دفترية الوحدة الثالثة مقدمة في النهايات والاتصال

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج العمانية	
موقع فايلاتي ⇦ المناهج العمانية ⇦ الصف الثاني عشر ⇦ رياضيات متقدمة ⇦ الفصل الأول ⇦ ملفات متنوعة ⇦ الملف	
تاريخ إضافة الملف على موقع المناهج: 2025-10-27 14:14:01	
ملفات ا كتب للمعلم ا كتب للطالب ا اختبارات الكترونية ا اختبارات ا حلول ا عروض بوربوينت ا أوراق عمل منهج انجليزي ا ملخصات وتقارير ا مذكرات وبنوك ا الامتحان النهائي ا للمدرس	المزيد من مادة رياضيات متقدمة:
إعداد: سالم الجهوري	

التواصل الاجتماعي بحسب الصف الثاني عشر					
صفحة المناهج العمانية على فيسبوك					

المزيد من الملفات بحسب الصف الثاني عشر والمادة رياضيات متقدمة في الفصل الأول	
1	ملخص شامل وحل تمارين الكتاب للوحدة الأولى القياس الدائري من سلسلة العبير
2	حل تمارين الوحدة الثانية حساب المثلثات
3	حل أسئلة نهاية الوحدة الأولى القياس الدائري
4	مراجعة شاملة لدروس وحدات المنهج
5	كراسة تدريبية للوحدة الرابعة التفاضل مع الإجابات

دفترية

الفصل الدراسي الاول

ثاني عشر متقدم

الوحدة الثالثة

مقدمة في النهايات والاتصال

معلم اول

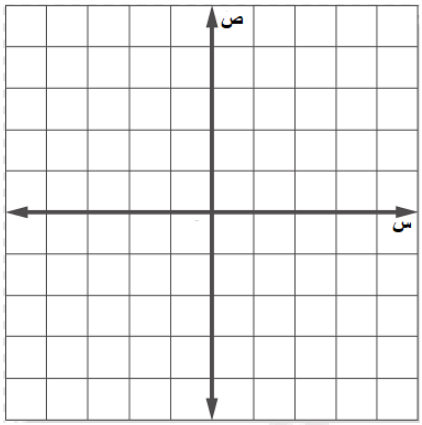
سالم الجهوري

99080181

الوحدة الثالثة: مقدمة في النهايات والاتصال

دروس الوحدة	
(١) نهاية الدالة النسبية	(٢) نهاية الدالة كثيرة الحدود
(٣) نهاية الدالة النسبية	(٤) نهاية الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة
(٥) نهاية الدالة النسبية عند اللانهاية	(٦) خواص النهايات
(٧) الاتصال	(٨) مراجعه عامة على الوحدة(اختبار الوحدة)

تمهيد : مثل بيانا الدالة د(س) = ٣س ، ثم اوجد :



١) د(-٢) = ...

٢) د(٠) = ...

٣) د(٢) = ...

نلاحظ ان : .....

.....

٣-١ نهاية الدالة عند نقطة

..... / ..... / ٢٠٢٥م

نهاية الدالة عند نقطة : هي القيمة التي تقترب منها الدالة عندما يقترب المتغير من قيمة محددة .

فمثلا : د(س) =٣س ، اكمل الجدول التالي وسجل ملاحظاتك

من جهة اليمين	
س	د (س) = ٣س
٤,١	١٢,٣
٤,٠١	
٤,٠٠١	
٤,٠٠٠١	

من جهة اليسار	
س	د (س) = ٣س
٣,٩	١١,٧
٣,٩٩	
٣,٩٩٩	
٣,٩٩٩٩	

ملاحظاتك:.....

.....

نتيجة (١)

إذا كان أ، ل عددَين حقيقيَين، فإن:

$$\text{نهـــا}_{س \to أ} \ د(س) = ل \Leftrightarrow \text{نهـــا}_{س \to أ^+} \ د(س) = \text{نهـــا}_{س \to أ^-} \ د(س) = ل$$

وجود نهاية للدالة عندما س ← أ لا يعني بالضرورة أن تكون الدالة معرّفة عند س = أ.

الدالة كثيرة الحدود هي : دالة تحتوي على حد واحد أو أكثر لمتغير مرفوع الى قوة صحيحة غير سالبة .

سؤال : أي الدوال الاتية كثيرة حدود			
١	د(س) = ٣س ـ ٥	٥	د(س) = س + $\sqrt{س}$ + ٨
٢	د(س) = ـ ٥	٦	د(س) = $\sqrt[٣]{س}$ + ٨
٣	د(س) = س + $\frac{١}{س}$	٧	د(س) = س $\left(س + \frac{١}{س} - ٢\right)$
٤	د(س) = $س^{٣} + س^{٢}$ + ٣	٨	د(س) = س $(س^{٢} + س^{-٢} - ٤)$

مثال (١) : استخدم رمز النهاية لتكتب كل عبارة من العبارات الآتية:

أ قيمة الدالة ع(س) تقترب من −٣ عندما تقترب قيمة س من ٢ من جهة اليسار.

.....

ب عندما تتناقص قيمة س لتقترب من ٥، فإن قيمة هـ(س) تقترب من ١١

.....

ج تقترب ك(س) من الصفر عندما تقترب قيمة س من −١

.....

د عندما تقترب س من ٤ من جهة اليسار، ومن جهة اليمين، فإن قيم الدالة د (س) تقترب من ٧، وعليه تكون د (س) تقترب من ٧ عندما تقترب س من ٤

.....

مثال (٢) : أنشئ جدولَين، وأكملهما لتقدّر نهـــــا م(س) حيث م(س) = $س^{٣} - ١١س^{٢} - ٧س + ٣٦$
س ← −٢

من جهة اليمين		من جهة اليسار	
س	م(س)	س	م(س)
−١,٩		−٢,١	
−١,٩٩		−٢,٠١	
−١,٩٩٩		−٢,٠٠١	
−١,٩٩٩٩		−٢,٠٠٠١	

نلاحظ :

نهـــــا م(س) = ...
س ← -٢^{+}

نهـــــا م(س) = ...
س ← -٢^{-}

نهـــــا م(س) = ...
س ← −٢

مثال (٣) : أنشئ جدولَين، وأكملهما لتقدّر نهـــــا ن(س) حيث ن(س) = ٨س − $\frac{س^{٣}}{٨}$
س ← −٤

من جهة اليمين		من جهة اليسار	
س	ن(س)	س	ن(س)
٤,١			
		٣,٩٩	
٤,٠٠١			
		٣,٩٩٩٩	

نلاحظ :

نهـــــا ن(س) = ...
س ← -٤^{+}

نهـــــا ن(س) = ...
س ← -٤^{-}

نهـــــا ن(س) = ...
س ← −٤

٣-١ب نهاية الدالة النسبيّة

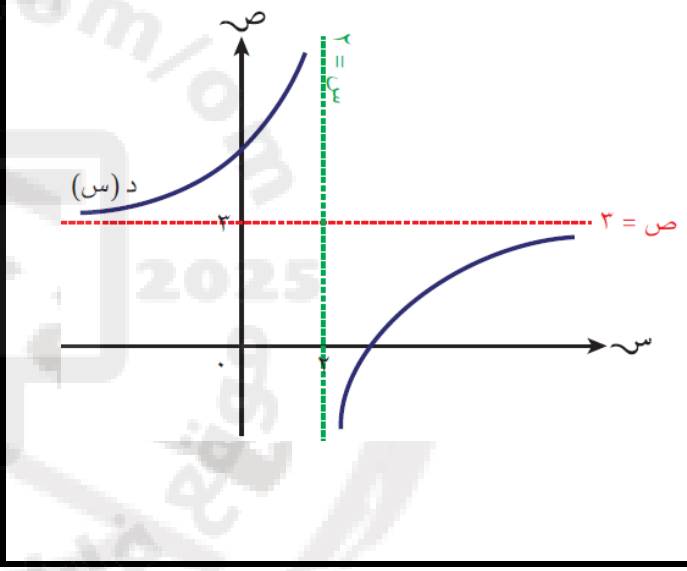
..... / ..... / ٢٠٢٥م

الدالة النسبية: هي دالة يمكن كتابتها في صورة نسبة بين دالتين كثيرات حدود . (.....)

