \int_0^a v(t)\, dt + \int_a^b v(t)\, dt + \int_b^c v(t)\, dt$

$= -4 + 5 - 24 = -23$ cm

27. $\int_0^c |v(t)|\, dt = \int_0^a |v(t)|\, dt + \int_a^b |v(t)|\, dt + \int_b^c |v(t)|\, dt$

$= 4 + 5 + 24 = 33$ cm

28. $x(a) - x(0) = \int_0^a v(t)\, dt = -4$

$x(a) = x(0) - 4 = 15 - 4 = 11$ cm

$x(b) - x(0) = \int_0^b v(t)\, dt = \int_0^a v(t)\, dt + \int_a^b v(t)\, dt = -4 + 5 = 1$

$x(b) = 1 + 15 = 16$ cm

$x(c) - x(0) = \int_0^c v(t)\, dt = \int_0^a v(t)\, dt + \int_a^b v(t)\, dt + \int_b^c v(t)\, dt$

$= -4 + 5 - 24 = -23$

$x(c) = -23 + 15 = -8$ cm

.29 $t = a$ لأنها تحقق القيمة القصوى لميل المماس الذي يمثل التسارع في الفترة $[0, b]$.

.30 $t = c$ لأنها تحقق القيمة القصوى لميل المماس الذي يمثل التسارع في الفترة $[0, c]$.

.31 a. بما أن الشريط مستطيل الشكل، فإن مساحته تساوي ناتج ضرب طوله في عرضه. العرض يساوي Δr، أما الطول فيساوي محيط الدائرة التي طول نصف قطرها r، أي $2\pi r$، وبالتالي تصبح مساحة الشريط: $2\pi r\Delta r$

.b سرعة تدفق النفط عبر هذه الحلقة بوحدة in^3/sec تساوي ناتج ضرب سرعة التدفق على مسافة r in من المركز (أي عند موقع الحلقة) بوحدة in/sec في مساحة الحلقة بوحدة in^2، وهذا يساوي:

$8\left(10 - r^2\right) \times 2\pi r\Delta r = 8\left(10 - r^2\right)(2\pi r)\, \Delta r\ in^3/sec$

c. $\int_0^3 8\left(10 - r^2\right)(2\pi r)\, dr = 16\pi \int_0^3 \left(10 - r^2\right) r\, dr$

$= 16\pi \int_0^3 \left(10r - r^3\right) dr = 16\pi \left(5r^2 - \frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^3$

$= 16\pi \left(45 - \frac{81}{4}\right) = 396\pi \approx 1\,244.07\ in^3/sec$

.32 a. التكامل الذي يمثل التدفق الكلي في الشريان هو

$\int_0^R 2\pi rk\left(R^2 - r^2\right) dr$

.b لنفترض أن $u = R^2 - r^2$، $du = -2rdr$.

$\int_0^R 2\pi rk\left(R^2 - r^2\right) dr = -\int_{R^2}^0 \pi ku\, du = \int_0^{R^2} \pi ku\, du$

$= \pi k \frac{u^2}{2}\Big|_0^{R^2} = \frac{rk}{2}\left(R^2\right)^2 - \frac{\pi k}{2}(0) = \frac{\pi k R^4}{2}$

5.6 المعادلات التفاضلية Differential Equations

ما ستتعلّمه

- تعريف المعادلة التفاضلية
- المعادلات التفاضلية القابلة للفصل
- تطبيقات المعادلات التفاضلية

... ولماذا

تتطلّب دراسة الأجسام المتحركة إيجاد حلول للمعادلات التي تشتمل على مشتقات. لهذه المعادلات أهمية كبيرة في التطبيقات الواقعية مثل المعادلات التي تنمذج النمو السكاني هذه المعادلات تسمّى المعادلات التفاضلية.

معايير الدرس

12A.6.5

12A.6.6

المصطلحات

- معادلات تفاضلية differential equations
- حل عام general solution
- حل خاص particular solution
- شرط ابتدائي initial conditions
- معادلات تفاضلية قابلة للفصل separable differential equations

تعريف المعادلة التفاضلية

بقيت المسائل المتعلقة بحركة الأجسام المتحركة عالقةً من دون حل لقرون، ولقد بات واضحًا اليوم الدور الكبير الذي لعبه التفاضل في حل هذه المسائل. فقد تمكّن ليبنز ونيوتن من نمذجة حركة الأجسام المتحركة بمعادلات تشتمل على مشتقات الدوال، تُعرف اليوم **بالمعادلات التفاضلية**. بعد ذلك نشطت الأبحاث في هذا المجال وتمكّن علماء الرياضيات من ابتداع طرائق وتقنيات لحل هذه المعادلات التي لا تزال تحظى باهتمام الباحثين في جميع مجالات الرياضيات التطبيقية.

المعادلات التفاضلية

المعادلة التفاضلية هي المعادلة التي تشمل مشتقات. **درجة المعادلة التفاضلية** هي أعلى رتبة لمشتقة في هذه المعادلة.

لنأخذ على سبيل المثال المعادلة التفاضلية:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2x$$

يمكننا القول ببساطة إن الدالة y هي حل لهذه المعادلة التفاضلية إذا كانت مشتقتها تساوي $3x^2 - 2x$ أو بمعنى آخر، إذا كانت y دالة أصلية للدالة $3x^2 - 2x$، إذن:

$$y = \int \left(3x^2 - 2x\right) dx = x^3 - x^2 + C$$

ويمكننا التحقق من ذلك بمطابقة مشتقة y مع العبارة المعطاة في هذه المعادلة.

أي أن **الحل العام** لهذه المعادلة هو

$$y = x^3 - x^2 + C$$

كل قيمة للثابت C تعطي حلًّا مختلفًا للمعادلة يُسمّى **الحل الخاص** للمعادلة التفاضلية.

يبيّن الشكل 5.6.1 التمثيلات البيانية لعدد من الحلول الخاصة لهذه المعادلة.

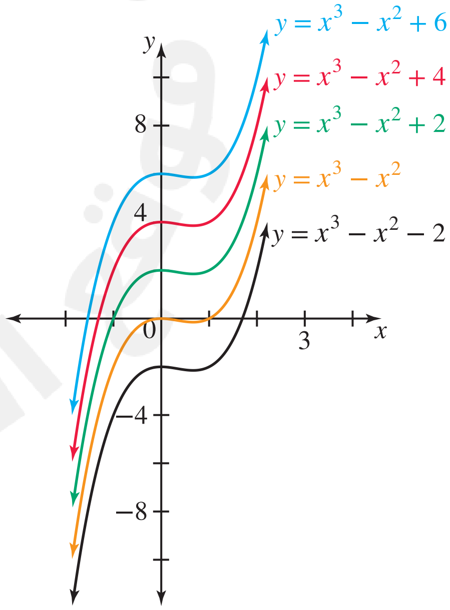
هذا النوع من المعادلات التفاضلية هو النوع الأبسط ويُكتب في الصورة $\frac{dy}{dx} = g(x)$، وقاعدة حله هي التالية:

الحل العام للمعادلة $\frac{dy}{dx} = g(x)$

الحل العام للمعادلة $\frac{dy}{dx} = g(x)$ هو:

$$y = \int g(x)\, dx$$

حيث g دالة متصلة.



الشكل 5.6.1 يبيّن الشكل التمثيلات البيانية لعدد من الحلول الخاصة للمعادلة. لاحظ التمثيل البياني باللون الأزرق مثلاً، قيمة الثابت هي 6

تميزت أهمية المعادلات التفاضلية في العلوم الفيزيائية والهندسية منذ القرن الثامن عشر. وقد أصبحت مؤخرًا ذات فائدة في العلوم الاجتماعية، والعلوم الطبيعية، والعلوم الاقتصادية لحل مسائل تتعلق بالنمو السكاني، والتوازن البيئي، ومعدلات الفوائد.

تُسمّى المعادلة التفاضلية التي تكون فيها قيمة y محددة عند $x = x_0$ (أو $t = t_0$) **المسألة ذات القيمة الابتدائية**. ويطلق على قيمة y عند $x = x_0$ **الشرط الابتدائي**. نعرض فيما يلي مثالًا من واقع الحياة على المسألة ذات القيمة الابتدائية.

مثال 1 التزايد السكاني

يتزايد تعداد مجموعة من الطيور وفق دالة أسيّة P بحيث

$$\frac{dP}{dt} = 20\, e^{0.05t}$$

حيث t الزمن (بالسنوات). أوجد الدالة P بدلالة الزمن t إذا كان العدد الابتدائي للطيور في المجموعة هو 20 طيرًا.

الحل

لإيجاد حل للمعادلة التفاضلية، عليك إيجاد الدالة الأصلية المناسبة للدالة $20\, e^{0.05t}$

$$P = \int 20\, e^{0.05t}\, dt = \frac{20}{0.05}\, e^{0.05t} + C = 400\, e^{0.05t} + C$$

وبما أن العدد الابتدائي للطيور هو 20، فإن $P(0) = 20$. إذن:

$$20 = 400\, e^{0.05(0)} + C$$

$$C = -380$$

أي أن $P = 400\, e^{0.05t} - 380$.

يمكنك التحقق من أن P هو حل للمعادلة التفاضلية بالمطابقة بين مشتقتها والدالة في المعادلة التفاضلية.

حاول أن تحل التمرين 1

لقد استُعملت هذه المعلومة في المثال 1 لإيجاد القيمة المناسبة للثابت C، التي تعطي بدورها حلًّا للمعادلة التفاضلية هو الحل الخاص. هذه المعطيات هي $P = 20$ عند $t = 0$.

المعادلات التفاضلية القابلة للفصل

هناك أنواع أخرى من المعادلات التفاضلية التي لا يمكننا حلها بمجرد إيجاد التكامل لدالة، ويمكن كتابة بعض الأنواع من تلك المعادلات في الصيغة $\frac{dy}{dx} = \frac{p(x)}{q(y)}$.

يمكننا فصل كل ما هو دالة بدلالة y ومشتقتها بكتابتهما في الطرف الأيسر وكتابة الدالة بدلالة x في الطرف الأيمن.

الهدف

سيفهم الطلاب ما المقصود بمعادلة تفاضلية، ويتعلمون الطرائق المتبعة لإيجاد حلول بعض من أنواعها، ويتعرفون على بعض تطبيقاتها الواقعية.

دليل الدرس

1. تعريف المعادلة التفاضلية
2. المعادلة التفاضلية القابلة للفصل
3. تطبيقات المعادلات التفاضلية

تحفيز

اسأل الطلاب إن كانوا يعرفون دالة تساوي مشتقتها.
وضّح لهم أن هذه الدالة هي حل للمعادلة $y' = y$.

سؤال للتفكر

س: ماذا يعني العدد 20؟
نموذج إجابة:
العدد 20 هو العدد الابتدائي للطيور وفي نفس الوقت هو معدل التغير الابتدائي، أي أن عدد الطيور سيزداد بمقدار 20 طائرًا في السنة الأولى.

ملاحظة

يمكننا كتابة الشرط $P = 20$ عند $t = 0$ على الشكل $P(0) = 20$. سوف نستعمل هذا الترميز من الآن فصاعدًا.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p(x)}{q(y)}$$

$$q(y)\ dy = p(x)\ dx$$

نجد تكامل طرفي المعادلة

$$\int q(y)\ dy = \int p(x)\ dx$$

$$Q(y) = P(x) + C$$

حيث P و Q دالتان أصليتان للدالتين p و q على الترتيب.

هذا النوع من المعادلات يسمّى **المعادلات التفاضلية القابلة للفصل.**

تنبيه

يعتقد بعضهم أن $\frac{dy}{dx}$ كسر بسطه dy ومقامه dx وهو أمر لا معنى له بالتأكيد لكنه يفضي إلى الشكل $q(y)\ dy = p(x)\ dx$ الذي سوف نعتمده في الحل.

تمهيدًا لإيجاد التكامل نكتب: $\int q(y)\ dy = \int p(x)\ dx$ أي $Q(y) = P(x) + C$. أي أننا حصلنا على نتيجة صحيحة بالرغم من التبسيط السابق الذي لا معنى له.

المعادلات التفاضلية القابلة للفصل

كل معادلة تفاضلية تُسمّى معادلة قابلة للفصل إذا كانت في الصورة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{f(y)}$$

وتُحلّ بإيجاد دالتين أصليتين F و G للدالتين f و g على الترتيب، وكتابة

$$F(y) = G(x) + C$$

مثال 2 الحل العام للمعادلة التفاضلية القابلة للفصل

أوجد الحل العام للمعادلة $y\frac{dy}{dx} = x^2$.

