حل أسئلة الوحدة السادسة التكامل كعملية عكسية للتفاضل من سلسلة الفكر

الوحدة السادسة
التكامل

إعداد الأستاذ
علاء فكري محمد
ت/ 92449057

٦-١ التكامل كعملية عكسية للتفاضل

ملاحظات

التكامل غير المحدد

نتيجة (١)

إذا كانت $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \text{س}^{\text{ن}}$ فإن ص = $\frac{١}{\text{ن} + ١}\,\text{س}^{\text{ن}+١}$ + ج حيث ج عدد ثابت ، ن ≠ − ١

,, أضف ١ إلى القوة ن ، ثم إقسم على القوة الجديدة وأضف الثابت ج ،،

نتيجة (٢) / $\int \text{س}^{\text{ن}}\,\text{ء س} = \frac{١}{\text{ن} + ١}\,\text{س}^{\text{ن}+١}$ + ج حيث ج ثابت ، ن ≠ − ١

نتيجة (٣) / $\int$ ك د(س) ء س = ك $\int$ د(س) . ء س حيث ك عدد ثابت

نتيجة (٤) / $\int$ (د(س) ± هـ (س)) ء س = $\int$ د(س) . ء س ± $\int$ هـ(س) . ء س

السؤال الأول

(١) أوجد د(س) لكل مما يأتي :

أ

$\text{د}'(\text{س}) = ٤\text{س}^{٣}$

الإجابة

$\text{د}(\text{س}) = \frac{٤\text{س}^{٤}}{٤} + \text{ج}$

$\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٤} + \text{ج}$

ب

$\text{د}'(\text{س}) = ٦\text{س}^{٥}$

الإجابة

$\text{د}(\text{س}) = \frac{٦\text{س}^{٦}}{٦} + \text{ج}$

$\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٦} + \text{ج}$

ج

$\text{د}'(\text{س}) = ٢\text{س}$

الإجابة

$\text{د}(\text{س}) = \frac{٢\text{س}^{٢}}{٢} + \text{ج}$

$\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + \text{ج}$

د

$\text{د}'(\text{س}) = ٣\text{س}^{٢} + ٥\text{س}^{٤}$

الإجابة

$\text{د}(\text{س}) = \frac{٣\text{س}^{٣}}{٣} + \frac{٥\text{س}^{٥}}{٥} + \text{ج}$

$\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٣} + \text{س}^{٥} + \text{ج}$

هـ

$\text{د}'(\text{س}) = ١٠\text{س}^{٩} - ٨\text{س}^{٧} - ١$

الإجابة

$\text{د}(\text{س}) = \frac{١٠\text{س}^{١٠}}{١٠} - \frac{٨\text{س}^{٨}}{٨} - \text{س} + \text{ج}$

$\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{١٠} - \text{س}^{٨} - \text{س} + \text{ج}$

و

$\text{د}'(\text{س}) = -٧\text{س}^{٦} + ٣\text{س}^{٢} + ١$

الإجابة

$\text{د}(\text{س}) = \frac{-٧\text{س}^{٧}}{٧} + \frac{٣\text{س}^{٣}}{٣} + \text{س} + \text{ج}$

$\text{د}(\text{س}) = -\text{س}^{٧} + \text{س}^{٣} + \text{س} + \text{ج}$

السؤال الثانى

أ-١ $\int \text{٥ ء س}$

الإجابة

$= \text{٥س} + \text{جـ}$

أ-٢ $\int \text{س}^{\frac{١}{٣}} \text{ ء س}$

الإجابة

$= \frac{\text{٣س}^{\frac{٤}{٣}}}{\text{٤}} + \text{جـ}$

ب-١ $\int \text{٥ س}^{\frac{٢}{٣}} \text{ ء س}$

الإجابة

$= \frac{\text{٣} \times \text{٥س}^{\frac{٥}{٣}}}{\text{٥}} + \text{جـ}$

$= \text{٣س}^{\frac{٥}{٣}} + \text{جـ}$

ب-٢ $\int \text{١٤س}^{\frac{٣}{٤}} \text{ ء س}$

الإجابة

$= \frac{\text{٤} \times \text{١٤س}^{\frac{٧}{٤}}}{\text{٧}} + \text{جـ}$

$= \text{٨س}^{\frac{٧}{٤}} + \text{جـ}$

جـ-١ $\int \frac{\text{٥}}{\text{٤}} \text{س}^{\frac{١}{٤}} \text{ ء س}$

الإجابة

$= \frac{\text{٤} \times \text{٥ س}^{\frac{٥}{٤}}}{\text{٤} \times \text{٥}} + \text{جـ}$

$= \text{س}^{\frac{٥}{٤}} + \text{جـ}$

جـ-٢ $\int -\frac{\text{٣}}{\text{٢}} \text{س}^{\frac{١}{٢}} \text{ ء س}$

الإجابة

$= \frac{-\text{٣} \times \text{٢س}^{\frac{٣}{٢}}}{\text{٢} \times \text{٣}} + \text{جـ}$

$= -\text{س}^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$

د-١

$$\int -\frac{٧س^{\frac{٤}{٣}}}{٦} \, ء س$$

الإجابة

$$= \frac{-٣ \times ٧ \, س^{\frac{٧}{٣}}}{٦ \times ٧} + ج$$

$$= \frac{-س^{\frac{٧}{٣}}}{٢} + ج$$

د-٢

$$\int \frac{١٤س^{\frac{٢}{٥}}}{١٥} \, ء س$$

الإجابة

$$= \frac{٥ \times ١٤ \, س^{\frac{٧}{٥}}}{١٥ \times ٧} + ج$$

$$= \frac{٢ \, س^{\frac{٧}{٥}}}{٣} + ج$$

هـ-١

$$\int (٥س - ٧س^{\frac{٥}{٢}}) \, ء س$$

الإجابة

$$= \frac{٥ \, س^{٢}}{٢} - \frac{٢ \times ٧س^{\frac{٧}{٢}}}{٧} + ج$$

$$= \frac{٥}{٢} س^{٢} - ٢س^{\frac{٧}{٢}} + ج$$

هـ-٢

$$\int (٦ + \frac{س}{٣} - ١٢س^{\frac{١}{٢}}) \, ء س$$

الإجابة

$$= ٦س + \frac{س^{٢}}{٦} - \frac{٢ \times ١٢ \, س^{٢}}{٣} + ج$$

$$= ٦س + \frac{س^{٢}}{٦} - ٨س^{\frac{٣}{٢}} + ج$$

و-١

$$\int س^{-٢} \, ء س$$

الإجابة

$$= \frac{س^{-١}}{-١} + ج = -\frac{١}{س} + ج$$

و-٢

$$\int س^{-٣} \, ء س$$

الإجابة

$$= \frac{س^{-٢}}{-٢} + ج = -\frac{١}{٢س^{٢}} + ج$$

ز-١

$$\int \text{س}^{-\frac{1}{3}} \, \text{ءس}$$

الإجابة

$$= \frac{\text{٣س}^{\frac{2}{3}}}{\text{٢}} + \text{جـ}$$

ز-٢

$$\int \text{س}^{-\frac{1}{4}} \, \text{ءس}$$

الإجابة

$$= \frac{\text{٤س}^{\frac{3}{4}}}{\text{٣}} + \text{جـ}$$

ح-١

$$\int -\text{٤س}^{-\frac{2}{3}} \, \text{ءس}$$

الإجابة

$$= \frac{\text{٣} \times -\text{٤س}^{\frac{1}{3}}}{\text{١}} + \text{جـ}$$

$$= -\text{١٢ س}^{\frac{1}{3}} + \text{جـ}$$

ح-٢

$$\int -\text{٥س}^{-\frac{3}{2}} \, \text{ءس}$$

الإجابة

$$= \frac{\text{٢} \times -\text{٥س}^{\frac{-1}{2}}}{-\text{١}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{\text{١٠}}{\sqrt{\text{س}}} + \text{جـ}$$

ط-١

$$\int \left(\text{س}^{-\frac{1}{2}} - \frac{\text{٦س}^{-4}}{\text{٥}} \right) \text{ءس}$$

الإجابة

$$= \frac{\text{٢ س}^{\frac{1}{2}}}{\text{١}} - \frac{\text{٦س}^{-3}}{\text{٥} \times -\text{٣}} + \text{جـ}$$

$$= \text{٢}\sqrt{\text{س}} + \frac{\text{٢}}{\text{٥س}^{3}} + \text{جـ}$$

ط-٢

$$\int \left(\text{٣ س}^{-5} + \text{٧س}^{-\frac{1}{6}} \right) \text{ءس}$$

الإجابة

$$= \frac{\text{٣ س}^{-4}}{-\text{٤}} + \frac{\text{٦} \times \text{٧س}^{\frac{5}{6}}}{\text{٥}} + \text{جـ}$$

$$= \frac{-\text{٣}}{\text{٤س}^{4}} + \frac{\text{٤٢ س}^{\frac{5}{6}}}{\text{٥}} + \text{جـ}$$

السؤال الثالث

(٣) إذا كانت $\text{د}'(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٣}}{٢} - ٦\text{س}^{-\frac{٥}{٣}} + ٢$ ، فأوجد د(س) .

الإجابة

$$\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٤}}{٢\times٤} - ٣ \times \frac{٦\,\text{س}^{-\frac{٢}{٣}}}{-٢} + ٢\text{س} + \text{جـ}$$

$$\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٤}}{٨} + \frac{٩}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}} + ٢\text{س} + \text{جـ}$$

السؤال الرابع

(٤) أوجد كلا من التكاملات الآتية :

أ-١ $\int (٢\text{س} + ٣)(\text{س} + ١)\ \text{ء}\text{س}$

الإجابة

$$= \int (٢\text{س}^{٢} + ٥\text{س} + ٣)\ \text{ء}\text{س}$$

$$= \frac{٢\text{س}^{٣}}{٣} + \frac{٥\text{س}^{٢}}{٢} + ٣\text{س} + \text{جـ}$$

أ-٢ $\int ٣\text{س}^{٢}(\text{س} - ٢)\ \text{ء}\text{س}$

الإجابة

$$= \int (٣\text{س}^{٣} - ٦\text{س}^{٢})\ \text{ء}\text{س}$$

$$= \frac{٣\text{س}^{٤}}{٤} + \frac{-٦\text{س}^{٣}}{٣} + \text{جـ}$$

$$= \frac{٣\text{س}^{٤}}{٤} - ٢\text{س}^{٣} + \text{جـ}$$

ب-١

$\int \sqrt{س}\,(٥س + ٤)\,ء\,س$

الإجابة

$= \int (٥س^{\frac{٣}{٢}} + ٤س^{\frac{١}{٢}})\,ء\,س$

$= \frac{٢ \times ٥س^{\frac{٥}{٢}}}{٥} + \frac{٢ \times ٤س^{\frac{٣}{٢}}}{٣} + ج$

$= ٢س^{\frac{٥}{٢}} + \frac{٨س^{\frac{٣}{٢}}}{٣} + ج$

ب-٢

$\int \sqrt[٣]{س}\,(٢س^{٢} + ٣)\,ء\,س$

الإجابة

$\int س^{\frac{١}{٣}}(٢س^{٢} + ٣)\,ء\,س$

$\int (٢س^{\frac{٧}{٣}} + ٣س^{\frac{١}{٣}})\,ء\,س$

$= \frac{٣ \times ٢س^{\frac{١٠}{٣}}}{١٠} + \frac{٣ \times ٣س^{\frac{٤}{٣}}}{٤} + ج$

$= \frac{٣}{٥}س^{\frac{١٠}{٣}} + \frac{٩}{٤}س^{\frac{٤}{٣}} + ج$

ج-١

$\int (\sqrt[٤]{س} + ٣س)^{٢}\,ء\,س$

الإجابة

$\int (س^{\frac{١}{٤}} + ٣س)^{٢}\,ء\,س$

$\int (س^{\frac{١}{٢}} + ٦س^{\frac{٥}{٤}} + ٩س^{٢})\,ء\,س$

$= \frac{٢س^{\frac{٣}{٢}}}{٣} + \frac{٤ \times ٦س^{\frac{٩}{٤}}}{٩} + \frac{٩س^{٣}}{٣} + ج$

$= \frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} + \frac{٨}{٣}س^{\frac{٩}{٤}} + ٣س^{٣} + ج$

ج-٢

$\int (\sqrt{س} - س^{٢})^{٢}\,ء\,س$

الإجابة

$\int (س^{\frac{١}{٢}} - س^{٢})^{٢}\,ء\,س$

$\int (س - ٢س^{\frac{٥}{٢}} + س^{٤})\,ء\,س$

$= \frac{س^{٢}}{٢} - \frac{٢ \times ٢س^{\frac{٧}{٢}}}{٧} + \frac{س^{٥}}{٥} + ج$

$= \frac{س^{٢}}{٢} - \frac{٤}{٧}س^{\frac{٧}{٢}} + \frac{س^{٥}}{٥} + ج$

د-١

$$\int \left(\text{س} - \frac{١}{\text{س}}\right)^{٢} \text{ ء س}$$

$$\int \left(\text{س}^{٢} - ٢\text{س} \times \frac{١}{\text{س}} + \frac{١}{\text{س}^{٢}}\right) \text{ ء س}$$

$$\int \left(\text{س}^{٢} - ٢ + \text{س}^{-٢}\right) \text{ ء س}$$

$$= \frac{\text{س}^{٣}}{٣} - ٢\text{س} + \frac{\text{س}^{-١}}{-١} + \text{جـ}$$

$$= \frac{\text{س}^{٣}}{٣} - ٢\text{ س} - \frac{١}{\text{س}} + \text{جـ}$$

د-٢

$$\int \left(٢\text{س} + \frac{١}{\text{س}^{٢}}\right)\left(٢\text{س} - \frac{١}{\text{س}^{٢}}\right) \text{ ء س}$$

$$\int \left(٤\text{س}^{٢} - \frac{١}{\text{س}^{٤}}\right) \text{ ء س}$$

$$\int \left(٤\text{س}^{٢} - \text{س}^{-٤}\right) \text{ ء س}$$

$$= \frac{٤\text{س}^{٣}}{٣} - \frac{\text{س}^{-٣}}{-٣} + \text{جـ}$$

$$= \frac{٤\text{س}^{٣}}{٣} + \frac{١}{٣\text{س}^{٣}} + \text{جـ}$$

السؤال الخامس

ملاحظات: في هذه التمارين نوزع البسط على المقام

(٥) أوجد كلا من التكاملات الآتية :

أ-١

$$\int \frac{٧\text{س} - ٢}{\text{س}^{٣}} \text{ ء س}$$

الإجابة

$$\int \left(\frac{٧\text{س}}{\text{س}^{٣}} - \frac{٢}{\text{س}^{٣}}\right) \text{ ء س}$$

$$\int \left(٧\text{س}^{-٢} - ٢\text{ س}^{-٣}\right) \text{ ء س}$$

$$= \frac{٧\text{س}^{-١}}{-١} - ٢\,\frac{\text{س}^{-٢}}{-٢} + \text{جـ}$$

$$= \frac{-٧}{\text{س}} + \frac{١}{\text{س}^{٢}} + \text{جـ}$$

أ-٢

$$\int \frac{٢ + ٥\text{س}}{٤\text{س}^{٣}} \text{ ء س}$$

الإجابة

$$\frac{١}{٤}\int \left(\frac{٢}{\text{س}^{٣}} + \frac{٥\text{س}}{\text{س}^{٣}}\right) \text{ ء س}$$

$$= \frac{١}{٤}\int \left(٢\text{س}^{-٣} + ٥\text{ س}^{-٢}\right) \text{ ء س}$$

$$= \frac{١}{٤}\left[\frac{٢\text{س}^{-٢}}{-٢} + \frac{٥\text{س}^{-١}}{-١}\right] + \text{جـ}$$

$$= \frac{١}{٤}\left[\frac{-١}{\text{س}^{٢}} - \frac{٥}{\text{س}}\right] + \text{جـ}$$

ب-١

$$\int \frac{\sqrt{\text{س}} - ٣}{\text{س}^{٢}} \, \text{ء س}$$

الإجابة

$$\int \left(\frac{\text{س}^{\frac{١}{٢}}}{\text{س}^{٢}} - \frac{٣}{\text{س}^{٢}} \right) \text{ء س}$$

$$\int \left(\text{س}^{\frac{-٣}{٢}} - ٣\,\text{س}^{-٢} \right) \text{ء س}$$

$$\left[\frac{٢\text{س}^{\frac{-١}{٢}}}{-١} - \frac{٣\text{س}^{-١}}{-١} \right] + \text{جـ}$$

$$\left[\frac{-٢}{\sqrt{\text{س}}} + \frac{٣}{\text{س}} \right] + \text{جـ}$$

ب-٢

$$\int \frac{\text{س}^{٢} - ٦\text{س}}{\sqrt{\text{س}}} \, \text{ء س}$$

الإجابة

$$\int \left(\frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{\frac{١}{٢}}} - \frac{٦\text{س}}{\text{س}^{\frac{١}{٢}}} \right) \text{ء س}$$

$$\int \left(\text{س}^{\frac{٣}{٢}} - ٦\text{س}^{\frac{١}{٢}} \right) \text{ء س}$$

$$= \frac{٢\text{س}^{\frac{٥}{٢}}}{٥} - ٢ \times \frac{٦\,\text{س}^{\frac{٣}{٢}}}{٣} + \text{جـ}$$

$$= \frac{٢\text{س}^{\frac{٥}{٢}}}{٥} - ٤\text{س}^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$$

السؤال السادس

(٦) لتكن ص = $\frac{(س + ٢)(س - ٢)}{٢\sqrt{س}}$:

أ ضع ص في الصورة أس$^{\frac{٣}{٢}}$ + ب س$^{\frac{-١}{٢}}$ ، حيث أ ، ب عددان ثابتان ، ثم أوجد قيمة كل من أ ، ب .

الإجابة

$$ص = \frac{(س + ٢)(س - ٢)}{٢\sqrt{س}} = \frac{س^{٢} - ٤}{٢\sqrt{س}} = \frac{س^{٢}}{٢\sqrt{س}} - \frac{٤}{٢\sqrt{س}}$$

$$ص = \frac{١}{٢} س^{\frac{٣}{٢}} - ٢ س^{\frac{-١}{٢}}$$

$$ص = أ س^{\frac{٣}{٢}} + ب س^{\frac{-١}{٢}}$$

$$\therefore أ = \frac{١}{٢} \text{ ، } ب = -٢$$

ب أوجد $\int$ ص . ء س $= \int (\frac{١}{٢} س^{\frac{٣}{٢}} - ٢ س^{\frac{-١}{٢}})$. ء س

الإجابة

$$= \frac{٢ \times س^{\frac{٥}{٢}}}{٢ \times ٥} - \frac{٢ \times ٢ س^{\frac{١}{٢}}}{١} + ج$$

$$= \frac{١}{٥} س^{\frac{٥}{٢}} - ٤ س^{\frac{١}{٢}} + ج$$

السؤال السابع

٧

(٧) بين أن $\int \left(١٢\sqrt{س} - \frac{٤}{\sqrt{س}} \right) ء س = ٨\sqrt{س}\,(س - ١) + ج$.

الإجابة

$\int \left(١٢\sqrt{س} - \frac{٤}{\sqrt{س}} \right) ء س = \int (١٢س^{\frac{١}{٢}} - ٤س^{\frac{-١}{٢}})\, ء س$

الأيمن $= \frac{٢ \times ١٢س^{\frac{٣}{٢}}}{٣} - \frac{٢ \times ٤س^{\frac{١}{٢}}}{١} + ج$

$= ٨س^{\frac{٣}{٢}} - ٨س^{\frac{١}{٢}} + ج$

$= ٨\sqrt{س^{٣}} - ٨\sqrt{س} + ج \quad = ٨\sqrt{س^{٢} \times س} - ٨\sqrt{س} + ج$

$= ٨س\sqrt{س} - ٨\sqrt{س} + ج \quad = ٨\sqrt{س}\,(س - ١) + ج$ = الأيسر

٨

أوجد $\int \frac{(س + ٤)^{٢}}{٨س\sqrt{س}}\, ء س$

الإجابة

$= \int \frac{س^{٢} + ٨س + ١٦}{٨س^{\frac{٣}{٢}}}\, ء س = \frac{١}{٨} \int (س^{\frac{١}{٢}} + ٨س^{\frac{-١}{٢}} + ١٦س^{\frac{-٣}{٢}})\, ء س$

$= \frac{١}{٨} \left[\frac{٢س^{\frac{٣}{٢}}}{٣} + ٢ \times ٨س^{\frac{١}{٢}} + ٢ \times ١٦ \frac{س^{\frac{-١}{٢}}}{-١} \right] + ج$

$= \frac{س^{\frac{٣}{٢}}}{١٢} + ٢س^{\frac{١}{٢}} - \frac{٤}{\sqrt{س}} + ج \quad = \frac{١}{١٢}\sqrt{س^{٣}} + ٢\sqrt{س} - \frac{٤}{\sqrt{س}} + ج$

٦-٢ تكامل عبارات في صورة $(أس + ب)^{ن}$

ملاحظات

نتيجة (٥)

$\int (أس + ب)^{ن} \, ء س = \frac{١}{أ(ن + ١)} (أس + ب)^{ن+١} + جـ$ حيث جـ عدد ثابت ، ن ≠ –١ ، أ ≠ ٠

ملاحظة هامة القاعدة تصلح لقوى الدوال الخطية فقط

السؤال الأول

(١) أوجد كلا من التكاملات غير المحدودة الآتية :

أ-١ $\int ٥(س + ٣)^{٤} \, ء س = \frac{٥(س + ٣)^{٥}}{٥ \times ١} + جـ = (س + ٣)^{٥} + جـ$

أ-٢ $\int (س - ٢)^{٥} \, ء س = \frac{(س - ٢)^{٦}}{٦ \times ١} + جـ = \frac{(س - ٢)^{٦}}{٦} + جـ$

ب-١ $\int (٤س - ٥)^{٧} \, ء س = \frac{(٤س - ٥)^{٨}}{٨ \times ٤} + جـ = \frac{(٤س - ٥)^{٨}}{٣٢} + جـ$

ب-٢ $\int (\frac{١}{٨} س + ١)^{٣} \, ء س = \frac{(\frac{١}{٨} س + ١)^{٤}}{٤ \times \frac{١}{٨}} + جـ = ٢ (\frac{١}{٨} س + ١)^{٤} + جـ$

ج-١ $\int ٤(٣ - \frac{١}{٢}س)^{٦}\ ء س = \frac{٤(٣ - \frac{١}{٢}س)^{٧}}{٧ \times \frac{-١}{٢}} + جـ = \frac{-٨}{٧}(٣ - \frac{١}{٢}س)^{٧} + جـ$

ج-٢ $\int (٤ - س)^{٨}\ ء س = \frac{(٤ - س)^{٩}}{٩ \times -١} + جـ = \frac{-١}{٩}(٤ - س)^{٩} + جـ$