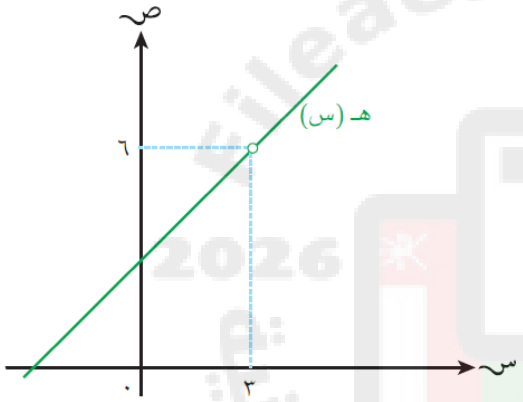
بعض الأمثلة على دوال نسبية		
د (س) = $\frac{٣س - ٨}{س - ٢}$	هـ (س) = $\frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣}$	م (س) = ————
ع (س) = $\frac{س^{٢} - ٤}{س^{٢} - ٩}$	ق (س) = $\frac{٣س^{٣}}{س^{٣} + ٨}$	و(س) = ————

فيما يلي بيان الدالتين

د (س) = $\frac{٣س - ٨}{س - ٢}$



هـ(س) = $\frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣}$



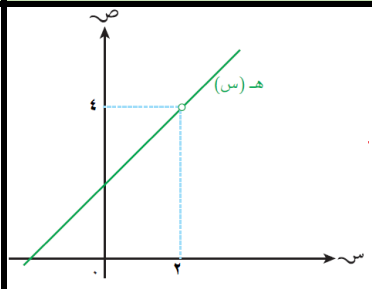
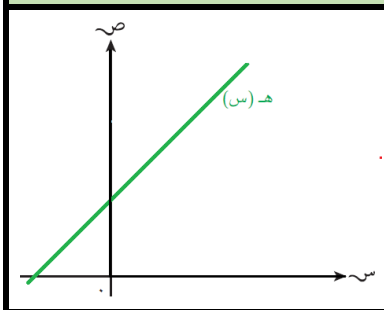
ملاحظة :

المنحنيان في بيان الدالة د (س) يقتربان أكثر فأكثر من المستقيمين المنقطين، ولكن لا يصلان إليهما أبدًا .

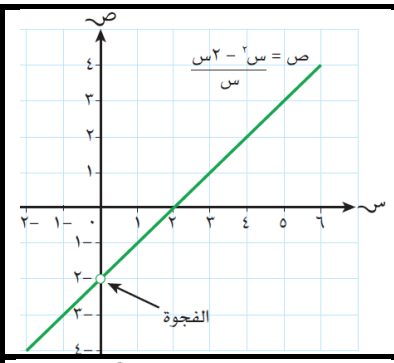
يسمى كل من هذين المستقيمين **بخط التقارب asymptote**، ويشير خط التقارب الرأسي إلى قيم س التي تكون الدالة عندها غير معرّفة.

النقطة الناقصة في منحنى الدالة هـ(س) تعرف **بالفجوة hole** .

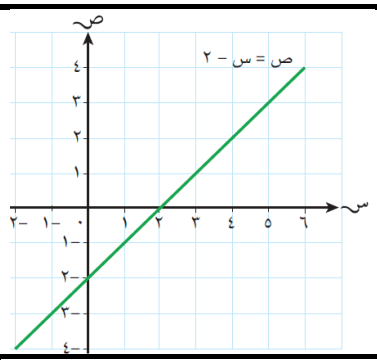
أولا : الفجوة :

الدالة (قبل التبسيط)	الدالة (بعد التبسيط)
هـ(س) = $\frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}$ 	هـ (س) = س + ٢ 

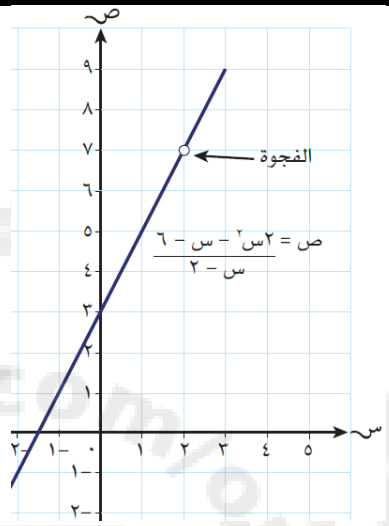
$$ص = \frac{س^{٢} - ٢س}{س}$$



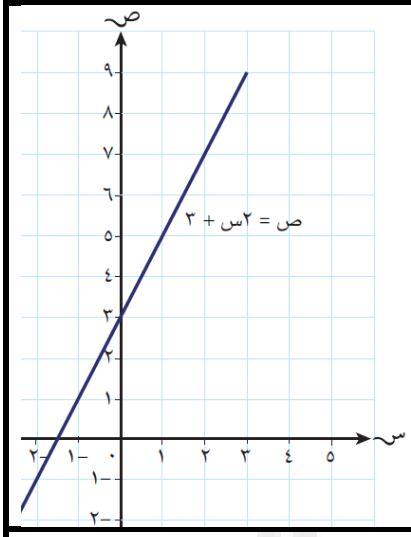
$$ص = س - ٢$$



$$ص = \frac{٢س^{٢} - س - ٦}{س - ٢}$$



$$ص = ٢س + ٣$$



نلاحظ أن :

منحنى الدالة ص (قبل التبسيط) والدالة ص (بعد التبسيط) متشابهان حيث :

❶ كل منهما مستقيم ❷ ميل كل منهما متساوي ❸ مقطع كل منهما مع المحور الصادي متساوي

ولكن يوجد فرق واحد مهم بينهما ، هو أنه يوجد في منحنى الدالة ص(قبل التبسيط) فجوة عند قيمة س ، ويمكننا إيجاد قيمة ص بالتعويض عن قيمة س في معادلة المستقيم (بعد التبسيط)

مثال (١) : منحنى كل من الدوال النسبية الاتية مستقيم يتضمن فجوة

إذا علمت أن د (س) = $\frac{٢س - ١٠}{س - ٥}$، فأوجد :

١) قيمة س عندما تكون الدالة د(س) غير معرّفة.

٢) إحداثيات الفجوة.

إذا علمت أن ك (س) = $\frac{س^{٢} + ٣س - ١٨}{س - ٣}$، فأوجد :

١) قيمة س عندما تكون الدالة د(س) غير معرّفة.

٢) إحداثيات الفجوة.

إذا علمت أن ل(س) = $\frac{٦س^{٢} - ٢س - ٢٨}{س + ٢}$، فأوجد:

١) قيمة س عندما تكون الدالة د(س) غير معرّفة.

٢) إحداثيات الفجوة.

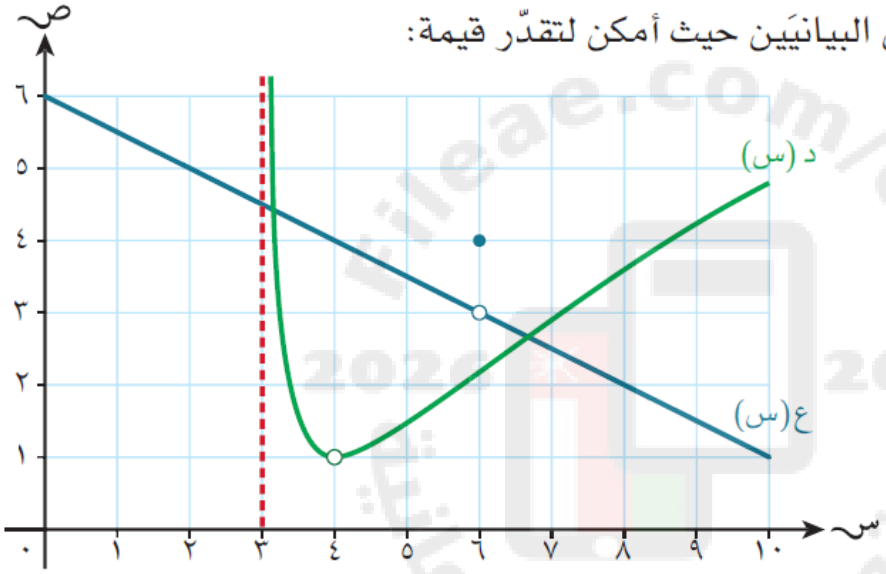
تمرين :

إذا علمت أن هـ(س) = $\frac{٨س + ٢س^{٢}}{٤ + س}$، فأوجد:

١) قيمة س عندما تكون الدالة هـ(س) غير معرّفة.