الحل

ابدأ بفصل المتغيرين لتحصل على:

$$y\ dy = x^2\ dx$$

يكمن الحل في إيجاد التكامل لكل طرف.

$$\int y\ dy = \int x^2\ dx$$

أوجد تكامل طرفَي المعادلة

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + C$$

اضرب طرفَي المعادلة في 2

$$y^2 = \frac{2}{3}x^3 + 2C$$

أعد تسمية الثابت $K = 2C$

$$y^2 = \frac{2}{3}x^3 + K$$

حاول أن تحل التمرينين 6 و 12

أسئلة للتفكر

س: هل المعادلة الضمنية $y^2 = \frac{2}{3}x^3 + k$ تشكّل حلًا للمعادلة التفاضلية؟

نموذج إجابة:

كلا، فحل أي معادلة تفاضلية هو دالة دائمًا.

بما أن المعادلة التفاضلية تعطي لكل ثابت k دالتين هما

$y_1 = \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + k}$ و $y_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}x^3 + k}$

إذن y_1 و y_2 هما حلان للمعادلة ولكن كلّ على مجال مختلف عن الآخر.

س: هل يمكننا استنتاج الصيغة الصريحة للدالة y من المعادلة الضمنية دائمًا؟

نموذج إجابة:

كلا. إذا كانت $F(y)$ دالة كثيرة الحدود من درجة عالية، لا يمكننا إيجاد قيمة y بدلالة x.

تم استبدال الثابت 2C بالثابت K في آخر خطوة من المثال. عمومًا، سنستعمل C للتعبير عن الثابت العشوائي، بحيث يصبح الشكل النهائي للإجابة $y^2 = \frac{2}{3}x^3 + C$.

تبقى الإجابة في الصورة الضمنية، ولا نجد حلها بالنسبة للمتغير y بصورة صريحة. كان من الجيد أن نجد الحل بالنسبة للمتغير y من خلال إيجاد الجذر لطرفَي المعادلة، ولكن بما أننا لا نعرف شيئًا عن إشارة y، فلا يمكننا أن نحدد ما إذا كانت الإجابة هي $y = \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + K}$ أم $y = -\sqrt{\frac{2}{3}x^3 + K}$.

إذا كانت قوة y من الدرجة الثالثة، يمكننا أن نجد الحل من خلال إيجاد الجذر التكعيبي لطرفَي المعادلة دون أي إشكال.

مثال 3 الحل الخاص للمعادلة التفاضلية القابلة للفصل

أوجد حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = (xy)^2$ و $y = 1$ عند $x = 1$.

الحل

المعادلة قابلة للفصل لأن بالإمكان كتابتها في الصورة:

$$\frac{dy}{dx} = y^2 x^2$$

افصل المتغيرين

$$y^{-2}\,dy = x^2\,dx$$

اكتب التكامل

$$\int y^{-2}\,dy = \int x^2\,dx$$

لاحظ أنه يكفي إضافة ثابت واحد للمعادلة:

$$-y^{-1} = \frac{x^3}{3} + C$$

استعمل الآن الشرط الابتدائي لإيجاد الثابت C.

عوّض $x = 1$ و $y = 1$

$$-1 = \frac{1}{3} + C$$

$$C = -\frac{4}{3}$$

عوّض قيمة C في المعادلة

$$-y^{-1} = \frac{x^3}{3} - \frac{4}{3}$$

وحّد المقامات

$$y^{-1} = \frac{4 - x^3}{3}$$

ارفع طرفَي المعادلة إلى القوة -1

$$y = \frac{3}{4 - x^3}$$

من الواضح أن $y = 1$ عند $x = 1$.

لكن تحقق أن $\frac{dy}{dx} = (xy)^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(-3)(-3x^2)}{(4 - x^3)^2} = \frac{9x^2}{(4 - x^3)^2} = x^2\left(\frac{3}{4 - x^3}\right)^2 = x^2 y^2 = (xy)^2$$

وهذه المعادلة مطابقة للمعادلة التفاضلية المعطاة.

حاول أن تحل التمرين 18

تطبيقات المعادلات التفاضلية

لقد درسنا سابقًا ما يكفي من مسائل النمو الأسي لنميز أنها تتضمن نموًّا حيث معدل التغير متناسب مع الكمية الحالية الموجودة. كلما ازداد عدد البكتيريا في وعاء الاختبار، كلما تكاثرت بسرعة أكبر. كلما كانت كمية المواد المشعة أكبر، كلما اضمحلت بشكل أسرع.
كلما كبرت موجودات حسابك المصرفي (على افتراض أنها تخضع لفائدة مركبة)، كلما نمت بشكل أسرع.
المعادلة التفاضلية التي تصف هذه العملية هي

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

حيث k هو ثابت النمو الأسي إذا كان موجبًا أو ثابت الاضمحلال الأسي إذا كان سالبًا.

سؤال للتفكر

س: بما أن $y = 1$ عند $x = 1$، هل يصح أن نكتب $\frac{dy}{dx} = (1 \times 1)^2 = 1$، ونستنتج بالتالي أن الحل هو $y = x + C$؟

نموذج إجابة:

كلا. يكمن الخطأ في التعويض، فالتعويض يعطي قيمة المشتقة في نقطة واحدة فقط وليس لكل قيم x حتى نستنتج أن $y = x + C$.

للطلاب سريعي الإنجاز

(مع المثال 3) قبل أن نعرف الصيغة الصريحة للدالة y، يمكن لبعض الطلاب أن يلاحظوا بوضوح أن بإمكاننا معرفة الكثير من المعلومات عن الدالة من المعادلة التفاضلية.

س: أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة y عند $(1, 1)$ من دون إيجاد قيمة y.

نموذج إجابة:

كل ما نحتاجه هنا هو $y'(1)$ ويمكننا إيجادها من خلال التعويض

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = (1 \times 1)^2 = 1$$

معادلة المماس هي

$$y - 1 = 1(x - 1)$$

$$y = x$$

س: هل تكون الدالة y متزايدة في كل فترة بعد $x = 1$ تكون فيها الدالة y متصلة؟

نموذج إجابة:

نعم، لأن $\frac{dy}{dx} = (xy)^2$ أيًا تكن قيمة y $(x \geq 1)$.

س: هل يمكننا استنتاج أن الدالة y متزايدة في الفترة $[1, \infty[$ من دون أن نعرف القيمة الصريحة للدالة y؟

نموذج إجابة:

كلا، لأن y قد لا تكون متصلة في كل الفترة $[1, \infty[$.

س: تحقق من الإجابة السابقة باستعمال الصيغة الصريحة للدالة y.

نموذج إجابة:

$$y(2) = \frac{-3}{4} < y(1) = 1$$

يمثّل الاضمحلال الإشعاعي أحد الأمثلة البارزة لهذا النوع من التغير الأسي. عندما يتحول جزء من كتلة الذرة إلى إشعاع، فإن ما يتبقى منها يعيد ترتيب نفسه من خلال التحول إلى ذرة عنصر آخر كتلته أصغر من كتلة العنصر الأول. هذه العملية تُسمّى الاضمحلال الإشعاعي، والعنصر الذي يضمحل على الدوام يُسمّى عنصرًا مشعًّا. على سبيل المثال، الكربون C-14 المشع يضمحل ويتحول بمرور الزمن إلى نيتروجين، وعنصر الراديوم يضمحل ليتحول بعد عدد من الخطوات الإشعاعية، إلى رصاص.

أثبتت التجارب أن معدل اضمحلال العنصر المشع (إذا قيس بعدد النويّات المتحولة خلال وحدة زمنية واحدة) يتناسب تقريبًا مع عدد النويّات في كتلته المشعة. إذن، يمكن القول إن الاضمحلال الإشعاعي يتم وفقًا للمعادلة التفاضلية

$$\frac{dy}{dt} = -ky, \qquad k > 0$$

المثال التالي يوضح طريقة حل هذا النوع من المعادلات التفاضلية باستعمال طريقة فصل المتغيرات.

الربط مع الكيمياء

عمر النصف للعنصر المشع هو الزمن اللازم لتحول نصف كتلته إلى إشعاع. عمر النصف للعنصر المشع قيمة ثابتة ولا يرتبط بعدد النويّات المشعة فيه.

مثال 4 فصل المتغيرين

أوجد حل المعادلة $\frac{dy}{dt} = ky$.

الحل

هذه المعادلة التفاضلية هي من النوع الذي يمكن فصل المتغيرين فيه.

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

افصل المتغيرين: $dy\left(\frac{1}{y}\right) = k\,dt$

أوجد تكامل الطرفين: $\ln|y| = kt + C$

اكتب الصيغة الأسيّة للمعادلة: $|y| = e^{kt + C}$

استعمل خواص الدوال الأسيّة: $|y| = e^C e^{kt}$

استعمل تعريف القيمة المطلقة: $y = \pm e^C e^{kt}$

لتكن $A = \pm e^C$: $y = Ae^{kt}$

حاول أن تحل التمرينين 27 و 31

نلاحظ مما سبق عدم إمكانية حل هذا النوع من المعادلات إلا باستعمال دالة أسيّة، أما الثابت A فهو قيمة y عند $t = 0$، لذا يمكن التعبير عنه بالقيمة y_0.

سؤال للتفكر

س: هل يمكن القول إن الدالة y تكون متزايدة إذا كان $k > 0$ ومتناقصة إذا كان $k < 0$؟

نموذج إجابة:

كلا، لأن $\frac{dy}{dt} = ky$، ونحن لا نعرف إشارة y بعد لنحدد إشارة $\frac{dy}{dt}$ من خلال إشارة k.

للطلاب الذين يواجهون صعوبات

(مع المثال 4) لإيضاح ما سبق، يمكن طرح السؤال مع شروط معينة لإيجاد حلول خاصة.

س: أوجد حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = 3y$ إذا كان $y = 1$ عند $x = 1$.

نموذج إجابة:

$y = Ae^{3x}$

$y = 1$ عند $x = 1$

إذن

$1 = Ae^3$

$A = e^{-3}$

إذن الحل هو $y = e^{3x-3}$

س: أوجد حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = 3y$ إذا كان $y = -1$ عند $x = 1$

نموذج إجابة:

$y = Ae^{3x}$

$y = -1$ عند $x = 1$

إذن

$-1 = Ae^3$

$A = -e^{-3}$

إذن الحل هو $y = -e^{3x-3}$

(لاحظ أن الحل يمكن أن يكون دالة موجبة أو سالبة).

تذكّر أن المعادلات من الشكل $A = Me^{kt}$ تظهر في الحالات حيث يتناسب معدل تغير كمية ما مع الكمية الموجودة في الزمن t، وهو بالضبط ما تصفه المعادلة التفاضلية $\frac{dA}{dt} = kA$. يسمّى الثابت k ثابت النمو، بينما تمثّل M الكمية الموجودة عند $t = 0$. القيمة الموجبة للثابت k تدل على النمو، وتدل القيمة السالبة للثابت k على الاضمحلال. لقد كتبنا المعادلة سابقًا في الصيغة $y = y_0 e^{-kt}$ عند حديثنا عن تطبيقات أخرى لهذه المعادلة كالاضمحلال الاشعاعي مثلًا.

لا يمثل نموذج نمو التعداد في الصيغة $y = Me^{kt}$ نموذجًا واقعيًا على المدى الطويل. يصبح النمو غير محدود مع الوقت كما تبين التمثيلات البيانية للدوال في الصيغة $y = Me^{kt}$ حين تكون M و k قيمتان موجبتان. هناك أيضًا عوامل أخرى تجعل النموذج غير واقعي كالمكان المحدود ومحدودية كمية الغذاء مع مرور الوقت. في نموذج بديل يفترض عددًا أقصى لتعداد السكان هو N، يصبح معدل النمو لتعداد ما متناسبًا مع مدى قرب التعداد إلى ذلك العدد الأقصى، أي مع الفرق بين N و y. تقودنا هذه الافتراضات إلى المعادلة التفاضلية:

$$\frac{dy}{dt} = k(N - y)$$

والتي سنرى حلها في المثال التالي.

مثال 5 دالة النمو

لا تستوعب المحميات الطبيعية في بعض المناطق أكثر من 4 000 رأس ماعز جبلي. لنفترض أن معدل نمو تعداد هذا النوع من الماعز في كل زمن يتناسب مع الفرق بين عددها الأقصى (4 000) وعددها في ذلك الزمن. ثابت النمو الأسي هو 20% وعدد رؤوس الماعز الابتدائي هو 1 000 رأس.

A. اكتب المعادلة التفاضلية لهذا النمو المحدود وأوجد الحل العام لعدد رؤوس الماعز في كل زمن، ثم الحل الخاص بمعطيات هذه المسألة.

