كراسة الطالب في الوحدة الثانية حساب المثلثات

الإبداع هو أن يخرج الإنسان من وحل الفشل إلى إنسان يضرب به المثل

الرياضيات المتقدمة

New ٢٠٢٤

فصل دراسي أول سلطنة عمان

صف ١٢

كراسة الطالب

الوحدة الثانية

حساب المثلثات

قد التحدي ٢٠٢٤

إعداد : نصر حسنين

ت : ٧١٧٢٤١٢٥

ماذا نتعلم ؟

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٢-١ تتذكر القيم الدقيقة للجيب، جيب التمام، الظل لزوايا قياسها ٠°، ٣٠°، ٤٥°، ٦٠°، ٩٠°، وقيمها المكافئة بالراديان، وتجد القيم الدقيقة للزوايا المتعلقة بها.

٢-٢ تجد القيم الدقيقة (بالدرجات أو بالراديان) للنسب المثلثية (جاهـ، جتاهـ، ظاهـ) بمعلومية إحداها.

٢-٣ ترسم، وتستخدم التمثيلات البيانية لدوال الجيب، وجيب التمام، وظل الزاوية لأي زاوية (بالدرجات و بالراديان).

٢-٤ ترسم التحويلات الهندسية (الانسحاب، الانعكاس، التمدد) للتمثيلات البيانية لدوال الجيب، وجيب التمام، وظل الزاوية لزوايا قياسها بين ٠°، ٣٦٠° أو بين ٠، π٢، مثل: ص = ٢جا(٣س).

٢-٥ تستخدم الصيغ جا$^{-1}$(س)، جتا$^{-1}$(س)، ظا$^{-1}$(س) للتعبير عن القيم الرئيسية للعلاقات العكسية للمثلثات، وتجد قيم الدوال البسيطة باستخدام المعرفة حول القيم الدقيقة للجيب، جيب التمام، الظل لزوايا قياسها ٣٠°، ٤٥°، ٦٠° وقيمها المكافئة بالراديان.

٢-٦ تحل معادلات مثلثية بسيطة تقع في مجال محدد بالدرجات أو بالراديان.

٢-٧ تستخدم المتطابقات ظا هـ = $\frac{\text{جا(هـ)}}{\text{جتا(هـ)}}$، جا^{2}(هـ) + جتا^{2}(هـ) = ١ لتحل معادلات مثلثية في براهين مثلثية بالدرجات وبالراديان.

الدرس الأول

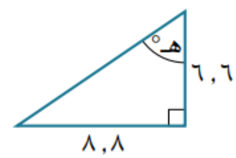
الزوايا بين ٠°، ٩٠°

مثال تمهيدي ١

أ استخدم نظرية فيثاغورث لتجد طول الضلع الثالث.

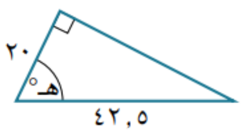
ب اكتب قيمة جا هـ، جتا هـ، ظا هـ

١)



الحل

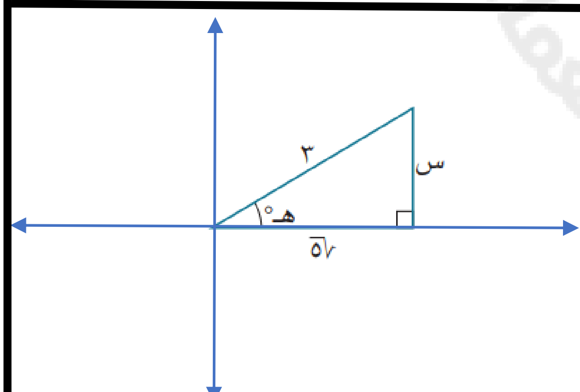
٢)



الحل

مثال تمهيدي ٢

إذا علمت أنّ: جتا هـ = $\frac{\sqrt{5}}{3}$، حيث ٠° $\leqslant$ هـ $\leqslant$ ٩٠°:



أ فأوجِد قيمة كل ممّا يأتي:

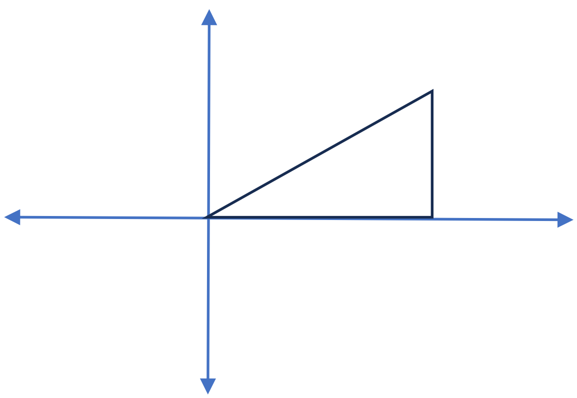
١) جتا^2 هـ ٢) جا هـ ٣) ظا هـ

الحل

درب نفسك

كتاب النشاط صـ ٣٠ رقم ٢

إذا علمت أن جتا هـ = $\frac{٣}{٥}$ ، حيث هـ زاوية حادة، فأوجِد قيمة كل ممّا يأتي:



أ) جا هـ

ب) ظا هـ

ج) ٣جا هـ × جتا هـ

د) $\dfrac{٣}{\text{ظا}^{٢}\text{ هـ}}$

هـ) $\dfrac{\text{جتا}^{٢}\text{ هـ}}{\text{جا هـ}}$

و) $\dfrac{١ - \text{جا هـ}}{١ + \text{جا هـ}}$

لمزيد من التدريب يمكنك حل

كتاب الطالب صـ ٤١ رقم ١ ـ ٢ـ ٣

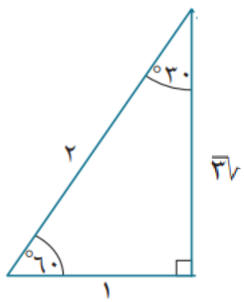
كتاب النشاط صـ ٣٠ رقم ١ ـ ٣

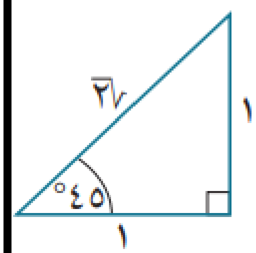
النسب المثلثية للزوايا الخاصة

درجة	°٠	°٣٠	°٤٥	°٦٠	°٩٠	°١٨٠	°٢٧٠	°٣٦٠
راديان	٠	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\pi}{٢}$	π	$\frac{٣\pi}{٢}$	٢π

نحصل من المثلثين على النتائج المهمّة الآتية:

	جا هـ	جتا هـ	ظا هـ
هـ = °٣٠ = $\frac{\pi}{٦}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$
هـ = °٤٥ = $\frac{\pi}{٤}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	١
هـ = °٦٠ = $\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\sqrt{٣}$





يمكنك استخدام الالة الحاسبة لايجاد هذه النسب

يلا بينا نشوف كيفية الاستخدام

كتاب الطالب صـ ٤١ رقم ٤-٥

١ أوجِد قيمة كلّ ممّا يأتي:

أ جا °٣٠ × جتا °٦٠

ب جتا^{٢} $\frac{\pi}{٣}$

هـ $\frac{\text{جا}^{٢}\ ٤٥°}{٢ + \text{ظا}\ ٦٠°}$

هـ $\frac{١}{\text{ظا}\ \frac{\pi}{٤}} - \frac{١}{\text{جتا}\ \frac{\pi}{٣}}$

٢ بيّن أن:

كتاب النشاط صـ ٣٢ رقم ٦

أ جا ٦٠° × جتا ٣٠° + جتا ٦٠° × جا ٣٠° = جا ٩٠°

٢ بيّن أن جا ٦٠° + ظا ٣٠° = $\frac{٥\sqrt{٣}}{٦}$

كتاب النشاط صـ ٣٢ رقم ٧

٣ إذا كان $\frac{\text{جا } ٣٠° + \text{جا } ٤٥°}{\text{جتا } ٣٠° + \text{جتا } ٤٥°} = \sqrt{٦} + \sqrt{٣} - \sqrt{\text{أ}}$ + ب، فأوجد قيمتَي أ ، ب.

كتاب النشاط صـ ٣٢ رقم ٨

الواجب

١ انسخ الجدول أدناه، ثم أكمله، حيث $٠ \leqslant هـ \leqslant \frac{\pi}{٢}$:

كتاب الطالب صـ ٤٢ رقم ٦

النسب المثلثية \ الزوايا	هـ = ...	هـ = ...	هـ = ...
....	١	$\sqrt{٣}$	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$
جتا هـ	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{١}{٢}$	......
$\frac{١}{جا هـ}$	......	......	٢

٢ أوجِد قيمة كل ممّا يأتي:

كتاب الطالب صـ ٤٢ رقم ٥

أ $جا \frac{\pi}{٤} \times جتا \frac{\pi}{٤}$ ب $جتا^{٢} \frac{\pi}{٣}$ ج $١ - ٢جا^{٢} \frac{\pi}{٦}$

٣ إذا علمت أن $جا هـ = \frac{١}{٤}$، وأن الزاوية هـ حادة، فأوجِد قيمة كلّ ممّا يأتي:

كتاب الطالب صـ ٤١ رقم ٣

أ جتا هـ   ب ظا هـ   ج $١ - جا^{٢} هـ$

د $\frac{جا هـ \times جتا هـ}{ظا هـ}$ هـ $\frac{١}{جا هـ} + \frac{١}{ظا هـ}$ و $٥ - \frac{ظا هـ}{جا هـ}$

٤ بيّن أن:

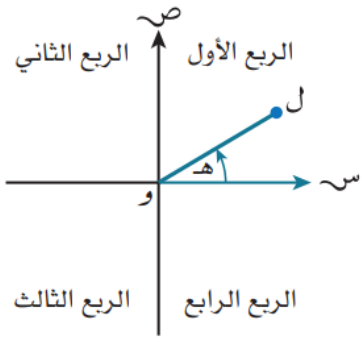
كتاب النشاط صـ ٣٢ رقم ٦

ب $جا^{٢} ٤٥° + جتا^{٢} ٤٥° = ١$

د $(١ + ظا ٦٠°)^{٢} = ٤ + ٢\sqrt{٣}$

الدرس الثاني

زاوية الأساس

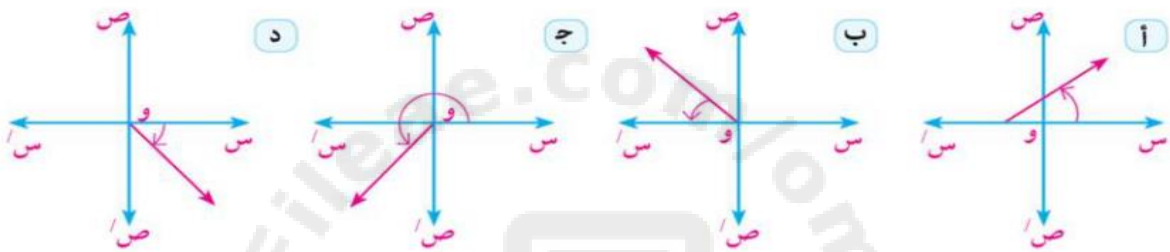


تمهيد ١ **ما هو الوضع القياسى للزاوية ؟**

تكون الزاوية فى وضع قياسى إذا كان رأس هذه الزاوية هو نقطة الأصل فى نظام إحداثى متعامد، وضلعها الابتدائى يقع على الجزء الموجب لمحورالسينات.

مثال

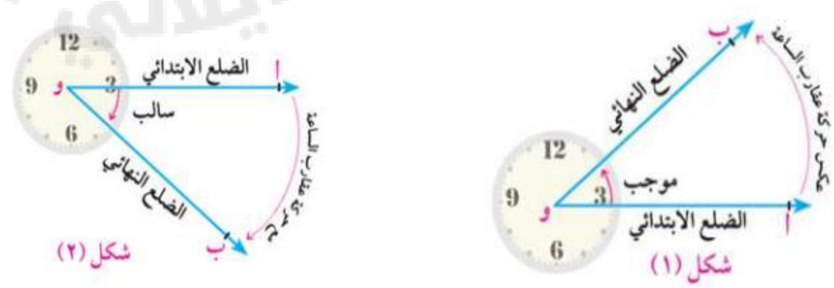
أي من الزوايا الموجهة الآتية فى الوضع القياسي

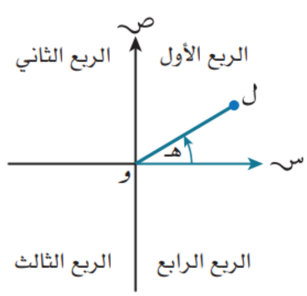


تمهيد ٢ **القياس الموجب و القياس السالب للزاوية .**

في شكل (١) يكون قياس الزاوية الموجهة موجبًا إذا كان الاتجاه من الضلع الابتدائي و أ إلى الضلع النهائي و ب ، فى عكس اتجاه حركة عقارب الساعة.

في شكل (٢) يكون قياس الزاوية الموجهة سالبًا إذا كان الاتجاه من الضلع الابتدائي و أ إلى الضلع النهائي و ب ، هو نفس اتجاه حركة عقارب الساعة.





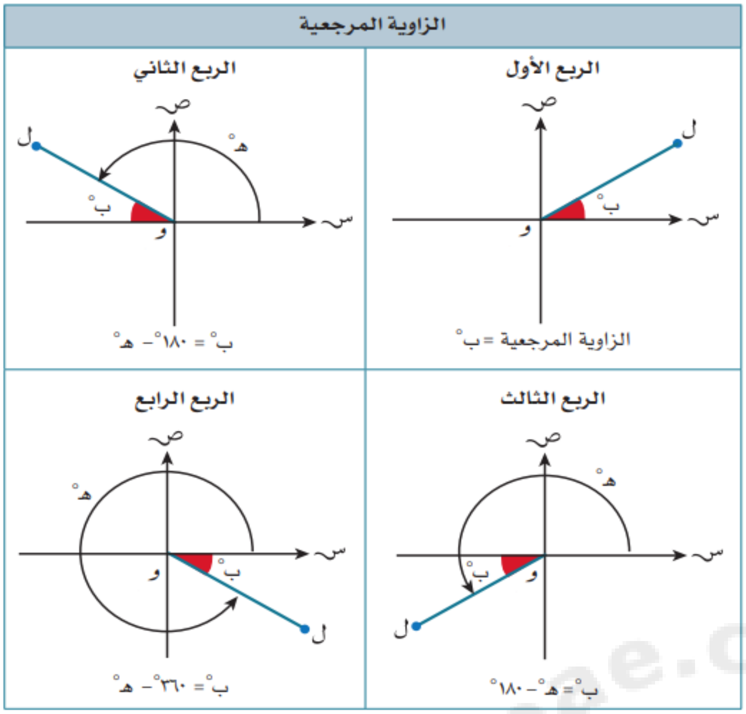
مثال

و أصغر قياس موجب للزاوية التى قياسها ٥٣٠° هو ....

ز الزاوية التى قياسها ٩٣٠° تقع فى الربع ....

ح أصغر قياس موجب للزاوية التى قياسها –٦٩٠° هو ....

٢-٢ زاوية الأساس (الزاوية المرجعية)
The principal angle (the reference angle)



في الشكل المجاورتكون زاوية الأساس في

الربع الأول :

الربع الثاني :

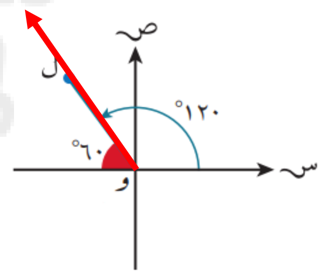
الربع الثالث :

الربع الرابع :

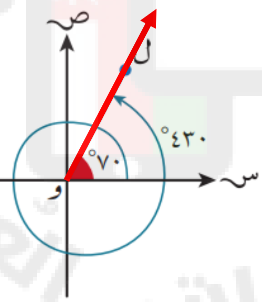
مثال ١ توضيحي

ارسم شكلًا يبيّن الزاوية التي تصنعها وَلْ مع الجزء الموجب من المحور السيني، حيث و نقطة الأصل، ثم حدد **الزاوية الحادة** التي تشكلها وَلْ مع المحور السيني في كل مما يأتي:

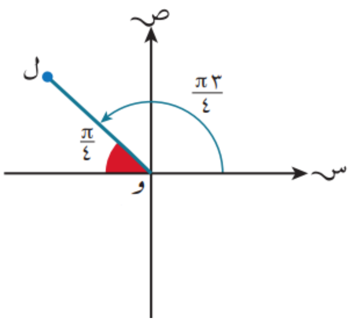
١



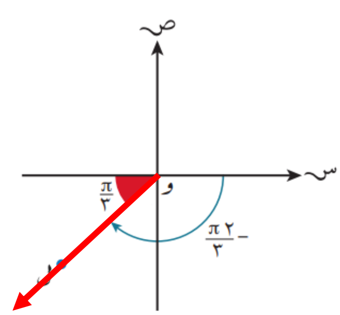
٢



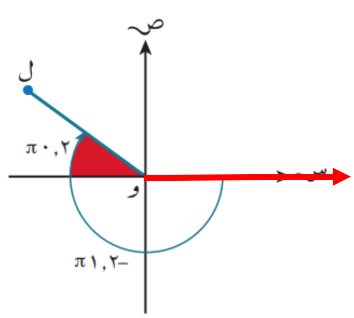
٣



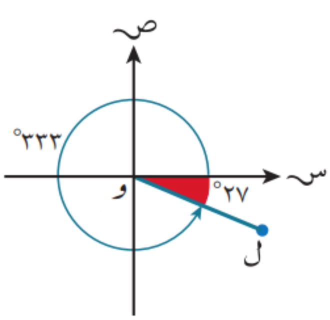
٤



٥



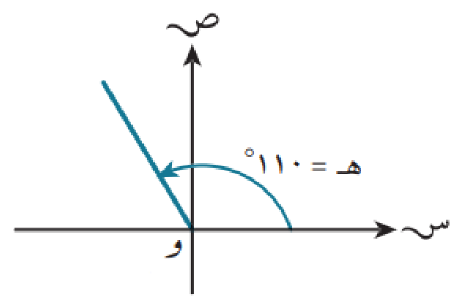
٦



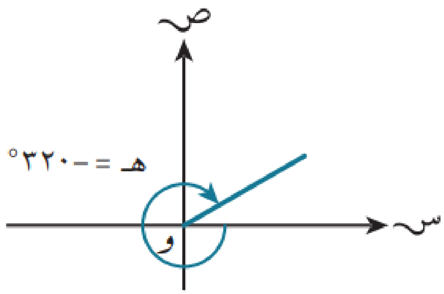
٢ أوجِد قياس زاوية الأساس للزاوية هـ في كل مما يأتي:

كتاب الطالب صـ ٤٢ رقم ٥

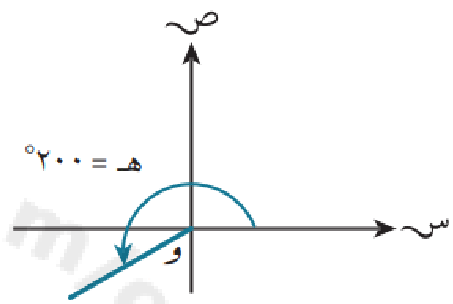
أ



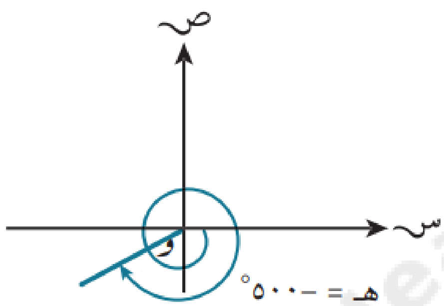
ب



ج



د



درب نفسك

كتاب النشاط صـ ٣٣ رقم ٢

٢) في كل ممّا يأتي، سمّ الربع الذي تقع فيه و ل عندما تكون الزاوية التي تصنعها و ل مع الجزء الموجب من المحور السيني، حيث و نقطة الأصل:

أ ١٤٥° ب ٣٤٠° ج −١٠٠° د ١٨٥°

هـ −٣٨٠° و $\frac{2\pi}{5}$ ز $-\frac{12\pi}{5}$

٣) إذا علمت أن ب هي زاوية الأساس للزاوية هـ، فأوجد قيمة هـ في كل مما يأتي:

أ ب = ٧٥° تقع في الربع الثاني، ٠° < هـ < ٣٦٠°

ب ب = ٣٠° تقع في الربع الثالث، −١٨٠° < هـ < ٠°

ج ب = ٥٤° تقع في الربع الرابع، ٣٦٠° < هـ < ٧٢٠°

د ب = $\frac{\pi}{3}$ تقع في الربع الثالث، ٠ < هـ < ٢π

هـ ب = $\frac{\pi}{4}$ تقع في الربع الثاني، ٢π < هـ < ٤π

و ب = $\frac{\pi}{5}$ تقع في الربع الرابع، −٤π < هـ < −٢π

درب نفسك

كتاب الطالب صـ ٤٨ رقم ٣

٣) في كل ممّا يأتي، حُدّد قياس زاوية الأساس ب، والربع، والمجال الذي تقع فيه الزاوية هـ.

أوجِد قياس الزاوية هـ:

أ ب = ٥٥°، تقع في الربع الثاني، ٠° < هـ < ٣٦٠°

ب ب = ٢٠°، تقع في الربع الثالث، −١٨٠° < هـ < ٠°

الواجب

كتاب الطالب صـ ٤٨ رقم ٢- ٣

٢) ارسم شكلًا يبيّن الربع الذي تقع فيه $\overline{ول}$ عند دورانها لتشكّل كل زاوية من الزوايا أدناه. أشر بوضوح إلى اتجاه الدوران على كل شكل، وحدد الزاوية الحادة التي تشكلها $\overline{ول}$ مع المحور السيني:

أ ١٠٠° ب −١٠٠°

ج ٣١٠° د −١٥٠°

هـ ٤٠٠° و $\frac{٢\pi}{٣}$

ز $\frac{٧\pi}{٦}$ ح $-\frac{٥\pi}{٣}$

ط $\frac{١٣\pi}{٩}$ ي $-\frac{١٧\pi}{٨}$

---

٣) في كل ممّا يأتي، حُدّد قياس زاوية الأساس ب، والربع، والمجال الذي تقع فيه الزاوية هـ.

أوجِد قياس الزاوية هـ:

أ ب = ٥٥°، تقع في الربع الثاني، ٠° < هـ < ٣٦٠°

ب ب = ٢٠°، تقع في الربع الثالث، −١٨٠° < هـ < ٠°

ج ب = ٣٢°، تقع في الربع الرابع، ٣٦٠° < هـ < ٧٢٠°

د ب = $\frac{\pi}{٤}$، تقع في الربع الثالث، ٠ < هـ < ٢π

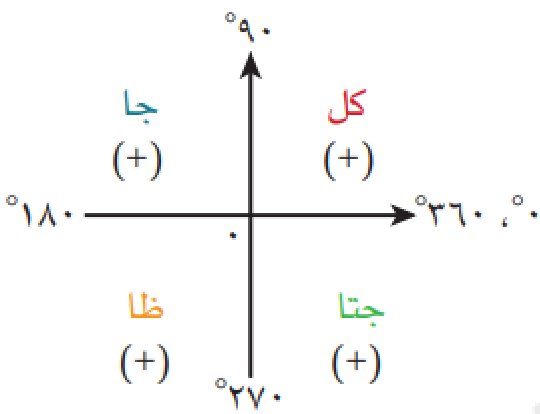
هـ ب = $\frac{\pi}{٣}$، تقع في الربع الثاني، ٢π < هـ < ٤π

و ب = $\frac{\pi}{٦}$، تقع في الربع الرابع، −٤π < هـ < −٢π

الدرس الثالث

٢-٣ النسب المثلثية للزوايا العامة
Trigonometric ratios of general angles

يبيّن الشكل المجاور النسب المثلثية الموجبة في كل ربع من الأرباع.



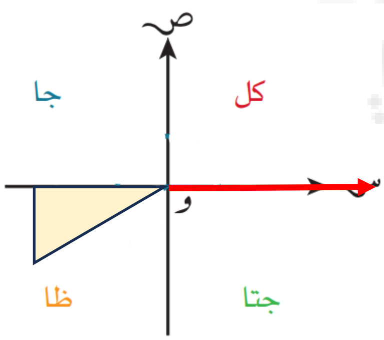
١٤٠°

٢٣٠°

مثال ١ توضيحي

إذا علمت أن جتا هـ = $-\frac{٣}{٥}$ في الفترة ١٨٠° ≥ هـ ≥ ٢٧٠°، فأوجِد قيمة كل من: جا هـ، ظا هـ.

الحل



كتاب الطالب صـ ٥٠

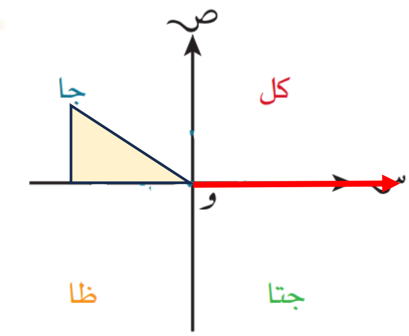
٢ إذا علمت أن جا هـ = $\frac{٢}{٥}$، حيث هـ زاوية منفرجة، فأوجِد قيمة كل ممّا يأتي:

أ جتا هـ

ب ظا هـ

الحل

كتاب الطالب صـ ٥٢ رقم ٤



---

٢ ٩) إذا علمت أن جا ا = $\frac{٥}{١٣}$، جتا ب = $-\frac{٤}{٥}$، حيث تقع الزاويتان ا، ب في الربع نفسه، فأوجِد قيمة كل ممّا يأتي:

أ جتا ا

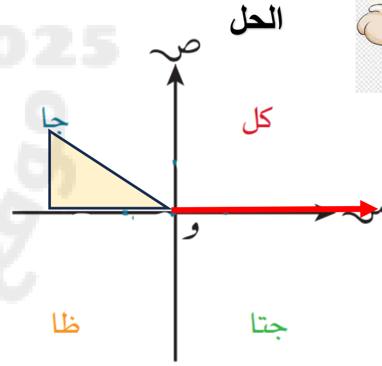
ب ظا ا

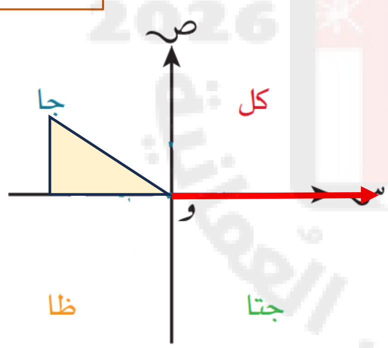
ج جا ب

د ظا ب

الحل

كتاب الطالب صـ ٥٢ رقم٩

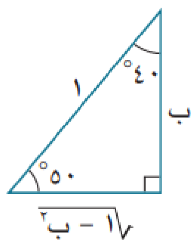




٣ إذا علمت أن جا ٥٠° = ب، فاكتب قيمة كل ممّا يأتي بدلالة ب:

أ جا ٢٣٠°   ب جتا ٥٠°   ج ظا ٤٠°   د ظا ١٤٠°

الحل



أ جا ٢٣٠°

ب جتا ٥٠°

ج ظا ٤٠°

د ظا ١٤٠°

الواجب

١) اكتب كلًا ممّا يأتي في صورة نسبة مثلثية لزاوية حادة:

أ جا ١٩٠°   ب جتا ٣٠٥°   ج ظا ١٢٥°   د جتا (−٢٤٥°)

هـ جتا $\frac{٤\pi}{٥}$ و جا $\frac{٩\pi}{٨}$ ز جتا $\left(-\frac{٧\pi}{١٠}\right)$ ح ظا $\frac{١١\pi}{٩}$

٢) أوجِد قيمة كل ممّا يأتي:

أ جتا ١٢٠°   ب ظا ٣٣٠°   ج جا ٢٢٥°   د ظا (−٣٠٠°)

هـ جا $\frac{٤\pi}{٣}$ و جتا $\frac{٧\pi}{٣}$ ز ظا $\left(-\frac{\pi}{٦}\right)$ ح جتا $\frac{١٠\pi}{٣}$

٥) إذا علمت أن جتا هـ = $-\frac{١}{\sqrt{٣}}$، حيث ١٨٠° ⩽ هـ ⩽ ٢٧٠°، فأوجِد قيمة كل ممّا يأتي:

أ جا هـ   ب ظا هـ

٦) إذا علمت أن ظا هـ = $-\frac{٥}{١٢}$، حيث ١٨٠° ⩽ هـ ⩽ ٣٦٠°، فأوجِد قيمة كل ممّا يأتي:

أ جا هـ   ب جتا هـ

٧) إذا علمت أن ظا ٢٥° = أ، فأوجِد قيمة كل ممّا يأتي بدلالة أ:

أ ظا ٢٠٥°   ب جا ٢٥°   ج جتا ٦٥°   د جتا ٢٤٥°

٨) إذا علمت أن جتا ٧٧° = ب، فعبّر عن قيمة كل ممّا يأتي بدلالة ب:

أ جا ٧٧°   ب ظا ١٣°   ج جا ٢٥٧°   د جتا ٣٤٧°

١٠) إذا علمت أن ظا ا = $-\frac{٢}{٣}$، جتا ب = $\frac{٢}{٤}$، حيث تقع الزاويتان ا، ب في الربع نفسه، فأوجِد قيمة كل ممّا يأتي:

أ جا ا   ب جتا ا   ج جا ب   د ظا ب

الإبداع هو أن يخرج الإنسان من وحل الفشل إلى إنسان يضرب به المثل

الرياضيات المتقدمة

New ٢٠٢٤

فصل دراسي أول　　سلطنة عمان

صف ١٢

الوحدة الثانية

حساب المثلثات

الدرس الرابع

التمثيل البياني للدوال المثلثية

إعداد : نصر حسنين

ت : ٧١٧٢٤١٢٥

قد التحدي ٢٠٢٤

الكلام ده مهم

دائرة الوحدة

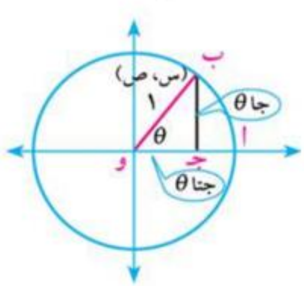
في أي نظام إحداثي متعامد تسمى الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها يساوي وحدة الأطوال بدائرة الوحدة.