٢) إحداثيات الفجوة.

مثال(٢) : يبيّن الرسم الآتي منحنى الدالتين د (س)، ع(س) على الفترة ٠ ≤ س ≤ ١٠ :



أ استخدم التمثيلَين البيانيَين حيث أمكن لتقدّر قيمة:

١) ع (٦)

٢) د (٤)

٣) نهـــــا ع(س) / س ← ٦

٤) نهـــــا د (س) / س ← ٤

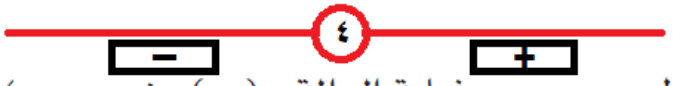
ب علامَ يدلك المستقيم المنقط الذي معادلته س = ٣ حول تمثيل الدالة د(س)؟

مثال(٣) : إذا كانت الدالة ع (س) = $\frac{س^{٢} - ٧س + ١٢}{س - ٤}$:

أ اشرح سبب أن الدالة ع(س) غير معرّفة عند س = ٤

ب استخدم جدولًا لتجد نهاية ع (س) عندما تقترب س إلى ٤ من:

١) جهة اليسار. ٢) جهة اليمين.



ج أعطِ سبب وجود نهاية الدالة ع(س) عند س = ٤

ثانيا : خطي التقارب (الافقي والعمودي)

مثال(٤): انسخ وأكمل الجدولين الآتيين اللذين يبينان قيمة د(س) عندما تقترب س من الصفر من جهة اليسار ، ومن جهة اليمين .

	من جهة اليمين					
س	٠,١	٠,٠٥	٠,٠١	٠,٠٠٥	٠,٠٠١	٠,٠٠٠٥
ص						

	من جهة اليسار					
س	-٠,٠٠٠٥	-٠,٠٠١	-٠,٠٠٥	-٠,٠١	-٠,٠٥	-٠,١
ص						

ب اذكر ما إذا كان ممكنًا إيجاد أي نهاية من النهايتَين الآتيتَين، وأعطِ سببًا لكل إجابة

١) $\lim_{س \to 0^+}$ د (س).

٢) $\lim_{س \to 0^-}$ د (س).

ج ماذا تستنتج عن $\lim_{س \to 0}$ د (س)؟

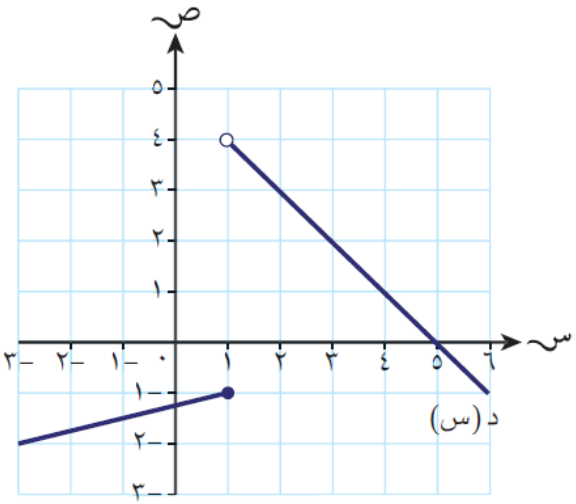
سوف يتم دراسة خطي التقارب بصورة أوسع في الدرس (٣-٢)

٣-١ج نهاية الدالة المعرّفة بأكثر من قاعدة

..... / ..... / ٢٠٢٥م

تتكوّن الدالة المعرّفة بأكثر من قاعدة piecewise function، من جزأَين أو أكثر. يمكن أن يحوي منحنى الدالة المعرّفة بأكثر من قاعدة على مستقيمات أو منحنيات أو مزيج من الاثنين. قد يحوي أيضًا على فجوات و/أو قفزات jumps، وتحدث القفزات عندما تتغير قيمة الدالة بشكل كبير.

مثال(٥): يبيّن الرسم المقابل منحنى الدالة المعرّفة بأكثر من قاعدة في المجال $-٣ \leq س \leq ٦$:



أ حدد مدى الدالة د (س) في المجال المعطى.

ب استخدم الرسم لتقدر قيمة كلّ من:

١) $\lim_{س \to -١}$ هـ(س).

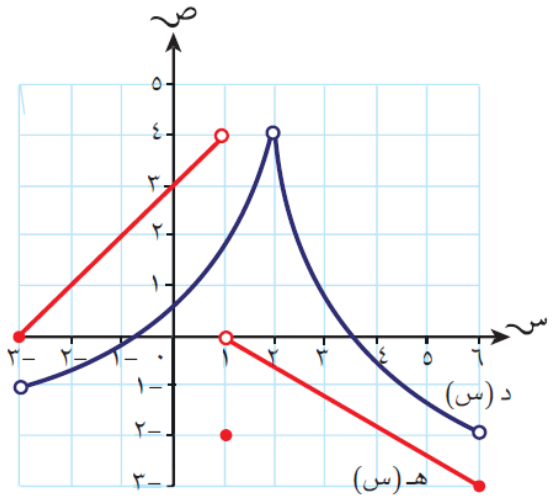
٢) $\lim_{س \to ٤,٧}$ هـ(س).

ج بيّن أن:

١) $\lim_{س \to ٥}$ د (س) موجودة.

٢) $\lim_{س \to ١}$ د (س) غير موجودة.

مثال (٦): يبيّن الشكل الآتي منحنى الدالتَين د (س)، هـ (س):
الدالة هـ (س) معرّفة في المجال −٣ ≤ س ≤ ٦



أ أوجِد مجال الدالة د (س).

ب هل نهـــــا هـ (س) موجودة؟ وضح إجابتك.
س ← ١

(أ) .....

.....

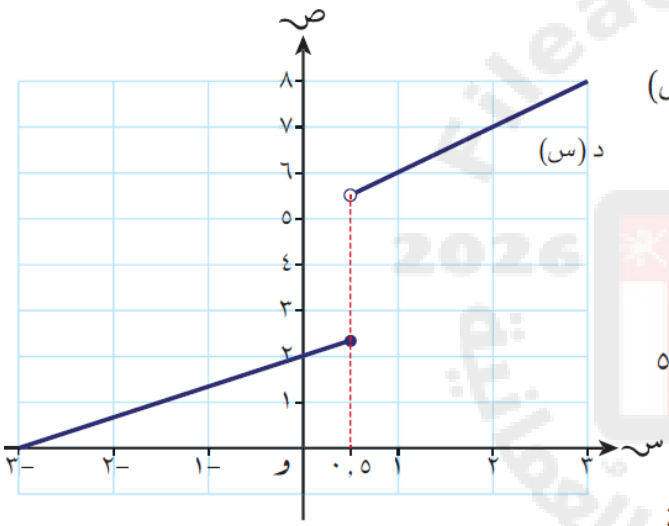
.....

(ب) .....

.....

.....

مثال (٧) يبيّن الشكل المقابل أجزاءً من منحنى الدالة د (س):



يمر الجزء الأول (العلوي) من بيان الدالة ص = د (س) بالنقطتَين (١، ٦)، (٣، ٨).

يمر الجزء الثاني (السفلي) من منحنى الدالة ص = د (س) بالنقطتَين (−٣، ٠)، (٠، ٢).