B. أوجد عدد رؤوس الماعز بعد مرور 5 سنوات.

الحل

A. المعادلة هي $\frac{dy}{dt} = k(N - y)$ حيث $k = 0.2$ و $N = 4\,000$.

افصل المتغيرين
$$\frac{dy}{N - y} = k\,dt$$

أوجد تكامل الطرفين
$$\int \frac{dy}{N - y} = \int k\,dt$$

$$-ln|N - y| = kt + C$$

نفترض أن التعداد أقل من N، إذن $N - y > 0$
$$-ln(N - y) = kt + C$$

اضرب طرفَي المعادلة في -1
$$ln(N - y) = -kt - C$$

(تابع)

سؤال للتفكير

س: هل يمكن أن يزداد عدد رؤوس الماعز ليبلغ الحد الأقصى 4 000؟

نموذج إجابة:

كلا، فذلك مستحيل، لأننا في هذه الحالة نحصل على المعادلة التالية:

$$y = 4\,000 - 3\,000e^{-0.2t}$$
$$4\,000 = 4\,000 - 3\,000e^{-0.2t}$$
$$e^{-0.2t} = 0$$

وهي معادلة مستحيلة.

استعمل الصيغة الأسيّة للمعادلة $\quad N - y = e^{-kt - C}$

استعمل الخاصية $e^{m+n} = e^m e^n$ $\quad N - y = e^{-kt} e^{-C}$

حل لإيجاد y ولتكن $M = e^{-C}$ $\quad y = N - Me^{-kt}$

طبق الآن الشرط الابتدائي للحصول على M:

$e^0 = 1$ $\quad y_0 = N - Me^{-k(0)} = N - M$

حل لإيجاد M $\quad M = N - y_0$

عوّض قيمة M في المعادلة لنحصل على الصيغة العامة للدالة:

$$y = N - (N - y_0)\, e^{-kt}$$

يبيّن الشكل 5.6.2 التمثيل البياني لهذه الدالة.

لإيجاد الحل الخاص بحسب المعطى عوّض $k = 0.2,\ y_0 = 1\,000,\ N = 4\,000$.

$$y = 4\,000 - (4\,000 - 1\,000)\, e^{-0.2t}$$

$$y = 4\,000 - 3\,000e^{-0.2t}$$

B. بعد خمس سنوات، يصبح عدد رؤوس الماعز

$$y = 4\,000 - 3000\, e^{-0.2(5)}$$

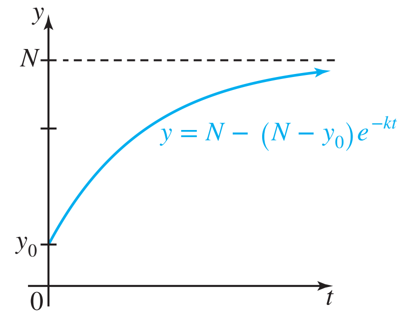
$$= 4\,000 - 3000\, e^{-1}$$

$$\approx 4\,000 - 1\,103.6$$

$$= 2\,896.4$$

إذن، عدد رؤوس الماعز بعد مرور 5 سنوات هو 896 2 رأس ماعز تقريبًا.

حاول أن تحل التمرين 38



الشكل 5.6.2 يبيّن الشكل التمثيل البياني لدالة النمو المحدود. لاحظ أن المنحنى يبقى تحت خط العدد الأقصى N.

ملاحظات على التمارين

التمارين 1-30، تدرب الطالب على حل المعادلات التفاضلية.

التمارين 42-45، تدرب الطالب على أنماط من الاختبارات.

التقييم المستمر

التقييم الذاتي:

التمارين 2, 5, 13, 22, 28, 32, 35

مراجعة سريعة 5.6

في التمرينين 1 و 2، أعد كتابة المعادلة في الصيغة الأسيّة أو اللوغاريتمية.

1. $\ln a = b$ $\quad a = e^b$

2. $e^c = d$ $\quad c = \ln d$

في التمارين 3-8، حل المعادلة.

3. $\ln(x+3) = 2$ $\quad x = e^2 - 3$

4. $100\, e^{2x} = 600$ $\quad x = \frac{\ln 6}{2}$

5. $0.85^x = 2.5$ $\quad x = \frac{\ln 2.5}{\ln 0.85} \approx -5.64$

6. $2^{k+1} = 3^k$ $\quad k = \frac{\ln 2}{\ln 3 - \ln 2} \approx 1.7$

7. $1.1^t = 10$ $\quad t = \frac{\ln 10}{\ln 1.1} \approx 24.16$

8. $e^{-2t} = \frac{1}{4}$ $\quad t = \frac{\ln 4}{2} = \ln \frac{2^2}{2} = \ln 2$

في التمرينين 9 و 10، أوجد y.

9. $\ln(y+1) = 2x - 3$ $\quad y = e^{2t-3} - 1$

10. $\ln|y+2| = 3t - 1$ $\quad y = \pm e^{3t-1} - 2$

الدرس 5.6 التمارين

1. بالعودة إلى مثال 1 إذا كان معدل تزايد عدد الطيور $\frac{dP}{dt}=50\,e^{0.04t}$ ، أوجد الدالة P بدلالة الزمن t إذا كان العدد الابتدائي للطيور في المجموعة هو 50 طيرًا.

في التمارين 2-4، أوجد حل المسألة ذات القيمة الابتدائية باستعمال القيمة الابتدائية المعطاة.

2. $\frac{dy}{dx}+3x^2=2x,\ y(0)=5$

3. $\frac{dy}{dx}=4x^3-3x^2+x,\ y(1)=0$

4. $x\frac{dy}{dx}=x^2e^{3x},\ y(0)=\frac{8}{9}$

في التمارين 5-12، أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية. تحقق من أن الحل يطابق المعادلة التفاضلية المعطاة.

5. $4x^3-2\frac{dy}{dx}=0$

6. $7y\frac{dy}{dx}=5x^2$

7. $\frac{dy}{dx}=15xy$

8. $\frac{dy}{dx}=3x^2y-2xy$

9. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x},\quad x>0$

10. $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2+6}{2y}$

11. $\frac{dy}{dx}=\frac{e^x}{e^y}$

12. $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+1}{xy^2}$

في التمارين 13-21، أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية باستعمال القيمة الابتدائية المعطاة.

13. $\frac{dy}{dx}=\frac{5x^3}{4y},\ y(0)=2$

14. $x^2\frac{dy}{dx}-y\sqrt{x}=0,\ y(1)=e^{-2}$

15. $(2x+3)y=\frac{dy}{dx},\ y(0)=1$

16. $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+5}{2y-1},\ y(0)=11$

17. $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+1}{y-3},\ y(0)=4$

18. $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{x},\ y(e)=3$

19. $\frac{dy}{dx}=x^{\frac{1}{2}}y^2,\ y(4)=9$

20. $\frac{dy}{dx}=(y-1)^2e^{x-1},\ y(1)=2$

21. $\frac{dy}{dx}=0.001y(100-y),\ y(0)=5$

في التمارين 22-26، استعمل طريقة فصل المتغيرين لحل معادلات القيمة الابتدائية.

22. $\frac{dy}{dx}=\cos^2 y$، $y=0$ عندما $x=0$.

23. $\frac{dy}{dx}=(\cos x)\,e^{y+\sin x}$، $y=0$ عندما $x=0$.

24. $\frac{dy}{dx}=e^{x-y}$، $y=2$ عندما $x=0$.

25. $\frac{dy}{dx}=-2xy^2$، $y=0.25$ عندما $x=1$.

26. $\frac{dy}{dx}=\frac{4\sqrt{y}\,\ln x}{x}$، $y=1$ عندما $x=e$.

في التمارين 27-30، أوجد حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dt}=ky$، حيث k عدد ثابت، والذي يحقق الشرط الابتدائي المعطى.

27. $y(0)=100\ ,\ k=1.5$

28. $y(0)=200\ ,\ k=-0.5$

29. $y(5)=100\ ,\ y(0)=50$

30. $y(10)=30\ ,\ y(0)=60$

31. **عمر النصف** يمكن نمذجة اضمحلال الكتلة المشعة في العنصر Sm-151 (نظير مشع لعنصر السماريوم) بالمعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dt}=-0.0077y$، حيث t الزمن بالسنوات. أوجد عمر النصف للعنصر Sm-151.

32. **عمر النصف** لإحدى النظائر المشعة للنبتونيوم Np-240 عمر نصف هو 65 دقيقة. إذا قمنا بنمذجة اضمحلال العنصر Np-240 باستعمال المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dt}=-ky$، حيث t بالدقائق. أوجد ثابت الاضمحلال k.

33. **عمر النصف** أوجد عمر النصف لعنصر يضمحل وفق المعادلة

$$y=y_0\,e^{-kt}$$

وأثبت أن عمر النصف هذا لا يتعلق إلا بالثابت k.

34. الضغط الجوي تتم عادة نمذجة ضغط الأرض الجوي p من خلال اعتبار أن المعدل $\frac{dp}{dh}$، حيث يتغير p مع الارتفاع h عن سطح البحر، متناسب مع p. لنفرض أن الضغط عند مستوى سطح البحر هو 1013 ميلليبار(حوالي $14.7\ \frac{\text{lb}}{\text{in}^2}$) وأن الضغط على ارتفاع 20 km هو 90 ميلليبار.

a. أوجد حل مسألة القيمة الابتدائية

المعادلة التفاضلية: $\frac{dp}{dh} = kp$

القيمة الابتدائية: $p = p_0$ حيث $h = 0$

أوجد قيم كل من p_0 و k بناءً على معطيات الضغط الجوي والارتفاع.

b. أوجد الضغط الجوي على ارتفاع $h = 50$ km.

c. أوجد الارتفاع حيث يساوي الضغط 900 ميلليبار.

35. تفريغ التيار المكثف لنفرض أن الكهرباء تفرغ من مكثف بمعدل متناسب مع التيار V خلال طرفيه وأنه، إذا كانت t تقاس بالثواني،

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{40}V$$

a. أوجد حل المعادلة التفاضلية بالنسبة للتيار V، باستعمال V_0 للدلالة على قيمة V عندما $t = 0$.

b. كم سيستغرق التيار ليهبط حتى 10% من قيمته الأصلية؟

36. تحويل السكر تتضمن عملية تصنيع السكر الخام خطوة "تحويل" تغير بنية السكر الجزيئية. عندما تبدأ العملية، يكون معدل تغير كمية السكر الخام متناسبًا مع كمية السكر الخام المتبقية. إذا تقلصت كمية السكر الخام من 1 000 kg إلى 800 kg خلال 10 ساعات، أوجد كمية السكر الخام المتبقية بعد 14 ساعة أخرى.

37. تكاثر البكتيريا تنمو مستعمرة بكتيريا في مختبر ضمن شروط مثالية بحيث يزداد عدد البكتيريا في المستعمرة أسيًّا بمرور الزمن. بعد 3 ساعات، أصبح في المستعمرة 10 000 بكتيريا. وبعد 5 ساعات، أصبح عدد البكتيريا في المستعمرة 40 000 أوجد العدد الابتدائي للبكتيريا في هذه المستعمرة.

38. بالعودة للمثال 5، أوجد عدد رؤوس الماعز بعد 5 سنوات إذا كان المرعى يستوعب 6 000 رأس. معدل النمو 15%، والعدد الابتدائي لرؤوس الماعز في المرعى هو 1 200 رأس.

39. ترطيب التربة يمثّل المؤشر I مقياسًا لقياس رطوبة التربة. وصفت مقالة تعنى بشؤون الزراعة معدل تغير I بالنسبة لكمية المياه المتوافرة، W، باستعمال المعادلة

$$\frac{dI}{dW} = 0.088\ (2.4 - I)$$

a. حسب المقالة فإن $I = 1$ عند $W = 0$.
أوجد حل المسألة الابتدائية.

b. ماذا يحصل للمؤشر I كلما ازدادت W؟

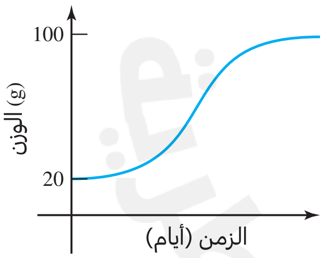
40. تعداد الأسماك تم عزل مجموعة من الأسماك وتحديد عددها الأقصى ب 4 000 حسب كمية الطعام المتوفرة. إذا كان عددها الآن 320 سمكة وكانت المجموعة تنمو بمعدل نمو ثابت هو 2% سنويًّا، أوجد عدد الأسماك المتوقع عند نهاية 10 سنوات.

41. نمو الطيور يتناسب معدل اكتساب الوزن لطير صغير مع الفرق بين وزن الطير البالغ ووزنه الحالي. عند $t = 0$، أي عند قياس وزن الطير لأول مرة، كان وزنه 20 g. إذا كان $B(t)$ وزن الطير بالجرام، بعد t يوم من قياس وزنه لأول مرة، يكون

$$\frac{dB}{dt} = 0.2(100 - B)$$

a. هل يكتسب الطير الوزن بشكل أسرع عندما يكون وزنه 40 g أم 70 g؟ اشرح طريقة تفكيرك.

b. أوجد $\frac{d^2B}{dt^2}$ بدلالة t. استعمل $\frac{d^2B}{dt^2}$ لتشرح لماذا لا يمكن للتمثيل البياني للدالة B أن يشبه التمثيل البياني التالي.



c. استعمل فصل المتغيرات لإيجاد $y = B(t)$، الحل الخاص للمعادلة التفاضلية بالقيمة الابتدائية $B(0) = 20$.