د-١ $\int \sqrt{٢س - ١}\ ء س = \int (٢س - ١)^{\frac{١}{٢}}\ ء س = \frac{(٢س - ١)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢} \times ٢} + جـ = \frac{١}{٣}(٢س - ١)^{\frac{٣}{٢}} + جـ$

د-٢ $\int ٧(٢ - ٥س)^{\frac{٣}{٤}}\ ء س = \frac{٧(٢ - ٥س)^{\frac{٧}{٤}}}{\frac{٧}{٤} \times -٥} + جـ = \frac{-٤}{٥}(٢ - ٥س)^{\frac{٧}{٤}} + جـ$

هـ-١ $\int \frac{١}{\sqrt[٤]{٢ + \frac{س}{٣}}}\ ء س = \int (٢ + \frac{١}{٣}س)^{\frac{-١}{٤}}\ ء س = \frac{(٢ + \frac{١}{٣}س)^{\frac{٣}{٤}}}{\frac{٣}{٤} \times \frac{١}{٣}} + جـ$

$= ٤(٢ + \frac{١}{٣}س)^{\frac{٣}{٤}} + جـ$

هـ-٢ $\int \frac{٦}{(٤ - ٣س)^{٢}}\ ء س = \int ٦(٤ - ٣س)^{-٢}\ ء س = \frac{٦(٤ - ٣س)^{-١}}{-١ \times -٣} + جـ$

$= ٢(٤ - ٣س)^{-١} + جـ = \frac{٢}{(٤ - ٣س)} + جـ$

السؤال الثانى

(٢) أوجد تكامل كل مما يأتي با لنسبة إلى س :

أ $(٢س + ١)^{٦} \text{ ء س} = \frac{(٢س + ١)^{٧}}{٢ \times ٧} + جـ = \frac{(٢س + ١)^{٧}}{١٤} + جـ$

ب $(٣س - ٥)^{٤} \text{ ء س} = \frac{(٣س - ٥)^{٥}}{٥ \times ٣} + جـ = \frac{(٣س - ٥)^{٥}}{١٥} + جـ$

ج $(١ - ٧س)^{٣} \text{ ء س} = \frac{(١ - ٧س)^{٤}}{٤ \times -٧} + جـ = \frac{-(١ - ٧س)^{٤}}{٢٨} + جـ$

د $(\frac{١}{٢}س + ١)^{١٠} \text{ ء س} = \frac{(\frac{١}{٢}س + ١)^{١١}}{\frac{١}{٢} \times ١١} + جـ = \frac{٢}{١١}(\frac{١}{٢}س + ١)^{١١} + جـ$

هـ $(٥س + ٢)^{-٣} \text{ ء س} = \frac{(٥س + ٢)^{-٢}}{٥ \times -٢} + جـ = \frac{-١}{١٠(٥س + ٢)^{٢}} + جـ$

و $٢(١ - ٣س)^{-٢} \text{ ء س} = \frac{٢(١ - ٣س)^{-١}}{-٣ \times -١} + جـ = \frac{٢}{٣(١ - ٣س)} + جـ$

ز $\frac{١}{(س + ١)^{٥}} \text{ ء س} = (س + ١)^{-٥} \text{ ء س} = \frac{(س + ١)^{-٤}}{-٤ \times ١} + جـ = \frac{-١}{٤(س + ١)^{٤}} + جـ$

ح

$$\int \frac{٣}{٢(٤س+١)^{٤}} \, ءس = \frac{٣(٤س+١)^{-٤}}{٢} = \frac{٣(٤س+١)^{-٣}}{٢ \times ٤ \times -٣} + جـ = \frac{-١}{٨(٤س+١)^{٣}} + جـ$$

ط

$$\int \sqrt{١٠س+١} \, ءس$$

$$\int (١٠س+١)^{\frac{١}{٢}} \, ءس = \frac{(١٠س+١)^{\frac{٣}{٢}}}{١٠ \times \frac{٣}{٢}} + جـ = \frac{(١٠س+١)^{\frac{٣}{٢}}}{١٥} + جـ$$

ي

$$\int \frac{١}{\sqrt{٢س-١}} \, ءس$$

$$= \int (٢س-١)^{\frac{-١}{٢}} \, ءس = \frac{(٢س-١)^{\frac{١}{٢}}}{٢ \times \frac{١}{٢}} + جـ = \sqrt{٢س-١} + جـ$$

ك

$$\int \left(\frac{١}{٢}س+٢\right)^{\frac{٢}{٣}} ءس = \frac{\left(\frac{١}{٢}س+٢\right)^{٣}}{\frac{١}{٢} \times \frac{٥}{٣}} + جـ = \frac{٦}{٥}\left(\frac{١}{٢}س+٢\right)^{\frac{٥}{٣}} + جـ$$

حل ٦-٣ المزيد من التكامل الغير محدد

ملاحظات

نتيجة (٦)

إذا كانت $\frac{ء}{ء س}$ (ق(س)) = د(س) فإن $\int$ د(س) ء س = ق(س) + جـ

السؤال الأول

١-أ أوجد مشتقة $(س^٢ + ٣)^٥$ بالنسبة إلى س

الإجابة

$\frac{ء}{ء س}(س^٢ + ٣)^٥ = ٥ \times ٢س (س^٢ + ٣)^٤ = ١٠س(س^٢ + ٣)^٤$

١-ب أوجد $\int ٢س(س^٢ + ٣)^٤$ ء س

الإجابة

$= \frac{١}{٥} \int ١٠س(س^٢ + ٣)^٤ = \frac{١}{٥}(س^٢ + ٣)^٥ +$ جـ

حل أخر

$\int ٢س(س^٢ + ٣)^٤$ ء س $= \frac{(س^٢ + ٣)^٥}{٥} +$ جـ

السؤال الثانى

٢-أ أوجد مشتقة $(٢ - ٣\text{س}^{٢})^{٥}$ بالنسبة إلى س .

الإجابة

$$\frac{\text{ء}}{\text{ء س}}(٢ - ٣\text{س}^{٢})^{٥} = ٥ \times -٦\text{س}\,(٢ - ٣\text{س}^{٢})^{٤} = -٣٠\text{س}(٢ - ٣\text{س}^{٢})^{٤}$$

٢-ب أوجد $\int \text{س}(٢ - ٣\text{س}^{٢})^{٤}\ \text{ء س}$

الإجابة

$$= \frac{-١}{٣٠}\int -٣٠\text{س}(٢ - ٣\text{س}^{٢})^{٤} = \frac{(٢ - ٣\text{س}^{٢})^{٥}}{-٣٠} + \text{ج}$$

حل آخر

$$\frac{١}{-٦}\int -٦\text{س}(٢ - ٣\text{س}^{٢})^{٤}\ \text{ء س} = \frac{١}{-٦\times٥}(٢ - ٣\text{س}^{٢})^{٥} + \text{ج} = \frac{(٢ - ٣\text{س}^{٢})^{٥}}{-٣٠} + \text{ج}$$

السؤال الثالث

٣-أ إذا علمت أن $\text{ص} = \frac{١}{٣\text{س}^{٢} - ١}$ ، فبين أن $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{\text{ك س}}{(٣\text{س}^{٢} - ١)^{٢}}$ ، وأوجد قيمة ك

الإجابة

$$\text{ص} = (٣\text{س}^{٢} - ١)^{-١}$$

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = -٦\text{س}(٣\text{س}^{٢} - ١)^{-٢} = \frac{-٦\text{س}}{(٣\text{س}^{٢} - ١)^{٢}} \quad \therefore \text{ك} = -٦$$

٣-ب أوجد $\int \frac{٤س}{(٣س^٢ - ١)^٢} ء س = \int ٤س(٣س^٢ - ١)^{-٢} ء س$

الإجابة

$= \frac{٤}{-٦} \int -٦س(٣س^٢ - ١)^{-٢} ء س$

$= \frac{٤}{-٦} (٣س^٢ - ١)^{-١} + جـ = \frac{-٢}{٣ (٣س^٢ - ١)} + جـ$

السؤال الرابع

٤-أ أوجد مشتقة $\frac{١}{(١ - ٢س^٢)^٣} ء س$

الإجابة

$\frac{ء}{ء س} = (١ - ٢س^٢)^{-٣} = -٣ \times -٤س(١ - ٢س^٢)^{-٣} = ١٢س (١ - ٢س^٢)^{-٤}$

$= \frac{١٢س}{(١ - ٢س^٢)^٤}$

٤-ب أوجد $\int \frac{٣س}{(١ - ٢س^٢)^٤} ء س$

الإجابة

$= \frac{١}{٤} \int -٤ \times -٣س(١ - ٢س^٢)^{-٤} ء س = \frac{١}{٤} \int ١٢س(١ - ٢س^٢)^{-٤} ء س$

$= \frac{١}{٤ (١ - ٢س^٢)^٣} + جـ$

السؤال الخامس

٥-أ أوجد مشتقة $(س^٢ - ٤)^٤$ بالنسبة إلى س

الإجابة

$$\frac{ء}{ء س}(س^٢ - ٤)^٤ = ٤ \times ٢س (س^٢ - ٤)^٣ = ٨س(س^٢ - ٤)^٣$$

٥-ب أوجد $\int ٤س(س^٢ - ٤)^٣ \, ء س$

الإجابة

$$= \frac{١}{٢}\int ٨س(س^٢ - ٤)^٣ \, ء س = \frac{(س^٢ - ٤)^٤}{٢} + ج$$

السؤال السادس

٦-أ أوجد مشتقة $(\sqrt{س} + ١)^٥$ بدلالة س .

الإجابة

$$\frac{ء}{ء س}(\sqrt{س} + ١)^٥ = \frac{٥}{٢\sqrt{س}}(\sqrt{س} + ١)^٤$$

٦-ب أوجد $\int \frac{(\sqrt{س} + ١)^٤}{\sqrt{س}} \, ء س$

الإجابة

$$= \frac{٢}{٥}\int \frac{٥}{٢\sqrt{س}}(\sqrt{س} + ١)^٤ \, ء س = \frac{٢}{٥}(\sqrt{س} + ١)^٥ + ج$$

حل ٦-٤ إيجاد ثابت التكامل

السؤال الأول

(١) أوجد معادلة منحنى الدالة إذا علمت أن :

أ-١ $\frac{ءص}{ءس}$ = س ، والمنحنى يمر بالنقطة (−٢ ، ٧) .

الإجابة

ص = ∫ س . ء س = $\frac{س^٢}{٢}$ + جـ عندما س = −٢ ، ص = ٧

٧ = $\frac{٤}{٢}$ + جـ ← ٧ = ٢ + جـ ∴ جـ = ٥

∴ ص = $\frac{س^٢}{٢}$ + ٥

أ-٢ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٦س^٢ ، والمنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ٥) .

الإجابة

ص = ∫ ٦س^٢ . ء س = $\frac{٦س^٣}{٣}$ + جـ = ٢س^٣ + جـ

عندما س = ٠ ، ص = ٥

∴ جـ = ٥ ∴ ص = ٢س^٣ + ٥

ب-١ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{١}{\text{س}^{٢}}$ ، والمنحنى يمر بالنقطة (١ ، −١) .

الإجابة

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \text{س}^{-٢}$

$\text{ص} = \int \text{س}^{-٢} \,.\, \text{ء س} = \frac{\text{س}^{-١}}{-١} + \text{جـ} = \frac{-١}{\text{س}} + \text{جـ}$

عندما س = ١ ، ص = −١ ⟵ −١ = −١ + جـ ⟵ جـ = ٠

$\therefore \text{ص} = \frac{-١}{\text{س}}$

ب-٢ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{١}{\text{س}^{٢}}$ ، والمنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٣) .

الإجابة

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \text{س}^{-٢}$

$\text{ص} = \int \text{س}^{-٢} \,.\, \text{ء س} = \frac{\text{س}^{-١}}{-١} + \text{جـ} = \frac{-١}{\text{س}} + \text{جـ}$

عندما س = ١ ، ص = ٣ ⟵ ٣ = −١ + جـ ⟵ جـ = ٤

$\therefore \text{ص} = \frac{-١}{\text{س}} + ٤$

ج-١ $\frac{ءص}{ءس} = ٣س - ٥$ ، والمنحنى يمر بالنقطة (٢ ، ٦) .

الإجابة

$ص = \int (٣س - ٥) . ءس = \frac{٣س^{٢}}{٢} - ٥س + ج$

عندما س = ٢ ، ص = ٦

$٦ = \frac{١٢}{٢} - ١٠ + ج \longleftarrow ٦ = ٦ - ١٠ + ج \longleftarrow \therefore ج = ١٠$

$\therefore ص = \frac{٣}{٢} س^{٢} - ٥س + ١٠$

ج-٢ $\frac{ءص}{ءس} = ٣ - ٢س^{٣}$ ، والمنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٥) .

الإجابة

$ص = \int (٣ - ٢س^{٣}) . ءس = ٣س \frac{-٢س^{٤}}{٤} + ج$

عندما س = ١ ، ص = ٥

$٥ = ٣ - \frac{١}{٢} + ج \longleftarrow ج = \frac{٥}{٢} \longleftarrow \therefore ص = ٣س - \frac{١}{٢} س^{٤} + \frac{٥}{٢}$

د-١ $\frac{ءص}{ءس} = ٣\sqrt{س}$ ، والمنحنى يمر بالنقطة (٩ ، -٢) .

الإجابة

$\frac{ءص}{ءس} = ٣س^{\frac{١}{٢}}$ $ص = \int ٣س^{\frac{١}{٢}} . ءس = \frac{٢ \times ٣س^{\frac{٣}{٢}}}{٣} + ج = ٢\sqrt{س^{٣}} + ج$

عندما س = ٩ ، ص = -٢ $-٢ = ٢\sqrt{٩^{٣}} + ج \leftarrow -٢ = ٥٤ + ج$

ج = -٥٦ $ص = ٢\sqrt{س^{٣}} - ٥٦$

د-٢ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{س}}}$ ، والمنحنى يمر بالنقطة (٤ ، ٨) .

الإجابة

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \text{س}^{-\frac{\text{١}}{\text{٢}}}$

$\text{ص} = \int \text{س}^{-\frac{\text{١}}{\text{٢}}} \,.\, \text{ء س} = \frac{\text{٢} \times \text{س}^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}}}{\text{١}} + \text{جـ} = \text{٢}\sqrt{\text{س}} + \text{جـ}$

عندما س = ٤ ، ص = ٨ $\quad \text{٨} = \text{٢}\sqrt{\text{٤}} + \text{جـ}$

$\text{٨} = \text{٤} + \text{جـ} \longrightarrow \text{جـ} = \text{٤} \longrightarrow \text{ص} = \text{٢}\sqrt{\text{س}} + \text{٤}$

السؤال الثانى

إذا علمت أن ميل المماس لمنحنى الدالة هو $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \text{س} - \frac{\text{١}}{\text{س}^{\text{٢}}}$ ، والمنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٣) ، فأوجد معادلة المنحنى .

الإجابة

$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = (\text{س} - \text{س}^{-\text{٢}})$

$\text{ص} = \int (\text{س} - \text{س}^{-\text{٢}}) \,.\, \text{ء س} = \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢}} - \frac{\text{س}^{-\text{١}}}{-\text{١}} + \text{جـ} = \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢}} + \frac{\text{١}}{\text{س}} + \text{جـ}$

عندما س = ١ ، ص = ٣

$\text{٣} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} + \text{١} + \text{جـ} \longrightarrow \text{جـ} = \frac{\text{٣}}{\text{٢}} \longrightarrow \text{ص} = \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢}} + \frac{\text{١}}{\text{س}} + \frac{\text{٣}}{\text{٢}}$

السؤال الثالث

إذا كانت $\text{د}'(\text{س}) = \dfrac{\text{٢س} - ١}{\sqrt{\text{س}}}$ ، د(٤) = ٢ ، فأوجد د(س) .

الإجابة

$$\text{د}'(\text{س}) = \frac{\text{٢س}}{\sqrt{\text{س}}} - \frac{١}{\sqrt{\text{س}}} = ٢\text{س}^{\frac{١}{٢}} - \text{س}^{\frac{-١}{٢}}$$

$$\text{د}(\text{س}) = \int (٢\text{س}^{\frac{١}{٢}} - \text{س}^{\frac{-١}{٢}}) \,.\, \text{ء س} = \frac{٢ \times ٢\text{س}^{\frac{٣}{٢}}}{٣} - ٢\text{س}^{\frac{١}{٢}} + \text{جـ}$$

$$\text{د}(\text{س}) = \frac{٤}{٣}\sqrt{\text{س}^{٣}} - ٢\sqrt{\text{س}} + \text{جـ}$$

$\because$ د(٤) = ٢ $\qquad ٢ = \frac{٤}{٣}\sqrt{٤^{٣}} - ٢\sqrt{٤} + \text{جـ}$

$$٢ = \frac{٤}{٣} \times ٨ - ٤ + \text{جـ} \longleftarrow \text{جـ} = -\frac{١٤}{٣}$$

$$\text{ص} = \frac{٤}{٣}\sqrt{\text{س}^{٣}} - ٢\sqrt{\text{س}} - \frac{١٤}{٣}$$

السؤال الرابع

إذا كانت د′ (س) = $\sqrt{س}$ (٥س – ٤) ، د(١) = $\frac{١٩}{٣}$ ، فأوجد د(٤) .

الإجابة

د′ (س) = ٥س$^{\frac{٣}{٢}}$ – ٤س$^{\frac{١}{٢}}$

د(س) = $\int$ (٥س$^{\frac{٣}{٢}}$ – ٤س$^{\frac{١}{٢}}$) . ء س = $\frac{٢ \times ٥س^{\frac{٥}{٢}}}{٥}$ – $\frac{٢ \times ٤س^{\frac{٣}{٢}}}{٣}$ + جـ

د(س) = ٢ $\sqrt{س^{٥}}$ – $\frac{٨}{٣}$ $\sqrt{س^{٣}}$ + جـ ∵ د(١) = $\frac{١٩}{٣}$

$\frac{١٩}{٣}$ = ٢ – $\frac{٨}{٣}$ + جـ ⟵ جـ = ٧ ⟵ ∴ د(س) = ٢ $\sqrt{س^{٥}}$ – $\frac{٨}{٣}$ $\sqrt{س^{٣}}$ + ٧

د(٤) = ٢ $\sqrt{٤^{٥}}$ – $\frac{٨}{٣}$ $\sqrt{٤^{٣}}$ + ٧ = $\frac{١٤٩}{٣}$

السؤال الخامس

يتناسب ميل مماس المنحنى عند أي نقطة طرديا مع الإحداثي السيني لهذه النقطة إذاعلمت أن المنحنى يمر بالنقطة أ (٣ ، ٢) ، وميل مماسه عند أ يساوي ١٢ ، فأوجد معادلة المنحنى .

الإجابة

$\frac{ءص}{ءس}$ ∝ س ⟵ $\frac{ءص}{ءس}$ = ث س ⟵ $\frac{ءص}{ءس}$ = ١٢ عندما س = ٣

٣ث = ١٢ ث = ٤ ⟵ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٤س

ص = $\int$ ٤س . ء س = $\frac{٤س^{٢}}{٢}$ + جـ = ٢س^{٢} + جـ

عندما س = ٣ ، ص = ٢

٢ = ١٨ + جـ ⟵ جـ = –١٦ ⟵ معادلة المنحنى ص = ٢س^{٢} – ١٦

السؤال السادس

٦-أ

ميل مماس المنحنى $\frac{ءص}{ءس} = س^{٢} - ٤$:

أوجد الإحداثى السينى للنقطة العظمى .

الإجابة

تكون للدالة نقاط حرجة عندما $\frac{ءص}{ءس}$ = صفر

∴ $س^{٢} - ٤ = ٠$ $\quad$ $س^{٢} = ٤$ $\quad$ $س = \pm ٢$

$\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = ٢س$ $\quad$ $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}} = -٤ <$ صفر

عند س = -٢ توجد نقطة عظمى

٦-ب

إذا علمت أن المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ٢) ، فبين أن الإحداثى الصادى للنقطة العظمى يساوى $٧\frac{١}{٣}$.

الإجابة

$\frac{ءص}{ءس} = س^{٢} - ٤$ $\quad$ ص = $\int (س^{٢} - ٤).ءس = \frac{س^{٣}}{٣} - ٤س + ج$

المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ٢) تحقق معادلته

عندما س = ٠ ، ص = ٢

ج = ٢ $\quad$ ∴ ص = $\frac{س^{٣}}{٣} - ٤س + ٢$

س = -٢ عند النقطة العظمى ص = $\frac{-٨}{٣} + ٨ + ٢ = \frac{٢٢}{٣} = ٧\frac{١}{٣}$.

∴ النقطة العظمى (-٢ ، $٧\frac{١}{٣}$)

السؤال السابع

منحنى ميل العمودى على مماسه عند أي نقطة يساوى مربع الإحداثى السينى لهذه النقطة . إذا علمت أن المنحنى يمر بالنقطة (٢ ، ٣) ، فأوجد معادلة المنحنى في صورة ص = د(س) .

الإجابة

∵ ميل العمودى = $س^{٢}$ ∴ ميل المماس = $\frac{-١}{س^{٢}}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-١}{س^{٢}} = -س^{-٢}$

∴ ص = $\int -س^{-٢} \,.\, ءس = \frac{-س^{-١}}{-١} + ج = \frac{١}{س} + ج$

∵ المنحنى يمر بالنقطة (٢ ، ٣) تحقق معادلته

$٣ = \frac{١}{٢} + ج$ $ج = \frac{٥}{٢}$ $ص = \frac{١}{س} + \frac{٥}{٢}$

السؤال الثامن

شجرة ارتفاعها الآن ٥ سم ، وتنمو بحيث يزداد ارتفاعها بمعدل $\frac{٣٠}{\sqrt[٣]{ن}}$ سم في السنة حيث ن السنوات .

٨-أ

(أ) أوجد ارتفاع الشجرة بعد مرور ٤ سنوات .

الإجابة

نفرض ع ارتفاع الشجرة $\frac{ءع}{ءن} = \frac{٣٠}{\sqrt[٣]{ن}} = ٣٠ ن^{-\frac{١}{٣}}$

$\therefore ع = \int ٣٠ ن^{-\frac{١}{٣}} . ءس = \frac{٣ \times ٣٠ ن^{\frac{٢}{٣}}}{٢} + جـ$

$ع = ٤٥ \sqrt[٣]{ن^{٢}} + جـ$ عند ن = صفر ⟵ ع = ٥ ⟵ جـ = ٥

$ع = ٤٥ \sqrt[٣]{ن^{٢}} + ٥$

بعد مرور ٤سنوات ن = ٤

$ع = ٤٥ \sqrt[٣]{١٦} + ٥ = ٩٠ \sqrt[٣]{٢} + ٥ \simeq ١١٨$سم $\simeq ١,١٨$ م

٨-ب

(ب) بعد مرور كم سنة يصبح ارتفاع الشجرة ٤,١ مترا ؟

الإجابة

$٤,١ = ٤٥ \sqrt[٣]{ن^{٢}} + ٥$

$٤١٠ = ٤٥ \sqrt[٣]{ن^{٢}} + ٥$ $٤٠٥ = ٤٥ \sqrt[٣]{ن^{٢}}$

$\frac{٤٠٥}{٤٥} = \sqrt[٣]{ن^{٢}}$ ⟵ $ن^{\frac{٢}{٣}} = ٩$ ⟵ $ن = (٩)^{\frac{٣}{٢}} = ٢٧$ سنة

السؤال التاسع

إذا علمت أن د′ (س) = ٩س^{٢} + ٤س + جـ ، حيث جـ عدد ثابت ، د(٢) = ١٤ ، د(٣) = ٧٤ ، فأوجد قيمة د(٤) .