أ ١) بيّن أن معادلة الجزء الأول هي ص = س + ٥

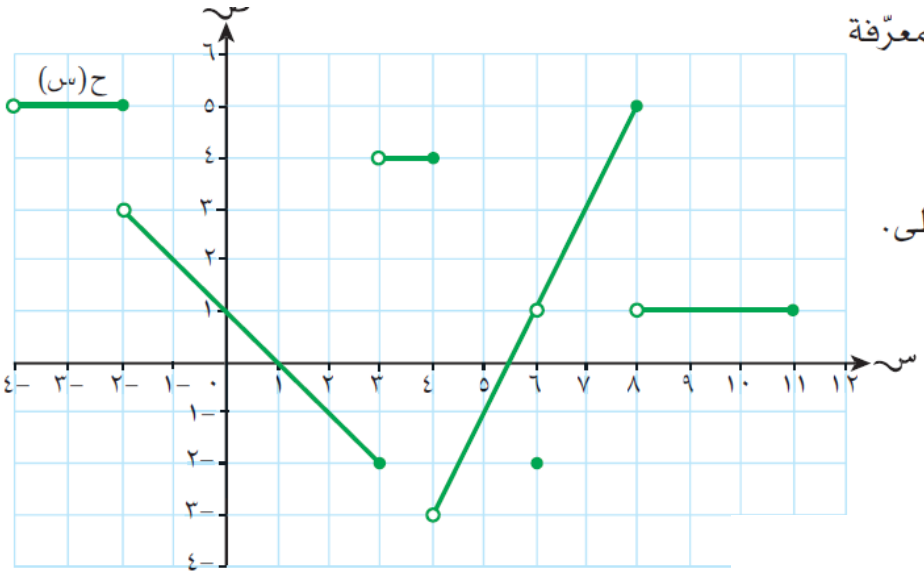
٢) أوجِد نهـــــا د (س).
س ← ٠,٥+

ب ١) أوجِد معادلة الجزء الثاني من منحنى الدالة في صورة ص = م س +جـ.

٢) أوجِد نهـــــا د (س).
س ← ٠,٥−

ج ما دلالة إجابتَيك في الجزئيّتَين أ (٢)، ب (٢)؟

مثال(٨) :



يبيّن الرسم المقابل منحنى الدالة المعرّفة بأكثر من قاعدة ح(س) في المجال $-٤ < س \leq ١١$

أ أوجد مدى الدالة في المجال المعطى.

ب استخدم المنحنى لإيجاد قيمة
ح(-٢)
ح(٣)

ج إذا كانت $-٤ < ك < ١١$،

نهـــــا ح(س) غير موجودة.
س ← ك
فأوجد قائمة بجميع قيم ك الممكنة.

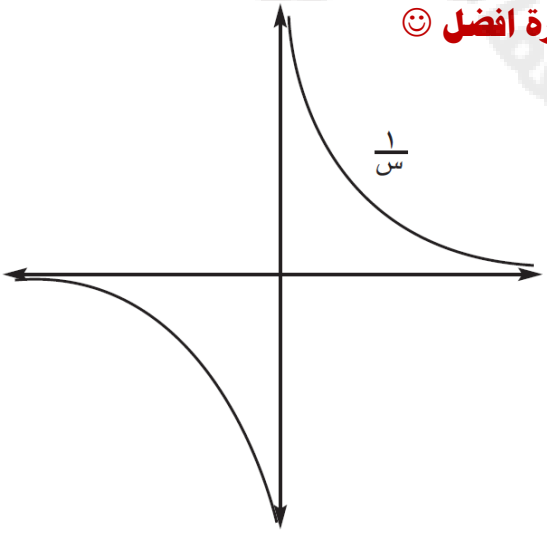
د أوجد قيمة ل، حيث ح(ل)، نهـــــا ح(س)
س ← ل
كلاهما موجودتان، ولكن غير متساويتَين.

٢-٣ نهاية الدالة النسبية عند اللانهاية (س ← ±∞)

..... / ..... / ٢٠٢٥م

عرض الصفحة في كتاب الطالب رقم ١١٥ لتوضيح مقدمة الدرس بصورة افضل ☺

لاحظ من الشكل المقابل :



$$\text{نهـــــا } \frac{١}{\text{س}} = ٠$$
$$\text{س} \leftarrow \pm\infty$$

طريقة إيجاد قيمة النهاية عند اللانهاية

إذا أمكن كتابة دالة في صورة دالة نسبية، فيمكن أن نقسم كلًا من البسط والمقام على المتغير ذي القوة الأكبر في الدالة.

مثال (١) : أوجد قيمة كل مما يلي :

نهـــــــا $\frac{٣س + ٣}{٣س - ٢}$ س ⟵ ∞	نهـــــــا $\frac{س^{٤} - ٢س^{٣}}{س^{٢} + ٢س}$ س ⟵ ∞	نهـــــــا $\frac{٨س^{٣} + ١}{س^{٥} + ٣}$ س ⟵ ∞

نلاحظ ان :

١	عندما تتساوى أكبر قوة في البسط مع أكبر قوة في المقام، فإن ناتج النهاية يساوي النسبة بين معامل أكبر قوة في البسط، ومعامل أكبر قوة في المقام.	ينتج خط التقارب الافقي
٢	إذا كانت أعلى قوة في البسط أكبر من أعلى قوة في المقام، فإن النهاية عندما س ⟵ ±∞ تكون غير موجودة.	
٣	إذا كانت أعلى قوة في البسط أقل من أعلى قوة في المقام، فإن النهاية عندما س ⟵ ±∞ تساوي ٠ (صفرًا).	

مثال (٢) : أوجد نهاية كل دالة من الدوال الآتية عند س ⟵ ±∞ :

د (س) = $\frac{٧س^{٢} - ٣س}{س^{٢}}$	د (س) = $\frac{١ + ٥س - ٤س^{٣}}{٢س^{٣}}$
د (س) = $\frac{١٠ - ٢س}{٤س + ٣}$	د (س) = $\frac{٥ + ٣س - ٥س^{٢} - ٢٤س^{٣}}{٢س^{٢} - ٣س^{٣}}$

$د(س) = \frac{٤ + ٣س}{٢س^{٣}}$	$د(س) = \frac{٥}{س + ٢}$
$د(س) = \frac{س^{٤} - ٢س^{٣}}{س^{٢} + ٢س}$	$د(س) = \frac{٧س^{٩}}{٣س^{٥} - ١١س^{٣} + س}$

مثال (٣) :

لتكن الدالة $د(س) = \frac{٤}{س} - س$:

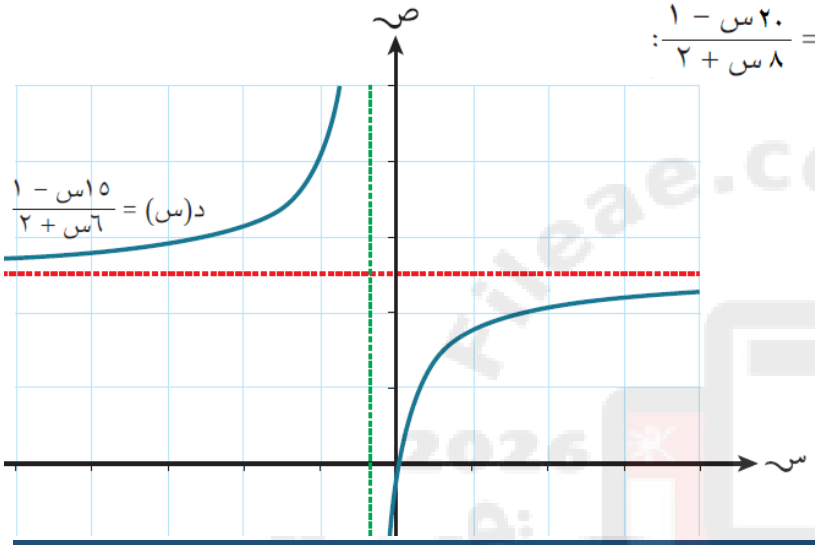
أ اكتب العبارة $\frac{٤}{س} - س$ في صورة نسبية.

ب بيّن أن $\lim_{س \leftarrow \infty} \frac{٤}{س} - س$ غير موجودة.