سئلة اختبار معيارية

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية للإجابة عن الأسئلة في هذا القسم.

42. **صواب أم خطأ** إذا كان $\frac{dy}{dx} = ky$ ، فإن $y = e^{kx} + C$.
برّر إجابتك.

43. **صواب أم خطأ** يمكن كتابة الحل العام للمعادلة $\frac{dy}{dt} = 2y$
في الصورة $y = C\left(3^{kt}\right)$ حيث C و k ثابتان. برّر إجابتك.

44. **اختيار من متعدد** تخسر عينة من العنصر Ce-143 (نظير مشع للسيريوم) 99% من كتلتها المشعة خلال 199 ساعة.
ما عمر النصف للعنصر Ce-143؟ C

A. 4 ساعات

B. 6 ساعات

C. 30 ساعة

D. 100.5 ساعة

E. 143 ساعة

45. **اختيار من متعدد** في أي من النماذج التالية تتناسب $\frac{dy}{dt}$ مع y مباشرة؟ D

I. $y = e^{kt} + C$

II. $y = Ce^{kt}$

III. $y = 28^{kt}$

A. I فقط

B. II فقط

C. I و II فقط

D. II و III فقط

E. I و II و III

استكشاف

46. **التناسب بين مقاومة الهواء والسرعة** من المنطقي افتراض أن مقاومة الهواء لجسم متحرك، مثل سيارة تحاول التوقف، متناسبة مع سرعة الجسم. وبالتالي فإن مقاومة الهواء لجسم كتلته m ويتحرك بسرعة v تساوي $-kv$، حيث k ثابت موجب.

a. استعمل القانون: القوة = الكتلة × التسارع لإثبات أن سرعة جسم يتعرض لمقاومة الهواء (مع تجاهل كل العوامل الأخرى) تحقق المعادلة التفاضلية

$$m\frac{dv}{dt} = -kv$$

b. أوجد حل المعادلة التفاضلية لتثبت أن $v = v_0\, e^{-(k/m)t}$، حيث v_0 سرعة الجسم في الزمن $t = 0$.

c. إذا كانت قيمة k لجسمين بكتلتين مختلفتين هي نفسها، أيّ من هذين الجسمين يستغرق تناقص سرعته الابتدائية حتى النصف زمنًا أقل؟ برّر إجابتك.

47. **تقليل السرعة حتى التوقف** افترض أن مقاومة الهواء لجسم متحرك تتناسب مع سرعته بحيث تكون السرعة $v = v_0\, e^{-(k/m)t}$.

a. أوجد تكامل دالة السرعة بالنسبة للزمن t لإيجاد دالة الموقع s. افترض أن $s(0) = 0$ وأثبت أن

$$s(t) = \frac{v_0\, m}{k}\left(1 - e^{-\left(\frac{k}{m}\right)t}\right)$$

b. أثبت أن المسافة الكلية التي قطعها الجسم حين كان يقلل من سرعته حتى التوقف التام هي $\frac{v_0\, m}{k}$.

توسيع الأفكار

48. القفز المظلي الحر إذا سقط جسم كتلته m سقوطًا حرًّا من حالة السكون وبتأثير الجاذبية الأرضية فقط، وكانت مقاومة الهواء له تتناسب مع مربع سرعته، يمكن نمذجة سرعة الجسم $v(t)$ من خلال مسألة القيمة الابتدائية، حيث

المعادلة التفاضلية: $m\,\dfrac{dv}{dt} = mg - kv^2$

الشرط الابتدائي: $v(0) = 0$

حيث t الزمن بالثواني، و g هو التسارع بسبب الجاذبية، و k ثابت يتوقف على خصائص الجسم وكثافة الهواء. (نفترض أن زمن السقوط قصير كفاية لتكون كثافة الهواء ثابتة تقريبًا ولا تؤثر في النتيجة).

a. أثبت أن حل مسألة القيمة الابتدائية هو الدالة

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}}\,\frac{e^{at} - e^{-at}}{e^{at} + e^{-at}}$$

حيث $a = \sqrt{\dfrac{gk}{m}}$ هي حل لمسألة القيمة الابتدائية.

b. أوجد سرعة الجسم المحدودة $\lim\limits_{t\to\infty} v(t)$.

c. بالنسبة لشخص يقفز بشكل حر بالمظلة، وزنه 160 lb $(mg = 160)$، بحيث يكون الزمن بالثواني والمسافة بالأقدام، وقيمة k النموذجية هي 0.005

أوجد السرعة المحدودة لهذا الشخص. أعطِ الإجابة بوحدة الميل في الساعة.

يتحكم المظليون بسرعتهم المحدودة من خلال تغيير المساحة المقابلة للسقوط من أجسادهم، ويمكنهم تغيير سرعة سقوطهم من 94 إلى 321 ميلًا في الساعة.

إجابات على أسئلة التمارين 5.6

1. $\frac{dP}{dt} = 50e^{0.04t}$

$P = \int 50e^{0.04t}\, dt = 1\,250e^{0.04t} + C$

$P(0) = 50,\ 50 = 1\,250 + C,\ C = -1\,200$

$P(t) = 1\,250e^{0.04t} - 1\,200$

2. $y = \int \left(2x - 3x^2\right) dx = x^2 - x^3 + C$

$y(0) = 5,\ C = 5,\ y = x^2 - x^3 + 5$

3. $y = \int \left(4x^3 - 3x^2 + x\right) dx = x^4 - x^3 + \frac{x^2}{2} + C$

$y(1) = 0,\ C = -\frac{1}{2},\ y = x^4 - x^3 + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$

4. $y = \int xe^{3x}\, dx = \int u\, dv = uv - \int v\, du = \frac{xe^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3}\, dx = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + C$

$y(0) = \frac{8}{9},\ -\frac{1}{9} + C = \frac{8}{9},\ C = 1,\ y = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + 1$

5. $y = \int 2x^3\, dx = \frac{x^4}{2} + C$

التحقق:

$4x^3 - 2\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 2\left(2x^3\right) = 0$

6. $\int 7y\, dy = \int 5x^2\, dx,\ \frac{7y^2}{2} = \frac{5x^3}{3} + C,\ y^2 = \frac{10}{21}x^3 + \frac{2}{7}C,\ y^2 = \frac{10}{21}x^3 + K$

التحقق عن طريق الاشتقاق الضمني:

$2y\frac{dy}{dx} = \frac{10}{7}x^2$

$7y\frac{dy}{dx} = 5x^2$

7. $\int \frac{dy}{y} = \int 15x\, dx,\ ln\,|y| = \frac{15x^2}{2} + C,\ |y| = e^{\frac{15x^2}{2} + C},\ |y| = e^c e^{\frac{15x^2}{2}},\ y = Ae^{\frac{15x^2}{2}}$

التحقق:

$\frac{dy}{dx} = 15xAe^{\frac{15x^2}{2}} = 15xy$

8. $\int \frac{dy}{y} = \int \left(3x^2 - 2x\right) dx,\ ln\,|y| = x^3 - x^2 + C,\ |y| = e^{x^3 - x^2 + C},$

$|y| = e^C e^{x^3 - x^2},\ y = Ae^{x^3 - x^2}$

التحقق:

$\frac{dy}{dx} = \left(3x^2 - 2x\right)Ae^{x^3 - x^2} = \left(3x^2 - 2x\right)y = 3x^2y - 2xy$

9. $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x},\ ln\,|y| = ln\,|x| + C,\ |y| = e^{ln\,x + C},\ |y| = e^C x,\ y = \pm e^C x,\ y = Ax$

التحقق:

$\frac{dy}{dx} = A = \frac{y}{x}$

10. $\int \frac{2y}{y^2 + 6}\, dy = \int dx,\ ln\left(y^2 + 6\right) = x + C,\ y^2 = e^C e^x - 6,\ y^2 = Ke^x - 6$

التحقق عن طريق الاشتقاق الضمني:

$2y\frac{dy}{dx} = Ke^x,\ 2y\frac{dy}{dx} = \left(y^2 + 6\right),\ \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 6}{2y}$

11. $\int e^y\, dy = \int e^x\, dx,\ e^y = e^x + C,\ y = ln\,(e^x + C)$

التحقق:

$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^x + C} = \frac{e^x}{e^y}$

12. $\int y^2\, dy = \int \left(x + \frac{1}{x}\right) dx,\ \frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} + ln\,|x| + C,\ y^3 = \frac{3x^2}{2} + 3\,ln\,|x| + C$

التحقق عن طريق الاشتقاق الضمني:

$3y^2\frac{dy}{dx} = 3x + \frac{3}{x},\ y^2\frac{dy}{dx} = x + \frac{1}{x},\ \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 1}{xy^2}$

13. $\int 4y\, dy = \int 5x^3\, dx,\ 2y^2 = \frac{5x^4}{4} + C,\ y^2 = \frac{5x^4}{8} + \frac{C}{2},\ y^2 = \frac{5x^4}{8} + K$

$y(0) = 2,\ 4 = K,\ y^2 = \frac{5x^4}{8} + 4$

14. $\int \frac{dy}{y} = \int x^{-\frac{3}{2}}\, dx,\ ln\,|y| = -2x^{-\frac{1}{2}} + C,\ y = \pm e^c e^{-2x^{-\frac{1}{2}}},\ y = Ae^{-\frac{2}{\sqrt{x}}}$

$y(1) = e^{-2},\ A = 1,\ y = e^{-\frac{2}{\sqrt{x}}}$

15. $\int (2x + 3)\, dx = \int \frac{dy}{y},\ ln\,|y| = x^2 + 3x + C,\ y = \pm e^C e^{x^2 + 3x},\ y = Ae^{x^2 + 3x}$

$y(0) = 1,\ A = 1,\ y = e^{x^2 + 3x}$

16. $\int (2y - 1)\, dy = \int \left(x^2 + 5\right) dx,\ y^2 - y = \frac{x^3}{3} + 5x + C$

$y(0) = 11,\ C = 110,\ y^2 - y = \frac{x^3}{3} + 5x + 110$

17. $\int (y - 3)\, dy = \int (2x + 1)\, dx,\ \frac{y^2}{2} - 3y = x^2 + x + C$

$y(0) = 4,\ C = -4,\ y^2 - 3y = x^2 + x - 4$

18. $\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{x},\ -\frac{1}{y} = ln\,|x| + C,\ y = -\frac{1}{ln\,|x| + C}$

$y(e) = 3,\ C = -\frac{4}{3},\ y = -\frac{1}{ln\,|x| - \frac{4}{3}} = -\frac{3}{3ln\,|x| - 4}$

19. $\int \frac{dy}{y^2} = \int x^{\frac{1}{2}}\, dx,\ -\frac{1}{y} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C,\ y = -\frac{1}{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C}$

$y(4) = 9,\ C = -\frac{49}{9},\ y = -\frac{1}{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{49}{9}} = -\frac{9}{6x^{\frac{3}{2}} - 49}$

20. $\int \frac{dy}{(y - 1)^2} = \int e^{x - 1}\, dx,\ -\frac{1}{y - 1} = e^{x - 1} + C,\ y = -\frac{1}{e^{x - 1} + C} + 1$

$y(1) = 2,\ C = -2,\ y = -\frac{1}{e^{x - 1} - 2} + 1 = \frac{e^{x - 1} - 3}{e^{x - 1} - 2}$

21. $\int \frac{dy}{y(100 - y)} = \int 0.001\, dx$

$\int \left(\frac{A}{y} + \frac{B}{100 - y}\right) dy = 0.001x + C$

$\int \left(\frac{0.01}{y} + \frac{0.01}{100 - y}\right) dy = 0.001x + C$

$0.01\,ln\left|y(100 - y)\right| = 0.001x + C,\ \left|y(100 - y)\right| = e^{0.1x + C},$

$y(100 - y) = \pm\, e^c e^{0.1x},\ y(100 - y) = Ke^{0.1x}$

$y(0) = 5,\ K = 475,\ y(100 - y) = 475e^{0.1x}$

22. $\int \frac{dy}{\cos^2 y} = \int dx,\ \int \sec^2 y\, dy = x + C,\ \tan y = x + C$

$y(0) = 0,\ C = 0,\ \tan y = x$

23. $\int \frac{dy}{e^y} = \int \cos x\, e^{\sin x}\, dx,\ -e^{-y} = e^{\sin x} + C,\ y = -ln\left(-C - e^{\sin x}\right)$

$y(0) = 0,\ 0 = -ln\left(-C - e^0\right),\ C = -2,\ y = -ln\left(2 - e^{\sin x}\right)$

24. $\int e^y\, dy = \int e^x\, dx,\ e^y = e^x + C,\ y = ln\,(e^x + C)$

$y(0) = 2,\ 2 = ln\,(1 + C),\ C = e^2 - 1,\ y = ln\left(e^x + e^2 - 1\right)$

25. $\int \frac{dy}{y^2} = \int -2x\,dx,\ -\frac{1}{y} = -x^2 + C,\ y = \frac{1}{x^2 - C}$

$y(1) = 0.25,\ \frac{1}{1-C} = 0.25,\ C = -3,\ y = \frac{1}{x^2+3}$

26. $\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = 4\int \frac{\ln x}{x}\,dx,\ \int y^{-\frac{1}{2}}\,dy = 4\int \frac{\ln x}{x}\,dx,\ 2\sqrt{y} = 2\ln^2 x + C,$

$\sqrt{y} = \ln^2 x + K,\ y(e) = 1,\ \sqrt{1} = 1 + K,\ K = 0$

إذن، $y = \ln^4 x$.