الإجابة

د(س) = $\int$ (٩س^{٢} + ٤س + جـ) . ء س

د(س) = $\frac{٩}{٣}$ س^{٣} + $\frac{٤}{٢}$ س^{٢} + جـ س + ث

د(س) = ٣س^{٣} + ٢س^{٢} + جـ س + ث

∵ د(٢) = ١٤

١٤ = ٢٤ + ٨ + ٢جـ + ث

٢جـ + ث = − ١٨ (١)

∵ د(٣) = ٧٤

٧٤= ٨١ + ١٨ + ٣جـ + ث

٣جـ + ث = − ٢٥ (٢)

٣جـ + ث = − ٢٥

٢جـ + ث = − ١٨

بالطرح

جـ = − ٧ ⟵ ٣ × −٧ + ث = −٢٥ ⟵ ث = −٤

∴ د(س) = ٣س^{٣} + ٢س^{٢} − ٧س − ٤

∴ د(٤) = ٣ × ٦٤ + ٣٢ − ٢٨ − ٤ = ١٩٢

السؤال العاشر

أوجد معادلة المنحنى بمعلومية $\frac{ءص}{ءس}$، والنقطة ل التي تقع على المنحنى في كل مما يأتي :

أ

(أ) $\frac{ءص}{ءس} = (س - ٢)^٣$ ، ل (٣ ، ٤)

الإجابة

$ص = \int (س - ٢)^٣ . ءس = \frac{(س - ٢)^٤}{٤ \times ١} + جـ$

∵ النقطة ل (٣ ، ٤) تقع على المنحنى تحقق معادلته

$٤ = \frac{١}{٤} + جـ$ ⟵ $جـ = \frac{١٥}{٤}$ ⟵ ∴ $ص = \frac{١}{٤}(س - ٢)^٤ + \frac{١٥}{٤}$

ب

$\frac{ءص}{ءس} = \sqrt{٤ - س}$ ، ل (٠ ، ٢)

الإجابة

$\frac{ءص}{ءس} = (٤ - س)^{\frac{١}{٢}}$ $ص = \int (٤ - س)^{\frac{١}{٢}} ءس$

$ص = \frac{- ٢(٢س - ١)^{\frac{٣}{٢}}}{٣} + جـ$

∵ ل (٠ ، ٢) تقع على المنحنى تحقق معادلته

$٢ = \frac{-٢}{٣} \times ٨ + جـ$ ⟵ $٢ + \frac{١٦}{٣} = جـ$ ⟵ $جـ = \frac{٢٢}{٣}$

∴ $ص = \frac{-٢}{٣}(٤ - س)^{\frac{٣}{٢}} + \frac{٢٢}{٣}$

ج

(ج) $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{١}{\sqrt{٣س - ٥}}$ ، ل(٢ ، ١)

الإجابة

$\frac{ء ص}{ء س} = (٣س - ٥)^{\frac{-١}{٢}} \longleftarrow$ ص = $\int (٣س - ٥)^{\frac{-١}{٢}}$ ء س

ص = $\frac{٢(٣س - ٥)^{\frac{١}{٢}}}{٣ \times ١}$ + جـ

∵ ل (٢ ، ١) تقع على المنحنى تحقق معادلته

$١ = \frac{٢}{٣} \times ١ +$ جـ $\longleftarrow$ جـ = $\frac{١}{٣}$

∴ ص = $\frac{٢}{٣}(٣س - ٥)^{\frac{١}{٢}} + \frac{١}{٣}$

د

(د) $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{٣}{(١ - ٣س)^{٣}}$ ، ل(٠ ، $\frac{١}{٢}$)

الإجابة

$\frac{ء ص}{ء س} = ٣(١ - ٣س)^{-٣}$ ص = $\int ٣(١ - ٣س)^{-٣}$ ء س

ص = $\frac{٣(١ - ٣س)^{-٢}}{-٣ \times -٢}$ + جـ = $\frac{١}{٢}(١ - ٣س)^{-٢}$ + جـ

ل(٠ ، $\frac{١}{٢}$) تقع على المنحنى تحقق معادلته

$\frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$ + جـ $\longleftarrow$ جـ = ٠ $\longleftarrow$ ص = $\frac{١}{٢(١ - ٣س)^{٢}}$

السؤال الحادى عشر

إذا علمت أن $\frac{ء ص}{ء س}$ = ك (٢س − ١)^{٢} ، حيث ك عدد ثابت ، وميل العمودى على المماس لمنحنى الدالة عند النقطة (١ ، ٥) يساوى − $\frac{١}{٦}$ ، فأوجد معادلة المنحنى .

الإجابة

∵ ميل العمودى على المماس = − $\frac{١}{٦}$

∴ ميل المماس = $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٦ عند النقطة (١ ، ٥)

ك × ١ = ٦ ك = ٦

$\frac{ء ص}{ء س}$ = ٦(٢س − ١)^{٢} ⟵ ص = ∫ ٦(٢س − ١)^{٢} . ء س

ص = $\frac{٦(٢س − ١)^{٣}}{٢ × ٣}$ + جـ = (٢س − ١)^{٣} + جـ

∵ المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٥) تحقق معادلته

٥ = ١ + جـ ⟵ جـ = ٤ ⟵ ص = (٢س − ١)^{٣} + ٤

السؤال الثانى عشر

إذا علمت أن $\frac{ء ص}{ء س} = ك - س^{-\frac{1}{2}}$ ، س > ٠ ، والمنحنى يمر بالنقطتين

أ (١ ، – ٢) ، ب (٤ ، ٥) ، فأوجد :

١٢-أ (أ) قيمة ك .

الإجابة

ص = ك س – ٢ $س^{\frac{1}{2}}$ + جـ

∵ المنحنى يمر بالنقطتين أ (١ ، – ٢) ، ب (٤ ، ٥) تحقق معادلته

–٢ = ك – ٢ + جـ ⟵ ك + جـ = صفر ⟵ (١)

٥ = ٤ك – ٤ + جـ ⟵ ٤ك + جـ = ٩ ⟵ (٢)

بالطرح

٣ك = ٩ ⟵ ك = ٣ ⟵ جـ = –٣ ∴ معادلة المنحنى ص = ٣س – ٢ $\sqrt{س}$ – ٣

١٢-ب (ب) معادلة العمودى على المماس للمنحنى عند النقطة أ .

الإجابة

$\frac{ء ص}{ء س}$ = ٣ – $س^{\frac{-1}{2}}$ عند أ (١ ، –٢)

س = ١ ⟵ ميل المماس = $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٢ ∴ ميل العمودى = – $\frac{1}{2}$

∴ معادلة العمودى هي: ص – $ص_1$ = – $\frac{1}{م}$ (س – $س_1$)

ص + ٢ = – $\frac{1}{2}$ (س – ١) بالضرب × ٢

٢ص + ٤ = –س + ١ ⟵ ٢ص + س = –٣ ⟵ ص = $\frac{-س}{2}$ – $\frac{3}{2}$

السؤال الثالث عشر

إذا علمت أن $\frac{ءص}{ءس} = ١٠ س^{\frac{٣}{٢}} - ٢س^{\frac{-١}{٢}}$ حيث س ≥ ٠ ، والمنحنى

يمر بالنقطة (٠ ، ٧) فأوجد معادلة المنحنى

الإجابة

$ص = \int (١٠ س^{\frac{٣}{٢}} - ٢س^{\frac{١-}{٢}}) . ءس = \frac{٢ \times ١٠س^{\frac{٥}{٢}}}{٥} - ٢ \times ٢س^{\frac{١}{٢}} + جـ$

$ص = ٤ \sqrt{س^٥} - ٤ \sqrt{س} + جـ$

المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ٧) تحقق معادلته

$٧ = جـ \longrightarrow ص = ٤ \sqrt{س^٥} - ٤ \sqrt{س} + ٧$

السؤال الرابع عشر

سقطت بقعة حبر على قطعة من القماش ، وبدأت بالتوسع في المساحة بمعدل $\frac{٢}{\sqrt{ن}}$ سم^٢ في الدقيقة . بافتراض أنها تنتشر بشكل غير منتظم ، ما المدة التي ستستغرقها البقعة لتصبح مساحتها ٤٠ سم^٢ ؟

الإجابة

$\frac{ءم}{ءن} = \frac{٢}{\sqrt{ن}}$ $\frac{ءم}{ءن} = ٢ ن^{\frac{١-}{٢}}$

$م = ٢ \int ن^{\frac{١-}{٢}} . ءن = ٢ \times ٢ن^{\frac{١}{٢}} + ث$

$م = ٤ \sqrt{ن} + ث$ عند ن = صفر ∴ م =صفر $\longrightarrow$ ث = صفر

$م = ٤ \sqrt{ن} \longrightarrow ٤٠ = ٤ \sqrt{ن} \longrightarrow \sqrt{ن} = ١٠ \longrightarrow$ ن = ١٠٠ دقيقة

السؤال الخامس عشر

إذا علمت أن $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣س^{٢} – ٤س – ١ ، والمماس على المنحنى عند النقطة أ التي إحداثيها السينى ٢ يمر بنقطة الأصل ، فأوجد معادلة المنحنى .

الإجابة

$\frac{ءص}{ءس}$ = ميل المماس = ٣س^{٢} – ٤س – ١

عند س = ٢

$\frac{ءص}{ءس}$ = م = ١٢ – ٨ – ١ = ٣

∴ معادلة المماس الذى ميله = ٣ ويمر بنقطة الأصل (٠ ، ٠) هي ص – ص$_{١}$ = م (س – س$_{١}$)

معادلة المماس هى ص = ٣س

عند س = ٢ ← ص = ٦ ∴ (٢ ، ٦) نقطة التماس

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٣س^{٢} – ٤س – ١

ص = ∫ (٣ س^{٢} – ٤س – ١) . ء س

ص = س^{٣} – ٢س^{٢} – س + جـ

∵ نقطة التماس (٢ ، ٦) تحقق معادلة المنحنى

٦ = ٨ – ٨ – ٢ + جـ ← جـ = ٨

∴ معادلة المنحنى هي ص = س^{٣} – ٢س^{٢} – س + ٨

٦-٥ التكامل المحدد

ملاحظات
التكامل المحدد

نتيجة (٧)

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س)}\ \text{ء س} = \Big[\ \text{ق(س)}\ \Big]_{\text{أ}}^{\text{ب}} = \text{ق(ب)} - \text{ق(أ)}$$

يمكن أيضا إستخدام الخواص الأتية لحساب التكامل المحدود :

نتيجة (٨)

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ك د(س)}\ \text{ء س} = \text{ك} \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س)}\ \text{ء س} \quad \text{حيث ك عدد ثابت}$$

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \big(\ \text{د(س)} \pm \text{ل(س)}\ \big)\ \text{ء س} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س)}\ \text{ء س} \pm \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ل(س)}\ \text{ء س}$$

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س)}\ \text{ء س} = - \int_{\text{ب}}^{\text{أ}} \text{د(س)}\ \text{ء س}$$

نتيجة (٩)

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س)}\ \text{ء س} + \int_{\text{ب}}^{\text{جـ}} \text{د(س)}\ \text{ء س} = \int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{د(س)}\ \text{ء س}$$

نتيجة (١٠) $\int_{\text{ك}}^{\text{ك}} \text{د(س)}\ \text{ء س} = ٠$

السؤال الأول

(١) أوجد كلا من التكاملات المحدودة الآتية :

أ-١ $\int_{٢}^{٦} س^{٣} \, ء س = \left[\frac{س^{٤}}{٤}\right]_{٢}^{٦} = \frac{١}{٤}\left(٦^{٤} - ٢^{٤}\right) = ٣٢٠$

أ-٢ $\int_{٤}^{٥} س^{٤} \, ء س = \left[\frac{س^{٥}}{٥}\right]_{٤}^{٥} = \frac{١}{٥}\left(٥^{٥} - ٤^{٥}\right) = ٤٢٠,٢$

ب-١ $\int_{-٢}^{٢} ٣س^{٥} \, ء س = \left[\frac{٣س^{٦}}{٦}\right]_{-٢}^{٢} = \frac{١}{٢}\left(٢^{٦} - (-٢)^{٦}\right) = $ صفر

ب-٢ $\int_{-٣}^{٣} ٢س^{٢} \, ء س = \left[\frac{٢س^{٣}}{٣}\right]_{-٣}^{٣} = \frac{٢}{٣}\left(٣^{٣} - (-٣)^{٣}\right) = ٣٦$

ج-١ $\int_{-٣}^{-١} (٦س^{٢} - ٣) \, ء س = \left[\frac{٦س^{٣}}{٣} - ٣س\right]_{-٣}^{-١}$

$= \left(٢(-١)^{٣} - ٣(-١)\right) - \left(٢(-٣)^{٣} - ٣(-٣)\right) = (-٢ + ٣) - (-٤٥ + ٩)$

$= ١ - (-٤٥) = ٤٦$

ج-٢

$$\int_{-٤}^{-٢} (٣س^{٢} - ٤)\ ء س = \left[\frac{٣س^{٣}}{٣} - ٤س\right]_{-٤}^{-٢}$$

$$= \left((-٢)^{٣} - ٤(-٢)\right) - \left((-٤)^{٣} - ٤(-٤)\right) = \text{صفر} - (-٦٤ + ١٦) = ٤٨$$

د-١

$$\int_{١}^{٤} (س^{٢} + س)\ ء س = \left[\frac{س^{٣}}{٣} + \frac{س^{٢}}{٢}\right]_{١}^{٤}$$

$$= \left(\frac{٤^{٢}}{٣} + \frac{٤^{٢}}{٢}\right) - \left(\frac{١}{٣} + \frac{١}{٢}\right) = ٢٨,٥$$

د-٢

$$\int_{-٢}^{١} (٣س^{٢} - ٥س)\ ء س = \left[\frac{٣س^{٣}}{٣} - \frac{٥س^{٢}}{٢}\right]_{-٢}^{١}$$

$$= \left(١ - \frac{٥}{٢}\right) - \left((-٢)^{٣} - \frac{٥}{٢}(-٢)^{٢}\right) = ١٦,٥$$

هـ-١

$$\int_{٤}^{٩} ٢\sqrt{س}\ ء س = \left[٢ \times \frac{٢س^{\frac{٣}{٢}}}{٣}\right]_{٤}^{٩} = \frac{٤}{٣}\left[(٩)^{\frac{٣}{٢}} - (٤)^{\frac{٣}{٢}}\right]_{٤}^{٩}$$

$$= \frac{٤}{٣}(٢٧ - ٨) = \frac{٧٦}{٣}$$

هـ-٢

$$\int_{٥}^{٥} ٦\sqrt[٣]{س}\ ء س = \text{صفر}$$

ملاحظة في حالة تساوى حدى التكامل لدالة ما يكون الناتج يساوى صفر (نتيجة ١٠)

و-١

$$\int_{١}^{١٦} \frac{٦}{\sqrt{\text{س}}} \, \text{ءس} = \int_{١}^{١٦} ٦\text{س}^{-\frac{١}{٢}} \, . \, \text{ءس} = \left[٢ \times ٦\text{س}^{\frac{١}{٢}} \right]_{١}^{١٦} = ١٢ \left(\sqrt{١٦} - \sqrt{١} \right)$$

$$= ١٢ \times ٣ = ٣٦$$

و-٢

$$\int_{-٣}^{-١} \frac{٣}{\text{س}^{٢}} \, \text{ءس} = \int_{-٣}^{-١} ٣\text{س}^{-٢} \, . \, \text{ءس} = \left[-٣\text{س}^{-١} \right]_{-٣}^{-١} = \left[\frac{-٣}{\text{س}} \right]_{-٣}^{-١}$$

$$= \frac{-٣}{-١} - \frac{-٣}{-٣} = ٣ - ١ = ٢$$

ز-١

$$\int_{-٤}^{-٢} \left(١ + \frac{٢}{\text{س}^{٢}} \right) \text{ءس} = \int_{-٤}^{-٢} \left(١ + ٢\text{س}^{-٢} \right) . \, \text{ءس} = \left[\text{س} - \frac{٢}{\text{س}} \right]_{-٤}^{-٢}$$

$$= (-٢ - ١) - \left(-٤ + \frac{١}{٢} \right) = -١ + \frac{٧}{٢} = \frac{٥}{٢}$$

ز-٢

$$\int_{-٣}^{-١} \left(٢\text{س} - \frac{١}{\text{س}^{٢}} \right) \text{ءس} = \int_{-٣}^{-١} \left(٢\text{س} - \text{س}^{-٢} \right) . \, \text{ءس} = \left[\frac{٢\text{س}^{٢}}{٢} + \frac{١}{\text{س}} \right]_{-٣}^{-١}$$

$$= \left((-١)^{٢} - ١ \right) - \left((-٣)^{٢} - \frac{١}{٣} \right) = \text{صفر} - \frac{٢٦}{٣} = -\frac{٢٦}{٣}$$

السؤال الثانى

(٢) أوجد قيمة كل من التكاملات المحدودة الآتية :

أ

$$\int_{\cdot}^{٨} ١٢\sqrt[٣]{س}\ ء س = \int_{\cdot}^{٨} ١٢\,(س^{\frac{١}{٣}})\,.\,ء س = \left[\frac{٣ \times ١٢\, س^{\frac{٤}{٣}}}{٤}\right]_{\cdot}^{٨} = \left[٩س^{\frac{٤}{٣}}\right]_{\cdot}^{٨}$$

$$= ٩\left((٨^{\frac{٤}{٣}}) - \cdot\right) = ٩ \times ٢^{٤} = ٩ \times ١٦ = ١٤٤$$

ب

$$\int_{١}^{٢} \frac{٣}{س^{٢}}\ ء س = \int_{١}^{٢} (٣س^{-٢})\,.\,ء س = \left[\frac{-٣}{س}\right]_{١}^{٢} = \frac{-٣}{٢} - (-٣)$$

$$= \frac{-٣}{٢} + ٣ = \frac{٣}{٢}$$

ج

$$\int_{١}^{٤} \frac{١٠}{\sqrt{س}}\ ء س = \int_{١}^{٤} ١٠\,(س^{\frac{-١}{٢}})\,.\,ء س = \left[٢ \times ١٠س^{\frac{١}{٢}}\right]_{١}^{٤}$$

$$= ٢٠\left(\sqrt{٤} - \sqrt{١}\right) = ٢٠ \times (٢ - ١) = ٢٠$$

د

$$\int_{١}^{٢} \left(\frac{٨}{س^{٣}} + س^{٣}\right) ء س = \int_{١}^{٢} (٨س^{-٣} + س^{٣})\,.\,ءس = \left[\frac{٨س^{-٢}}{-٢} + \frac{س^{٤}}{٤}\right]_{١}^{٢}$$

$$= \left[\frac{-٤}{س^{٢}} + \frac{س^{٤}}{٤}\right]_{١}^{٢} = \frac{-٤}{٤} + \frac{١٦}{٤} - \left(-٤ + \frac{١}{٤}\right)$$

$$= (-١ + ٤) - \left(\frac{-١٥}{٤}\right) = ٣ + \frac{١٥}{٤} = \frac{٢٧}{٤}$$

هـ

$$\int_{٤}^{٩} \frac{٢\sqrt{س} + ٣}{\sqrt{س}} \, ء\,س = \int_{٤}^{٩} (٢ + ٣س^{\frac{-١}{٢}}) \,.\, ء\,س = \left[٢س + ٢ \times ٣س^{\frac{١}{٢}}\right]_{٤}^{٩}$$

$$= (١٨ + ٦\sqrt{٩}) - (٨ + ٦\sqrt{٤})$$

$$= (١٨ + ١٨) - (٨ + ١٢) = ٣٦ - ٢٠ = ١٦$$

و

$$\int_{١}^{٨} \frac{١٠}{\sqrt[٣]{س^{٢}}} \, ء\,س = \int_{١}^{٨} س^{\frac{-٢}{٣}} \,.\, ء\,س = \left[٣س^{\frac{١}{٣}}\right]_{١}^{٨}$$

$$= ٣(\sqrt[٣]{٨} - \sqrt[٣]{١}) = ٣(٢ - ١) = ٣$$

السؤال الثالث

٣ أوجد قيمة $\int_{٢}^{٨} (٣\sqrt{س} - ٢س) \, ء\,س$ ، ثم أكتب الناتج في صورة $أ + ب\sqrt{٢}$

الإجابة

$$\int_{٢}^{٨} (٣س^{\frac{١}{٢}} - ٢س) \,.\, ء\,س = \left[\frac{٢ \times ٣س^{\frac{٣}{٢}}}{٣} - \frac{٢س^{٢}}{٢}\right]_{٢}^{٨}$$

$$= (٢\sqrt{٨^{٣}} - ٦٤) - (٢\sqrt{٢^{٣}} - ٤)$$

$$= ٣٢\sqrt{٢} - ٦٤ - ٤\sqrt{٢} + ٤ = -٦٠ + ٢٨\sqrt{٢} = أ + ب\sqrt{٢}$$

السؤال الرابع

٤ إذا علمت أن $\int_{١}^{٣} \left(٩\sqrt{\text{س}} - \frac{٤}{\sqrt{\text{س}}} \right) \text{ء س} = \text{أ} + \text{ب}\sqrt{\text{س}}$ ، حيث أ ، ب عددان صحيحان ، فأوجد قيمة كل من أ ، ب .