مثال (٤) : إذا علمت أن $\lim_{س \leftarrow \infty} \frac{١٠٠س^{٢} - ٧س}{٥ + (أس - ٣)^{٢}} = ٢٥$، فأوجِد قيم أ.

مثال (٥) إذا علمت أن $\lim_{س \to \infty} \frac{ت س^{٥} - ٧ س^{٣}}{\frac{س^{٥}}{٣} - ١٣} = \frac{٣}{٤}$ ، فأوجِد قيمة ت.

مثال (٦): يبيّن الرسم المقابل منحنى الدالة د(س) = $\frac{٢٠ س - ١}{٨ س + ٢}$:



أ أوجِد معادلة كلّ مما يأتي:

١) خط التقارب الرأسي.

٢) خط التقارب الأفقي.

٣-٣ خواص النهايات

..... / ..... / ٢٠٢٥م

إذا كان ك عددًا حقيقيًا، أ ينتمي إلى مجال كل من د (س)، ع (س).
وكانت $\lim_{س \to أ}$ د (س)، $\lim_{س \to أ}$ ع (س) موجودتَين، فإن:

١) $\lim_{س \to أ} (ك د (س)) = ك \lim_{س \to أ}$ د (س)

فمثلا :

٢) $\lim_{س \to أ} (د (س) + ع (س)) = \lim_{س \to أ}$ د (س) + $\lim_{س \to أ}$ ع (س)

فمثلا :

٣) $\lim_{س \to أ} (د(س) - ع(س)) = \lim_{س \to أ} د(س) - \lim_{س \to أ} ع(س)$

فمثلا :

٤) $\lim_{س \to أ} (د(س) \times ع(س)) = \lim_{س \to أ} د(س) \times \lim_{س \to أ} ع(س)$

فمثلا :

٥) $\lim_{س \to أ} \frac{د(س)}{ع(س)} = \frac{\lim_{س \to أ} د(س)}{\lim_{س \to أ} ع(س)}$ ، $\lim_{س \to أ} ع(س) \neq ٠$

فمثلا :

٦) $\lim_{س \to أ} (د(س))^{ن} = (\lim_{س \to أ} د(س))^{ن}$ ، حيث ن عدد صحيح موجب.

فمثلا :

٧) إذا كانت $\lim_{س \to أ} د(س) > ٠$ فإن $\lim_{س \to أ} \sqrt[ن]{د(س)} = \sqrt[ن]{\lim_{س \to أ} د(س)}$ ،
حيث ن عدد صحيح موجب.

فمثلا :

نتائج أخرى لنهايات خاصة :

أ) $\lim_{س \to أ} جـ = جـ$، حيث جـ عدد ثابت.

ب) $\lim_{س \to أ} س = أ$

ج) $\lim_{س \to أ} س^{ن} = أ^{ن}$، حيث ن عدد صحيح موجب.

د) $\lim_{س \to أ} \sqrt[ن]{س} = \sqrt[ن]{أ}$ ، حيث ن عدد صحيح موجب، أ > ٠

فمثلا :

مثال (١) : اذا كانت $\lim_{س \to ٢}$ د(س) = ٥ ، $\lim_{س \to ٢}$ هـ(س) =٣ ، فأستخدم خواص النهايات لإيجاد :

$\lim_{س \to ٢}$ ٨ هـ (س)	$\lim_{س \to ٢}$ ٣(د(س) + هـ (س))
$\lim_{س \to ٢}$ (هـ (س) ـ د (س))	$\lim_{س \to ٢}$ (د(س) × هـ (س))
$\lim_{س \to ٢}$ (هـ (س))^{٣}	$\lim_{س \to ٢} \frac{هـ(س)}{د(س)}$
$\lim_{س \to ٢}$ ٩ $\sqrt{(د(س) ـ هـ (س))^{٢}}$	

مثال(٢):

أ إذا علمت أن $\lim_{س \to ١}$ د (س) = ٣٦ ، $\lim_{س \to ١} \frac{د(س)}{ك(س)}$ = -٤ ، فأوجِد $\lim_{س \to ١}$ ك(س).

ب إذا علمت أن $\lim_{س \to -١}$ م(س) = -٢ ، $\lim_{س \to -١}$ (ن(س))^{٣} = -٨ ، فأوجِد

$\lim_{س \to -١}$ (٣م(س) - ٥ن(س))

مثال (٣) : إذا علمت أن $\lim_{س \to ١}$ د (س) = ٧,٢ ، $\lim_{س \to ١} \frac{٣ د(س)}{٥ ع(س)}$ = ١,٠٨ ، $\lim_{س \to ١}$ ع(س) موجودة، فأوجِد $\lim_{س \to ١} \frac{ع(س)}{د(س)}$.

تمرين : إذا علمت أن $\lim_{س \to ٠}$ هـ(س) = ١٠ ، $\lim_{س \to ٠}$ ك(س) = ٨ ، فاستخدم خواص النهايات لتجد كلًا ممّا يأتي:

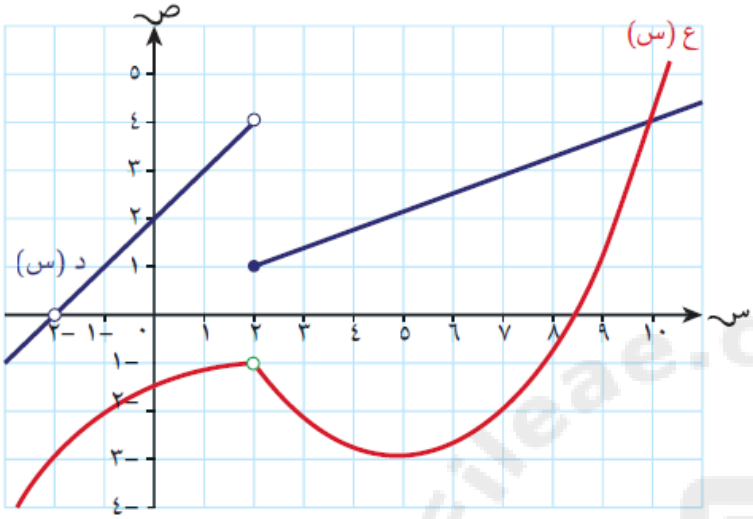
أ $\lim_{س \to ٠}$ (هـ(س) + ك(س))

ب $\lim_{س \to ٠}$ (هـ(س) × ك(س))

ج $\lim_{س \to ٠}$ (هـ(س))^{٣}

د $\lim_{س \to ٠}$ $\sqrt[٣]{\frac{١}{٤}}$ك(س) × هـ(س)

مثال (٤): يبين الشكل الاتي أجزاء من منحنى الدالتين د(س) ، ع(س)



أ استخدم الشكل لتقدّر قيمة كل ممّا يأتي:

١) $\lim_{س \to ١٠}$ (٢د(س) − ٣ع(س))

٢) $\lim_{س \to ٥}$ $\frac{(ع(س))^{٢}}{د(س)}$

٣) $\lim_{س \to -٢}$ (د(س) + ع(س))^{٣}

ب أوجِد قيمتَي أ الممكنة إذا علمت أن $\lim_{س \to أ}$ (د(س) − ع(س)) = ٣

ج أعطِ سببًا يوضح أن $\lim_{س \to ٢}$ $\sqrt{د(س)}$ غير موجودة.