27. $\frac{dy}{dt} = 1.5y,\ \int \frac{dy}{y} = \int 1.5\,dt,\ \ln|y| = 1.5t + C,\ y = \pm e^C e^{1.5t},\ y = Ae^{1.5t}$

$y(0) = 100,\ A = 100,\ y = 100e^{1.5t}$

28. $\frac{dy}{dt} = -0.5y,\ \int \frac{dy}{y} = -\int 0.5\,dt,\ \ln|y| = -0.5t + C,\ y = \pm e^C e^{-0.5t},$

$y = Ae^{-0.5t}$

$y(0) = 200,\ A = 200,\ y = 200e^{-0.5t}$

29. $\frac{dy}{dt} = ky,\ \int \frac{dy}{y} = \int k\,dt,\ \ln|y| = kt + C,\ y = \pm e^C e^{kt},\ y = Ae^{kt}$

$y(0) = 50,\ A = 50$

$y(5) = 100,\ 100 = 50e^{5k},\ k = \frac{\ln 2}{5} \approx 0.14,\ y \approx 50e^{0.14t}$

30. بالعودة إلى التمرين 29، $y = Ae^{kt}$.

$y(0) = 60,\ A = 60$

$y(10) = 30,\ 30 = 60e^{10k},\ k = 0.1\ln 0.5 \approx -0.7$

$y \approx 60e^{-0.07t}$

31. $\int \frac{dy}{y} = -\int 0.0077\,dt,\ \ln|y| = -0.0077t + C,\ y = \pm e^C e^{-0.0077t},$

$y = Ae^{-0.0077t}$

عند $t = 0$، $y = A$.

لإيجاد عمر النصف، أوجد t عندما $y = \frac{A}{2}$.

$\frac{A}{2} = Ae^{-0.0077t},\ \frac{1}{2} = e^{-0.0077t},\ t = 90$

إذن، عمر النصف للعنصر Sm-151 هو 90 سنة.

32. $\int \frac{dy}{y} = -\int k\,dt,\ \ln|y| = -kt + C,\ y = \pm e^C e^{-kt},\ y = Ae^{-kt}$

عند $t = 0$، $y = A$.

عند $y = \frac{A}{2}$، $t = 65$.

$\frac{A}{2} = Ae^{-kt},\ \frac{1}{2} = e^{-65k},\ k = 0.01067$

33. عند $t = 0$، $y = y_0$.

عند $y = \frac{y_0}{2}$

$\frac{y_0}{2} = y_0 e^{-kt},\ \frac{1}{2} = e^{-kt},\ t = \frac{\ln 2}{k}$

إذن عمر النصف هو $\frac{\ln 2}{k}$ وهو لا يتعلق إلا بالثابت k.

34. a. $\int \frac{dp}{p} = \int k\,dh,\ \ln|p| = kh + C,\ p = e^C e^{kh}$

$p = Ae^{kh}$

$h = 0,\ p = p_0,\ A = p$

إذن $p = p_0 e^{kh}$.

عند $h = 0$، $p = 1\,013$، إذن $p_0 = 1\,013$.

عند $h = 20$، $p = 90$.

$90 = 1\,013e^{20k},\ k = -0.121,\ p = 1\,013e^{-0.121h}$

b. $h = 50,\ p = 1\,013e^{-0.121(50)} = 2.383$

إذن، الضغط الجوي على ارتفاع 50 km يساوي 2.383 ميلليبار.

c. $p = 900,\ 900 = 1\,013e^{-0.121h},\ h = 0.977$

إذن، عندما يكون الضغط 900 ميلليبار يكون الارتفاع 0.977 km

35. a. $\int \frac{dV}{V} = -\int \frac{1}{40}\,dt,\ \ln V = -\frac{t}{40} + C,\ V = e^C e^{-\frac{t}{40}},\ V = Ae^{-\frac{t}{40}}$

عند $t = 0$، $V = V_0$، إذن $A = V_0$ وبالتالي $V = V_0 e^{-\frac{t}{40}}$.

b. $V = 0.1V_0,\ V_0 e^{-\frac{t}{40}} = 0.1V_0,\ e^{-\frac{t}{40}} \approx 0.1,\ t = 92.1$ sec

36. لنفترض أن q يمثل كمية السكر الخام المتبقية بعد مرور t ساعات.

$\frac{dq}{dt} = kq,\ \int \frac{dq}{q} = \int k\,dt,\ \ln q = kt + C,\ q = e^C e^{kt} = q_0 e^{kt}$

عند $t = 0$، $q = 1000$. إذن $q_0 = 1\,000$ أي أن $q = 1\,000e^{kt}$.

عند $t = 10$، $q = 800$

$800 = 1\,000e^{10k},\ k = -0.02231,\ q = 1\,000e^{-0.02231t}$

عند $t = 24$،

$q = 1\,000e^{-0.02231(24)} = 589.4$

إذن، كمية السكر المتبقية بعد 14 ساعة أخرى هي 589.4 kg

37. لنفترض أن y يمثل عدد البكتيريا بعد مرور t ساعة.

$\frac{dy}{dt} = ky,\ \int \frac{dy}{y} = \int k\,dt,\ \ln y = e^{kt} + C,\ y = e^C e^{kt} = Ae^{kt}$

عند $t = 3$، $y = 10\,000$ $\quad 10\,000 = Ae^{3k}$ ... (1)

عند $t = 5$، $y = 40\,000$ $\quad 40\,000 = Ae^{5k}$ ... (2)

اقسم المعادلة (1) على المعادلة (2):

$\frac{10\,000}{40\,000} = \frac{Ae^{3k}}{Ae^{5k}},\ \frac{1}{4} = e^{-2k},\ k = \ln 2$

عوّض $k = \ln 2$ في المعادلة (1):

$10\,000 = Ae^{3\ln 2},\ A = 1\,250,\ y = 1\,250e^{(\ln 2)t}$

عند $t = 0$، $y = 1\,250$.

إذن، العدد الابتدائي للبكتيريا في هذه المستعمرة هو 1 250

38. $y = 6\,000 - Me^{-0.15t}$

عند $t = 0$، $y = 1\,200$

$1\,200 = 6\,000 - Me^{-0.15(0)},\ M = 4\,800$

$t = 5,\ y = 6\,000 - 4\,800\,e^{-0.15(5)},\ y \approx 3\,732.6$

إذن، عدد رؤوس الماعز بعد 5 سنوات هو 3 732

39. a. $\int \frac{dI}{2.4 - I} = \int 0.088\,dW,\ -\ln|2.4 - I| = 0.088W + C,$

$2.4 - I = \pm e^{-C} e^{-0.088W},\ I = 2.4 - Ke^{-0.088W}$

عند $W = 0$، $I = 1$.

$1 = 2.4 - K,\ K = 1.4,\ I = 2.4 - 1.4e^{-0.088W}$

b. كلما ازدادت قيمة W اقترب المقدار $e^{-0.088W}$ من الصفر،
وبالتالي اقترب I من 2.4

40. $\frac{dy}{dt} = 0.02(4\,000 - y),\ \int \frac{dy}{4\,000 - y} = \int 0.02\,dt,$

$-\ln(4\,000 - y) = 0.02t + C,\ y = 4\,000 - e^{-C} e^{-0.02t},$

$y = 4\,000 - Me^{-0.02t}$

عند $t = 0$، $y = 320$.

$320 = 4\,000 - M,\ M = 3\,680,\ y = 4\,000 - 3\,680e^{-0.02t}$

عند $t = 10$، $y = 4\,000 - 3\,680e^{-0.02(10)} = 987.07$.

إذن، عدد الأسماك المتوقع بعد 10 سنوات هو 987

41. a. يكتسب الطير الوزن عند $B = 40$ بشكل أسرع مقارنة باكتسابه الوزن عند $B = 70$، لأن $\frac{dB}{dt} = 0.2(100 - B)$ تعطي قيمًا أصغر كلما ازدادت قيمة B.

b. $\frac{d^2B}{dt^2} = -0.2\,\frac{dB}{dt} = -0.04(100 - B) < 0$ ، لكل قيم B بين 0 و 100 إذن، يجب أن يكون تقعّر التمثيل البياني للدالة إلى الأسفل في الفترة الموضّحة في التمثيل البياني، لذا لا يمكن للتمثيل البياني الموضح أن يمثل الدالة B.

c. $\int \frac{dB}{100 - B} = \int 0.2\,dt,\ -\ln\,(100 - B) = 0.2t + C,\ B = 100 - Ke^{-0.2t}$

عند $t = 0$، $B = 20$

$20 = 100 - Ke^{-0.2(0)},\ K = 80,\ B = 100 - 80e^{-0.2t}$

42. خطأ. الجواب الصحيح هو $|y| = e^{kx + C}$، ويمكن كتابته على الشكل التالي: $y = Ae^{kx}$.

43. صواب. يمكن حل المعادلة التفاضلية باستعمال معادلة أسيّة بأي أساس.

لاحظ أن $Ce^{2t} = C\left(3^{kt}\right)$ عندما $k = \frac{2}{\ln 3}$

46. a. بما أن تسارع الجسم يساوي $\frac{dv}{dt}$ ، فإن القوة تساوي $m\,\frac{dv}{dt}$ وتساوي أيضًا مقاومة الهواء $-kv$، لذا فإن $m\,\frac{dv}{dt} = -\,kv$

b. $\int \frac{dv}{v} = \int -\frac{k}{m}\,dt,\ \ln v = -\frac{kt}{m} + C,\ v = e^{C}e^{-\frac{kt}{m}},\ v = Ke^{-\frac{kt}{m}}$

عند $t = 0$، $v = v_0$. إذن،

$K = v_0,\ v = v_0e^{-\frac{kt}{m}}$

c. $v = \frac{v_0}{2},\ \frac{v_0}{2} = v_0e^{-\frac{kt}{m}},\ \frac{1}{2} = e^{-\frac{kt}{m}},\ -\ln 2 = -\frac{kt}{m},\ t = \frac{m\ln 2}{k}$

بما أن $\ln 2 > 1$، وقيمة k للجسمين ثابتة، فإن تزايد t يتناسب مع تزايد m. إذن، يستغرق تناقص السرعة الابتدائية للجسم ذي الكتلة الأصغر زمنًا أقل.