الإجابة

$$\int_{١}^{٣} (٩\text{س}^{\frac{١}{٢}} - ٤\text{س}^{\frac{-١}{٢}}) \,.\, \text{ء س} = \left[\frac{٢ \times ٩\text{س}^{\frac{٣}{٢}}}{٣} - ٢ \times ٤\text{س}^{\frac{١}{٢}} \right]_{١}^{٣}$$

$$= \left[٦\sqrt{\text{س}^{٣}} - ٨\sqrt{\text{س}} \right]_{١}^{٣} = (٦\sqrt{٣^{٣}} - ٨\sqrt{٣}) - (٦\sqrt{١} - ٨\sqrt{١})$$

$$= ١٨\sqrt{٣} - ٨\sqrt{٣} + ٢ = ١٠\sqrt{٣} + ٢ = \text{ب}\sqrt{٣} + \text{أ}$$

$\therefore$ أ = ٢ ، ب = ١٠

السؤال الخامس

٥ أوجد قيمة التكامل $\int_{١}^{\text{ك}} \left(٢ - \frac{١}{\text{س}^{٢}} \right) \text{ء س}$ بدلالة ك

الإجابة

$$\int_{١}^{\text{ك}} (٢ - \text{س}^{-٢}) \,.\, \text{ء س} = \left[٢\text{س} - \frac{\text{س}^{-١}}{-١} \right]_{١}^{\text{ك}} = \left[٢\text{س} + \frac{١}{\text{س}} \right]_{١}^{\text{ك}}$$

$$= \left(٢\text{ك} + \frac{١}{\text{ك}} \right) - (٢ + ١) = ٢\text{ك} + \frac{١}{\text{ك}} - ٣$$

$$= \frac{٢\text{ك}^{٢} - ٣\text{ك} + ١}{\text{ك}} = \frac{(٢\text{ك} - ١)(\text{ك} - ١)}{\text{ك}}$$

السؤال السادس

٦ أوجد قيمة التكامل $\int_{-أ}^{٢} س^{٢}\,(٤س - ٣)\,ء\,س$ بدلالة أ .

الإجابة

$$\int_{-أ}^{٢} (٤س^{٣} - ٣س^{٢}).\,ء\,س = \left[\frac{٤س^{٤}}{٤} - \frac{٣س^{٣}}{٣}\right]_{-أ}^{٢}$$

$$= \left[س^{٤} - س^{٣}\right]_{-أ}^{٢} = (١٦ - ٨) - (أ^{٤} + أ^{٣}) = ٨ - أ^{٤} - أ^{٣} = -أ^{٤} + أ^{٣} + ٨$$

السؤال السابع

٧ أوجد قيمة أ إذا علمت أن $\int_{١}^{أ} \sqrt{ع}\,ء\,ع = ٤٢$

الإجابة

$$\int_{١}^{أ} ع^{\frac{١}{٢}}\,ء\,س = ٤٢$$

$$\left[\frac{٢ع^{\frac{٣}{٢}}}{٣}\right]_{١}^{أ} = ٤٢$$

$\frac{٢}{٣}\left(\sqrt{أ^{٣}} - \sqrt{١}\right) = ٤٢$ بالضرب × $\frac{٣}{٢}$ للطرفين

$$\frac{٣}{٢} \times \frac{٢}{٣}\left(\sqrt{أ^{٣}} - ١\right) = ٤٢ \times \frac{٣}{٢}$$

$$\sqrt{أ^{٣}} - ١ = ٦٣ \qquad \sqrt{أ^{٣}} = ٦٤ \qquad أ^{\frac{٣}{٢}} = ٦٤$$

$$أ = (٦٤)^{\frac{٢}{٣}} = (٤^{٣})^{\frac{٢}{٣}} = ١٦$$

السؤال الثامن

٨ أوجد كل القيم الممكنة للعدد ل إذا علمت أن $\int_{-٢}^{ل} \left(١ - \frac{١٠}{٣\,س^{٢}}\right) ء س = -\frac{٢}{٣}$

الإجابة

$$\int_{-٢}^{ل} \left(١ - \frac{١٠}{٣} س^{-٢}\right) . ء س = -\frac{٢}{٣}$$

$$\left[س + \frac{١٠}{٣س}\right]_{-٢}^{ل} = -\frac{٢}{٣}$$

$$\left(ل + \frac{١٠}{٣ل}\right) - \left(-٢ + \frac{١٠}{٣ \times -٢}\right) = -\frac{٢}{٣}$$

$$\frac{٣ل^{٢} + ١٠}{٣ل} + \frac{١١}{٣} = -\frac{٢}{٣}$$

$$\frac{٣ل^{٢} + ١٠}{٣ل} = -\frac{٢}{٣} - \frac{١١}{٣}$$

$$\frac{٣ل^{٢} + ١٠}{٣ل} = -\frac{١٣}{٣}$$

$$٣ل^{٢} + ١٠ = -١٣ل \longleftarrow ٣ل^{٢} + ١٣ل + ١٠ = ٠$$

$$(٣ل + ١٠)(ل + ١) = ٠ \longleftarrow ل = \frac{-١٠}{٣} \text{ ، } ل = -١$$

٦-٦ المساحة تحت منحنى الدالة

ملاحظات هامة

يفضل إستخدام المطلق سواء كانت المنطقة (أعلى / أسفل) محور السينات

أو (يمين / يسار) محور الصادات

(١) إذا كانت د(س) متصلة وكانت د(س) ≥ ٠ لجميع قيم س على الفترة [أ ، ب] وكانت م تمثل مساحة المنطقة التي يحدها منحنى الدالة ، والمحور السينى ولمستقيمان س = أ ، س = ب فإن المساحة م تعطى بالعلاقة :

$$م = \left| \int_{أ}^{ب} د(س) \, . \, ء س \right|$$

ويمكن الإستغناء عن رمز المطلق لأن التكامل يعطى قيمة موجبة

(٢) إذا كانت د(س) متصلة ، وكانت د(س) ≤ ٠ لجميع قيم س على الفترة [أ ، ب] فإن المساحة الإجمالية م تعطى بالعلاقة :

$$ن = \left| \int_{أ}^{ب} د(س) \, . \, ء س \right|$$

لأن التكامل يعطى قيمة سالبة

(٣) إذا تغيرت إشارة الدالة د(س) عند س = جـ على الفترة [أ ، ب] فإن المساحة الإجمالية م تعطى بالعلاقة

$$م = م_١ + م_٢ = \left| \int_{أ}^{ج} د(س) \, . \, ء س \right| + \left| \int_{ج}^{ب} د(س) \, . \, ء س \right|$$

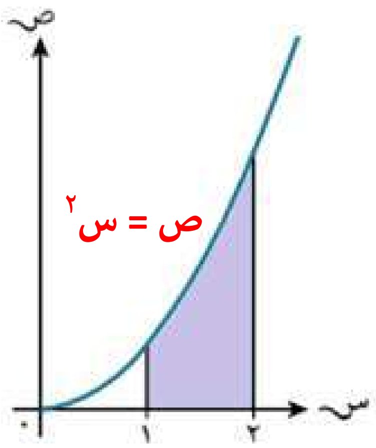
(٤) من الأفضل إيجاد قيمة (قيم) س التي تكون عندها الدالة = صفر ، حتى لو تم إعطاء المحدد

(٥) في حالة أننا لا نعرف أي المنطقتين $م_١$ ، $م_٢$ تقعان أعلى أو أسفل المحور السيني فيجب علينا إستخدام رمز المطلق لكليهما ، بحيث يعطى التكامل مساحات موجبة .

(٦) حاول دائما أن ترسم المنحنى أولا (إن لم يكن معطى) عندما تسأل عن إيجاد المساحة

السؤال الأول

(١) أوجد مساحة المنطقة المظللة في كل مما يأتي :

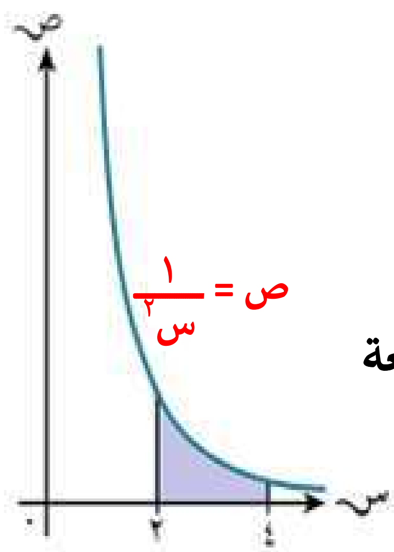


الإجابة

أ-١

$$م = \left| \int_{١}^{٢} س^{٢} \, . \, ء س \right| = \left| \left[\frac{س^{٣}}{٣} \right]_{١}^{٢} \right|$$

$$= \left| \frac{١}{٣} (٨ - ١) \right| = \left| \frac{٧}{٣} \right| = \frac{٧}{٣} \text{ وحدة مربعة}$$



الإجابة

أ-٢

$$م = \left| \int_{٢}^{٤} \frac{١}{س^{٢}} \, . \, ء س \right| = \left| \int_{٢}^{٤} س^{-٢} \, . \, ء س \right|$$

$$= \left| \left[\frac{-١}{س} \right]_{٢}^{٤} \right| = \left| \frac{-١}{٤} + \frac{١}{٢} \right| = \left| \frac{١}{٤} \right| = \frac{١}{٤} \text{ وحدة مربعة}$$

ملاحظة يمكن إستخدام الرمز المطلق لكنه غير ضروري لأن التكامل يعطي قيمة موجبة (فوق محور السينات)

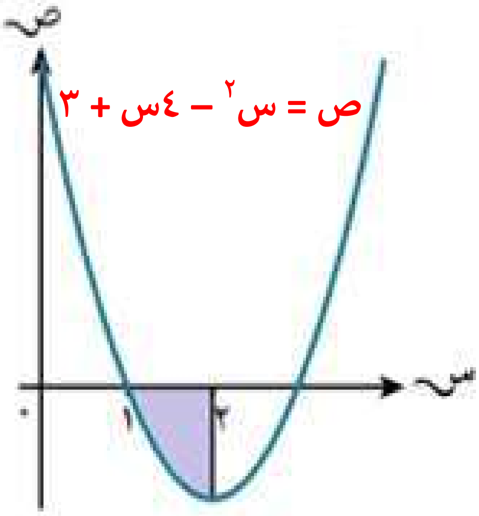
الإجابة

ب-١

$$م = \left| \int_{١}^{٢} س^{٢} - ٤س + ٣ \; ءس \right|$$

$$= \left| \left[\frac{س^{٣}}{٣} - \frac{٤}{٢} س^{٢} + ٣س \right]_{١}^{٢} \right|$$

$$= \left| \frac{٨}{٣} - ٨ + ٦ - \left(\frac{١}{٣} - ٢ + ٣ \right) \right| = \left| \frac{-٢}{٣} \right| = \frac{٢}{٣}$$



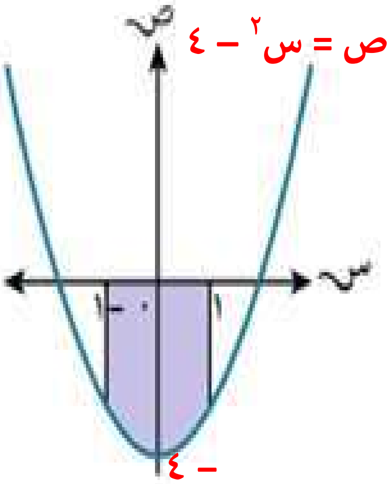
الإجابة

ب-٢

$$م = \left| \int_{-١}^{١} (س^{٢} - ٤) \; ءس \right|$$

$$= \left| \left[\frac{س^{٣}}{٣} - ٤س \right]_{-١}^{١} \right|$$

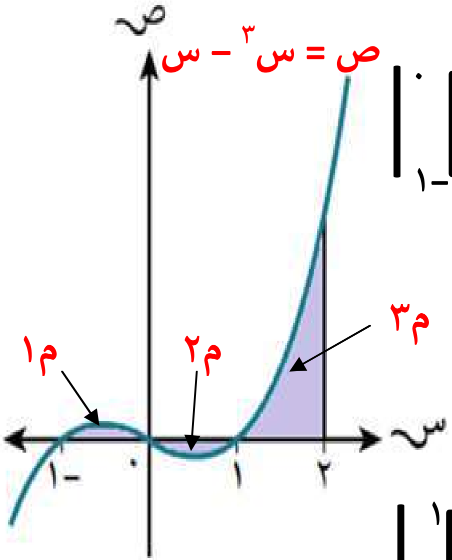
$$= \left| \left(\frac{١}{٣} - ٤ \right) - \left(\frac{-١}{٣} + ٤ \right) \right| = \left| \frac{-٢٢}{٣} \right| = \frac{٢٢}{٣}$$



الإجابة

ج-١

$م = م_١ + م_٢ + م_٣$



$$م_١ = \left| \int_{-١}^{٠} (س^٣ - س) \, ءس \right| = \left| \left[\frac{س^٤}{٤} - \frac{س^٢}{٢} \right]_{-١}^{٠} \right|$$

$$= \left| ٠ - \left(\frac{١}{٤} - \frac{١}{٢} \right) \right| = \frac{١}{٤} \text{ وحدة مربعة}$$

$$م_٢ = \left| \int_{٠}^{١} (س^٣ - س) \, ءس \right| = \left| \left[\frac{س^٤}{٤} - \frac{س^٢}{٢} \right]_{٠}^{١} \right|$$

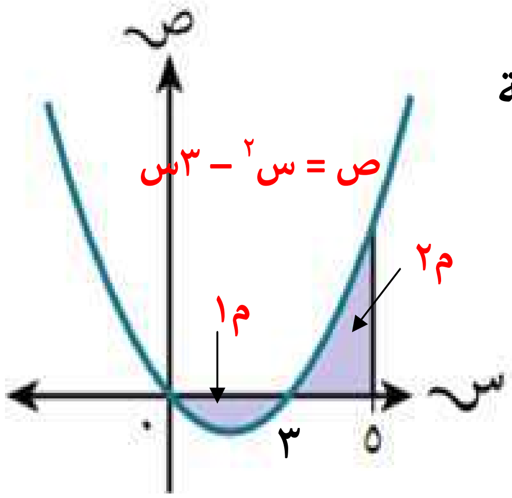
$$= \left| \left(\frac{١}{٤} - \frac{١}{٢} \right) - ٠ \right| = \frac{١}{٤} \text{ وحدة مربعة}$$

$$م_٣ = \left| \int_{١}^{٢} (س^٣ - س) \, ءس \right| = \left| \left[\frac{س^٤}{٤} - \frac{س^٢}{٢} \right]_{١}^{٢} \right|$$

$$= \left| (٤ - ٢) - \left(\frac{١}{٤} - \frac{١}{٢} \right) \right| = \frac{٩}{٤} \text{ وحدة مربعة}$$

$$م = م_١ + م_٢ + م_٣ = \frac{١}{٤} + \frac{١}{٤} + \frac{٩}{٤} = \frac{١١}{٤} \text{ وحدة مربعة}$$

ج-٢ ص = س^{٢} – ٣س الإجابة



أولا أوجد قيم س (حدود التكامل) بحل المعادلة

ص = صفر س^{٢} – ٣س = صفر

س(س – ٣) = صفر

س = ٠ س = ٣

م = م١ + م٢

$$م_١ = \left| \int_{٠}^{٣} (س^{٢} - ٣س)\,.\,ءس \right| = \left| \left[\frac{س^{٣}}{٣} - \frac{٣}{٢}س^{٢} \right]_{٠}^{٣} \right|$$

$$= \left| (٩ - \frac{٢٧}{٢}) - ٠ \right| = \left| \frac{-٩}{٢} \right| = \frac{٩}{٢} \text{ وحدة مربعة}$$

$$م_٢ = \left| \int_{٣}^{٥} (س^{٢} - ٣س)\,.\,ءس \right| = \left| \left[\frac{س^{٣}}{٣} - \frac{٣}{٢}س^{٢} \right]_{٣}^{٥} \right|$$

$$= \left| (\frac{١٢٥}{٣} - \frac{٧٥}{٢}) - (\frac{-٩}{٢}) \right| = \left| \frac{٢٥}{٦} + \frac{٩}{٢} \right| = \left| \frac{٢٦}{٣} \right| = \frac{٢٦}{٣} \text{ وحدة مربعة}$$

$$م = م_١ + م_٢ = \frac{٩}{٢} + \frac{٢٦}{٣} = \frac{٧٩}{٦} \text{ وحدة مربعة}$$

السؤال الثانى

أوجد مساحة المنطقة المحصورة في كل مما يأتي :

ملاحظة حاول دائما أن ترسم المنحنى أولا (إن لم يكن معطى) عندما تسأل عن إيجاد المساحة

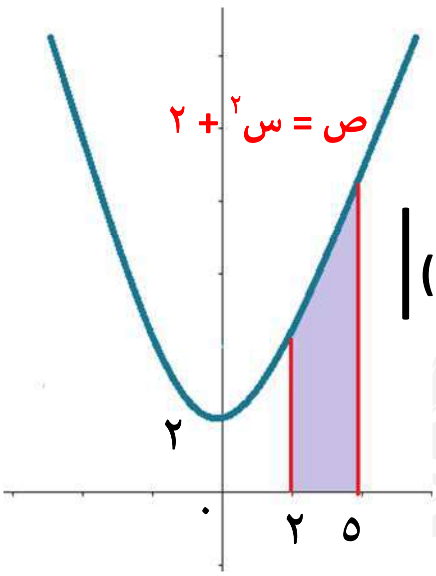
أ-١ بين المنحنى ص = س^{٢} + ٢ ، والمحور السينى ، والمستقيمين س = ٢ ، س = ٥

الإجابة

$$م = \left| \int_{٢}^{٥} (س^{٢} + ٢)\, ء س \right|$$

$$م = \left| \left[\frac{س^{٣}}{٣} + ٢س \right]_{٢}^{٥} \right| = \left| \left(\frac{١٢٥}{٣} + ١٠ \right) - \left(\frac{٨}{٣} + ٤ \right) \right|$$

= ٤٥ وحدة مربعة



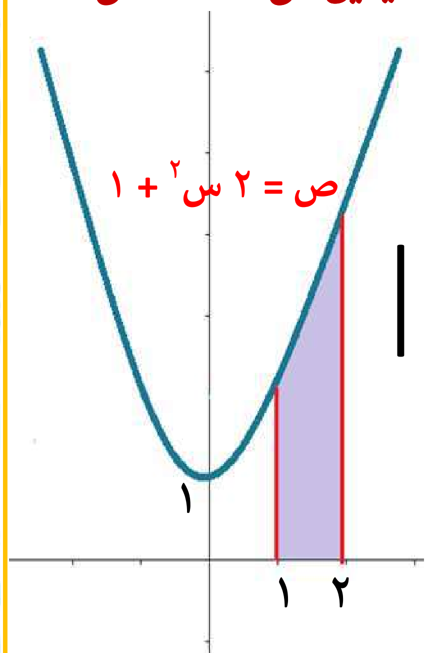
أ-٢ بين المنحنى ص = ٢س^{٢} + ١ ، والمحور السينى ، والمستقيمين س = ١ ، س = ٢

الإجابة

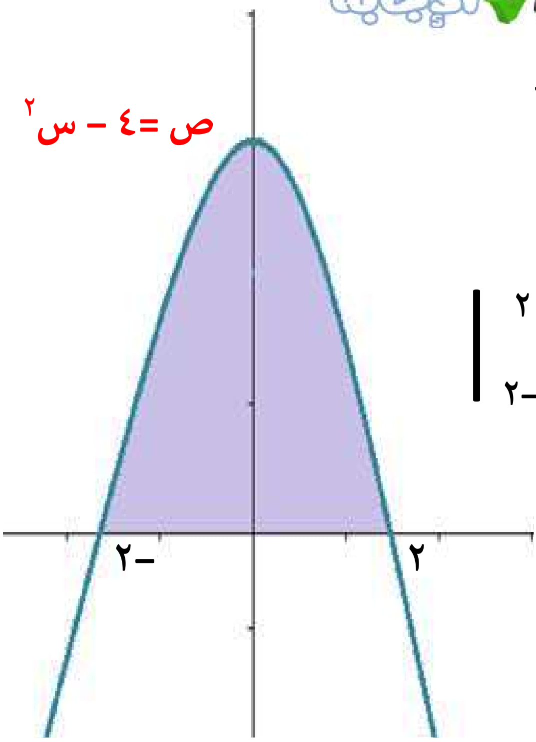
$$م = \left| \int_{١}^{٢} (٢س^{٢} + ١)\, ء س \right| =$$

$$م = \left| \left[\frac{٢}{٣}س^{٣} + س \right]_{١}^{٢} \right| = \left| \left(\frac{١٦}{٣} + ٢ \right) - \left(\frac{٢}{٣} + ١ \right) \right|$$

$= \frac{١٧}{٣}$ وحدة مربعة



ب-١ بين المنحنى ص = ٤ – س^{٢} ، والمحور السينى الإجابة



نقاط التقاطع مع محور السينات عند ص = صفر

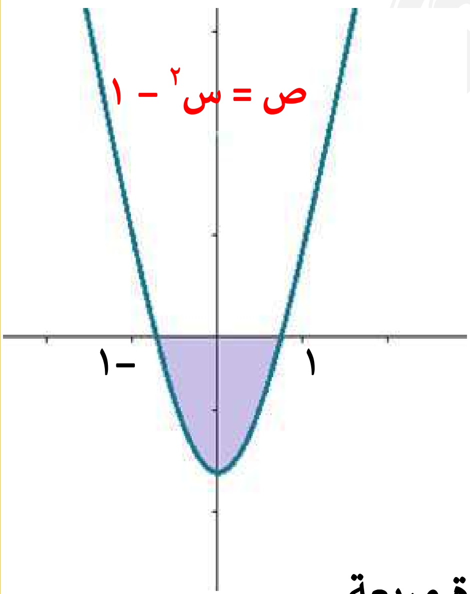
٤ – س^{٢} = ٠ ⟵ س^{٢} = ٤ ⟵ س = ± ٢

$$\text{م} = \left|\int_{-٢}^{٢} (٤ - \text{س}^{٢}) \,.\, \text{ء س}\right| = \left|\left[٤\text{س} - \frac{\text{س}^{٣}}{٣}\right]_{-٢}^{٢}\right|$$

$$= \left(٨ - \frac{٨}{٣}\right) - \left(-٨ + \frac{٨}{٣}\right) = \left|\frac{١٦}{٣} + \frac{١٦}{٣}\right|$$

$$= \frac{٣٢}{٣} \text{ وحدة مربعة}$$

ب-٢ بين المنحنى ص = س^{٢} – ١ ، والمحور السينى



نقاط التقاطع مع محور السينات عند ص = صفر

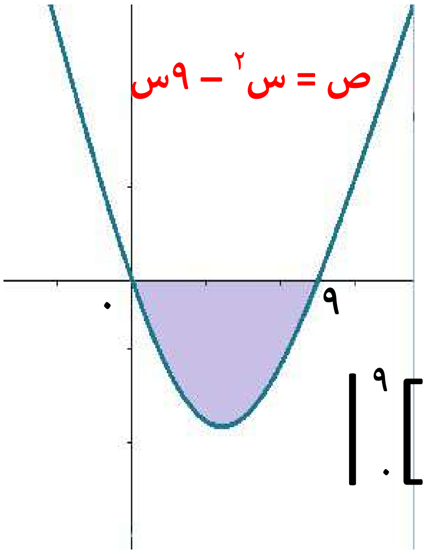
س^{٢} – ١ = ٠ ⟵ س = ± ١

$$\text{م} = \left|\int_{-١}^{١} (\text{س}^{٢} - ١) \,.\, \text{ء س}\right| = \left[\frac{\text{س}^{٣}}{٣} - \text{س}\right]_{-١}^{١}$$

$$= \left|\left(\frac{١}{٣} - ١\right) - \left(-\frac{١}{٣} + ١\right)\right| = \left|\frac{-٤}{٣}\right| = \frac{٤}{٣} \text{ وحدة مربعة}$$