مثال(٥) : لتكن د(س) دالة تربيعية حيث $\lim_{س \to ٣}$ د(س) = ٧ ، $\lim_{س \to ٦}$ د(س) = ١٢ ، ع(س) دالة خطيّة:

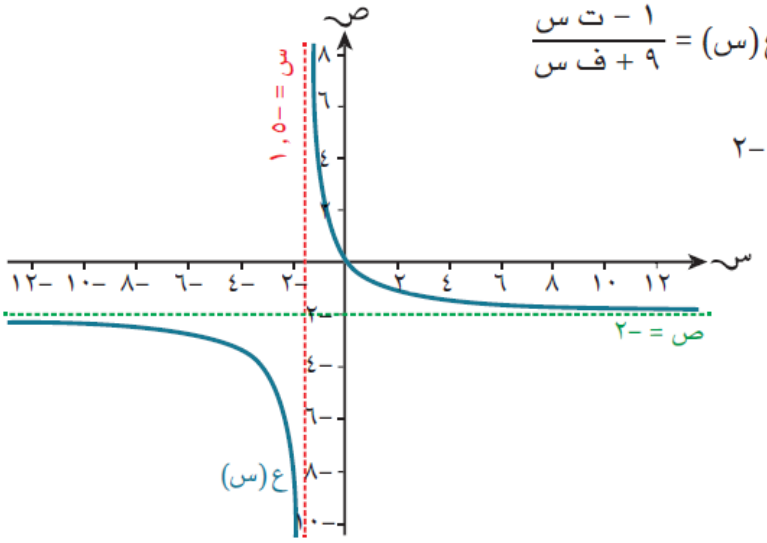
أ إذا علمت أن $\lim_{س \to ٣}$ (د(س) × ع(س)) = ٣٥ ، $\lim_{س \to ٦}$ $\frac{ع(س)}{د(س)}$ = ٠,٥ ،

فأوجِد العبارة الجبرية للدالة ع(س)، وأوجِد قيمة $\lim_{س \to ١٥}$ ع(س).

مثال(٦): يبيّن الشكل الآتي أجزاء من منحنى الدالة ع(س) = $\frac{١ - ت\ س}{٩ + ف\ س}$

يوجد للمنحنى خط تقارب رأسي عند

س = −٥, ١، وخط تقارب أفقي عند ص = −٢



أ أوجِد قيمتَي ت، ف.

ب احسب نهـــا (ع(س))^{٣} مقرّبة
س ← ٥

إلى أقرب منزلتَين عشريتَين.

٤-٣ الاتصال

..... / ..... / ٢٠٢٥م

أولا : الاتصال عند نقطة :

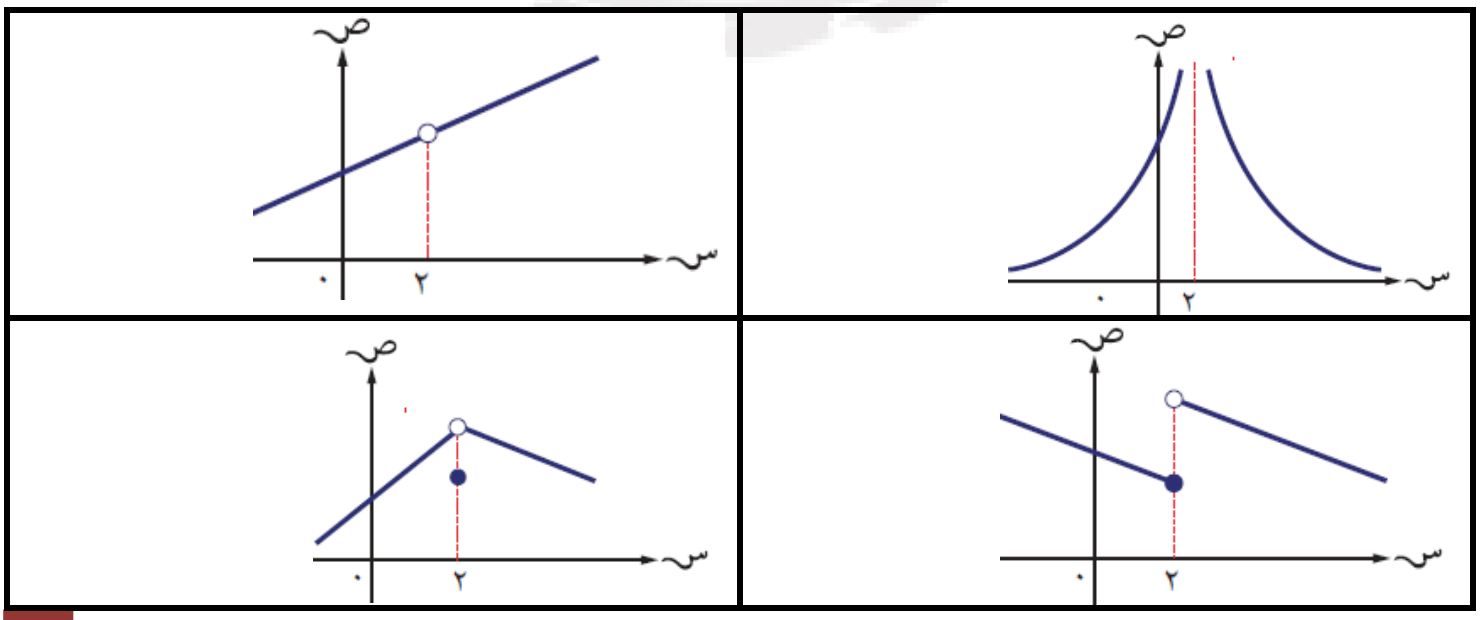
تكون الدالة د (س) متصلة عند النقطة س = أ إذا –وفقط إذا– كان:

١) د (أ) موجودة

٢) نهـــا د (س) موجودة
س ← أ

٣) نهـــا د (س) = د (أ)
س ← أ

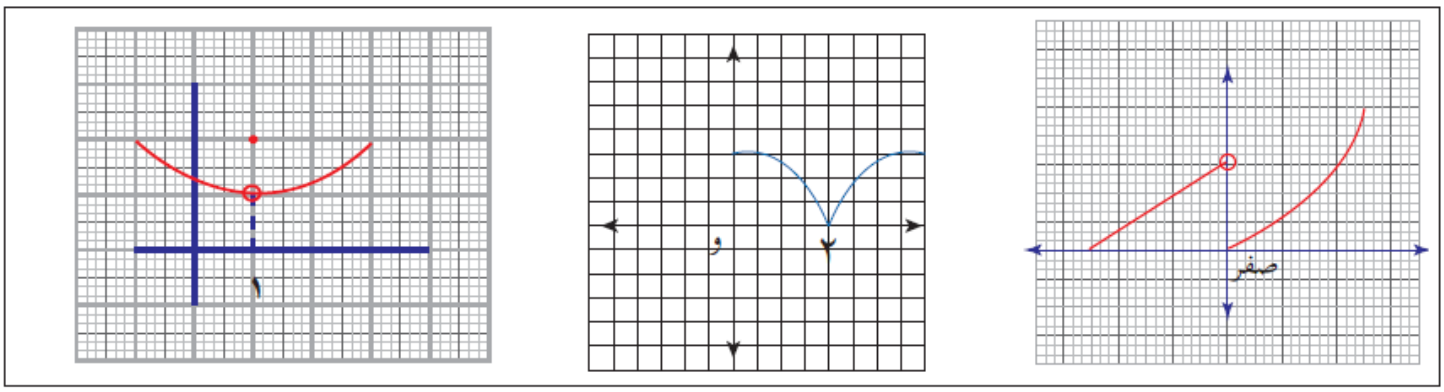
مثال (١) : في كل دالة مما يأتي حدد فيما اذا كانت الدالة متصلة او غير متصلة مع ذكر السبب



تمرين :

اذكر سبب عدم قابلية الدوال في الأشكال التالية للاشتقاق عند النقطة الموضحة فوق كل شكل .

أ) عند س = ٠ ب) س = ٢ ج) عند س = ١



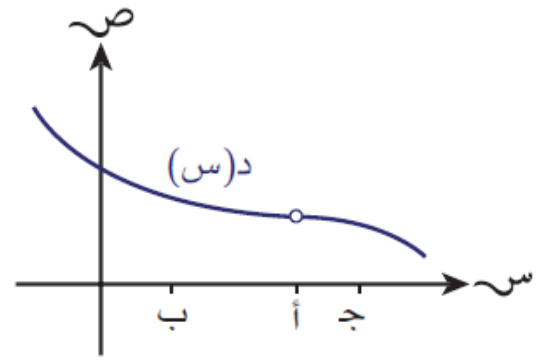
ثانيا : الاتصال على فترة مغلقة

..... / ..... / ٢٠٢٥م

تكون الدالة متصلة على الفترة أ ≥ س ≥ ب إذا -وفقط إذا- كانت متصلة عند كل النقاط في تلك الفترة.