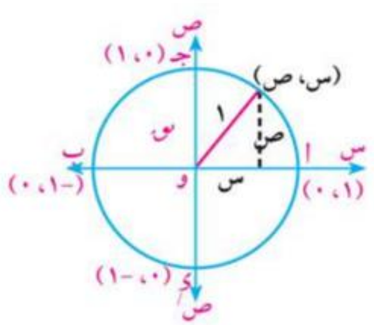
★ إذا كان (س، ص) هما إحداثيا أي نقطة على دائرة الوحدة فإن:

س ∈ [−١، ١] ، ص ∈ [−١، ١].

حيث $س^٢ + ص^٢ = ١$　　نظرية فيثاغورث

جتا θ = س　　جا θ = ص　　ظا θ = $\frac{ص}{س}$





لاحظ أن: يكتب الزوج المرتب (س، ص) لأي نقطة على دائرة الوحدة بالصورة (جتا θ، جا θ)

ظا θ = $\frac{جا \theta}{جتا \theta}$

يلا نطبق اللي اتعلمناه

(١) إذا كان θ قياس زاوية فى الوضع القياسي و ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة فى النقطة $\left(\frac{١}{٢}، \frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)$ فإن جا θ تساوى:

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ج) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د) $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

(٢) إذا كانت جا $\theta = \frac{١}{٢}$ حيث θ زاوية حادة فإن θ تساوى

أ) ٣٠° ب) ٤٥° ج) ٦٠° د) ٩٠°

(٣) إذا كانت جا $\theta = -١$، جتا $\theta = ٠$ فإن θ تساوى

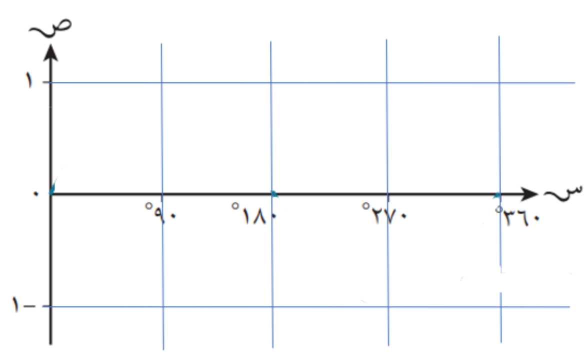
أ) $\frac{\pi}{٢}$ ب) π ج) $\frac{٣\pi}{٢}$ د) ٢π

التمثيلان البيانيان لـ ص = جا س، ص = جتا س

يبيّن الرسم الآتي التمثيل البياني لـ جا س، حيث ٠° ⩽ س ⩽ ٣٦٠°:

جا س

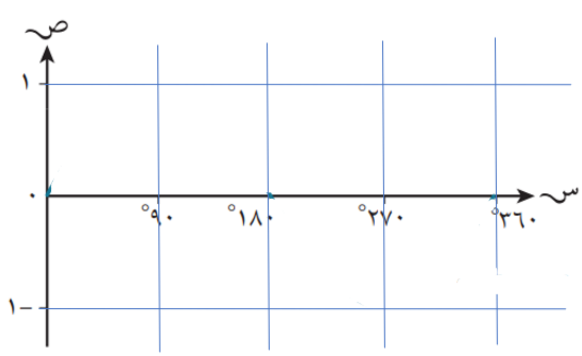
س	جا س



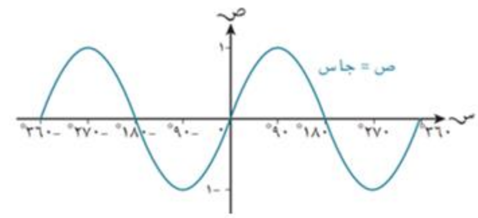
يبيّن الرسم الآتي التمثيل البياني لـ جتا س حيث ٠° ⩽ س ⩽ ٣٦٠°:

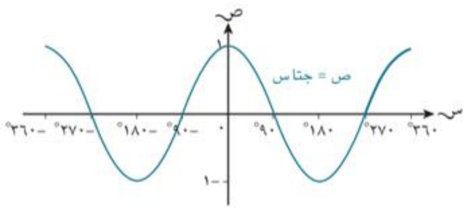
جتا س

س	جتا س



يمكن للتمثيلَين البيانيَّين لـ ص = جا س، ص = جتا س أن يستمرا لأكثر من دورة واحدة:





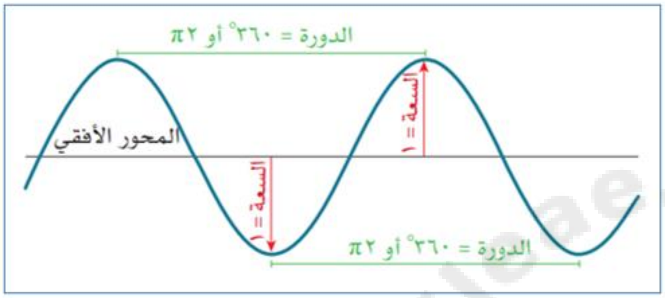
الخواص المشتركة الدالتين

المجال: مجموعة الأعداد الحقيقية

المدى: -١ ≥ ص ≥ ١

سعة كل دالة من الدالتَين تساوي ١

دورة كل دالة من الدالتَين ٣٦٠° أو ٢π



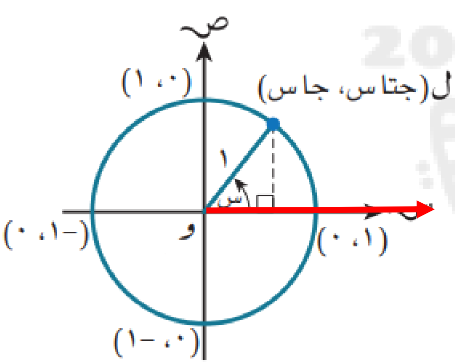
التمثيل البياني لـ ص = ظا س

ظا س ≡ $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$

مُساعَدة

لاحظ أن ميل $\overline{\text{و ل}}$ هو ظل الزاوية التي تصنعها $\overline{\text{و ل}}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

س = ٠°	س = ٩٠°	س = ١٨٠°	س = ٢٧٠°	س = ٣٦٠°
أفقي ←	رأسي ←	أفقي ←	رأسي ←	أفقي
الميل = ٠ ←	الميل غير معرّف ←	الميل = ٠ ←	الميل غير معرّف ←	الميل = ٠



س	ظا س

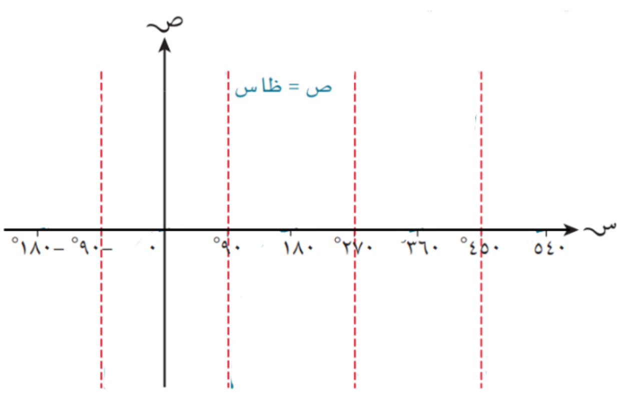
بالنسبة إلى دالة الظل:

المجال: كل الأعداد الحقيقية باستثناء المضاعفات الفردية لـ ٩٠°

المدى: كل الأعداد الحقيقية

دورة دالة الظل تكون كل ١٨٠° (أو π).

السعة غير معرّفة



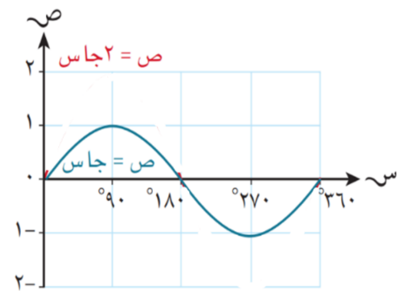
التحويلات الهندسية للدوال المثلثية

ملاحظة: تنطبق جميع التحويلات الهندسية الخاصة بدالة الجيب على دالة جيب التمام.

تُلخص التحويلات الهندسية للتمثيلات البيانية للدوال ص = جاس، ص = جتاس،

ص = جاس،

تمدد معامله أ باتجاه موازٍ للمحور الصادي

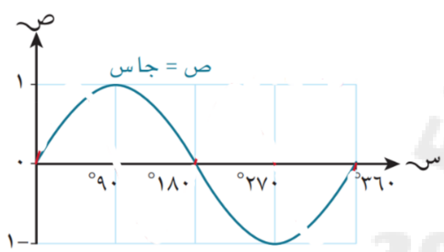


التمثيل البياني للدالة ص = ٢جاس هو تمدد لبيان الدالة ص = جاس، معامله ٢ باتجاه موازٍ للمحور الصادي.