ج-١

بين المنحنى ص = $س^{٢} - ٩س$ ، والمحور السينى



نقاط التقاطع مع المحور السينى عندما ص = صفر

$س^{٢} - ٩س = ٠ \longleftarrow س(س - ٩) = ٠$

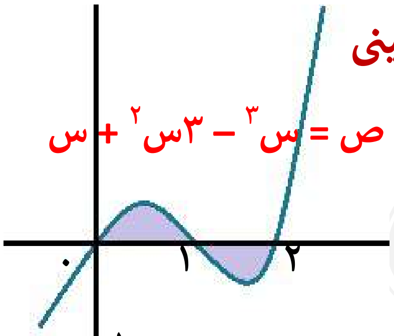
س = صفر ، س = ٩

$$م = \left|\int_{٠}^{٩} (س^{٢} - ٩س)\,.\,ء س\right| = \left|\left[\frac{س^{٣}}{٣} - \frac{٩}{٢}س^{٢}\right]_{٠}^{٩}\right|$$

$$= \left(\frac{٩^{٣}}{٣} - \frac{٩^{٣}}{٢}\right) - ٠ = \left|\frac{-٢٤٣}{٢}\right| = \frac{٢٤٣}{٢} \text{ وحدة مربعة}$$

ج-٢

بين المنحنى ص = $س^{٣} - ٣س^{٢} + ٢س$ ، والمحور السينى



نقاط التقاطع مع المحور السينى عندما ص = ٠

$س^{٣} - ٣س^{٢} + ٢س = ٠ \quad س\,(س^{٢} - ٣س + ٢) = ٠$

س = ٠ ، س = ٢ ، س = ١ $\quad م = م_{١} + م_{٢}$

$$م_{١} = \left|\int_{٠}^{١} (س^{٣} - ٣س^{٢} + ٢س)\,.\,ء س\right| = \left|\left[\frac{س^{٤}}{٤} - \frac{٣س^{٣}}{٣} + \frac{٢س^{٢}}{٢}\right]_{٠}^{١}\right|$$

$$= \left|\left(\frac{١}{٤} - ١ + ١\right) - ٠\right| = \frac{١}{٤} \text{ وحدة مربعة}$$

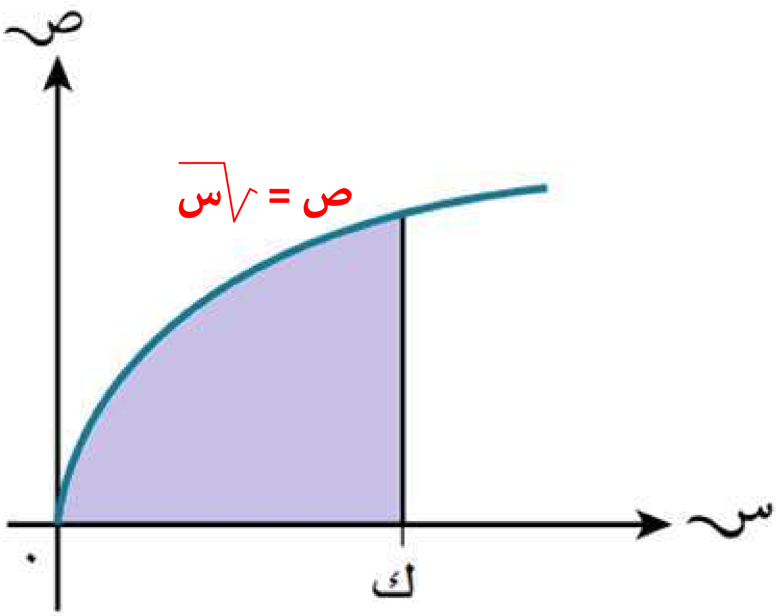
$$م_{٢} = \left|\int_{١}^{٢} (س^{٣} - ٣س^{٢} + ٢س)\,.\,ء س\right| = \left|\left[\frac{س^{٤}}{٤} - \frac{٣س^{٣}}{٣} + \frac{٢س^{٢}}{٢}\right]_{١}^{٢}\right|$$

$$= \left|(٤ - ٨ + ٤) - \left(\frac{١}{٤}\right)\right| = \frac{١}{٤} \text{ وحدة مربعة}$$

$$م = م_{١} + م_{٢} = \frac{١}{٤} + \frac{١}{٤} = \frac{١}{٢} \text{ وحدة مربعة}$$

السؤال الثالث

٣ يبين الشكل أدناه المنحنى $ص = \sqrt{س}$. أوجد قيمة ك إذا علمت أن مساحة المنطقة المظللة تساوى ١٨



الإجابة

$م = \int_{٠}^{ك} س^{\frac{١}{٢}} \cdot ءس = ١٨$

$\frac{٢}{٣} \left[س^{\frac{٣}{٢}} \right]_{٠}^{ك} = ١٨$

$ك^{\frac{٣}{٢}} = \frac{٣}{٢} \times ١٨$

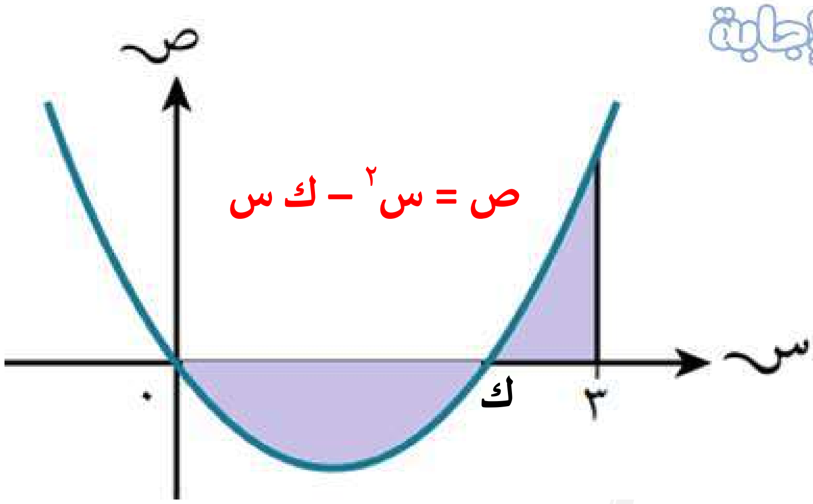
$ك^{\frac{٣}{٢}} = ٢٧ = ٣^{٣}$

$ك = (٣^{٣})^{\frac{٢}{٣}}$ $\quad$ $ك = ٣^{٢} = ٩$

السؤال الرابع

٤ مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور محصورة بين المنحنى $ص = س^٢ - ك\,س$ ، والمحور السيني والمستقيمين $س = ٠$ ، $س = ٣$ إذا علمت أن المساحة تحت المحور السيني مساوية للمساحة فوقه ، فأوجد قيمة ك .

الإجابة



نقاط التقاطع مع محور السينات عندما ص = ٠

$ص = س^٢ - ك\,س = صفر$

$س(س - ك) = ٠$

$س = صفر$ ، $س = ك$

المساحة أسفل محور السينات $م_١$ = المساحة فوق محور السينات $م_٢$

$$\left| \int_{٠}^{ك} (س^٢ - ك\,س)\,ء س \right| = \left| \int_{ك}^{٣} (س^٢ - ك\,س)\,ء س \right|$$

$$\left| \left[\frac{س^٣}{٣} - \frac{ك}{٢} س^٢ \right]_{٠}^{ك} \right| = \left| \left[\frac{س^٣}{٣} - \frac{ك}{٢} س^٢ \right]_{ك}^{٣} \right|$$

$$\left| \frac{ك^٣}{٣} - \frac{ك^٣}{٢} \right| = \left| \left(٩ - \frac{٩ك}{٢} \right) - \left(\frac{ك^٣}{٣} - \frac{ك^٣}{٢} \right) \right|$$

$$\frac{ك^٣}{٦} = ٩ - \frac{٩}{٢}ك + \frac{ك^٣}{٦} \qquad ٩ - \frac{٩}{٢}ك = ٠ \qquad ك = ٢$$

ملاحظات هــــامــــة

من الأفضل إيجاد قيم (قيمة) ص التي تكون عندها قيم د(ص) = ٠ حتى لو تم إعطاء الحدود

إذا وقعت المنطقة على يمين المحور الصادى فيكون قيمة التكامل موجبة حيث لاتوجد قيم سالبة لـ س

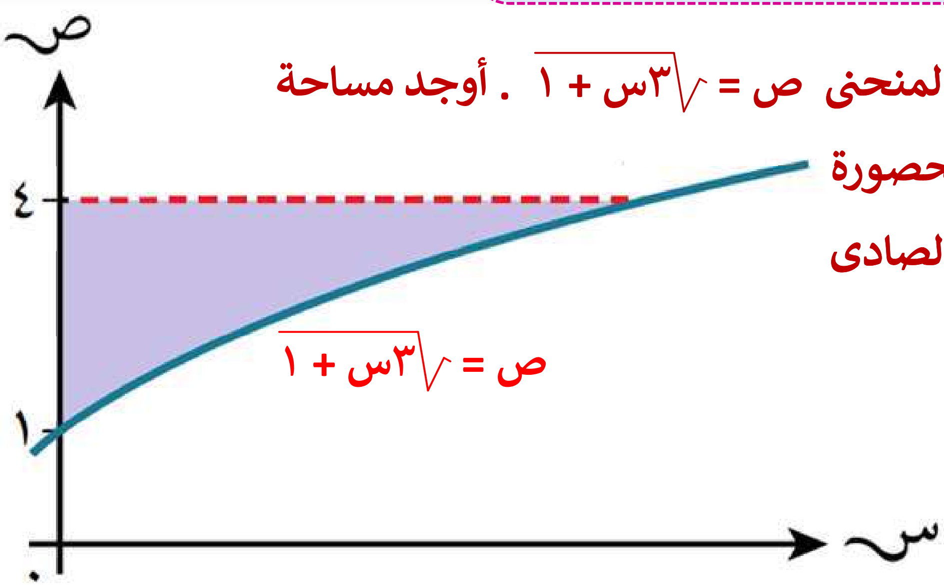
إذا وقعت المنطقة على يسار المحور الصادى فيكون قيمة التكامل سالبة حيث تكون قيم س سالبة   المساحة = القيمة المطلقة (دائما موجب)

في حالة وجود منطقتين أحدهما يمين المحور الصادى والأخرى يسار المحور الصادى

فإن المساحة الإجمالية = م١ + م٢ = $\left| \int_{\text{أ}}^{\text{ج}} \text{د(ص) . ء ص} \right| + \left| \int_{\text{ج}}^{\text{ب}} \text{د(ص) . ء ص} \right|$

السؤال الخامس

٥ يبين الشكل المجاور المنحنى $ص = \sqrt{٣س + ١}$. أوجد مساحة المنطقة المظللة المحصورة بين المنحنى والمحور الصادى ، والمستقيم ص = ٤ .



الإجابة

$$ص = \sqrt{٣س + ١}$$

$$ص^{٢} = ٣س + ١$$

$$س = \frac{ص^{٢} - ١}{٣}$$

$$م = \int_{١}^{٤} س \,.\, ءص = \frac{١}{٣} \int_{١}^{٤} (ص^{٢} - ١)\,.\, ءص$$

$$= \frac{١}{٣} \left[(\frac{ص^{٣}}{٣} - ص) \right]_{١}^{٤}$$

$$= \frac{١}{٣} (\frac{٦٤}{٣} - ٤) - (\frac{١}{٣} - ١)$$

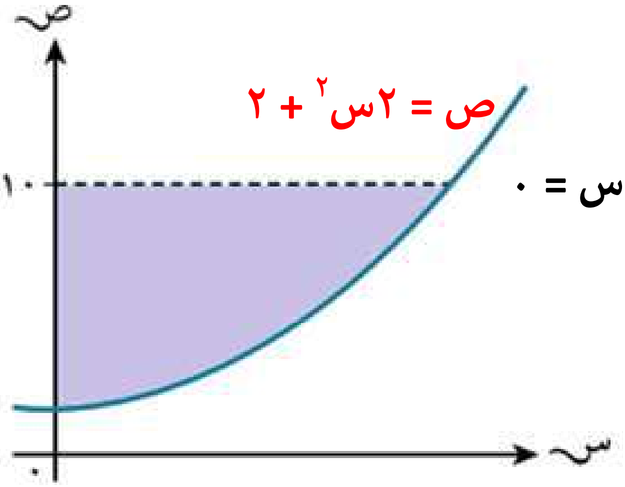
$$= \frac{١}{٣} \times ١٨ = ٦ \text{ وحدة مربعة}$$

٦

السؤال السادس

في الشكل المجاور : أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى

$\text{ص} = ٢\text{س}^{٢} + ٢$ والمستقيم $\text{ص} = ١٠$ ، والمحور الصادى .



الإجابة

نقاط التقاطع مع محورالصادات عندما س = ٠

$\text{ص} = ٢$

$$\text{ص} = ٢\text{س}^{٢} + ٢ \longleftarrow \frac{\text{ص} - ٢}{٢} = \text{س}^{٢}$$

$$\text{س} = \sqrt{\frac{\text{ص}}{٢} - ١}$$

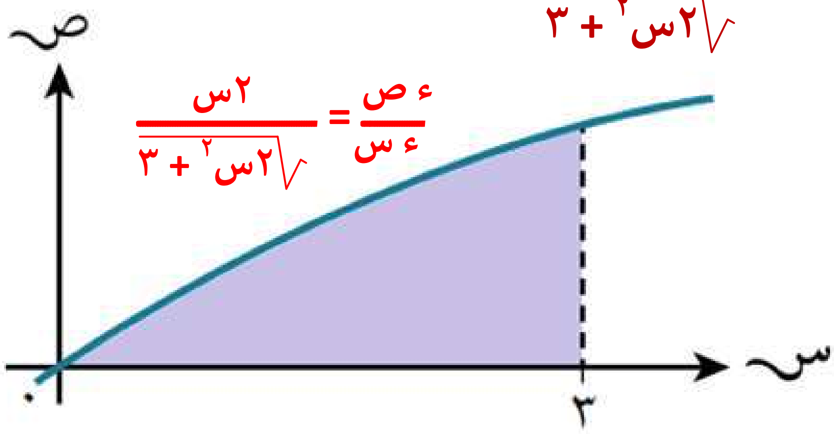
$$\text{م} = \int_{٢}^{١٠} \text{س} \,.\, \text{ء ص} = \int_{٢}^{١٠} \left(\frac{\text{ص}}{٢} - ١\right)^{\frac{١}{٢}} . \text{ء ص}$$

$$= \left[\frac{\left(\frac{١}{٢}\text{ص} - ١\right)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢} \times \frac{١}{٢}}\right]_{٢}^{١٠} = \left[\frac{٤}{٣}\left(\frac{١}{٢}\text{ص} - ١\right)^{\frac{٣}{٢}}\right]_{٢}^{١٠}$$

$$= \frac{٤}{٣}\left(\sqrt{٦٤} - \sqrt{٠}\right) = \frac{٣٢}{٣}$$ وحدة مربعة

السؤال السابع

٧-أ بين أن $\frac{ء}{ء س}\left(\sqrt{٢س^{٢} + ٣}\right) = \frac{٢س}{\sqrt{٢س^{٢} + ٣}}$



الإجابة

$$\frac{ء}{ء س} = (٢س^{٢} + ٣)^{\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٢} \times ٤س\,(٢س^{٢} + ٣)^{\frac{١}{٢} - ١}$$

$$= ٢س\,(٢س^{٢} + ٣)^{\frac{-١}{٢}} = \frac{٢س}{(٢س^{٢} - ٣)^{\frac{١}{٢}}}$$

$$= \frac{٢س}{\sqrt{٢س^{٢} + ٣}}$$

٧-ب استخدم النتيجة في الجزئية (أ) لتجد مساحة المنطقة المظللة .

الإجابة

$$م = \left| \int_{٠}^{٣} \frac{٢س}{\sqrt{٢س^{٢} + ٣}} \, ء س \right| = \left| \left[\sqrt{٢س^{٢} + ٣} \right]_{٠}^{٣} \right| = \sqrt{٢١} - \sqrt{٣}$$

$\simeq$ ٢,٨٥ وحدة مربعة

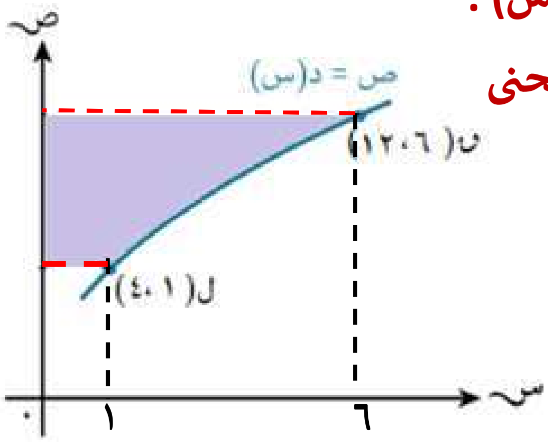
السؤال الثامن

٨ يبين الشكل المجاور جزءا من المنحنى ص = د(س) .

تقع النقطتان ل (١ ، ٤) ، ق (٦ ، ١٢) على المنحنى

إذا علمت أن $\int_{1}^{6}$ ص ء س = ٣٠

فأوجد قيمة $\int_{4}^{12}$ س ء ص



الإجابة

م = $\int_{4}^{12}$ س . ء ص = م . المستطيل ق أ و د − (م١ + م المستطيل هـ ب و جـ)

= ١٢ × ٦ − (٣٠ + ٤ × ١) = ٧٢ − ٣٤ = ٣٨ وحدة مربعة

السؤال التاسع

إذا كانت د(س) ، هـ(س) دالتين حيث $\int_{0}^{4}$ د(س) ء س = ١٧

، $\int_{0}^{4}$ هـ(س) ء س = ١١ فأوجد حيث أمكن قيمة كل مما يأتي :

٩-أ $\int_{0}^{4}$ (د(س) − هـ(س)) ء س = $\int_{0}^{4}$ د(س) . ء س − $\int_{0}^{4}$ هـ(س) . ء س = ١٧ − ١١ = ٦

٩-ب $\int_{0}^{4}$ (٢د(س) + ٣ هـ(س)) ء س

= ٢ $\int_{0}^{4}$ د(س) . ء س + ٣ $\int_{0}^{4}$ هـ(س) . ء س = ٢ × ١٧ + ٣ × ١١ = ٦٧

٩-ج $\int_{٠}^{٢}$ د(س) ء س (لا يمكن)

٩-د $\int_{٠}^{٤}$ (د(س) + ٢س + ٣) ء س

= $\int_{٠}^{٤}$ د(س) . ء س + ٢ $\int_{٠}^{٤}$ س . ء س + $\int_{٠}^{٤}$ ٣ . ء س

= ١٧ + ٢ $\left[\frac{س}{٢}\right]_{٠}^{٤}$ + $[٣س]_{٠}^{٤}$ = ١٧ + ١٦ + ١٢ = ٤٥

٩-هـ $\int_{٠}^{١}$ د(س) ء س + $\int_{١}^{٤}$ د(س) ء س = $\int_{٠}^{٤}$ د(س) . ء س = ١٧

٩-و $\int_{-٤}^{٠}$ هـ(س) ء س (لا يمكن)

٦-٧ مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ومستقيم أو بين منحنيين

ملاحظات

إذا تقاطع منحنيا دالتين عند س = أ ، س = ب فإن المساحة م المحصورة بين المنحنيين تعطى كما يلى :-

(١) $\text{م} = \left| \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س). ء س} - \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{هـ(س). ء س} \right|$ أو $\text{م} = \left| \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{(د(س) – هـ(س)). ء س} \right|$

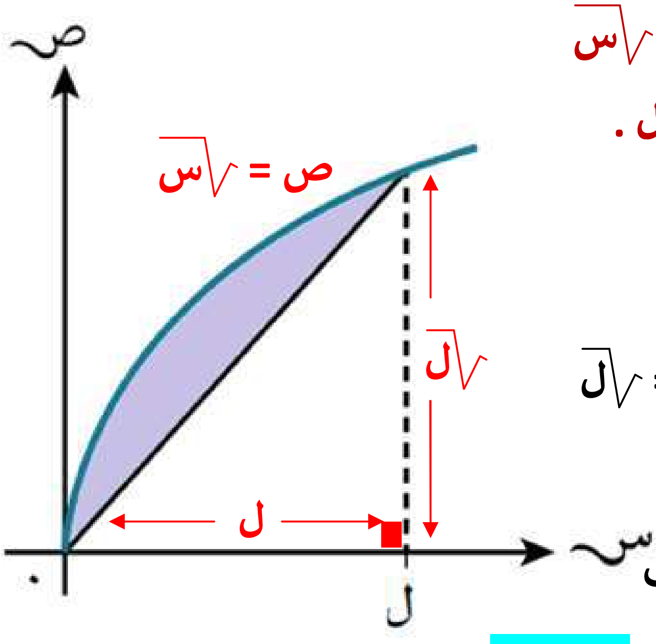
(٢) يمكنك إيجاد المساحة بين منحنى ومستقيم أو بين منحنيين بدون إستخدام المطلق من خلال تكامل (الدالة لأعلى – الدالة لأسفل) أو بإستخدام المطلق بدون ترتيب الدالتين

السؤال الأول

١

في الشكل المجاور ، إذا علمت أن $\text{ص} = \sqrt{\text{س}}$

أوجد مساحة المنطقة المظللة بدلالة ل .