47. a. $\int v\,dt = \int v_0\,e^{-\left(\frac{k}{m}\right)t}\,dt,\ s(t) = -\frac{v_0\,m}{k}\,e^{-\left(\frac{k}{m}\right)t} + C$

$s(0) = 0,\ 0 = -\frac{v_0\,m}{k} + C,\ C = \frac{v_0\,m}{k}$

$s(t) = -\frac{v_0\,m}{k}\,e^{-\left(\frac{k}{m}\right)t} + \frac{v_0\,m}{k} = \frac{v_0\,m}{k}\left(1 - e^{-\left(\frac{k}{m}\right)t}\right)$

b. $\lim_{t\to\infty} s(t) = \frac{v_0\,m}{k}$

48. a. $\int \frac{m}{mg - kv^2}\,dv = \int dt$

$\int \left(\frac{A}{\sqrt{mg} - \sqrt{k}\,v} + \frac{B}{\sqrt{mg} + \sqrt{k}\,v}\right) dv = t + C$

$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{g}} \int \left(\frac{1}{\sqrt{mg} - \sqrt{k}\,v} + \frac{1}{\sqrt{mg} + \sqrt{k}\,v}\right) dv = t + C$

$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{gk}} \int \left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{mg} - \sqrt{k}\,v} + \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{mg} + \sqrt{k}\,v}\right) dv = t + C$

$-\ln\left|\sqrt{mg} - \sqrt{k}\,v\right| + \ln\left|\sqrt{mg} + \sqrt{k}\,v\right| = 2\sqrt{\frac{gk}{m}}\,(t + C)$

$\ln\left|\frac{\sqrt{mg} + \sqrt{k}\,v}{\sqrt{mg} - \sqrt{k}\,v}\right| = 2a(t + C)$

$\frac{\sqrt{mg} + \sqrt{k}\,v}{\sqrt{mg} - \sqrt{k}\,v} = \pm e^{2aC}e^{2at}$

$\frac{\sqrt{mg} + \sqrt{k}\,v}{\sqrt{mg} - \sqrt{k}\,v} = Ae^{2at}$

$v = \sqrt{\frac{mg}{k}}\left(\frac{Ae^{2at} - 1}{1 + Ae^{2at}}\right),\ v(0) = 0,\ A = 1,\ v = \sqrt{\frac{mg}{k}}\left(\frac{e^{2at} - 1}{1 + e^{2at}}\right)$

$= \sqrt{\frac{mg}{k}}\left(\frac{e^{2at} - 1}{1 + e^{2at}}\right) \cdot \frac{e^{-at}}{e^{-at}}$

$v = \sqrt{\frac{mg}{k}}\left(\frac{e^{at} - e^{-at}}{e^{at} + e^{-at}}\right)$

b. $\lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty} \sqrt{\frac{mg}{k}}\left(\frac{1 - e^{-2at}}{1 + e^{-2at}}\right) = \sqrt{\frac{mg}{k}}$

c. $\sqrt{\frac{mg}{k}} = \sqrt{\frac{160}{0.005}}$

$= 178.9$ ft/sec

$= 178.9 \times 0.000189394$ mi/sec

≈ 0.034 mi/sec

الوحدة 5 مراجعة الوحدة

في التمارين 1-9، أوجد قيمة التكامل المحدود.
استعمل طريقة التعويض إذا لزم الأمر.

1. $\int_{-2}^{2} 5\, dx$

2. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos x\, dx$

3. $\int_{-1}^{1} (3x^2 - 4x + 7)\, dx$

4. $\int_{1}^{2} \frac{4}{x^2}\, dx$

5. $\int_{1}^{4} \frac{1}{t\sqrt{t}}\, dt$

6. $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sec^2 \theta\, d\theta$

7. $\int_{0}^{1} \frac{36}{(2x+1)^3}\, dx$

8. $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \sec x \tan x\, dx$

9. $\int_{0}^{2} \frac{2}{y+1}\, dy$

في التمارين 10-12، استعمل التكامل المحدود لإيجاد المساحة بين المحور x ومنحنى الدالة f في الفترة المحددة.

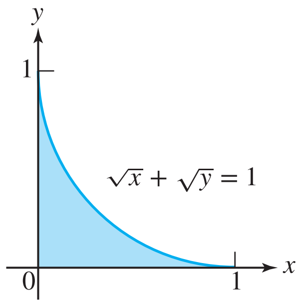
10. $f(x) = \sqrt{4x-3}$, $[1, 3]$

11. $f(x) = (3x+2)^6$, $[-2, 0]$

12. $f(x) = xe^{x^2}$, $[0, 2]$

في التمارين 13-16، أوجد مساحة المنطقة الواقعة بين المستقيمات والمنحنيات.

13. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1;\ y = 0;\ x = 0$

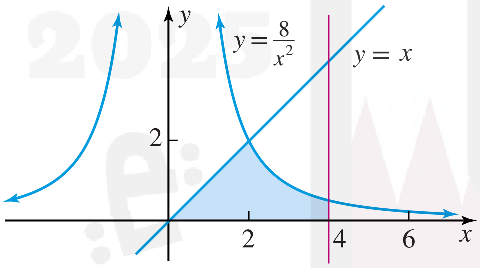


14. $y = x + 1;\ y = 3 - x^2$

15. $y = -2x^2 + 6;\ x = 2;\ y = 0$

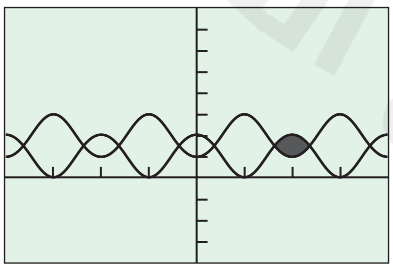
16. $y = x^2 + 2;\ y = x + 4$

17. أوجد المساحة الواقعة في الربع الأول والمحددة بالمستقيم $y = x$ والمستقيم $x = 4$ ومنحنى الدالة $y = \frac{8}{x^2}$ والمحور x.



18. عِقد أوجد مساحة المنطقة الصغيرة المظللة من العقد، الواقعة بين المنحنيين

$y = 1 + \cos x,\ y = 2 - \cos x$



$[-4\pi, 4\pi]$ في $[-4, 8]$

.19 أوجد مساحة إحدى المناطق الكبيرة في العقد، المحصورة بين المنحنيين في الشكل الوارد في التمرين السابق.

في التمارين 21-24، أوجد المساحة بين المنحنيين، وحسب الفترة المحددة في بعض الحالات.

.20 $f(x) = 5 - x^2$ و $g(x) = x^2 - 3$

.21 $f(x) = x^2 - 4x$ و $g(x) = x - 6$

.22 $f(x) = x^2 - 4x$ و $g(x) = x + 6$ و $x = -2$ و $x = 4$

.23 $f(t) = 5 - t^2$ و $g(t) = t^2 - 3$ و $t = 0$ و $t = 4$

في التمارين 24-26، أوجد الحجم الدوراني الناشئ عن دوران المساحة المحددة بمنحنى الدالة المعطاة حول المحور x.

24. $y = 2x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 2$

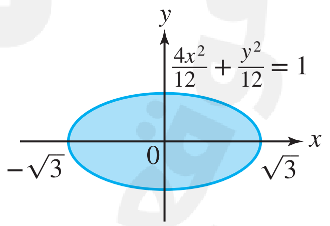
25. $y = \frac{1}{x},\ y = 0,\ x = \frac{1}{2},\ x = 2$

26. $y = 3x^2,\ y = 0,\ x = -1,\ x = 1$

.27 أوجد الحجم الدوراني الناشئ عن دوران المساحة المحددة بمنحنى الدالة المعطاة حول المحور x.

$y = \sin x,\ y = 0,\ 0 \le x \le \pi$

.28 المقطع العرضي لكرة القدم الأمريكية يشبه القطع الناقص المبين في الشكل أدناه (الوحدة المستعملة هي الإنش). أوجد حجم الكرة مقرّبًا إلى أقرب إنش مكعب.



.29 تتسارع مركبة من الصفر بمعدل $9 + 3t^2$ m/sec لمدة 6 ثوانٍ.

.a أوجد سرعة المركبة بعد 6 ثوانٍ.

.b أوجد المسافة التي تقطعها المركبة خلال هذه المدة.

.30 يتحرك جسم بسرعة

$v(t) = 3t \sin t$ m/sec

حيث $0 \le t \le 3$ بالثواني.

أوجد إزاحة الجسم خلال تلك الفترة.

.31 إذا كان معدل الاستجابة لدواء جديد بعد تناوله بمدة t ساعة هو $r'(t) = 0.5te^{-t}$. أوجد قيمة الاستجابة الكلية بعد 5 ساعات من تناول الدواء.

في التمارين 32-36، أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية باستعمال القيمة الابتدائية المعطاة.

32. $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t+4},\ y(-3) = 2$

33. $\frac{dy}{d\theta} = \sec^2(2\theta),\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

34. $\frac{dy}{dx} = y + 2,\ y(0) = 2$

35. $\frac{dy}{dx} = (2x+1)(y+1),\ y(-1) = 1$

36. $\frac{dy}{dx} = y(1-y),\ y(0) = 0.1$

.37 تنمذج $\frac{dy}{dt} = 1.2y\,(1-y)$ سرعة انتشار شائعة في قرية صغيرة، حيث y نسبة سكان القرية الذين سمعوا الشائعة عند الزمن t بالأيام. عند $t = 0$، كان 10% من سكان القرية قد سمعوا الشائعة.

.a أوجد نسبة السكان الذين سمعوا الشائعة عندما تكون سرعة انتشارها في أعلى مستوى لها.

.b أوجد y بصيغة صريحة بدلالة t.

.c أوجد الزمن t عندما تكون سرعة انتشار الشائعة في أعلى مستوى.

الوحدة 5 مراجعة الوحدة

1. $\int_{-2}^{2} 5\,dx = 5x \Big|_{-2}^{2} = 5(2) - 5(-2) = 20$

2. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx = \sin x \Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \sin\frac{\pi}{4} - \sin 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3. $\int_{-1}^{1} \left(3x^2 - 4x + 7\right) dx = \left(x^3 - 2x^2 + 7x\right) \Big|_{-1}^{1}$

$= 1 - 2 + 7 - (-1 - 2 - 7)$

$= 16$

4. $\int_{1}^{2} \frac{4}{x^2}\,dx = -\frac{4}{x} \Big|_{1}^{2} = -\frac{4}{2} + \frac{4}{1} = 2$

5. $\int_{1}^{4} \frac{1}{t\sqrt{t}}\,dt = \int_{1}^{4} t^{-\frac{3}{2}}\,dt = -\frac{2}{t^{\frac{1}{2}}} \Big|_{1}^{4} = -\frac{2}{4^{\frac{1}{2}}} + 2 = 1$

6. $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sec^2\theta\,d\theta = \tan\theta \Big|_{0}^{\frac{\pi}{3}} = \tan\frac{\pi}{3} - \tan 0 = \sqrt{3}$

7. $\int_{0}^{1} \frac{36}{(2x+1)^3}\,dx = 18\int_{1}^{3} \frac{du}{u^3} = -\frac{9}{u^2} \Big|_{1}^{3} = -\frac{9}{3^2} + \frac{9}{1} = 8$

8. $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \sec x \tan x\,dx = \sec x \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{0} = \sec 0 - \sec\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -1$

9. $\int_{0}^{2} \frac{2}{y+1}\,dy = 2\,ln\,|y+1| \Big|_{1}^{4} = 2\,ln\,3 - 2\,ln\,1 = 2\,ln\,3$

10. $A = \int_{1}^{3} \sqrt{4x-3}\,dx = \frac{1}{4}\int_{1}^{9} \sqrt{u}\,du$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right) \Big|_{1}^{9}$

$= \frac{1}{6}\left(9^{\frac{3}{2}} - 1\right)$

$= \frac{13}{3}$

≈ 4.3

إذن، المساحة تساوي 4.3 وحدة مربعة تقريبًا.

11. $A = \int_{-2}^{0} (3x+2)^6\,dx = \frac{1}{3}\int_{-4}^{2} u^6\,du$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{u^7}{7}\right) \Big|_{-4}^{2}$

$= \frac{1}{21}\left(2^7 + 4^7\right)$

$= \frac{5504}{7}$

≈ 786.3

إذن، المساحة تساوي 786.3 وحدة مربعة تقريبًا.

12. $A = \int_{0}^{2} x e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{4} e^u\,du = \frac{1}{2}e^u \Big|_{0}^{4} = \frac{1}{2}\left(e^4 - e^0\right) = \frac{e^4 - 1}{2} \approx 26.8$

إذن، المساحة تساوي 26.8 وحدة مربعة تقريبًا.

13. $\sqrt{y} = 1 - \sqrt{x},\ y = (1 - \sqrt{x})^2 = 1 - 2\sqrt{x} + x$

$A = \int_{0}^{1} (1 - 2\sqrt{x} + x)\,dx$

$= \left(x - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2}\right) \Big|_{0}^{1}$

$= 1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2} - 0$

$= \frac{1}{6}$

≈ 0.17

إذن، المساحة تساوي 0.17 وحدة مربعة تقريبًا.

14. $A = \int_{-2}^{1} \left(3 - x^2 - (x+1)\right) dx = \int_{-2}^{1} \left(2 - x^2 - x\right) dx$

$= \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right) \Big|_{-2}^{1} = 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \left(-4 + \frac{8}{3} - \frac{4}{2}\right) = 4.5$

إذن، المساحة تساوي 4.5 وحدة مربعة.

15. $A = \int_{\sqrt{3}}^{2} \left(0 - \left(-2x^2 + 6\right)\right) dx$

$= \int_{\sqrt{3}}^{2} \left(2x^2 - 6\right) dx$

$= \left(\frac{2x^3}{3} - 6x\right) \Big|_{\sqrt{3}}^{2}$

$= \frac{16}{3} - 12 - \frac{6\sqrt{3}}{3} + 6\sqrt{3}$

$= -\frac{20}{3} + 4\sqrt{3}$

≈ 0.26

16. $A = \int_{-1}^{2} \left[x + 4 - \left(x^2 + 2\right)\right] dx$

$= \int_{-1}^{2} \left(-x^2 + x + 2\right) dx$

$= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right) \Big|_{-1}^{2}$

$= -\frac{8}{3} + 2 + 4 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right)$

$= 4.5$

إذن، المساحة تساوي 4.5 وحدة مربعة.