سعة الدالة ص = ٢جاس تساوي ٢، ودورتها تساوي ٣٦٠°

س	٠	٩٠	١٨٠	٢٧٠	٣٦٠	تمدد
٢جاس	٠	٢	٠	-٢	٠	رأسي

تمدد معامله $\frac{1}{أ}$ باتجاه موازٍ للمحور السيني

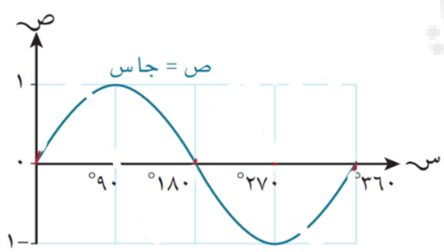


التمثيل البياني للدالة ص = جا ٢س هو تمدد لبيان الدالة ص = جاس، معامله $\frac{1}{2}$ باتجاه موازٍ للمحور السيني.

سعة الدالة ص = جا ٢س تساوي ١، ودورتها تساوي ١٨٠°

س	٠	٤٥	٩٠	١٣٥	١٨٠	تمدد
جا٢س	٠	١	٠	-١	٠	أفقي

انسحاب بالمتجه $\binom{\text{٠}}{\text{أ}}$

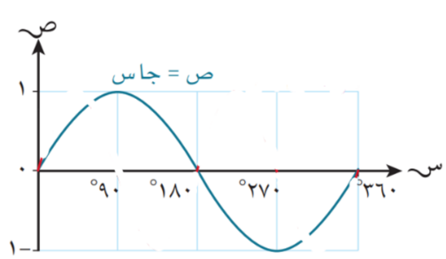


التمثيل البياني للدالة ص = ١ + جاس هو انسحاب لبيان الدالة ص = جاس بالمتجه $\binom{\text{٠}}{\text{١}}$.

سعة الدالة ص = ١ + جاس تساوي ١، ودورتها ٣٦٠°

س	٠	٩٠	١٨٠	٢٧٠	٣٦٠	انسحاب
١+جاس	١	٢	١	٠	١	لأعلى

انسحاب بالمتجه $\binom{-\text{جـ}°}{\text{٠}}$



التمثيل البياني للدالة ص = جا(س + ٩٠°)

هو انسحاب لبيان الدالة ص = جاس بالمتجه $\binom{-\text{٩٠}°}{\text{٠}}$.

سعة الدالة ص = جا(س + ٩٠°) تساوي ١، ودورتها ٣٦٠°

س	٠	٩٠	١٨٠	٢٧٠	٣٦٠	انسحاب
جا(س+٩٠)	١	٠	-١	٠	١	لليسار

ملحوظة هامة

- التمدد الموازي للمحور الرأسي يؤثر على سعة دالة الجيب، ودالة جيب التمام فقط.
- التمدد الموازي للمحور الأفقي يؤثر على دورة دالة الجيب، ودالة جيب التمام، ودالة الظل.
- لا يؤثر الانسحاب على السعة أو الدورة لأيّ من هذه الدوال المثلثيّة.
- نعرف في الدالتين الدوريتين ص = أ جا ب (س + جـ°) + ك، ص = أ جتا ب (س + جـ°) + ك أن:

١) السعة = |أ|

٢) الدورة = $\frac{٢\pi}{|ب|}$

٣) المدى هو: −أ + ك ⩽ ص ⩽ أ + ك، حيث −أ + ك هي أقل قيمة (القيمة الصغرى)،
أ + ك هي أعلى قيمة (القيمة العظمى).

نجد من الجزئية (٣) أن السعة = $\frac{\text{أعلى قيمة} - \text{أدنى قيمة}}{٢} = \frac{\text{أ} + \text{ك} - (-\text{أ} + \text{ك})}{٢} = \text{أ}$

يلا نطبق اللي اتعلمناه

تمارين ٢-٤

كتاب النشاط صـ ٣٨

١) سمّ السعة والدورة لكل دالة من الدوال الآتية:

أ د(س) = ٣ جا (٤س)

ب د(س) = جتا $\left(\frac{\text{س}}{٢}\right)$

جـ د(س) = جتا (٣س)

د د(س) = ٢جا (π س)

مثـــال ١١

كتاب الطالب صـ ٦٣

إذا كانت د (س) = ٣جتا (٢س)، حيث ٠° ⩽ س ⩽ ٣٦٠°

أ أوجِد دورة، وسعة الدالة د (س).

ب اكتب إحداثيات أعلى وأدنى نقاط للدالة ص = د (س).

ج ارسم بيان الدالة ص = د (س).

د استخدم إجابتك للجزئية (ج) لترسم بيان الدالة د (س) = ١ + ٣جتا (٢س).

الحـــلّ:

أ الدورة = $\frac{٣٦٠°}{٢}$ = ١٨٠°

السعة = ٣

ب أعلى نقاط للدالة د (س) = ٣جتا(٢س) هي:

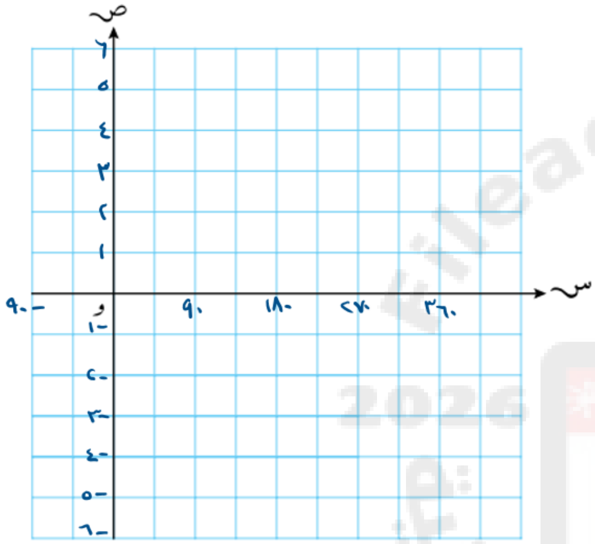
(٠°، ٣)، (١٨٠°، ٣)، (٣٦٠°، ٣)

وأدنى النقاط لهذه الدالة هي:

(٩٠°، −٣)، (٢٧٠°، −٣)

ج ارسم بيان الدالة ص = د (س).

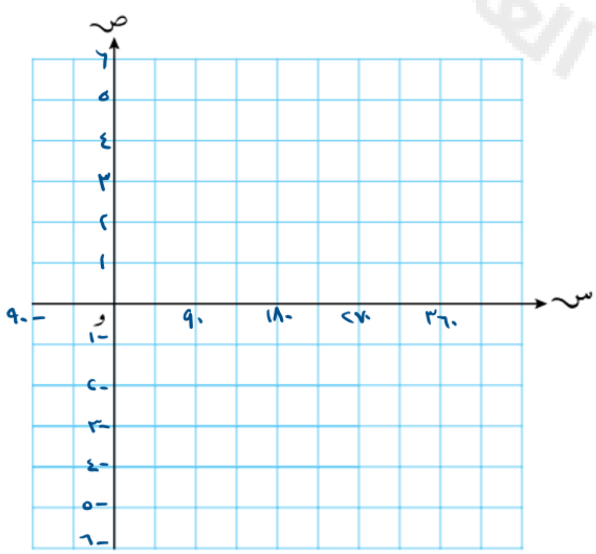
س	د (س) = ٣جتا (٢س)



د استخدم إجابتك للجزئية (ج)

لترسم بيان الدالة د (س) = ١ + ٣جتا (٢س).

التمثيل البياني للدالة ص = ١ + ٣جتا (٢س)
هو انسحاب لبيان الدالة ص = ٣جتا (٢س)
بالمتجه $\binom{٠}{١}$



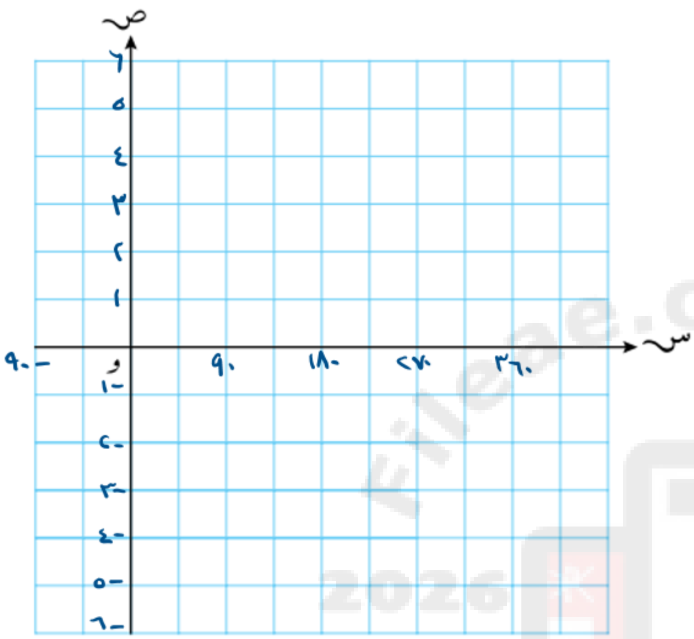
مثــال ١٢

كتاب الطالب صـ ٦٤

أ في المستوى الإحداثي نفسه، مثّل بيانيًا الدالتَين ص = جا (٢س)، ص = ١ + ٣جتا (٢س)، حيث ٠° ⩽ س ⩽ ٣٦٠°

ب حدد عدد حلول المعادلة جا (٢س) = ١ + ٣جتا (٢س)، حيث ٠° ⩽ س ⩽ ٣٦٠°

الحــلّ:



درب نفسك

كتاب الطالب صـ ٦٥

٦) أ ارسم على المستوى الإحداثي نفسه بيان الدالة ص = ٢جا س، وبيان الدالة ص = ٢ + جتا ٣س في الفترة ٠ ⩽ س ⩽ ٢π

ب حدد عدد حلول المعادلة ٢جا س = ٢ + جتا (٣س) في الفترة ٠ ⩽ س ⩽ ٢π

الواجب

١) اكتب دورة كل دالة من الدوال الآتية:

أ ص = جتا س ب ص = جا (٢س)

د ص = ١ + ٢جا (٣س) هـ ص = ظا (س − ٣٠°)

٢) اكتب سعة كل دالة من الدوال الآتية:

أ ص = جا س ب ص = ٥جتا (٢س)

د ص = ٢ − ٣جتا (٤س) هـ ص = ٤جا (٢س + ٦٠°)

٤) أ مثّل بيانيًا كل دالة من الدوال الآتية في الفترة ٠° ⩽ س ⩽ ٢π

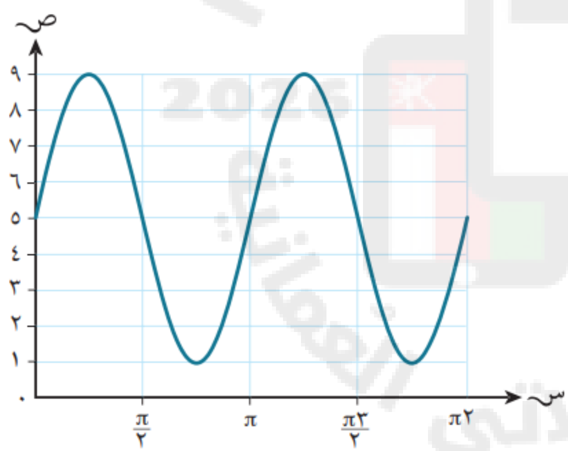
١) ص = ٢جا س ٢) ص = جتا $\left(\text{س} - \frac{\pi}{2}\right)$ ٣) ص = جا $\left(2\text{س} + \frac{\pi}{4}\right)$

ب اكتب إحداثيات أعلى وأدنى النقاط للتمثيل البياني للجزئية (أ (٣)).

٨) يبيّن الرسم المجاور جزءًا من بيان الدالة

ص = جـ + أ جا (ب س).

أوجِد قيم أ، ب، جـ.

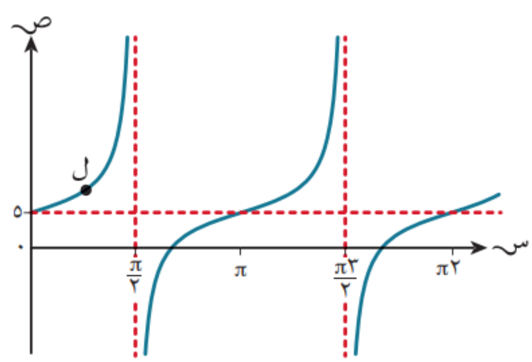


١١) يبيّن الرسم المجاور جزءًا من بيان الدالة

ص = جـ + أ ظا (ب س)،

الذي يمر بالنقطة ل $\left(\frac{\pi}{4}، 8\right)$.

أوجِد قيم أ، ب، جـ.



الإبداع هو أن يخرج الإنسان من وحل الفشل إلى إنسان يضرب به المثل

الرياضيات المتقدمة

New ٢٠٢٤

فصل دراسي أول سلطنة عمان

صف ١٢

الوحدة الثانية

حساب المثلثات

الدرس الخامس

الدوال المثلثية العكسية

إعداد : نصر حسنين

ت : ٧١٧٢٤١٢٥

ملحوظة هامة ١

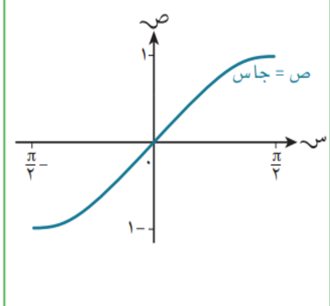
الدوال واحد إلى واحد فقط لها دوال عكسية. فإذا كانت د (س)، د$^{-1}$(س) دالتَين عكسيتَين، فإن التمثيل البياني للدالة د$^{-1}$(س) هو انعكاس للدالة د (س) حول المستقيم ص = س.

للدوال المثلثيّة العكسية Inverse trigonometric functions. الدوال ص = جا س، ص = جتا س، ص = ظا س هي دوال متعدد إلى واحد. إذا حددنا فترة من مجال كل منها، فيمكننا أن نجعل الدالة واحدًا إلى واحد، الأمر الذي يُمكّننا من تعريف دالتها العكسية.

ص = جاس		ص = جا$^{-1}$س
المجال: $-\frac{\pi}{2} \leqslant$ س $\leqslant \frac{\pi}{2}$	⟷	المجال: $-1 \leqslant$ س $\leqslant 1$
المدى: $-1 \leqslant$ جا س $\leqslant 1$		المدى: $-\frac{\pi}{2} \leqslant$ جا$^{-1}$س $\leqslant \frac{\pi}{2}$

٢-٥ الدوال المثلثيّة العكسية

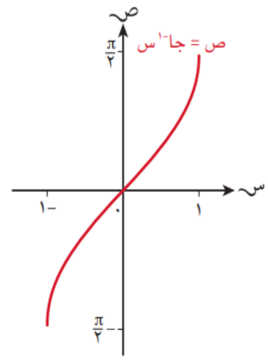
جا س



ص = جاس

المجال: $-\frac{\pi}{2} \leqslant$ س $\leqslant \frac{\pi}{2}$

المدى: $-1 \leqslant$ جا س $\leqslant 1$

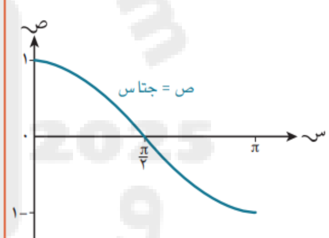


ص = جا$^{-1}$س

المجال: $-1 \leqslant$ س $\leqslant 1$

المدى: $-\frac{\pi}{2} \leqslant$ جا$^{-1}$س $\leqslant \frac{\pi}{2}$

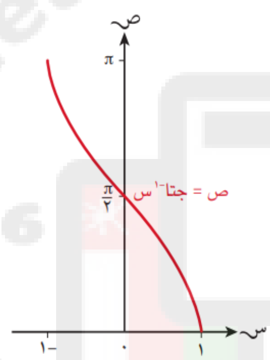
جتا س



ص = جتاس

المجال: $0 \leqslant$ س $\leqslant \pi$

المدى: $-1 \leqslant$ جتا س $\leqslant 1$

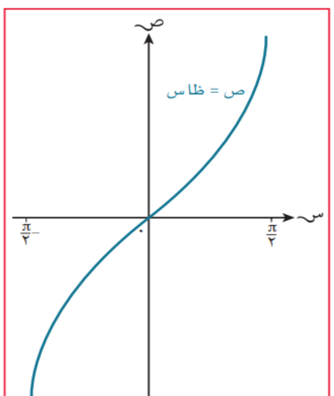


ص = جتا$^{-1}$س

المجال: $-1 \leqslant$ س $\leqslant 1$

المدى: $0 \leqslant$ جتا$^{-1}$س $\leqslant \pi$

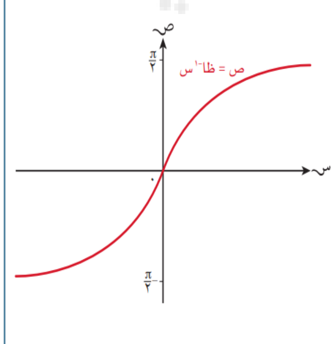
ظا س



ص = ظا س

المجال: $-\frac{\pi}{2} <$ س $< \frac{\pi}{2}$

المدى: ظا س $\in$ ح



ص = ظا$^{-1}$س

المجال: س $\in$ ح

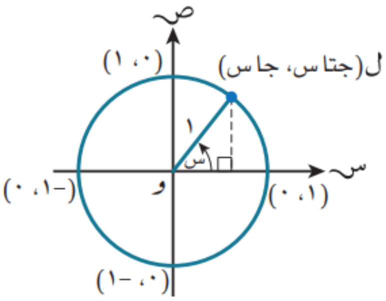
المدى: $-\frac{\pi}{2} <$ ظا$^{-1}$س $< \frac{\pi}{2}$

ملحوظات

ص = جاس	ص = جا$^{-1}$س

ص = جتاس	ص = جتا$^{-1}$س

ص = ظا س	ص = ظا$^{-1}$س



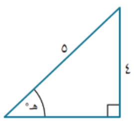
١) اكتب قيمة كل ممّا يأتي بالدرجات:

أ) جتا$^{-1}$ ١

الحل

ج) ظا$^{-1}$ $\sqrt{3}$

الحل



٢) إذا علمت أن هـ = جتا$^{-1}$ $\left(\frac{3}{5}\right)$، فأوجِد قيمة كل ممّا يأتي:

أ) جا^{2} هـ

الحل

ب) ظا^{2} هـ

الحل

كتاب النشاط صـ ٤٤

٣) أوجِد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

أ) جا (جا$^{-1}$ (٠,٥))

الحل

ب) جتا (جتا$^{-1}$ (−١))

الحل

٤) أوجِد كلًّا ممّا يأتي:

أ) جتا$^{-1}$(جتا $\frac{3\pi}{2}$)

ب) جا$^{-1}$(جا $\frac{13\pi}{6}$)

٥) أوجِد مجال ومدى كل دالة من الدوال الآتية:

أ) ص = ظا$^{-1}$ (٣س)

ب) ص = جتا$^{-1}$ (س) − ٢

٥) الدالة د (س) = ٤ − ٢جتا س معرّفة على المجال ٠ ⩽ س ⩽ π:

كتاب الطالب صـ ٧١

أ أوجِد مدى الدالة د (س)، وارسم بيان الدالة ص = د (س).