الإجابة

هناك طريقتين للحل

الطريقة الأولى عندما $\text{س} = \text{ل}$ $\text{ص} = \sqrt{\text{ل}}$

م . مساحة المنطقة المظللة

$$= \left| \int_{0}^{\text{ل}} \sqrt{\text{س}}\ .\ \text{ءس} \right| - \text{مساحة المثلث}$$

$$= \left| \left[\frac{2}{3}\text{س}^{\frac{3}{2}} \right]_{0}^{\text{ل}} \right| - \frac{1}{2}\,\text{ل}\sqrt{\text{ل}} \qquad \boxed{\frac{1}{2}\,\text{ق} \times \text{ع}}$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{\text{ل}^{3}} - \frac{1}{2}\sqrt{\text{ل}^{3}} = \frac{\sqrt{\text{ل}^{3}}}{6}$$

(٢) الطريقة الثانية تحصل على معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطتين

$(0 \text{ ، } 0)$ ، $(\text{ل ، } \sqrt{\text{ل}})$

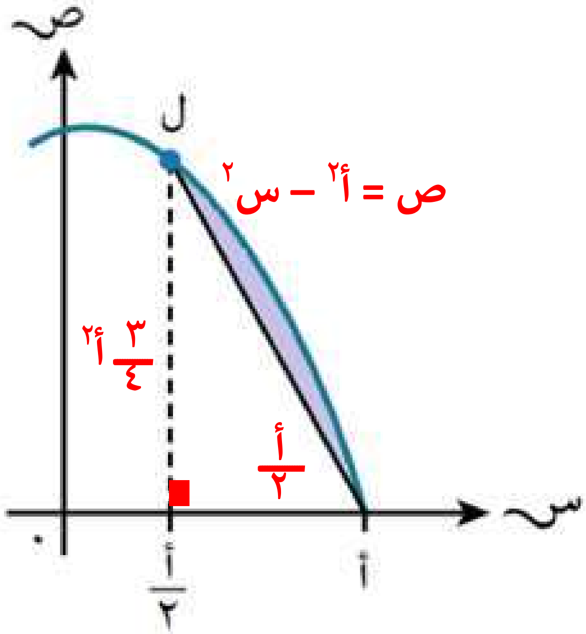
$$\frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{س} - \text{س}_1} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} \longleftarrow \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\sqrt{\text{ل}}}{\text{ل}} \longleftarrow \text{ص} = \text{ل}^{\frac{-1}{2}}\,\text{س}$$

$$\text{م} = \text{مساحة المنطقة المظللة} = \left| \int_{0}^{\text{ل}} \left(\sqrt{\text{س}} - \text{ل}^{\frac{-1}{2}}\,\text{س} \right) .\ \text{ءس} \right|$$

$$= \left| \left[\frac{2}{3}\text{س}^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\,\text{ل}^{\frac{-1}{2}}\,\text{س}^{2} \right]_{0}^{\text{ل}} \right| = \frac{2}{3}\sqrt{\text{ل}^{3}} - \frac{1}{2}\sqrt{\text{ل}^{3}} = \frac{\sqrt{\text{ل}^{3}}}{6} \ \text{وحدة مربعة}$$

السؤال الثانى

٢ يبين الشكل المجاور جزءا من منحنى الدالة ص = $\text{أ}^{٢} - \text{س}^{٢}$. أوجد مساحة المنطقة المظللة بدلالة أ إذا علمت أن الإحداثى السينى للنقطة ل هو $\frac{\text{أ}}{٢}$.



الإجابة

أيضا كما في التمرين السابق

توجدطريقتين للحل

الطريقة الأولى

مساحة المنطقة المظللة =

م المنطقة المحصورة المنحنى ومحور السينات – م . Δ ق ل أ

عند = $\frac{\text{أ}}{٢}$ ص = $\text{أ}^{٢} - \frac{\text{أ}^{٢}}{٤} = = \frac{٣}{٤}\text{أ}^{٢}$ ل = $\left(\frac{\text{أ}}{٢} ، \frac{٣}{٤}\text{أ}^{٢}\right)$

م . Δ = $\frac{١}{٢}$ ق × ع = $\frac{١}{٢} \times \frac{\text{أ}}{٢} \times \frac{٣}{٤}\text{أ}^{٢} = \frac{٣}{١٦}\text{أ}^{٣}$ وحدة مربعة

م١ . المنطقة االمحصورة بين المنحنى ومحور السينات = $\left| \int_{\frac{\text{أ}}{٢}}^{\text{أ}} (\text{أ}^{٢} - \text{س}^{٢}) \, . \, \text{ء س} \right|$

= $\left| \left[\text{أ}^{٢}\text{ س} - \frac{١}{٣}\text{س}^{٣} \right]_{\frac{\text{أ}}{٢}}^{\text{أ}} \right| = \left| (\text{أ}^{٣} - \frac{١}{٣}\text{أ}^{٣}) - (\frac{\text{أ}^{٣}}{٢} - \frac{\text{أ}^{٣}}{٢٤}) \right|$

= $\frac{٢}{٣}\text{أ}^{٣} - \frac{١١}{٢٤}\text{أ}^{٣} = \frac{٥}{٢٤}\text{أ}^{٣}$ وحدة مربعة

(المنطقة المظللة) = $\frac{٥}{٢٤}\text{أ}^{٣} - \frac{١١}{٢٤}\text{أ}^{٣} = \frac{١}{٤٨}\text{أ}^{٣}$ وحدة مربعة

الطريقة الثانية الحصول على معادلة المستقيم

معادلة المستقيم هي

$$\frac{\text{ص} - \text{ص}_١}{\text{س} - \text{س}_١} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} \qquad \frac{\text{ص} - ٠}{\text{س} - \text{أ}} = \frac{\frac{٣}{٤}\text{أ}^٢}{\frac{-\text{أ}}{٢}} = \frac{٣}{٤}\,\text{أ}$$

$$\text{ص} = \frac{-٣}{٢}\,\text{أ س} + \frac{٣}{٢}\,\text{أ}^٢$$

$$\text{م (المنطقة المظللة)} = \left| \int_{\frac{\text{أ}}{٢}}^{\text{أ}} \left(\text{أ}^٢ - \text{س}^٢ + \frac{٣}{٢}\,\text{أ س} - \frac{٣}{٢}\,\text{أ}^٢ \right) . \,\text{ء س} \right|$$

$$= \left| \int_{\frac{\text{أ}}{٢}}^{\text{أ}} \left(-\text{س}^٢ + \frac{٣}{٢}\,\text{أ س} - \frac{١}{٢}\,\text{أ}^٢ \right) . \,\text{ء س} \right|$$

$$= \left| \left[\frac{-\text{س}^٣}{٣} + \frac{٣}{٤}\,\text{أ س}^٢ - \frac{١}{٢}\,\text{أ}^٢\,\text{س} \right]_{\frac{\text{أ}}{٢}}^{\text{أ}} \right|$$

$$= \left| \left(-\frac{\text{أ}^٣}{٣} + \frac{٣}{٤}\,\text{أ}^٣ - \frac{١}{٢}\,\text{أ}^٣ \right) - \left(\frac{\text{أ}^٣}{٢٤} + \frac{٣}{١٦}\,\text{أ}^٣ - \frac{١}{٤}\,\text{أ}^٣ \right) \right|$$

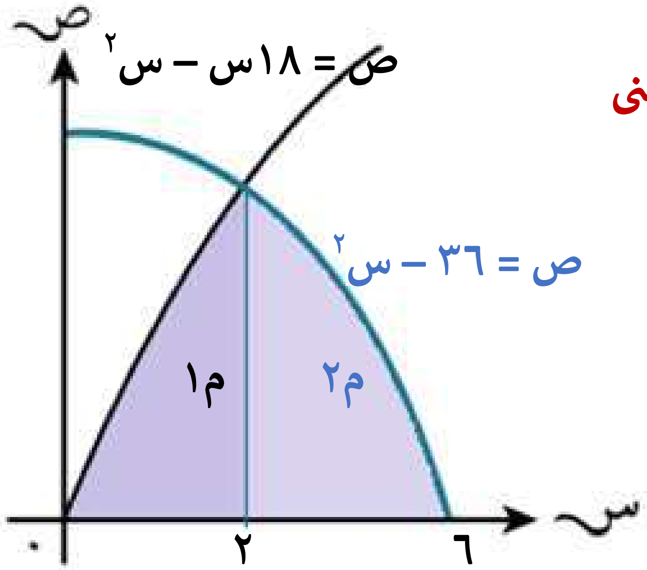
$$= \frac{-١٦ + ٣٦ - ٢٤ + ٢ - ٩ + ١٢}{٤٨}\,\text{أ}^٣ = \frac{-٤٩ + ٥٠}{٤٨}\,\text{أ}^٣ = \frac{١}{٤٨}\,\text{أ}^٣ \text{ وحدة مربعة}$$

السؤال الثالث

٣ يبين الشكل المجاور المنحنيين ص = ٣٦ – س^{٢} ، ص = ١٨س – س^{٢}

أوجد مساحة المنطقة المظللة

المحصورة بين المنحنيين والمحور السينى



الإجابة

لإيجاد نقاط التقاطع بين المنحنيين

نحل المعادلتين

١٨س – س^{٢} = ٣٦ – س^{٢} ١٨س = ٣٦ س = ± ٦

لإيجاد نقاط تقاطع المنحنى ص$_{١}$ = ٣٦ – س^{٢} مع محور السينات

عندما ص = ٠ س^{٢} = ٣٦ س = ± ٦

س = ٦

$$م = م_{١} + م_{٢} = \int_{٠}^{٢} (١٨س - س^{٢}) \,.\, ءس + \int_{٢}^{٦} (٣٦س - س^{٢}) \,.\, ءس$$

$$= \left[\frac{١٨}{٢} - \frac{١}{٣}س^{٣}\right]_{٠}^{٢} + \left[٣٦س - \frac{١}{٣}س^{٣}\right]_{٢}^{٦}$$

$$= (٩ \times ٤ - \frac{٨}{٣}) + (٢١٦ - \frac{٢١٦}{٣}) - (٧٢ - \frac{٨}{٣})$$

= ٣٦ + ٢١٦ – ٧٢ – ٧٢ = ١٠٨ وحدة مربعة

السؤال الرابع

٤

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المستقيم ص = ١٢س + ١٤ ، والمنحنى ص = ٣س^{٢} + ٦س + ٥

الإجابة

يمكن الحل مباشرة بدون رسم

لإيجاد نقاط التقاطع بين المنحنيين نحل المعادلتين

٣س^{٢} + ٦س + ٥ = ١٢س + ١٤

٣س^{٢} – ٦س – ٩ = ٠

س^{٢} – ٢س – ٣ = ٠

(س – ٣)(س + ١)

س = ٣ س = – ١

س = ٠

٣ ‏ ‏ ‏ ‏ ‏ ‏ ‏ – ١

م = $\int_{-١}^{٣}$ (١٢س + ١٤ – ٣س^{٢} – ٦س – ٥) . ءس

م = $\int_{-١}^{٣}$ (–٣س^{٢} + ٦س + ٩) . ءس

م = $\left[\ (–س^{٣} + ٣س^{٢} + ٩س)\ \right]_{-١}^{٣}$

م = (– ٢٧ + ٢٧ + ٢٧) – (١ + ٣ – ٩)

م = ٢٧ + ٥

م = ٣٢ وحدة مربعة

ويمكن بسهولة معرفة أي من الدالتين ناقص الأخرى

بأخذ بين –١ ، ٣

ولتكن س = ٠ ← ص$_{١}$ = ١٤

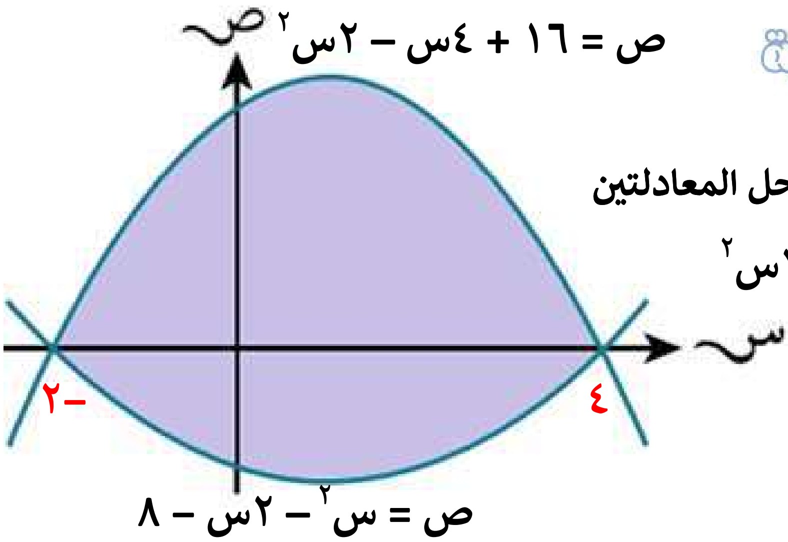
س = ٠ ← ص$_{٢}$ = ٥

ص$_{١}$ > ص$_{٢}$ ← ص$_{١}$ – ص$_{٢}$

أو يمكن استخدام المطلق وطرح أي من الدالتين من بعضهما

السؤال الخامس

٥ **يبين الشكل المجاور المنحنيين ص = ١٦ + ٤س − ٢س^{٢} ، ص = س^{٢} − ٢س − ٨**
أوجد مساحة المنطقة المظللة المحصورة بين المنحنيين .



الإجابة

لإيجاد نقاط التقاطع بين المنحنيين نحل المعادلتين

س^{٢} − ٢س − ٨ = ١٦ + ٤س − ٢س^{٢}

٣س^{٢} − ٦س − ٢٤ = ٠

س^{٢} − س^{٢} − ٨ = ٠

(س − ٤)(س + ٢)

س = ٤ س = −٢

م = $\int_{-٢}^{٤}$ (١٦ + ٤س − ٢س^{٢} − س^{٢} + ٢س + ٨) . ءس

م = $\int_{-٢}^{٤}$ (−٣س^{٢} + ٦س + ٢٤) . ءس

م = $\Big[$ −س^{٣} + ٣س^{٢} + ٢٤س $\Big]_{-٢}^{٤}$

= (−٦٤ + ٤٨ + ٩٦) − (٨ + ١٢ − ٤٨)

م = ١٠٨ وحدة مربعة

السؤال السادس

٦ أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين ص = (س − ٤)(٣س − ١) ، ص = (٤ − س)(١ + س) .

الإجابة

لإيجاد نقاط التقاطع بين المنحنيين نحل المعادلتين

(س − ٤)(٣س − ١) = (٤ − س)(١ + س)

(س − ٤)(٣س − ١) = − (س − ٤)(١ + س)

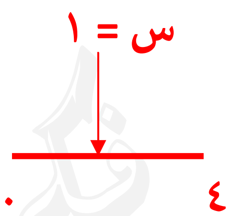
(س − ٤)(٣س − ١) + (س − ٤)(١ + س) = ٠

(س − ٤)(٣س − ١ + ١ + س) = صفر

٤س(س − ٤) = صفر

٤س = ٠ | س − ٤ = ٠

س = صفر | س = ٤



م = $\int_{٠}^{٤}$ ((٤ − س)(١ + س) − (س − ٤)(٣س − ١)) . ء س

م = $\int_{٠}^{٤}$ (٤ − س)(١ + س + ٣س − ١) . ء س

م = $\int_{٠}^{٤}$ (١٦ س − ٤س^{٢}) . ء س

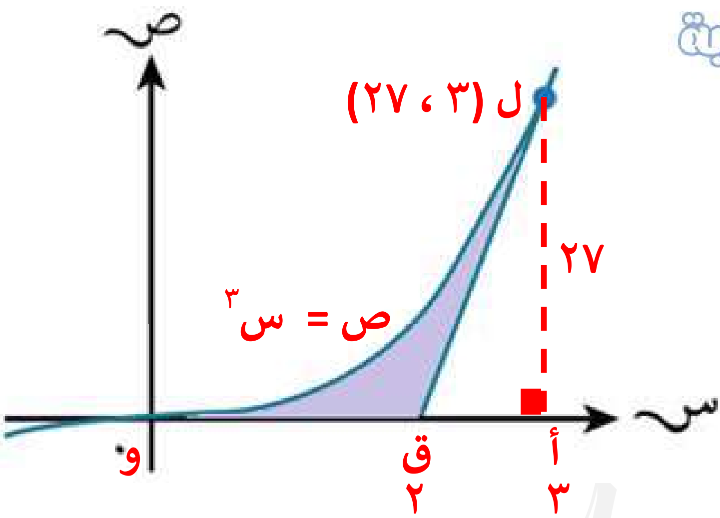
م = $\left[٨ س^{٢} - \frac{٤}{٣} س^{٣} \right]_{٠}^{٤}$

= ١٢٨ − $\frac{٢٥٦}{٣}$ = $\frac{١٢٨}{٣}$ وحدة مربعة

السؤال السابع

٧

يبين الشكل المجاور المنحنى ص = $س^٣$. إذا علمت أن ل ق مماس على المنحنى عند ل (٣ ، ٢٧) ، فأوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى ، والمماس ل ق ، والمحور السينى .



الإجابة

أولا نحصل على معادلة المماس

عند النقطة ل (٣ ، ٢٧)

م = ميل المماس = $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣$س^٢$ = ٢٧ | س = ٣

معادلة المماس هي : ص – ص١ = م (س – س١)

ص – ٢٧ = ٢٧س – ٨١ ⟵ ص – ٢٧س = – ٥٤ ⟵ ص = ٢٧س – ٥٤

نقطة تقاطع المماس مع محور السينات

عند ص = ٠ ⟵ ٢٧س – ٥٤ = ٠

٢٧س = ٥٤ ⟵ س = ٢ ⟵ ق (٢ ، ٠)

م (المنطقة المظللة) = مساحة المنطقة أسفل المنحنى ومحصورة بين المستقيم

س = ٣ ومحور السينات – م . Δ ل أ ق

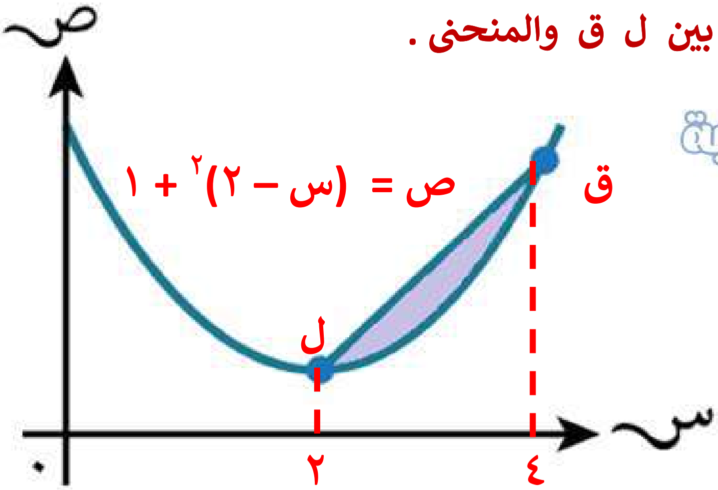
$= \int_{٠}^{٣} س^٣ \, ءس$ – م . Δ ل أ ق = $\left[\frac{س^٤}{٤}\right]_{٠}^{٣}$ – $\frac{١}{٢}$ × ١ × ٢٧

= $\frac{٣^٤}{٤}$ – $\frac{٢٧}{٢}$ = $\frac{٢٧}{٤}$ وحدة مربعة

السؤال الثامن

٨

يبين الرسم المجاور المنحنى ص = (س − ٢)^{٢} + ١ ، والنقطة الصغرى ل . إذا علمت أن النقطتين ق ، ل تقعان على المنحنى حيث ميل ل ق يساوى ٢ ، فأوجد :
مساحة المنطقة المظللة المحصورة بين ل ق والمنحنى .



الإجابة

∵ ص = (س − ٢)^{٢} + ١ معادلة تربيعية

∴ نقطة رأس المنحنى نقطة صغرى

∴ ل (٢ ، ١)

∴ معادلة ل ق هي : $\dfrac{\text{ص} - \text{ص}_{١}}{\text{س} - \text{س}_{١}}$ = م

$\dfrac{\text{ص} - ١}{\text{س} - ٢}$ = ٢ ص − ١ = ٢س − ٤ ∴ ص = ٢س − ٣

بحل معادلة المستقيم والمنحنى للحصول على نقاط التقاطع (حدود التكامل)

(س − ٢)^{٢} + ١ = ٢س − ٣ س^{٢} − ٤س + ٤ + ١ = ٢س − ٣

س^{٢} − ٦س + ٨ = ٠ (س − ٢) (س − ٤) = ٠

س = ٢ س = ٤

م (المنطقة المظللة) = $\int_{٢}^{٤}$ (٢س − ٣ − (س − ٢)^{٢} − ١). ء س

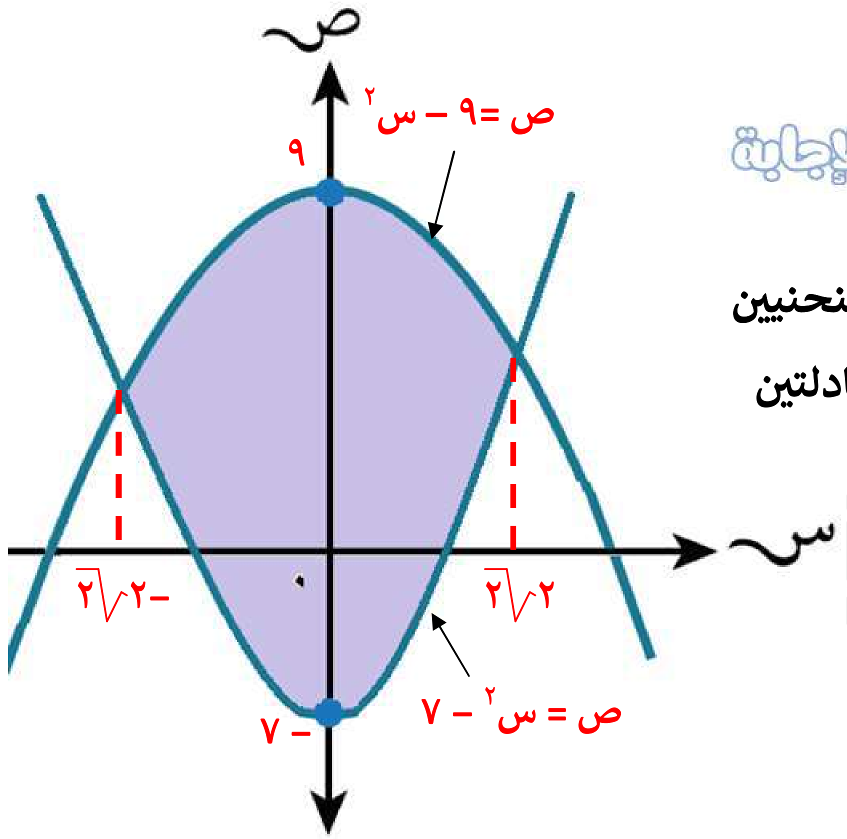
= $\int_{٢}^{٤}$ (٢س − ٣ − س^{٢} + ٤س − ٤ − ١) . ء س = $\int_{٢}^{٤}$ (− س^{٢} + ٦س − ٨س) . ء س

= $\left[\dfrac{-\text{س}^{٣}}{٣} + \dfrac{٦}{٢}\text{س}^{٢} - ٨\text{س} \right]_{٢}^{٤}$ = ($\dfrac{-٦٤}{٣}$ + ٤٨ − ٣٢) − ($\dfrac{-٨}{٣}$ + ١٢ − ١٦)

= $\dfrac{-١٦}{٣}$ + $\dfrac{٢٠}{٣}$ = $\dfrac{٤}{٣}$ وحدة مربعة

السؤال التاسع

٩ بين أن المساحة المحصورة بين المنحنيين $\text{ص} = ٩ - \text{س}^٢$ ، $\text{ص} = \text{س}^٢ - ٧$ تساوى $\frac{١٢٨\sqrt{٢}}{٣}$ وحدة مربعة .