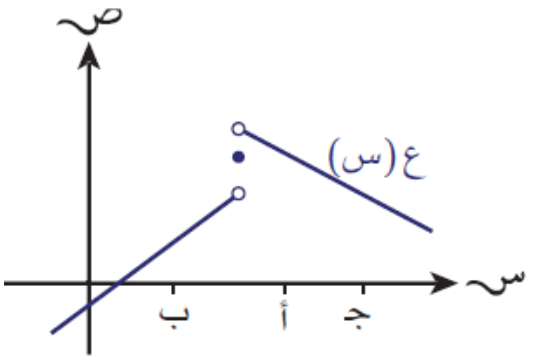
مثال(٢) : **في كل دالة مما يأتي ، حدد فيما اذا كانت الدالة متصلة أو غير متصلة مع ذكر السبب :**

أ عند س = أ . ب على الفترة ب ≥ س ≥ جـ.



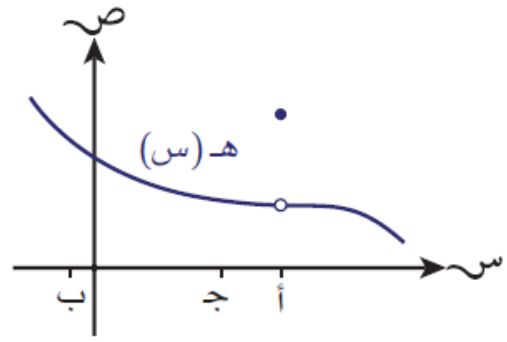
(أ)

(ب)



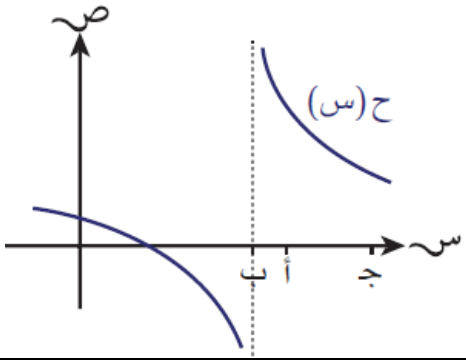
(أ)

(ب)



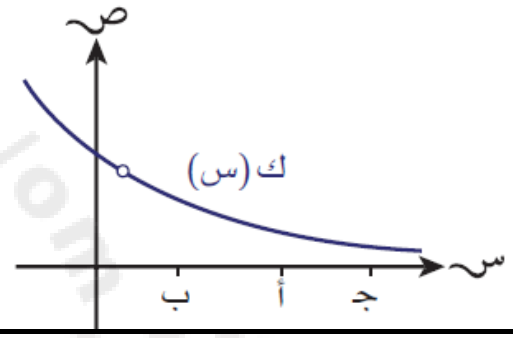
(أ)

(ب)



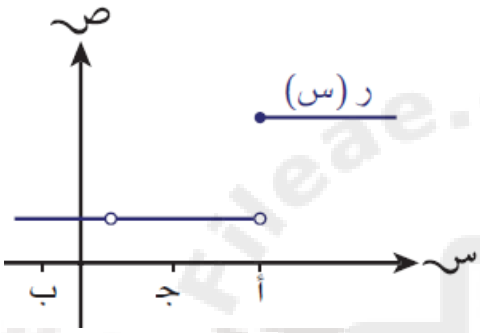
(أ)

(ب)



(أ)

(ب)

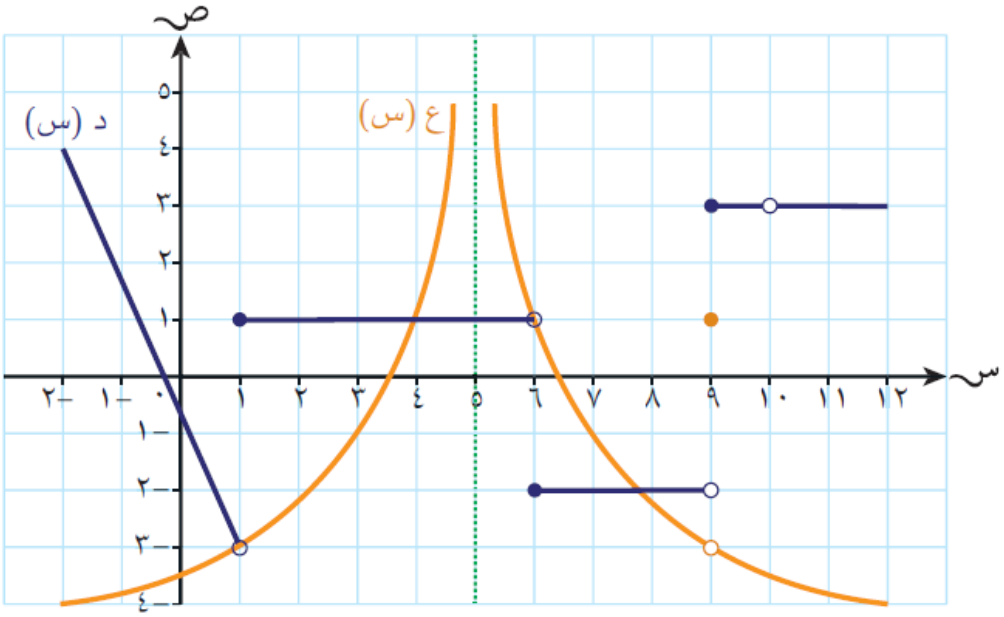


(أ)

(ب)

مثال (٣) يبيّن الشكل الآتي منحنى الدالتَين د (س)، ع (س) في الفترة −٢ ≤ س ≤ ١٢ :

أ عند أي نقطة (أو نقاط) في الفترة −٢ ≤ س ≤ ١٢ تكون الدالة ع (س) غير متصلة ؟ أعطِ سببًا لكل منها .

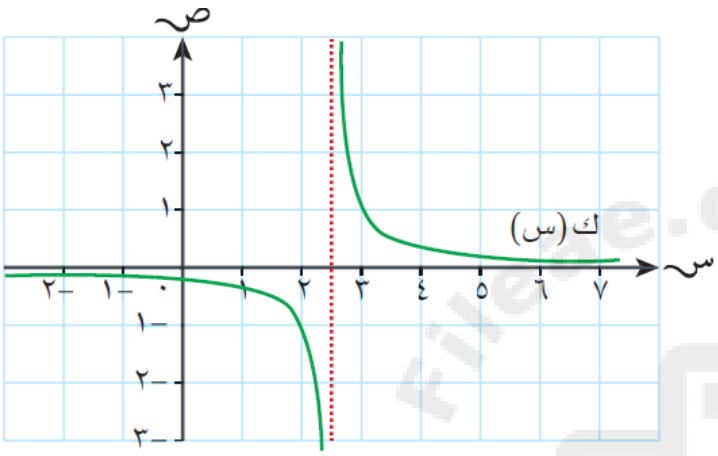


ب عند أي نقطة (أو نقاط) في الفترة −٢ ≤ س ≤ ١٢ تكون الدالة د(س) غير متصلة ؟ أعطِ سببًا لكل منها .

ج أي الدالتَين د (س)، ع(س) متصلة على الفترة −٢ ≤ س ≤ ١؟ برّر إجابتك.

مثال(٤) :

يبيّن الشكل المقابل جزءًا من منحنى الدالة ك(س).



أ اكتب معادلة خط التقارب الرأسي.

ب إذا علمت أن ك(س) = $\frac{١}{\text{ت س + ف}}$ وتمر بالنقطة (٢، −١)، فأوجِد قيمة كل من ت، ف التي تكون عندها الدالة غير متصلة.