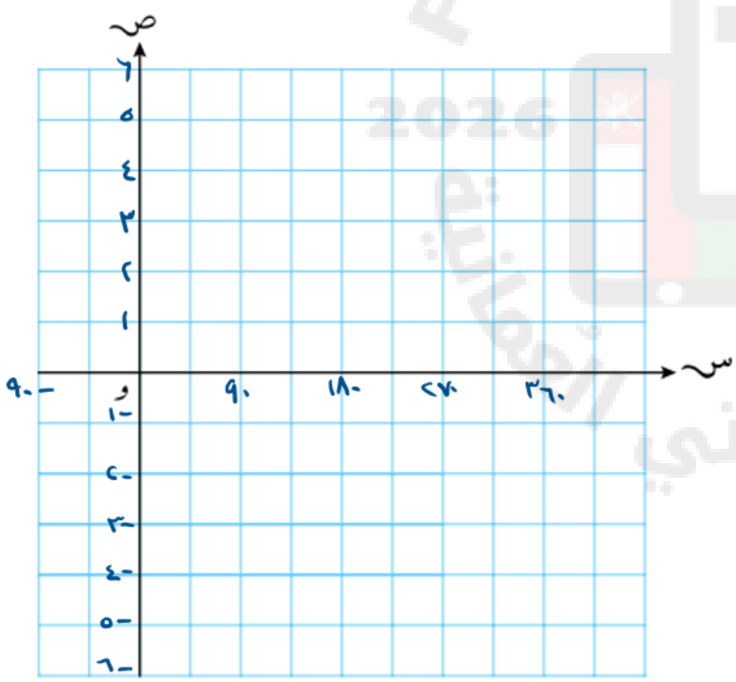
ب فسّر سبب وجود دالة عكسية للدالة د (س)، وأوجِد د$^{-1}$(س).

ج ارسم بيان الدالة ص = د$^{-1}$ (س) في المستوى الإحداثي نفسه للدالة في الجزئية (أ).

الحل

س			
د (س) = ٤ − ٢جتا س			

س			
ص = د$^{-1}$ (س)			



كتاب الطالب صـ ٧٢

٦) الدالة د (س) = ٥ − ٢جا س معرّفة على المجال $\frac{\pi}{2} \leqslant$ س $\leqslant$ ر:

أ أوجِد أكبر قيمة لـِ ر بحيث تكون للدالة د (س) دالة عكسية.

ب عند قيمة ر في الجزئية (أ)، أوجِد د$^{-1}$(س)، ثم حدد مجالها.

الحل

٧) إذا علمت أن الدالة د (س) = −٥ + ٤جتا$\left(\frac{\text{س}}{2}\right)$ معرّفة على المجال ٠ $\leqslant$ س $\leqslant$ ٢π، فأوجِد:

أ مدى الدالة د (س).

ب د$^{-1}$(س)، وحدد مداها.

الحل

درب نفسك

كتاب النشاط صـ ٤٣

١) اكتب بالدرجات زاوية الأساس لكل ممّا يأتي:

أ جتا$^{-1}$ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ب ظا$^{-1}$ ١

٢) اكتب زاوية الأساس لكل ممّا يأتي بدلالة π:

أ جتا$^{-1}$ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ب جا$^{-1}$ (−٠,٥)

٤) أوجِد كلًّا ممّا يأتي:

أ جتا$^{-1}$(جتا $\frac{3\pi}{2}$) ب جا$^{-1}$(جا $\frac{13\pi}{6}$)

٨) الدالة د(س) = ٥ − ٢جا س، حيث $\frac{\pi}{2}$ ≥ س ≥ ك

أ أوجِد أكبر قيمة لـ ك عندما تكون للدالة د(س) دالة عكسية.

ب مستخدمًا الإجابة في الجزئية (أ)، أوجِد د$^{-1}$(س) واذكر مجالها.

الواجب

كتاب النشاط صـ ٤٥

٦) إذا علمت أن الدالة د(س) = ٣ + ٢جا س معرّفة في المجال −$\frac{\pi}{2}$ ≥ س ≥ $\frac{\pi}{2}$، فأوجِد:

أ مدى الدالة د(س). ب د$^{-1}$(س).

٧) إذا علمت أن الدالة د(س) = ٤ − ٣ جتا س، حيث ٠ ≥ س ≥ π، فأوجِد مدى الدالة د(س).

الرياضيات المتقدمة

فصل دراسي أول　　سلطنة عمان

New ٢٠٢٤

صف ١٢

الوحدة الثانية

حساب المثلثات

الدرس السابع

المتطابقات المثلثية

إعداد : نصر حسنين

ت : ٧١٧٢٤١٢٥

قد التحدي ٢٠٢٤

بسطتهالك

تمهيد ١

المتطابقة المثلثية Trigonometric identity هي علاقة تتحقق بجميع القيم الحقيقية للمتغير،
أما المعادلة المثلثية فهي علاقة تتحقق ببعض القيم الحقيقية للمتغير.
فمثلًا: تُسمى س + س = ٢س **متطابقة identity** لأنها صحيحة لكل قيم س.
عندما نكتب متطابقة، غالبًا ما نستبدل الرمز = بالرمز ≡.

> **مُساعَدة**
> كل متطابقة هي معادلة، وليس كل معادلة هي متطابقة.

تمهيد ٢

توجد متطابقتان مثلثيتان شائعتان، تستخدم في تبسيط العبارات برهنة المتطابقة

$$\text{جا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س} \equiv 1 \quad , \quad \text{ظا س} \equiv \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$$

يلا نطبق اللي اتعلمناه

تمارين ٢-٧

كتاب النشاط صـ ٥٠

١) أوجِد قيمة كل ممّا يأتي:

أ ٣جا^{٢} (س) + ٣جتا^{٢} (س)

ب جا^{٢} (٥س) + جتا^{٢} (٥س)

ج ‎-٢جتا^{٢} (٢س) – ٢جا^{٢} (٢س)

د $\frac{٣}{٢جا^{٢}(٤س)} - \frac{٣}{٢ظا^{٢}(٤س)}$

٢) أ اكتب ٣جا^{٢} س + ٤جتا^{٢} س بدلالة جا س.

ب اكتب جتا^{٢} س – جا^{٢} س بدلالة جتا س.

درب نفسك

كتاب الطالب صـ ٨٥

١) اكتب العبارة ٢جا^{٢} س – ٧جتا^{٢} س + ٤ بدلالة جا س.

الاثباتات

كتاب الطالب صـ ٨٥

٢) أثبت كل متطابقة من المتطابقات الآتية:

أ جتا س × ظا س ≡ جا س

ب $\frac{١ - جتا^{٢} س}{جا س × جتا س}$ ≡ ظا س

ج $\frac{جتا^{٢} س}{(١ - جا س)}$ ≡ ١ + جا س

د $\frac{١ + جا س - جا^{٢} س}{جتا س}$ ≡ جتا س + ظا س

كتاب الطالب صـ ٨٦

٨) أ اكتب العبارة ٧جا^{٢}س + ٤جتا^{٢}س في صورة أ + ب جا^{٢}س، حيث أ، ب عددان ثابتان.

ب اذكر مدى الدالة د (س) = ٧جا^{٢}س + ٤جتا^{٢}س، حيث ٠ ⩽ س ⩽ ٢π.

٥) أثبت كل متطابقة من المتطابقات الآتية:

كتاب الطالب صـ ٨٦

أ $\frac{\text{جتا}^2\text{س} - \text{جا}^2\text{س}}{\text{جتا س} - \text{جا س}} \equiv \text{جتا س} + \text{جا س}$

كتاب الطالب صـ ٨٦

ب $\text{جا}^4\text{س} - \text{جتا}^4\text{س} \equiv ٢\text{جا}^2\text{س} - ١$

٣) أثبت كل متطابقة من المتطابقات الآتية:

كتاب النشاط صـ ٥٠

٢) $(٢\text{جا س} - \text{جتا س})^2 + (\text{جا س} + ٢\text{جتا س})^2 \equiv ٥$

الرياضيات المتقدمة ١٢

بشطتهالك

أستاذ : نصر حسنين

هـ $\frac{\text{جا س} - \text{جتا س}}{\text{جا س} + \text{جتا س}} \equiv \frac{\text{ظا س} - ١}{\text{ظا س} + ١}$

كتاب الطالب صـ ٨٦

و $\left(\frac{١}{\text{جا س}} - \frac{١}{\text{ظا س}}\right)^{٢} \equiv \frac{١ - \text{جتا س}}{١ + \text{جتا س}}$

كتاب الطالب صـ ٨٦

٢) أثبت كل متطابقة من المتطابقات الآتية:

هـ $\frac{\text{جتا}^2 \text{س} - \text{جا}^2 \text{س}}{\text{جتا س} + \text{جا س}} + \text{جا س} \equiv \text{جتا س}$

و $\text{جتا}^4 \text{س} + \text{جا}^2 \text{س} \times \text{جتا}^2 \text{س} \equiv \text{جتا}^2 \text{س}$

الواجب

٣) أثبت كل متطابقة من المتطابقات الآتية:

كتاب النشاط صـ ٥٠

أ ١) $(\text{جا س} + \text{جتا س})^{٢} + (\text{جا س} - \text{جتا س})^{٢} \equiv ٢$

---

٤) اكتب كلًّا ممّا يأتي بدلالة جتا س:

كتاب النشاط صـ ٥١

أ $٣ - ٢\text{ظا}^{٢}\text{س}$

ب $\dfrac{١}{١ + \text{ظا}^{٢}\text{س}}$

---

٥) بسّط العبارة $\left(\dfrac{١}{\text{جا س}} - \dfrac{١}{\text{ظا س}}\right)\left(\dfrac{١}{\text{جا س}} + \dfrac{١}{\text{ظا س}}\right)$

كتاب النشاط صـ ٥١

---

٦) بيّن أن $٢\text{ظا}^{٢}(٢\text{س}) - \dfrac{٢}{\text{جتا}^{٢}(٢\text{س})} = \text{ك}$ لكل قيم س، وأوجد قيمة ك.