الإجابة

لإيجاد نقاط التقاطع بين المنحنيين

(حدود التكامل) نحل المعادلتين

$$٩ - \text{س}^٢ = \text{س}^٢ - ٧$$

$$٢\text{س}^٢ = ١٦ \qquad \text{س}^٢ = ٨$$

$$\text{س} = \pm ٢\sqrt{٢}$$

$$\text{م (المساحة المحصورة)} = \int_{-٢\sqrt{٢}}^{٢\sqrt{٢}} (٩ - \text{س}^٢ - \text{س}^٢ + ٧) \,.\, \text{ء س}$$

$$= \int_{-٢\sqrt{٢}}^{٢\sqrt{٢}} (-٢\text{س}^٢ + ١٦) \,.\, \text{ء س}$$

$$= \left[-\frac{٢}{٣}\text{س}^٣ + ١٦\,\text{س}\right]_{-٢\sqrt{٢}}^{٢\sqrt{٢}} = \left(-\frac{٣٢}{٣}\sqrt{٢} + ٣٢\sqrt{٢}\right) - \left(\frac{٣٢}{٣}\sqrt{٢} - ٣٢\sqrt{٢}\right)$$

$$= -\frac{٦٤}{٣}\sqrt{٢} + ٦٤\sqrt{٢}$$

$$= \frac{٢ \times ٦٤\sqrt{٢}}{٣} = \frac{١٢٨\sqrt{٢}}{٣} \text{ وحدة مربعة}$$

حل ٦-٨ حجوم الأجسام الدورانية

ملاحظات

(١) حجم الجسم الدورانى الناتج من دوران الدالة ص = د(س) حول محور السينات دورة كاملة بين القيمتين س = أ ، س = ب : $ح = \pi \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ص}^2 \, \text{ء س}$

(١) حجم الجسم الدورانى الناتج من دوران الدالة س = د(ص) حول محور الصادات دورة كاملة بين القيمتين ص = أ ، ص = ب : $ح = \pi \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{س}^2 \, \text{ء ص}$

السؤال الأول

أوجد حجم الجسم الدورانى الناتج من دوران المنحنى ص = د(س) بين المستقيمين س = أ ، س = ب دورة كاملة (٣٦٠°) حول المحور السينى في كل مما يأتي :

١-أ د(س) = س + ٣ ، أ = ٣ ، ب = ٩

الإجابة

$$ح = \pi \int_{3}^{9} \text{ص}^2 \, \text{ء س} = \pi \int_{3}^{9} (\text{س} + 3)^2 \, \text{ء س} = \left[\frac{\pi (\text{س} + 3)^3}{3 \times 1} \right]_{3}^{9}$$

$$= \frac{\pi}{3} \left[12^3 - 6^3 \right] = 504\,\pi \ \text{وحدة مكعبة}$$

١-ب $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + ١$ ، أ = ٢ ، ب = ٥

الإجابة

$$\text{ح} = \pi \int_{٢}^{٥} \text{ص}^{٢} \,\text{ءس} = \pi \int_{٢}^{٥} (\text{س}^{٢} + ١)^{٢} \,\text{ءس} = \pi \int_{٢}^{٥} (\text{س}^{٤} + ٢\text{س}^{٢} + ١) \,\text{ءس}$$

$$= \pi \left[\left(\frac{\text{س}^{٥}}{٥} + \frac{٢}{٣}\text{س}^{٣} + \text{س} \right) \right]_{٢}^{٥}$$

$$= \pi \left[\left(٥^{٤} + \frac{٢٥٠}{٣} + ٥ \right) - \left(\frac{٣٢}{٥} + \frac{١٦}{٣} + ٢ \right) \right] = \frac{٣٤٩٨}{٥}\pi \ \text{وحدة مكعبة}$$

١-ج $\text{د}(\text{س}) = \sqrt{\text{س} + ١}$ ، أ = ٠ ، ب = ٣

الإجابة

$$\text{ح} = \pi \int_{٠}^{٣} \text{ص}^{٢} \,\text{ءس} = \pi \int_{٠}^{٣} (\text{س} + ١) \,\text{ءس} = \pi \left[\frac{\text{س}^{٢}}{٢} + \text{س} \right]_{٠}^{٣}$$

$$= \pi \left(\frac{٩}{٢} + ٣ \right) = \frac{١٥}{٢}\pi \ \text{وحدة مكعبة}$$

١-د $\text{د}(\text{س}) = \text{س}\,(\text{س} - ٢)$ ، أ = ٠ ، ب = ٢

الإجابة

$$\text{ح} = \pi \int_{٠}^{٢} \text{ص}^{٢} \,\text{ءس} = \pi \int_{٠}^{٢} (\text{س}^{٢} - ٢\text{س})^{٢} \,\text{ءس}$$

$$= \pi \int_{٠}^{٢} (\text{س}^{٤} - ٤\text{س}^{٣} + ٤\text{س}^{٢}) \,\text{ءس}$$

$$= \pi \left[\left(\frac{\text{س}^{٥}}{٥} - \frac{٤}{٤}\text{س}^{٤} + \frac{٤}{٣}\text{س}^{٣} \right) \right]_{٠}^{٢}$$

$$= \pi \left[\left(\frac{٣٢}{٥} - ١٦ + \frac{٣٢}{٣} \right) - ٠ \right] = \frac{١٦}{١٥}\pi \ \text{وحدة مكعبة}$$

السؤال الثانى

أوجد حجم الجسم الدورانى الناتج من دوران كل المنحنيات الآتية بين المستقيمين ص = جـ ، ص = د دورة كاملة (٣٦٠°) حول المحور الصادى :

٢-أ د(س) = $س^٢$ ، جـ = ١ ، د = ٣

الإجابة

$$ح = \pi \int_{١}^{٣} س^٢ \, ءص = \pi \int_{١}^{٣} ص \, ءص = \pi \left[\frac{ص^٢}{٢} \right]_{١}^{٣}$$

$$= \frac{\pi}{٢} (٩ - ١) = ٤\pi \text{ وحدة مكعبة}$$

٢-ب د(س) = س + ١ ، جـ = ١ ، د = ٤

الإجابة

$$ح = \pi \int_{١}^{٤} س^٢ \, ءص = \pi \int_{١}^{٤} (ص - ١)^٢ \, ءس = \pi \left[\frac{(ص - ١)^٣}{٣ \times ١} \right]_{١}^{٤}$$

$$= \frac{\pi}{٣} (٢٧ - ٠) = ٩\pi \text{ وحدة مكعبة}$$

٢-ج د(س) = $\sqrt{س}$ ، جـ = ٢ ، د = ٧ الإجابة

ص = $\sqrt{س}$ ← س = $ص^٢$ ← $س^٢ = ص^٤$

$$ح = \pi \int_{٢}^{٧} س^٢ \, ءص = \pi \int_{٢}^{٧} ص^٤ \, ءص = \pi \left[\frac{ص^٥}{٥} \right]_{٢}^{٧}$$

$$= \frac{\pi}{٥} (٧^٥ - ٢^٥) = ٣٣٥٥\pi \text{ وحدة مكعبة}$$

٢-د $د(س) = \frac{١}{س}$ ، جـ = ٢ ، د = ٥ الإجابة

$ص = \frac{١}{س} \leftarrow س = \frac{١}{ص} \leftarrow س^٢ = \frac{١}{ص^٢} = ص^{-٢}$

$ح = \pi \int_{٢}^{٥} س^٢ \, ءص = \pi \int_{٢}^{٥} ص^{-٢} \, ءص = \pi \left[\frac{-١}{ص} \right]_{٢}^{٥}$

$= \pi \left(\frac{-١}{٥} + \frac{١}{٢} \right) = \frac{٣}{١٠} \pi$ وحدة مكعبة

٢-هـ $د(س) = \sqrt{٩ - س}$ ، جـ = ٠ ، د = ٣ الإجابة

$ص = \sqrt{٩ - س} \leftarrow ص^٢ = ٩ - س \leftarrow س = ٩ - ص^٢$

$س^٢ = (٩ - ص^٢)^٢$

$س^٢ = ٨١ - ١٨ص^٢ + ص^٤$

$ح = \pi \int_{٠}^{٣} س^٢ \, ءص = \pi \int_{٠}^{٣} (٨١ - ١٨ص^٢ + ص^٤) \, ءص$

$= \pi \left[٨١ص - \frac{١٨}{٣} ص^٣ + \frac{١}{٥} ص^٥ \right]_{٠}^{٣}$

$= \pi \left[(٢٤٣ - ٦ \times ٣^٣ + \frac{٣^٥}{٥}) - ٠ \right] = \frac{٦٤٨}{٥} \pi$ وحدة مكعبة

٢-و $\text{د(س)} = \text{س}^{٢} + ١$ ، $\text{جـ} = ١$ ، $\text{د} = ٤$

الإجابة

$\text{ص} = \text{س}^{٢} + ١ \longleftarrow \text{س}^{٢} = \text{ص} - ١$

$$\text{ح} = \pi \int_{١}^{٤} \text{س}^{٢} \, \text{ءص} = \pi \int_{١}^{٤} (\text{ص} - ١) \, \text{ءص} = \pi \left[\frac{(\text{ص} - ١)^{٢}}{٢ \times ١} \right]_{١}^{٤}$$

$$= \frac{\pi}{٢} \, [\, (٩ - ٠) \,] = \frac{٩}{٢} \pi \ \text{وحدة مكعبة}$$

٢-ز $\text{د(س)} = \text{س}^{\frac{٢}{٣}}$ ، $\text{جـ} = ١$ ، $\text{د} = ٥$

الإجابة

$\text{ص} = \text{س}^{\frac{٢}{٣}} \longleftarrow \text{س} = \text{ص}^{\frac{٣}{٢}} \longleftarrow \text{س}^{٢} = \text{ص}^{٣}$

$$\text{ح} = \pi \int_{١}^{٥} \text{س}^{٢} \, \text{ءص} = \pi \int_{١}^{٥} \text{ص}^{٣} \, \text{ءص} = \frac{\pi}{٤} \, [\, \text{ص}^{٤} \,]_{١}^{٥}$$

$$= \frac{\pi}{٤} \, (٥^{٤} - ١) = ١٥٦ \, \pi \ \text{وحدة مكعبة}$$

٢-ح د(س) = $\frac{١}{س} + ٢$ ، جـ = ٣ ، د = ٥

الإجابة

$ص = \frac{١}{س} + ٢ \longleftarrow \frac{١}{س} = ص - ٢$

$س = \frac{١}{ص - ٢} \longleftarrow س^{٢} = (ص - ٢)^{-٢}$

$$ح = \pi \int_{٣}^{٥} (ص - ٢)^{-٢} \, ء ص = \pi \left[\frac{-١}{ص - ٢} \right]_{٣}^{٥}$$

$= \pi \left(\frac{-١}{٣} + ١\right) = \frac{٢}{٣}\pi$ وحدة مكعبة

السؤال الثالث

٣ أوجد حجم الجسم الدورانى الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين المحورين السينى و الصادى والمستقيم س = ٢ ، والمنحنى ص = $\frac{١}{٨} س^{٢} + ٢$

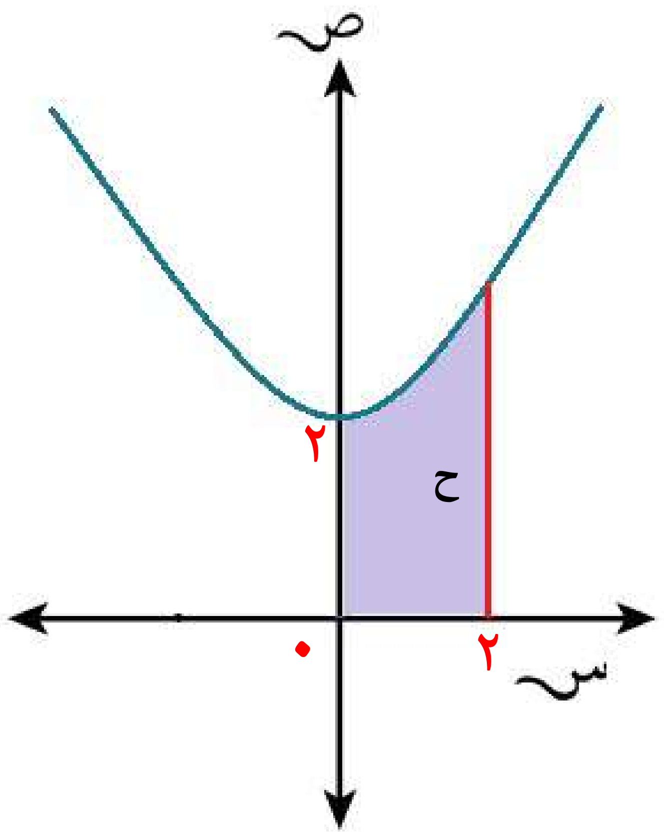
الإجابة

لم يذكر السؤال أن المطلوب الدوران حول المحور السينى أم الصادى

سيتم حل السؤال في الحالتين

أولا في حالة الدوران حول المحور السينى :

$$ح = \pi \int_{٠}^{٢} ص^{٢} \, ء س = \pi \int_{٠}^{٢} \left(\frac{١}{٨} س^{٢} + ٢\right)^{٢} ء س$$



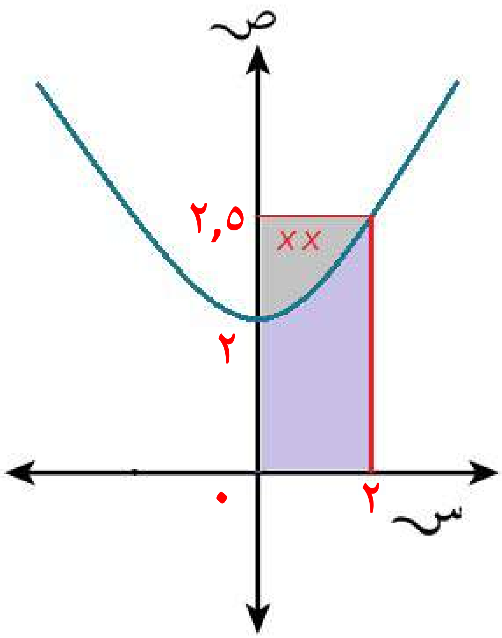
$$= \pi \int_{.}^{} \left(\frac{١}{٦٤} \text{س}^{٤} + \frac{١}{٢} \text{س}^{٢} + ٤ \right) \text{ءس}$$

$$= \pi \left[\frac{\text{س}^{٥}}{٣٢٠} + \frac{١}{٦} \text{س}^{٣} + ٤\text{س} \right]_{.}^{٢}$$

$$= \pi \left(\frac{٣٢}{٣٢٠} + \frac{٨}{٦} + ٨ \right) - (٠)$$

$$= \frac{٢٨٣}{٣٠} \pi \text{ وحدة مكعبة}$$

ثانيا في حالة الدوران حول المحور الصادى :



$$\text{ص} = \frac{١}{٨} \text{س}^{٢} + ٢ \longleftarrow \text{س}^{٢} = ٨ \left(\text{ص} - ٢ \right)$$

$$\text{عند س} = ٢ \longleftarrow \text{ص} = \frac{١}{٨} ٢^{٢} + ٢ = ٢,٥$$

$$\text{ح} = \pi \int_{.}^{٢,٥} ٢^{٢} \text{ ءص} - \pi \int_{٢}^{٢,٥} ٨ \left(\text{ص} - ٢ \right) \text{ءص}$$

$$= \pi \left[\left[٤\text{ص} \right]_{.}^{٢,٥} - \frac{٨}{٢} \left(\text{ص} - ٢ \right)^{٢} \right]_{٢}^{٢,٥}$$

$$= \pi \left(٤ \times ٢,٥ - ٤ \left(٢,٥ - ٢ \right) + ٠ \right) = \pi \left(١٠ - ١ \right) ٩ \pi \text{ وحدة مكعبة}$$

السؤال الرابع

٤ تم دوران جزء من المنحنى ص = ك س^{٢} ، حيث ك عدد ثابت ، حول المستقيمين ص = ١ ، ص = ٣ دورة كاملة (٣٦٠°) حول المحور الصادى . إذا علمت أن حجم الجسم الدورانى = ١٢π وحدة مكعبة ، فأوجد قيمة ك .

الإجابة

$$ص = ك\,س^{٢} \longleftarrow س^{٢} = \frac{ص}{ك}$$

$$ح = \pi \int_{١}^{٣} س^{٢}\, ء ص = ١٢\,\pi$$

$$\pi \int_{١}^{٣} \frac{ص}{ك}\, ء ص = ١٢\,\pi$$

$$\frac{\pi}{٢\,ك} \left[ص^{٢} \right]_{١}^{٣} = ١٢\pi$$

$$\frac{\pi}{٢\,ك} \left(٩ - ١ \right) = ١٢\,\pi$$

$$\frac{٨\,\pi}{٢\,ك} = ١٢\,\pi \longrightarrow ك = \frac{١}{٣}$$

السؤال الخامس

٥ تم دوران جزء من منحنى الدالة $ص = \frac{٩}{٢س + ٣}$ الواقع بين س = ٠ ، س = ٣ دورة كاملة (٢π) حول المحور السينى . أوجد حجم الجسم الدورانى الناتج .

الإجابة

$$ح = \pi \int_{٠}^{٣} ص^{٢} \, ء س = \pi \int_{٠}^{٣} \left(٩ \, (٢س + ٣)^{-١} \right)^{٢} ء س$$

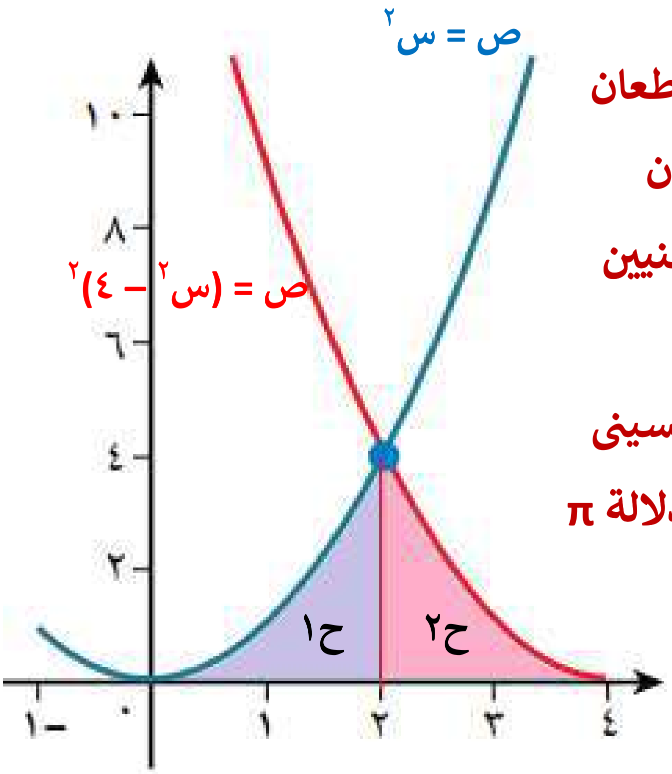
$$ح = ٨١\pi \int (٢س + ٣)^{-٢} \, ء س = ٨١\pi \left[\frac{-١}{٢ \, (٢س + ٣)} \right]_{٠}^{٣}$$

$$= \frac{-٨١}{٢} \pi \left(\frac{١}{٩} - \frac{١}{٣} \right) = \frac{-٨١}{٢} \pi \left(\frac{١ - ٣}{٩} \right)$$

$$= \frac{-٨١}{٢} \pi \times \frac{-٢}{٩} = ٩\pi \text{ وحدة مكعبة}$$

السؤال السادس

٦ يبين الشكل المجاور المنحنيين ص = س^{٢} ، ص = (س – ٤)^{٢} اللذين يتقاطعان في النقطة (٢ ، ٤) إذا علمت أنه تم دوران المنطقة المظللة المحصورة بين المنحنيين والمحور السينى والمستقيمين س = ٠ ، س = ٤ ، بمقدار ٢π حول المحور السينى فأوجد حجم الجسم الدورانى الناتج بدلالة π



الإجابة

ح = ح$_{١}$ + ح$_{٢}$

ص$_{١}$ = س^{٢} ⟵ ص$_{١}^{٢}$ = س^{٤}

ح$_{١}$ = π $\int_{٠}^{٢}$ ص$_{١}^{٢}$ ء س = π $\int_{٠}^{٢}$ س^{٤} ء س = $\frac{π}{٥}$ [س^{٥}]$_{٠}^{٢}$ = $\frac{٣٢}{٥}$ π وحدة مكعبة

ص$_{٢}$ = (س – ٤)^{٢} ⟵ ص$_{٢}^{٢}$ = (س – ٤)^{٤}

ح$_{٢}$ = π $\int_{٢}^{٤}$ (س – ٤)^{٤} ء س = $\frac{π}{٥}$ [(س – ٤)^{٥}]$_{٢}^{٤}$

= $\frac{π}{٥}$ (٠ – (– ٣٢)) = $\frac{٣٢}{٥}$ π وحدة مكعبة

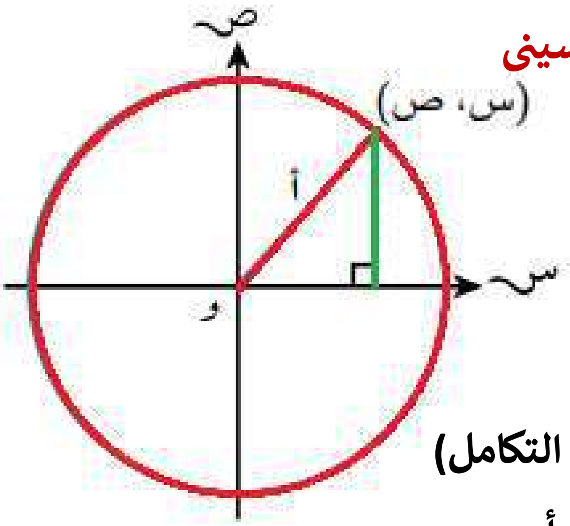
ح = ح$_{١}$ + ح$_{٢}$ = $\frac{٣٢}{٥}$ π + $\frac{٣٢}{٥}$ π = $\frac{٦٤}{٥}$ π وحدة مكعبة

السؤال السابع

٧ في الشكل المجاور دائرة معادلتها س^{٢} + ص^{٢} = أ^{٢}

تم دوران نصف الدائرة الواقع فوق المحور السينى دورة كاملة (٢π) لتشكل كرة نصف قطرها أ .