ج استخدم المنحنى لتوضح أن الدالة ك(س) متصلة على الفترة ٣ ≤ س ≤ ٧

د بيّن أن الدالة ك(س) غير متصلة على الفترة ١ ≤ س ≤ ٤

هـ إذا علمت أن الدالة ك(س) متصلة على الفترة −٢ ≤ س ≤ أ، فأوجِد قيمة أكبر عدد صحيح ممكن لـ أ

==========

مثال (٥) : بيّن أن الدالة د (س) = $\frac{٤}{٢ - \text{س}}$ متصلة عند س = ١

مثال(٦) :

بيّن أن الدالة د(س) = $\frac{س + ٥}{س - ٨}$ متصلة على الفترة ٠ ⩽ س ⩽ ٥، وغير متصلة على الفترة ٥ ⩽ س ⩽ ١٠

مثال (٧) : لتكن الدالة د(س) = $\frac{١}{س}$:

أ بيّن أن الدالة د(س) متصلة على الفترة ١ ⩽ س ⩽ ١٠

ب اكتب أي فترة مغلقة بحيث تكون الدالة د(س) = $\frac{١}{س}$ غير متصلة عندها.

مثال (٨) : لتكن الدالة د(س) = $\frac{١}{س^{٢} - ٨س - ٢٠}$

أ بيّن أن الدالة د(س) غير متصلة على الفترة ٩ ⩽ س ⩽ ١١

ب أوجِد قيمة س السالبة بحيث تكون د(س) غير متصلة.

الواجب : ☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺

إذا كان منحنى الدالة ع(س) = $\frac{س^{٢} - ٢س - ١٥}{س + ٣}$ مستقيمًا يتضمن فجوة:

أ عند أي قيمة لـ س تكون الدالة ع(س) غير معرّفة؟ ب أوجد إحداثيات الفجوة.

اختبار الوحدة

١ منحنى الدالة د(س) = $\frac{٢س - ٢}{\sqrt{س} - ١}$ ظلل الشكل (▭) المقترن باحداثيات الفجوة

▭ (١ ، ٤) ▭ (١ ، ٢) ▭ (١ ، ٢) ▭ (١ ، ٤)

٢ الدالة ع (س) = $\frac{٥س}{٢س - ٣}$ ، ظلل الشكل ( ) المقترن بحيث تكون الدالة ع(س) غير متصلة على الفترة :

▭ ١ ≥ س ≥ ٠ ▭ ٠ ≥ س ≥ ١

▭ ١ ≥ س ≥ ٢ ▭ ٢ ≥ س ≥ ٣

٣ الدالة هـ (س) = $\frac{س - ٦}{٥س + ١١}$ متصلة على الفترة ب ≥ س < ∞

(أ) اكتب أصغر قيمة ممكنة للعدد الصحيح ب .

(ب) أوجد قيمة جـ اذا علمت أن د(س) = $\frac{١}{هـ (س)}$ غير متصلة عند س = جـ

٤ منحنى معادلته هـ (س) = $\frac{س^{٢} + أس + ب}{س - ١}$ له فجوة عند س = ١ ، احداثياتها (١ ، ١-)

ظلل ( ) الشكل المقترن بقيمتي أ ، ب على التوالي

▭ {٣ ، ٢} ▭ {٣ ، ٢}

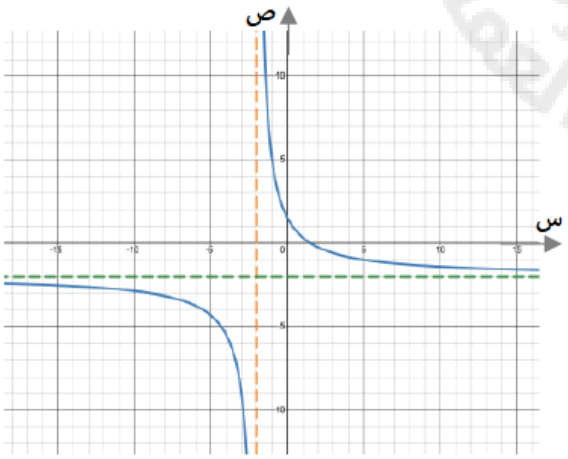
▭ {٣ ، ٢} ▭ {٣ ، ٢}

٥ يبين الرسم المجاور جزاء من منحنى الداله د(س) = $\frac{٩ + أس}{٤ + ب س}$

أوجد

(أ) قيمتي أ ، ب

(ب) نهـــــا $\sqrt{د(س)}$ (س ← صفر)



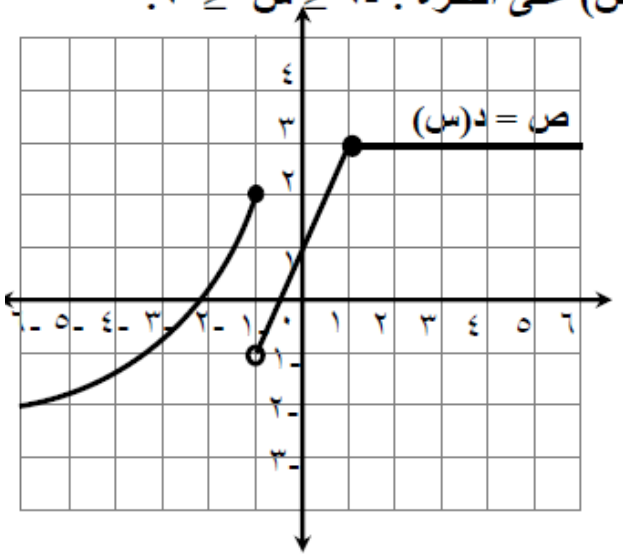
٦ اذا كانت م(س) = $\frac{هـ(س)}{٣}$ ، نهـــــا $\frac{هـ (س)}{س + ١}$ = ٣- أوجد نهـــــا م(س) (س ← ٧)

٧ هـ(س) = $\frac{٢س}{(س + ٥)(س - ٨)}$

(ظلل الشكل(▭) المقترن بقيمة س التي تكون هـ(س) غير متصلة في الفترة - ٩ ≥ س≥ ٧)

▭ ٨- ▭ ٥- ▭ ٥ ▭ ٨

٨ يبين الشكل التالي منحنى الدالة د(س) على الفترة : ـ٦ ≤ س ≤ ٦.



١) استخدم المنحنى لتبين أن الدالة متصلة عند س = ١.

٢) بين أن الدالة غير متصلة على الفترة ـ٦ ≤ س ≤ ٦.

٣) استخدم المنحنى لإيجاد

$$\text{نهـــا}_{س \leftarrow 0} \sqrt[٥]{د(س) - ٢}$$

٩ لتكن هـ (س) = $\frac{٣س + ١}{٢ - س}$

(أ) أكتب خط التقارب الرأسي . (ب) أكتب معادلة خط التقارب الافقي

١٠ $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ١}$ ٢هـ(س) = ١٠ ، $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ١}$ ك(س) = ٢

أوجد $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ١}$ (ك(س) × هـ(س) + ٣س − (ك(س))^{٣})

١١ $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٤}$ د(س) = ٦ ، $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٦}$ د(س) = ٢٠ ،

$\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٤}$ (د(س) × ع(س)) = ٤٢ ، $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٦}$ $\frac{د(س)}{ع(س)}$ = ٤

حيث ع(س) دالة خطية ، أوجد قيمة $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٣}$ ع(س)

١٢ $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٨}$ د(س) =٢٢ ، $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ١}$ هـ(س) = ١ ، $\text{نهـــا}_{س \leftarrow ٨}$ $\frac{د(س)}{هـ(س)}$ = $\frac{-١١}{١٧}$

حيث هـ (س) دالة خطية ، أوجد قيمة $\text{نهـــا}_{س \leftarrow -٣}$ هـ (س)

١٣ (ظلل الشكل (☐) المقترن بـ $\text{نهـــا}_{س \leftarrow \infty}$ $\frac{(١ - ٢س^{٣})^{٢}}{٢ + س - س^{٦}}$)

☐ ـ٤ ☐ صفر ☐ ٢ ☐ غير موجودة

١٤ $\text{نهـــا}_{س \leftarrow \infty}$ $\frac{٣ + ٢س^{٤} - (م + ٢)س^{٥}}{١ - ٢س^{٤}}$ = ـ١ (ظلل الشكل (☐) المقترن بقيمة م)

☐ ـ٢ ☐ ـ١ ☐ صفر ☐ ٢

لا تنسونا بصالح دعائكم