كتاب النشاط صـ ٥١

---

٧) أثبت المتطابقة: $\dfrac{١}{\text{جتا هـ}} - \text{جتا هـ} \equiv \text{جا هـ} \times \text{ظا هـ}$.

كتاب النشاط صـ ٥١

---

٨) استخدم المتطابقتَين: $\text{ظا هـ} \equiv \dfrac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}}$، حيث جتا هـ $\neq ٠$، $\text{جتا}^{٢}\text{هـ} + \text{جا}^{٢}\text{هـ} \equiv ١$ لتبيّن كلًّا ممّا يأتي:

كتاب النشاط صـ ٥٢

أ $\dfrac{١}{\text{جا هـ}} - \dfrac{١}{\text{ظا هـ}} \equiv \dfrac{١ - \text{جتا هـ}}{\text{جا هـ}}$

ب $\dfrac{\text{جا}^{٢}\text{هـ}}{١ - \text{جتا هـ}} \equiv ١ + \text{جتا هـ}$

ج $\dfrac{١}{\text{جتا هـ}} + \text{ظا هـ} \equiv \dfrac{\text{جتا هـ}}{١ - \text{جا هـ}}$

د $\dfrac{\text{ظا هـ} \times \text{جا هـ}}{١ - \text{جتا هـ}} \equiv ١ + \dfrac{١}{\text{جتا هـ}}$

كتاب الطالب صـ ٨٦

٩) أ اكتب العبارة $٤\text{جا هـ} - \text{جتا}^{٢}\text{هـ}$ في صورة $(\text{جا هـ} + \text{أ})^{٢} + \text{ب}$، حيث أ، ب عددان ثابتان.

ب اذكر القيمة العظمى، والقيمة الصغرى لـ $٤\text{جا هـ} - \text{جتا}^{٢}\text{هـ}$، حيث $٠ \leqslant \text{هـ} \leqslant ٢\pi$.

---

١٠) إذا علمت أن $\text{أ} = \dfrac{١ - \text{جا هـ}}{٢\text{جتا هـ}}$:

كتاب الطالب صـ ٨٦

أ بيّن أن $\dfrac{١}{\text{أ}} = \dfrac{٢(١ + \text{جا هـ})}{\text{جتا هـ}}$

ب أوجِد قيمتَي كل من جا هـ، جتا هـ بدلالة أ.

الدرس الثامن

المزيد من المعادلات المثلثية

تمهيد

يستخدم هذا الدرس المتطابقات المثلثيّة للمساعدة على حلّ معادلات مثلثية أكثر عمقًا.

توجد متطابقتان مثلثيتان شائعتان، تستخدم في تبسيط العبارات

$$جا^{2}س + جتا^{2}س \equiv ١ \quad ، \quad ظا س \equiv \frac{جا س}{جتا س}$$

يلا نطبق اللي اتعلمناه

تمارين ٢-٨ كتاب النشاط صـ ٥٣

١) استخدم المتطابقة $ظا س \equiv \frac{جا س}{جتا س}$ لتحل كل معادلة من المعادلات الآتية في الفترة $°٠ \leqslant س \leqslant °١٨٠$:

ب ١) ٣جا س = ٢ جتا س ٢) ٣جا س = ٥جتا س

تمارين ٢-٨ كتاب النشاط صـ ٥٣

٢) استخدم المتطابقة $جا^{2}س + جتا^{2}س \equiv ١$ لتحل كل معادلة من المعادلات الآتية في الفترة $°٠ \leqslant س \leqslant °٣٦٠$:

ب ١) $٧جا^{2}س + ٣جتا^{2}س = ٥$ ٢) $جا^{2}س + ٤جتا^{2}س = ٢$

الرياضيات المتقدمة ١٢

بسطتهالك

أستاذ : نصر حسنين

تمارين ٢-٨

كتاب الطالب صـ ٨٩

١) أ بيّن أنه يمكن كتابة المعادلة جتا هـ + جا هـ = ٥جتا هـ في صورة ظا هـ = ك، حيث ك عدد ثابت.

ب حلّ المعادلة جتا هـ + جا هـ = ٥جتا هـ، حيث ٠° ⩽ هـ ⩽ ٣٦٠°

مثـــال ٢٤

كتاب الطالب صـ ٨٧

أ برهن المتطابقة $\frac{١ - ظا^٢ هـ}{١ + ظا^٢ هـ} \equiv ٢جتا^٢ هـ - ١$

ب حلّ المعادلة $\frac{١ - ظا^٢ هـ}{١ + ظا^٢ هـ} = ٥جتا هـ - ٣$، حيث ٠° ⩽ هـ ⩽ ٣٦٠°

الحـــلّ:

٤) أ بيّن أنه يمكن كتابة المعادلة ٤جا^{٤}هـ + ١٤ = ١٩جتا^{٢}هـ في صورة ٤س^{٢} + ١٩س − ٥ = ٠، حيث س = جا^{٢}هـ.

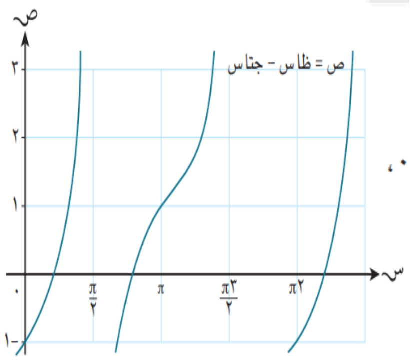
ب حل المعادلة ٤جا^{٤}هـ + ١٤ = ١٩جتا^{٢}هـ، حيث ٠ ⩽ هـ ⩽ ٢π

كتاب الطالب صـ ٨٩

مثـــال ٢٥

كتاب الطالب صـ ٨٨

يبيّن الرسم الآتي جزءًا من بيان الدالة ص = ظا س − جتا س



أ بيّن أنه يمكن كتابة المعادلة ظا س − جتا س = ٠ في صورة معادلة تربيعية بدلالة جا س.

ب استخدم المعادلة التربيعية التي وجدتها في الجزئية (أ) لتحلّ المعادلة ظا س − جتا س = ٠، حيث ٠ ⩽ س ⩽ ٢π

كتاب الطالب صـ ٨٩

٧) أ برهن المتطابقة $\frac{\text{جا هـ}}{\text{١ + جتا هـ}} + \frac{\text{١ + جتا هـ}}{\text{جا هـ}} \equiv \frac{\text{٢}}{\text{جا هـ}}$

ب حل المعادلة $\frac{\text{جا هـ}}{\text{١ + جتا هـ}} + \frac{\text{١ + جتا هـ}}{\text{جا هـ}} = \text{١ + ٣ جا هـ}$، حيث $0 \leqslant \text{هـ} \leqslant 2\pi$

٩) أ برهن المتطابقة $\frac{١}{١ + جا هـ} + \frac{١}{١ - جا هـ} \equiv \frac{٢}{جتا^{٢} هـ}$

ب حل المعادلة جتا هـ $\left(\frac{١}{١ + جا هـ} + \frac{١}{١ - جا هـ}\right) = ٥$، حيث $°٠ \leqslant$ هـ $\leqslant °٣٦٠$

و جتا^{٤} س + جا^{٢} س × جتا^{٢} س ≡ جتا^{٢} س

الواجب

كتاب النشاط صـ ٥٣

٣) أوجِد قيم س في الفترة $٠ < س < ٢\pi$ عندما جا (٢س) + جتا (٢س) = ٠

كتاب النشاط صـ ٥٤

٥) حل المعادلة جا س × ظا س = جا^{٢}س، حيث $-١٨٠° \leqslant س \leqslant ١٨٠°$

كتاب النشاط صـ ٥٤

٧) حل المعادلة ٢جتا^{٢} ن − جا ن − ١ = ٠، حيث $٠° \leqslant ن \leqslant ٣٦٠°$

٩) أ إذا علمت أن ٦جا^{٢}س + جتا س = ٤، فأوجِد قيم جتا س.

ب حل المعادلة ٦جا^{٢}س + جتا س = ٤، حيث $٠° \leqslant س \leqslant ٣٦٠°$ إلى أقرب ٣ أرقام معنوية.

كتاب النشاط صـ ٥٤

★ ١٠) أ بيّن أن المعادلة ٢جا^{٢}س − ٣جا س × جتا س + جتا^{٢}س = ٠ يمكن كتابتها في صورة ٢ ظا^{٢}س − ٣ ظا س + ١ = ٠

ب حل المعادلة ٢جا^{٢}س − ٣جا س × جتا س + جتا^{٢}س = ٠ مبيّنًا كل الحلول عندما $-١٨٠° < س < ١٨٠°$

كتاب الطالب صـ ٨٩

١٠) أ برهن المتطابقة $\left(\frac{١}{جا هـ} + \frac{١}{ظا هـ}\right)^{٢} \equiv \frac{١ + جتا هـ}{١ - جتا هـ}$

ب حل المعادلة $\left(\frac{١}{جا هـ} + \frac{١}{ظا هـ}\right)^{٢} = ٢$، حيث $٠° \leqslant هـ \leqslant ٣٦٠°$

كتاب الطالب صـ ٨٦

١١) أ برهن المتطابقة جتا^{٤} هـ − جا^{٤} هـ ≡ ٢جتا^{٢} هـ − ١

ب حل المعادلة جتا^{٤} هـ − جا^{٤} هـ = $\frac{١}{٢}$، حيث $٠° \leqslant هـ \leqslant ٣٦٠°$