17. $A = \int_0^2 x\, dx + \int_2^4 \frac{8}{x^2}\, dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 - \frac{8}{x}\Big|_2^4 = \frac{4}{2} - 0 - \frac{8}{4} + \frac{8}{2} = 4$

إذن، المساحة تساوي 4 وحدات مربعة.

18. لإيجاد الإحداثي x لنقطة التقاطع:

$$1 + \cos x = 2 - \cos x$$
$$\cos x = \frac{1}{2}$$
$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

بتحليل التمثيل البياني نجد أن المنحنيين يتقاطعان

عند $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$ و $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3}$.

$$A = \int_{\frac{5\pi}{3}}^{\frac{7\pi}{3}} (1 + \cos x - (2 - \cos x))\, dx$$
$$= \int_{\frac{5\pi}{3}}^{\frac{7\pi}{3}} (-1 + 2\cos x)\, dx = (-x + 2\sin x)\Big|_{\frac{5\pi}{3}}^{\frac{7\pi}{3}}$$
$$= -\frac{7\pi}{3} + 2\sin\frac{7\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} - 2\sin\frac{5\pi}{3}$$
$$= 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$$
$$\approx 1.37$$

إذن، المساحة بين المنحنيين تساوي 1.37 وحدة مربعة تقريبًا.

19. يلتقي المنحنيان في المنطقة الأولى الكبيرة

عند $x = \frac{\pi}{3}$ و $x = \frac{5\pi}{3}$.

$$A = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} (2 - \cos x - (1 + \cos x))\, dx$$
$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} (1 - 2\cos x)\, dx$$
$$= \frac{5\pi}{3} - 2\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{3} + 2\sin\frac{\pi}{3}$$
$$= (x - 2\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}}$$
$$= \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}$$
$$\approx 7.65$$

إذن، مساحة المنطقة الكبيرة تساوي 7.65 وحدة مربعة تقريبًا.

20. $A = \int_{-2}^{2} \left(5 - x^2 - \left(x^2 - 3\right)\right) dx$

$$= \int_{-2}^{2} \left(8 - 2x^2\right) dx$$
$$= \left(8x - \frac{2x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{2}$$
$$= 16 - \frac{16}{3} - \left(-16 + \frac{16}{3}\right)$$
$$= \frac{64}{3} \approx 21.33$$

إذن، المساحة بين المنحنيين تساوي 21.33 وحدة مربعة تقريبًا.

21. $A = \int_2^3 \left[x - 6 - \left(x^2 - 4x\right)\right] dx$

$$= \int_2^3 \left(-x^2 + 5x - 6\right) dx$$
$$= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 6x\right)\Big|_2^3$$
$$= -\frac{27}{3} + \frac{45}{2} - 18 - \left(-\frac{8}{3} + 10 - 12\right)$$
$$= \frac{1}{6}$$
$$\approx 0.17$$

إذن، المساحة بين المنحنيين تساوي 0.17 وحدة مربعة تقريبًا.

22. $A = \int_{-2}^{-1} \left[x^2 - 4x - (x + 6)\right] dx + \int_{-1}^{4} \left[x + 6 - \left(x^2 - 4x\right)\right] dx$

$$= \int_{-2}^{-1} \left(x^2 - 5x - 6\right) dx + \int_{-1}^{4} \left(-x^2 + 5x + 6\right) dx$$
$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} - 6x\right)\Big|_{-2}^{-1} + \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 6x\right)\Big|_{-1}^{4}$$
$$= -\frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 6 - \left(-\frac{8}{3} - 10 + 12\right) + \left(-\frac{64}{3} + 40 + 24\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 6\right)$$
$$= \frac{149}{3}$$
$$\approx 49.67$$

إذن، المساحة بين المنحنيين تساوي 49.67 وحدة مربعة تقريبًا.

23. $A = \int_0^2 \left[5 - t^2 - \left(t^2 - 3\right)\right] dt + \int_2^4 \left[t^2 - 3 - \left(5 - t^2\right)\right] dt$

$$= \int_0^2 \left(8 - 2t^2\right) dt + \int_2^4 \left(2t^2 - 8\right) dt$$
$$= \left(8t - \frac{2t^3}{3}\right)\Big|_0^2 + \left(\frac{2t^3}{3} - 8t\right)\Big|_2^4$$
$$= 16 - \frac{16}{3} + \frac{128}{3} - 32 - \frac{16}{3} + 16$$
$$= 32$$

إذن، المساحة بين المنحنيين تساوي 32 وحدة مربعة.

24. $V = \int_0^2 \pi \left(2x^2\right)^2 dx$

$$= \int_0^2 4\pi x^4\, dx$$
$$= 4\pi\, \frac{x^3}{3}\Big|_0^2$$
$$= \frac{32\pi}{3}$$
$$\approx 33.51$$

إذن، الحجم الدوراني يساوي 33.51 وحدة مكعبة تقريبًا.

25. $V = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \pi \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{\pi}{x^2} dx = -\frac{\pi}{x}\Big|_{\frac{1}{2}}^{2} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{3\pi}{2} \approx 4.71$

إذن، الحجم الدوراني يساوي 4.71 وحدة مكعبة تقريبًا.

26. $V = \int_{-1}^{1} \pi \left(3x^2\right)^2 dx$

$= 2\int_{0}^{1} 9\pi x^4\, dx$

$= 18\pi \frac{x^5}{5}\Big|_0^1$

$= \frac{18\pi}{5} - 0$

$= \frac{18\pi}{5}$

≈ 11.31

إذن، الحجم الدوراني يساوي 11.31 وحدة مكعبة تقريبًا.

27. $V = \int_0^{\pi} \pi (\sin x)^2\, dx$

$= \int_0^{\pi} \pi \frac{(1 - \cos 2x)}{2}\, dx$

$= \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^{\pi}$

$= \frac{\pi}{2}(\pi - 0)$

$= \frac{\pi^2}{2}$

≈ 4.93

إذن، الحجم الدوراني يساوي 4.93 وحدة مكعبة تقريبًا.

28. $V = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \pi y^2\, dx = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \pi\left(12 - 4x^2\right) dx$

$= \pi\left(12x - \frac{4x^3}{3}\right)\Big|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}$

$= \pi\left(12\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 12\sqrt{3} - 4\sqrt{3}\right)$

$= 16\pi\sqrt{3} \approx 87.06$

إذن، الحجم الدوراني يساوي 87.06 وحدة مكعبة تقريبًا.

29. a. $v(6) - v(0) = \int_0^6 a(t)\, dt$

$= \int_0^6 \left(9 + 3t^2\right) du$

$= \left(9t + t^3\right)\Big|_0^6$

$= 9(6) + 6^3 - 0$

$= 270$

$v(6) = v(0) + 270 = 0 + 270 = 270$ m/sec

b. $s(6) - s(0) = \int_0^6 v(t)\, dt$

$= \int_0^6 \left(9t + t^3\right) dt$

$= \left(\frac{9t^2}{2} + \frac{t^4}{4}\right)\Big|_0^6$

$= \frac{9(6)^2}{2} + \frac{6^4}{4} - 0$

$= 486$ m

30. $s(3) - s(0) = \int_0^3 3t \sin t\, dt$

باستعمال التكامل بالأجزاء، وليكن $u = 3t$ و $dv = \sin t\, dt$.

إذن، $du = 3\, dt$ و $v = -\cos t$.

$\int 3t \sin t\, dt = -3t \cos t + \int 3 \cos t\, dt = -3t \cos t + 3 \sin t + C$

$s(3) - s(0) = (-3t \cos t + 3 \sin t)\Big|_0^3$

$= -9 \cos 3 + 3 \sin 3 + 0 - 0$

≈ 9.33 m

31. $r(5) - r(0) = \int_0^5 r'(t)\, dt = \int_0^5 0.5t e^{-t}\, dt$

باستعمال التكامل بالأجزاء، وليكن $u = 0.5\, t$ و $dv = e^{-t}\, dt$.

إذن، $du = 0.5\, dt$ و $v = -e^{-t}$.

$\int 0.5t e^{-t}\, dt = -0.5\, t\, e^{-t} + \int 0.5 e^{-t}\, dt$

$= -0.5\, t\, e^{-t} - 0.5\, e^{-t} + C$

$r(5) - r(0) = \left(-0.5\, t\, e^{-t} - 0.5\, e^{-t}\right)\Big|_0^5$

$= -2.5\, e^{-5} - 0.5\, e^{-5} + 0 + 0.5$

≈ 0.48

إذن، قيمة الاستجابة الكلية بعد 5 ساعات من تناول الدواء تساوي 0.48

32. $\int dy = \int \frac{dt}{t + 4}$

$y = ln\,|t + 4| + C$

بما أن $y(-3) = 2$، فإن

$2 = ln\,|-3 + 4| + C,\ 2 = ln\, 1 + C,\ C = 2$

إذن،

$y = ln\,|t + 4| + 2$

33. $\int dy = \int \sec^2(2\theta)d\theta$

$y = \frac{\tan(2\theta)}{2} + C$

بما أن $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$، فإن

$1 = \frac{\tan\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right)}{2} + C,\ 1 = \frac{0}{2} + C,\ C = 1$

إذن،

$y = \frac{\tan(2\theta)}{2} + 1$

34. $\int \frac{dy}{y+2} = \int dx$

$ln\,|y+2| = x + C$

$y + 2 = \pm e^C e^x$

$y + 2 = Ae^x$

$y = Ae^x - 2$

بما أن $y(0) = 2$، فإن

$2 = Ae^0 - 2,\ A = 4$

إذن،

$y = 4e^x - 2$

35. $\int \frac{dy}{y+1} = \int (2x+1)\,dx$

$ln\,|y+1| = x^2 + x + C$

$y + 1 = \pm e^C e^{x^2+x}$

$y = Ae^{x^2+x} - 1$

بما أن $y(-1) = 1$، فإن

$1 = Ae^{(-1)^2-1} - 1,\ 1 = Ae^0 - 1,\ A = 2$

إذن،

$y = 2e^{x^2+x} - 1$

36. $\int \frac{dy}{y(1-y)} = \int dx$

$\int \left(\frac{A}{y} + \frac{B}{1-y}\right) dy = x + C$

$\int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}\right) dy = x + C$

$ln\,|y| - ln\,|1-y| = x + C$

$ln\left|\frac{y}{1-y}\right| = x + C$

$\frac{y}{1-y} = \pm e^C e^x$

$\frac{y}{1-y} = Ae^x$

بما أن $y(0) = 0.1$، فإن

$\frac{0.1}{0.9} = Ae^0,\ \frac{1}{9} = A$

إذن،

$\frac{y}{1-y} = \frac{1}{9}e^x$

37. a. $\frac{dy}{dt} = 1.2y\,(1-y) = 1.2y - 1.2y^2$

لإيجاد القيمة العظمى للدالة $\frac{dy}{dt}$، يجب إيجاد مشتقة $\frac{dy}{dt}$.

$\frac{d^2y}{dt^2} = 1.2 - 2.4y$

$\frac{d^2y}{dt^2} = 1.2 - 2.4y$

من خلال اختبار المشتقة الثانية للدالة $\frac{dy}{dt}$ نجد أنها تبلغ قيمتها العظمى عند $y = \frac{1}{2}$.

إذن، نسبة السكان الذين سمعوا الشائعة عندما تكون سرعة انتشارها في أعلى مستوى لها هي $\frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$

b. $\int \frac{dy}{y(1-y)} = \int 1.2\,dt$

$\int \left(\frac{A}{y} + \frac{B}{1-y}\right) dy = 1.2\,t + C$

$\int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}\right) dy = 1.2t + C$

$ln\,|y| - ln\,|1-y| = 1.2t + C$

$\frac{y}{1-y} = \pm e^C e^{1.2t}$

$\frac{y}{1-y} = Ae^{1.2t}$

عند $t = 0$، $y = 0.1$. إذن،

$\frac{0.1}{0.9} = Ae^{1.2(0)},\ A = \frac{1}{9}$

$\frac{y}{1-y} = \frac{1}{9}e^{1.2t}$

c. $0.5\,(1 - 0.5) \approx 0.09\,e^{1.2t}$

$\frac{0.25}{0.09} = e^{1.2t}$

$t = \frac{ln\left(\frac{25}{9}\right)}{1.2} \approx 0.85$

إذن، تكون سرعة انتشار الشائعة في أعلى مستوى مع نهاية اليوم الأول لانتشارها.

الوحدة 5 تقويم

في التمارين 1-6، أوجد قيمة التكامل المحدود.

1. $\int_{2}^{5} 4x \, dx$

2. $\int_{0}^{1} \left(8s^3 - 12s^2 + 5\right) ds$

3. $\int_{1}^{27} y^{-\frac{4}{3}} \, dx$

4. $\int_{1}^{e} \frac{1}{x} \, dx$

5. $\int_{1}^{2} \left(x + \frac{1}{x^2}\right) dx$

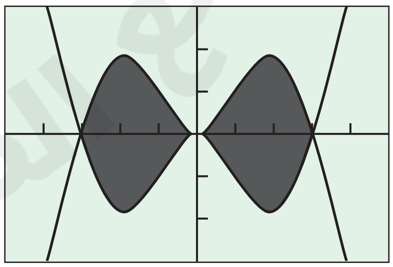
6. $\int_{-1}^{1} 2x \sin\left(1 - x^2\right) dx$

.7 إن معدل انتشار مرض معيٍ (بعدد الأشخاص المصابين في الشهر) يعطى بالدالة $\mathrm{I}'(t) = \frac{100t}{t^2 + 1}$ حيث t الزمن المنقضي على بدء انتشار المرض بالأشهر. أوجد العدد الكلي للأشخاص المصابين خلال الأشهر الأربعة الأولى من انتشار المرض.

.8 أوجد مساحة المنطقة الواقعة بين المستقيم $y = 2 - 5x$ والمنحنى $y = 2x^2 - 1$.

.9 استعمل التكامل المحدود لإيجاد المساحة بين المحور x ومنحنى الدالة $f(x) = 1 + e^x$ في الفترة $[0, 4]$.

.10 أوجد مساحة المنطقة المظللة الواقعة بين المنحنيين $y = -x \sin x$ و $y = x \sin x$ في الفترة $[-\pi, \pi]$



$[-5, 5]$ في $[-3, 3]$

.11 أوجد الحجم الدوراني الناشئ عن دوران المساحة المحددة بمنحنى الدالة المعطاة حول المحور x.

$$x = 4, x = 2, y = 0, f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

.12 أوجد الحجم الدوراني الناشئ عن دوران المساحة المحددة بمنحنى الدالة المعطاة حول المحور x.

$$y^2 = 4x, y = 0, x = 1, x = 4$$

.13 يتحرك جسم بسرعة

$$v(t) = t^2 - 2t \text{ m/sec}$$

حيث $0 \le t \le 4$ بالثواني.

أوجد إزاحة الجسم خلال تلك الفترة.

في التمارين 14-16، أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية باستعمال القيمة الابتدائية المعطاة.

14. $\frac{dy}{dx} = 1 + x + \frac{x^2}{2}, \; y(0) = 1$

15. $\frac{dy}{dx} = (3 - 2x)y; \; y(0) = 5$

16. $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2x}{y + 3}; \; y(0) = 16$

الوحدة 5 تقويم

1. $\int_2^5 4x\,dx = 2x^2 \Big|_2^5 = 2(5)^2 - 2(2)^2 = 42$

2. $\int_0^1 (8s^3 - 12s^2 + 5)ds = (2s^4 - 4s^3 + 5s)\Big|_0^1$

$= 2 - 4 + 5 - 0$

$= 3$

3. $\int_1^{27} y^{-\frac{4}{3}}\,dy = -\frac{3}{y^{\frac{1}{3}}}\Big|_1^{27} = -\frac{3}{27^{\frac{1}{3}}} + \frac{3}{1} = 2$

4. $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|\Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$

5. $\int_1^2 \left(x + \frac{1}{x^2}\right)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x}\right)\Big|_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 2$

.6 ليكن $u = 1 - x^2$، إذن $du = -2x\,dx$

$\int_{-1}^1 2x\sin(1 - x^2)\,dx = \int_{-1}^1 \sin u\,du$

7. $I(4) - I(0) = \int_0^4 \frac{100t}{t^2 + 1}\,dt$

$= 50\ln(t^2 + 1)\Big|_0^4$

$= 50\ln(4^2 + 1) - 5\ln(0 + 1)$

$= 50\ln 17$

≈ 141.7

إذن، العدد الكلي للأشخاص المصابين خلال الأشهر الأربعة الأولى من انتشار المرض هو 142 شخصًا تقريبًا.

8. $A = \int_{-3}^{\frac{1}{2}} [2 - 5x - (2x^2 - 1)]\,dx$

$= \int_{-3}^{\frac{1}{2}} (-2x^2 - 5x + 3)\,dx$

$= \left(-\frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 3x\right)\Big|_{-3}^{\frac{1}{2}}$

$= -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \times \frac{1}{2} - \left(\frac{54}{3} - \frac{45}{2} - 9\right)$

$= \frac{343}{24}$

≈ 14.3

إذن، المساحة بين المنحنيين تساوي 14.3 وحدة مربعة تقريبًا.

9. $A = \int_0^4 (1 + e^x)\,dx$

$= (x + e^x)\Big|_0^4$

$= 4 + e^4 - 0 - 1$

$= e^4 + 3$

≈ 57.6

إذن، المساحة المطلوبة تساوي 57.6 وحدة مربعة تقريبًا.

10. $A = \int_{-\pi}^{\pi} [x\sin x - (-x\sin x)]\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} 2x\sin x\,dx$

باستعمال نظرية التكامل بالأجزاء، ليكن $u = 2x$ و $dv = \sin x\,dx$.

إذن، $du = 2\,dx$ و $v = -\cos x$.

$\int 2x\sin x\,dx = -2x\cos x + \int 2\cos x\,dx = -2x\cos x + 2\sin x + C$

$A = (-2x\cos x + 2\sin x)\Big|_{-\pi}^{\pi}$

$= -2\pi\cos\pi + 2\sin\pi - (2\pi\cos(-\pi) + 2\sin(-\pi))$

$= 4\pi$

إذن، مساحة المنطقة المظللة تساوي 4π وحدة مربعة.

11. $V = \int_2^4 \pi\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)^2 dx$

$= \int_2^4 \frac{\pi}{x-1}\,dx$

$= \pi\ln|x - 1|\Big|_2^4$

$= \pi\ln 3$

≈ 3.45

إذن، الحجم الدوراني يساوي 3.45 وحدة مكعبة تقريبًا.

12. $V = \int_1^4 \pi y^2\,dx$

$= \int_1^4 4\pi x\,dx$

$= 2\pi x^2\Big|_1^4$

$= 2\pi(4)^2 - 2\pi$

$= 31\pi$

إذن، الحجم الدوراني يساوي 31π وحدة مكعبة.

13. $s(4) - s(0) = \int_0^4 (t^2 - 2t)\,dt$

$= \left(\frac{t^3}{3} - t^2\right)\Big|_0^4$

$= \frac{4^3}{3} - 4^2 - 0$

$= \frac{16}{3}$

≈ 5.3 m

14. $\int dy = \int\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)dx$

$y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + C$

بما أن $y(0) = 1$، فإن $C = 1$، إذن

$y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + 1$

15. $\int \frac{dy}{y} = \int (3 - 2x)\, dx$

$ln\, |y| = 3x - x^2 + C$

$y = \pm e^{C} e^{3x - x^2}$

$y = Ae^{3x - x^2}$

بما أن $y(0) = 5$، فإن $A = 5$، إذن

$y = 5e^{3x - x^2}$

16. $\int (y + 3)\, dy = \int (1 - 2x)\, dx$

$\frac{y^2}{2} + 3y = x - x^2 + C$

بما أن $y(0) = 16$، فإن

$\frac{16^2}{2} + 3 \times 16 = 0 - 0 + C$

$C = 176$

إذن،

$\frac{y^2}{2} + 3y = x - x^2 + 176$

الوحدة 5 المشروع

حساب معدل عدد الزوار

تنمذج الدالة E معدل عدد الزوار الداخلين إلى مدينة ألعاب في يوم معيّن:

$$E(t) = \frac{15\,600}{t^2 - 24t + 160}$$

وتنمذج الدالة L معدل عدد الزوار الخارجين من مدينة الألعاب في اليوم نفسه:

$$L(t) = \frac{9\,890}{t^2 - 38t + 370}$$

تقاس $E(t)$ و $L(t)$ بعدد الزوار كل ساعة، ويقاس الزمن t بعدد الساعات بعد منتصف الليل. تصح هاتان الدالتان للقيم $9 \le t \le 23$، التي تمثّل عدد الساعات التي تكون فيها مدينة الألعاب مفتوحة للزوار. في الزمن $t = 0$ تكون مدينة الألعاب خالية من الزوار.

(مساعدة: $\frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}(x)\right] = \frac{1}{x^2} + 1$)

1. أوجد عدد الزوار الذين دخلوا المدينة بحلول الساعة 5 بعد الظهر ($t = 17$). قرّب إجابتك إلى أقرب عدد صحيح.

2. سعر تذكرة الدخول حتى الساعة 5 بعد الظهر هو QR 15، وبعد ذلك يصبح سعر التذكرة QR 11.
أوجد المبلغ (بالريالات) الذي حصّله مكتب الدخول في ذلك اليوم. قرّب إجابتك إلى أقرب عدد صحيح.

3. ليكن

$$H(t) = \int_9^t [E(x) - L(x)]\,dx \quad , \quad 9 \le t \le 23$$

إذا كانت $H(17)$ مقرّبة إلى أقرب عدد صحيح هي 3 725، أوجد قيمة $H'(17)$ وفسّر معنى كل من $H(17)$ و $H'(17)$ في موضوع مدينة الألعاب.

4. أوجد الزمن t، بحيث $9 \le t \le 23$، الذي يتوقع أن يبلغ فيه عدد زوار مدينة الألعاب قيمته القصوى بحسب النموذج المعطى.

الوحدة 5 المشروع

1. $\int_9^{17} \frac{15\,600}{t^2 - 24t + 160}\,dt = 15\,600 \int_9^{17} \frac{dt}{(t-12)^2 + 16}$

بما أن $\frac{d}{dx}[\tan^{-1}(x)] = \frac{1}{x^2+1}$ حيث a عدد حقيقي ثابت غير الصفر،

فإن $\frac{d}{dx}\left[\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right] = \frac{a}{x^2+a^2}$.

ليكن $x = t - 12$، إذن $dx = dt$.

$$\int_9^{17} \frac{15\,600}{t^2 - 24\,t + 160}\,dt = 3\,900 \int_{-3}^{5} \frac{4\,dx}{x^2+4^2}$$

$$= 3\,900\left[\tan^{-1}\left(\frac{x}{4}\right)\right]\Bigg|_{-3}^{5}$$

$$= 3\,900\left[\tan^{-1}\left(\frac{5}{4}\right) - \tan^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right)\right]$$

$$\approx 6\,004$$

إذن، عدد الزوار الذين دخلوا مدينة الألعاب بحلول الساعة 5 بعد الظهر هو 6 004 زوار تقريبًا.

2. $\int_{17}^{23} \frac{15\,600}{t^2 - 24\,t + 160}\,dt = 3\,900\left[\tan^{-1}\left(\frac{x}{4}\right)\right]\Bigg|_{5}^{11}$

$$= 3\,900\left[\tan^{-1}\left(\frac{11}{4}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{5}{4}\right)\right]$$

$$\approx 1\,271$$

إذن، عدد الزوار الذين دخلوا مدينة الألعاب بعد الساعة 5 بعد الظهر هو 1 271 زائرًا تقريبًا.

بالتالي، المبلغ الذي حصّله مكتب الدخول في ذلك اليوم هو:

$$6\,004 \times 15 + 1\,271 \times 11 = \text{QR } 104\,041$$

3. $H'(t) = E(t) - L(t) = \frac{15\,600}{t^2 - 24\,t + 160} - \frac{9\,890}{t^2 - 38\,t + 370}$

$H'(17) \approx -380$

إذن، عدد الزوار في مدينة الألعاب يتناقص بمعدل 380 زائرًا تقريبًا كل ساعة بدءًا من الساعة الخامسة بعد الظهر.

بما أن $H(17) \approx 3\,725$، إذن عدد الزوار في مدينة الألعاب عند الساعة 5 بعد الظهر هو 3 725 زائرًا تقريبًا.

4. عندما $H'(t) = 0$:

$$\frac{15\,600}{t^2 - 24\,t + 160} - \frac{9\,890}{t^2 - 38\,t + 370} = 0$$

$$5\,710t^2 - 355\,440\,t + 4\,189\,600 = 0$$

$$\Delta = 306\,471\,296$$

$$t_1 = \frac{355\,440 + \sqrt{306\,471\,296}}{2 \times 5\,710} \approx 46.5$$

وهو حل غير مقبول لأن $9 \le t \le 23$

$$t_2 = \frac{355\,440 - \sqrt{306\,471\,296}}{2 \times 5\,710} \approx 15.8$$

t	9		15.8		23
H'		+	0	−	
H		↗		↘	

إذن، يبلغ عدد الزوار في مدينة الألعاب قيمته القصوى عندما $t \approx 15.8$ أي عند الساعة 15:48