برهن أن حجم الكرة (ح) = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣}



الإجابة

نقاط تقاطع الدائرة مع محور السينات (حدود التكامل)

عند ص = ٠ ← س^{٢} = أ^{٢} ← س = ± أ

$$ح = \pi \int_{-أ}^{أ} ص^{٢} \, ء س = \pi \int_{-أ}^{أ} (أ^{٢} - س^{٢}) \, ء س$$

$$= \pi \left[أ^{٢} س - \frac{س^{٣}}{٣} \right]_{-أ}^{أ}$$

$$= \pi \left(\frac{٢}{٣} أ^{٣} + \frac{٢}{٣} أ^{٣} \right) = \frac{٤}{٣} \pi أ^{٣}$$

حل تمارين مراجعة نهاية الوحدة السادسة

السؤال الأول

١ أوجد معادلة المنحنى الذى دالة ميل مماسه $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٣س} - \sqrt{\text{س}}$ ، ويمر بالنقطة (٤ ، −١)

الإجابة

$\because \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٣س} - \sqrt{\text{س}}$

$\text{ص} = \int (\text{٣س} - \sqrt{\text{س}})\ \text{ءس} = \int (\text{٣س} - \text{س}^{\frac{١}{٢}})\ .\ \text{ءس}$

$\text{ص} = \frac{٣}{٢}\text{س}^{٢} - \frac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$

∵ المنحنى يمر بالنقطة (٤ ، −١) ∴ تحقق معادلته

$-١ = \frac{٣}{٢} \times ١٦ - \frac{٢}{٣} \times ٨ + \text{جـ}$

$\therefore \text{جـ} = \frac{-٥٩}{٣}$

∴ معادلة المنحنى هي : $\text{ص} = \frac{٣}{٢}\text{س}^{٢} - \frac{٢}{٣}\sqrt{\text{س}^{٣}} - \frac{٥٩}{٣}$

السؤال الثانى

٢ أ أوجد قيمة $\int_{٢}^{٢\sqrt{٣}} \left[٣ - \frac{١٢}{\text{س}^{٢}} \right] \text{ء س}$. و أكتب الإجابة في صورة أ + ب $\sqrt{٣}$ حيث أ ، ب عددان صحيحان

الإجابة

قيمة $\int_{٢}^{٢\sqrt{٣}} ٣ - \frac{١٢}{\text{س}^{٢}} \, \text{ء س} = \left[٣\text{س} + \frac{١٢}{\text{س}} \right]_{٢}^{٢\sqrt{٣}}$

$= \left(٦\sqrt{٣} + \frac{١٢}{٢\sqrt{٣}} \right) - (٦ + ٦) = \frac{٢٤}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} - ١٢$

$= \frac{٢٤}{٣} \sqrt{٣} - ١٢ = -١٢ + ٨\sqrt{٣} = \text{أ} + \text{ب} \sqrt{٣}$

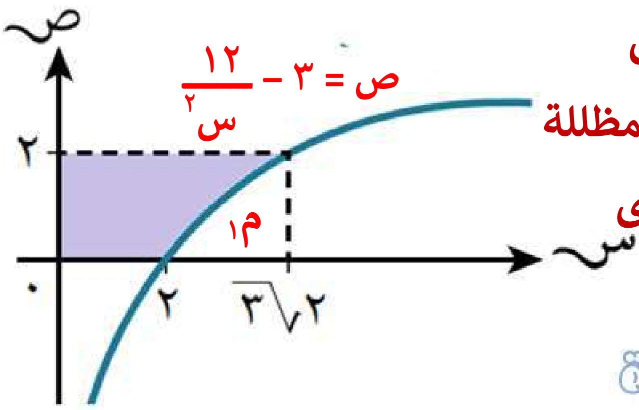
٢ب في الشكل المجاور منحنى معادلته

ص = $٣ - \frac{١٢}{\text{س}^{٢}}$ ، ويقطع المحور السينى

عند س = ٢ . أوجد مساحة المنطقة المظللة

المحصورة بين المنحنى والمحور الصادى

والمستقيمين ص = ٠ ، ص = ٢



الإجابة

مساحة المنطقة المظللة = مساحة المستطيل − مساحة المنطقة م١

= الطول × العرض − $\int_{٢}^{٢\sqrt{٣}} ٣ - \frac{١٢}{\text{س}^{٢}} \, \text{ء س}$

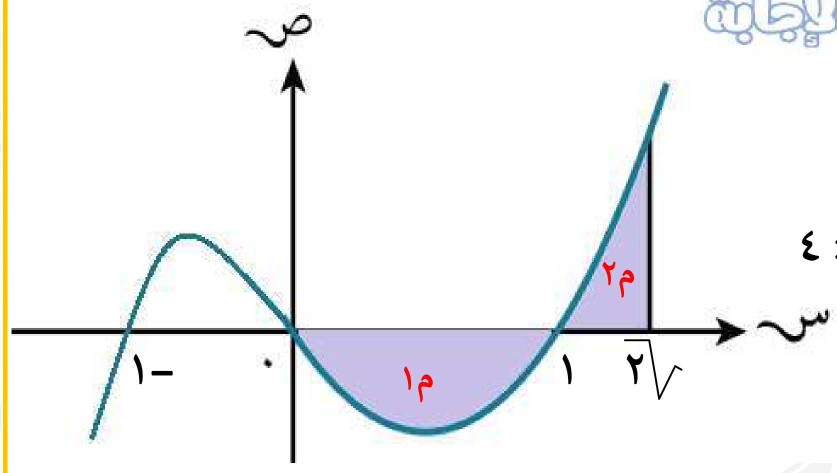
= $٢ \times ٢\sqrt{٣} - (٨\sqrt{٣} - ١٢)$ من المطلوب أ

= $٤\sqrt{٣} - ٨\sqrt{٣} + ١٢ = ١٢ - ٤\sqrt{٣}$ وحدة مربعة

السؤال الثالث

٣ أوجد القيمة الموجبة للعدد أ إذا علمت أن $\int_{٠}^{أ} (س^{٣} - س)\, ء س = ٠$

الإجابة



$\int_{٠}^{أ} (س^{٣} - س)\, .\, ء س = ٠$

$\left[\frac{س^{٤}}{٤} - \frac{س^{٢}}{٢}\right]_{٠}^{أ} = ٠$ بالضرب × ٤

$أ^{٤} - ٢\, أ^{٢} = ٠$

$أ^{٢}\, (أ^{٢} - ٢) = ٠$

$أ^{٢} = ٠$	$أ^{٢} = ٢$	
$أ = ٠$	$أ = -\sqrt{٢}$	$أ = \sqrt{٢}$
مرفوض	مرفوض	

من خلال قيمة أ التي وجدتها في الجزئية (أ) . أوجد المساحة المحصورة بين المحور السينى ، والمنحنى $ص = س^{٣} - س$ ، حيث $٠ \le س \le أ$.

يمكن الحل بدون رسم كما يلى :-

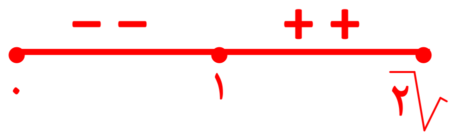
أولا نحصل على تقاطع المنحنى مع المحور السينى عندما ص = ٠

$س^{٣} - س = ٠$

$س(س^{٢} - ١) = ٠$

$س = ٠$ أو	$س^{٢} - ١ = ٠$
	$س = \pm ١$

ثانيا نضع هذه الأعداد مع بداية الفترة ونهايتها على خط الأعداد



ثالثا عند عدم معرفة أي منهما (موجب أو سالب) نضعها في مطلق

المساحة المطلوبة $م_١ + م_٢$

$$= \left| \int_{٠}^{١} (س^{٣} - س)\,.\, ء س \right| + \left| \int_{١}^{\sqrt{٢}} (س^{٣} - س)\,.\, ء س \right|$$

$$= \left| \left[\frac{س^{٤}}{٤} - \frac{س^{٢}}{٢} \right]_{٠}^{١} \right| + \left| \left[\frac{س^{٤}}{٤} - \frac{س^{٢}}{٢} \right]_{١}^{\sqrt{٢}} \right|$$

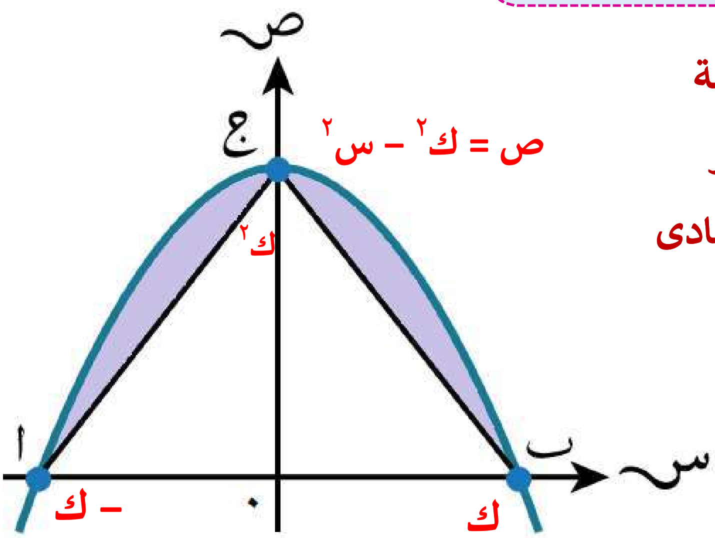
$$= \left| \left(\frac{١}{٤} - \frac{١}{٢}\right) - ٠ \right| + \left| (١ - ١) - \left(\frac{١}{٤} - \frac{١}{٢}\right) \right|$$

$$= \frac{١}{٤} + \frac{١}{٤} = \frac{١}{٢}$$

السؤال الرابع

٤ يبين الشكل المجاور جزءا من منحنى الدالة ص = ك^{٢} – س^{٢} . يقطع المنحنى المحور السينى في النقطتين أ ، ب ، والمحور الصادى في النقطة ج . أوجد :

إحداثيات النقاط أ ، ب ، ج بدلالة ك .



الإجابة

يقطع المنحنى المحور الصادى عندما س = ٠

∴ ص = ك^{٢} ج = (٠ ، ك^{٢})

يقطع المنحنى المحور السينى عندما ص = ٠

ك^{٢} – س^{٢} = ٠ س^{٢} = ك^{٢} = ٠ س = ± ك

ب (ك ، ٠) ، أ (–ك ، ٠)

مساحة المنطقة المظللة بدلالة ك

$$\text{مساحة المنطقة المظللة} = \left| \int_{-ك}^{ك} (ك^{٢} - س^{٢})\,.\,ء\,س \right| - \text{مساحة } \Delta \text{ أ ب ج}$$

$$= \left| ٢ \int_{٠}^{ك} (ك^{٢} - س^{٢})\,.\,ء\,س \right| - \frac{١}{٢} \times ٢ك \times ك^{٢} = \left| ٢ \left[ك^{٢}س - \frac{س^{٣}}{٣} \right]_{٠}^{ك} \right| - ك^{٣}$$

$$= \left| ٢ \left(\left(ك^{٣} - \frac{ك^{٣}}{٣} \right) - ٠ \right) \right| - ك^{٣} = ٢ \times \frac{٢}{٣} ك^{٣} - ك^{٣} = \frac{ك^{٣}}{٣}$$

حل آخر

$$\text{مساحة المنطقة المظللة} = ٢ \int_{٠}^{ك} (ك^{٢} - س^{٢})\,.\,ء\,س - ٢\,\text{مساحة } \Delta \text{ و ب ج}$$

$$= ٢ \left[\int_{٠}^{ك} (ك^{٢} - س^{٢})\,.\,ء\,س - \text{مساحة } \Delta \text{ و ب ج} \right] = \frac{ك^{٣}}{٣} \text{ وحدة مربعة}$$

السؤال الخامس

٥ يبين الشكل المجاور جزءا من المنحنى

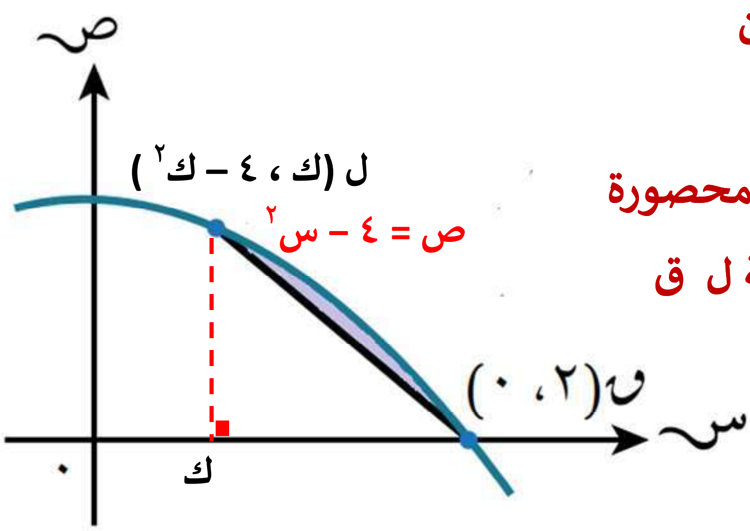
ص = ٤ − س^{٢} الذى يمر بالنقطتين

ل (ك ، ٤ − ك^{٢}) ، ق(٢ ، ٠) .

بين أن مساحة المنطقة المظللة المحصورة

بين المنحنى ، والقطعة المستقيمة ل ق

تساوى $\frac{١}{٦}$ (٢ − ك)^{٣} .



الإجابة

المساحة المطلوبة = $\int_{ك}^{٢} (٤ - س^{٢}) \, ء س$ − مساحة Δ ق ك ل

$\left[٤س - \frac{س^{٣}}{٣} \right]_{ك}^{٢} - \frac{١}{٢} (٤ - ك^{٢})(٢ - ك)$

$\left((٨ - \frac{٨}{٣}) - (٤ك - \frac{ك^{٣}}{٣}) \right) - \frac{١}{٢} (٨ - ٤ك - ٢ك^{٢} + ك^{٣})$

$= \frac{١٦}{٣} - ٤ك + \frac{ك^{٣}}{٣} - ٤ + ٢ك + ك^{٢} - \frac{ك^{٣}}{٢}$

$= \frac{-ك^{٣}}{٦} + ك^{٢} - ٢ك + \frac{٤}{٣}$

$= \frac{١}{٦} (٢ - ك)^{٣}$

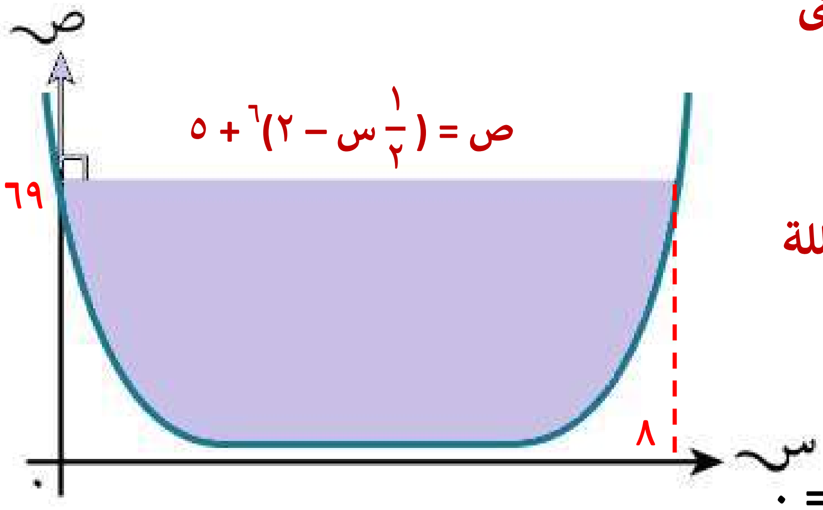
السؤال السادس

٦

يبين الشكل المجاور المنحنى

$$ص = \left(\frac{١}{٢}س - ٢\right)^{٦} + ٥$$

أوجد مساحة المنطقة المظللة



الإجابة

أولا : نقطة تقاطع المنحنى

مع محور الصادات عندما س = ٠

$$ص = (-٢)^{٦} + ٥ = ٦٩ \qquad (٠ ، ٦٩)$$

ثانيا : نقاط تقاطع المنحنى مع المستقيم ص = ٦٩

$$\left(\frac{١}{٢}س - ٢\right)^{٦} + ٥ = ٦٩ \longrightarrow \left(\frac{١}{٢}س - ٢\right)^{٦} = ٦٤$$

$$\left(\frac{١}{٢}س - ٢\right) = \pm\sqrt[٦]{٦٤} \longrightarrow \frac{١}{٢}س - ٢ = ٢ \longrightarrow س = ٨$$

$$\frac{١}{٢}س - ٢ = -٢ \longrightarrow س = ٠$$

$$\text{مساحة المنطقة المظللة} = \left|\int_{٠}^{٨} \left(٦٩ - \left(\frac{١}{٢}س - ٢\right)^{٦} - ٥\right) ءس\right|$$

$$= \left|\int_{٠}^{٨} \left(٦٤ - \left(\frac{١}{٢}س - ٢\right)^{٦}\right) ءس\right| = \left[٦٤س - \frac{٢}{٧}\left(\frac{١}{٢}س - ٢\right)^{٧}\right]_{٠}^{٨}$$

$$= \left(٦٤ \times ٨ - \frac{٢}{٧}(٢)^{٧}\right) - (٠) = ٤٣٨\frac{٦}{٧} \text{ وحدة مربعة}$$

السؤال السابع

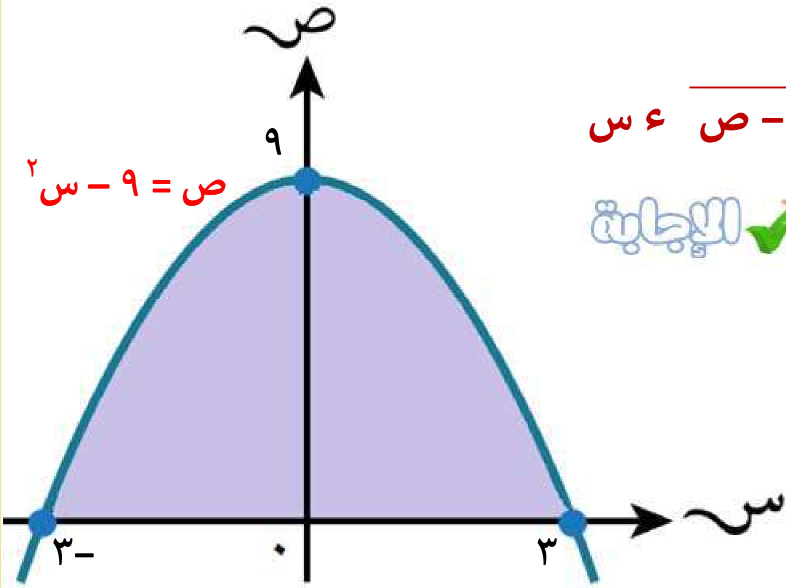
٧

أ

لتكن ر المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة ص = ٩ − س^{٢} ، والمحور السينى .

أوجد :

مساحة ر ، ثم أوجد $\int_{٠}^{٩} \sqrt{٩ - \text{ص}}\ \text{ء س}$



الإجابة

أولا : نقطة تقاطع المنحنى مع محور السينات عندما ص = ٠

٩ − س^{٢} = ٠

س^{٢} = ٩ ← س = ± ٣

$$\text{مساحة ر} = \left| \int_{-٣}^{٣} (٩ - \text{س}^{٢})\ .\ \text{ء س} \right|$$

$$= ٢ \left| \int_{٠}^{٣} (٩ - \text{س}^{٢})\ .\ \text{ء س} \right|$$

$$= ٢ \left[٩\text{س} - \frac{\text{س}^{٣}}{٣} \right]_{٠}^{٣} = ٢\ (٢٧ - ٩) = ٢ \times ١٨ = ٣٦ \text{ وحدة مربعة}$$

$$\int_{٠}^{٩} \sqrt{٩ - \text{ص}}\ \text{ء س} = \int \sqrt{٩ - ٩ + \text{س}^{٢}}\ \text{ء س}$$

$$= \int \text{س.}\ \text{ء س} = \left[\frac{\text{س}^{٢}}{٢} \right]_{٠}^{٩} = \frac{٨١}{٢} \text{ وحدة مربعة}$$

ب حجم الجسم الدورانى الناتج من دوران المنطقة (ر) ٣٦٠° حول المحور السينى .

الإجابة

$$\text{ح} = \pi \int_{-٣}^{٣} \text{ص}^{٢}\ \text{ء س} = \pi \int_{-٣}^{٣} (٩ - \text{س}^{٢})^{٢} .\ \text{ء س}$$

$$= ٢\,\pi \int_{0}^{٣} (٨١ - ١٨\text{س}^{٢} + \text{س}^{٤}) .\ \text{ء س}$$

$$= ٢\pi \left[\left(٨١\text{س} - \frac{١٨}{٣}\text{س}^{٣} + \frac{١}{٥}\text{س}^{٥} \right) \right]_{0}^{٣}$$

$$= ٢\pi \left[\left(٨١ \times ٣ - ٦ \times ٢٧ + \frac{٢٤٣}{٥} \right] = \frac{١٢٩٦}{٥}\pi = ٢٥٩{,}٢ \right.$$ وحدة مكعبة

ج حجم الجسم الدورانى الناتج من دوران المنطقة (ر) ٣٦٠° حول المحور الصادى .

الإجابة

$$\text{ص} = ٩ - \text{س}^{٢} \qquad\qquad \text{س}^{٢} = ٩ - \text{ص}$$

$$\text{ح} = \pi \int_{0}^{٩} \text{س}^{٢}\ \text{ء ص} = \pi \int_{0}^{٩} (٩ - \text{ص}) .\ \text{ء س}$$

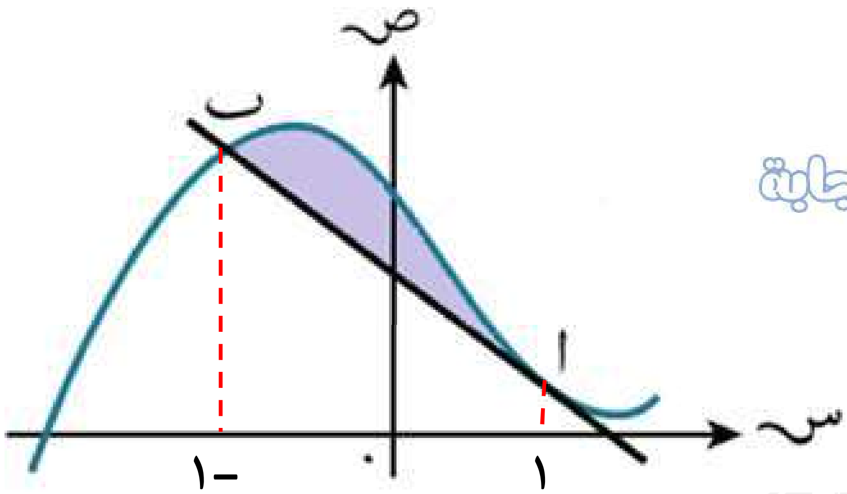
$$= \pi \left[\left(٩\text{ص} - \frac{١}{٢}\text{ص}^{٢} \right) \right]_{0}^{٩}$$

$$= \pi \left(٨١ - \frac{٨١}{٢} \right) = \pi \times \frac{٨١}{٢} = \frac{٨١}{٢}\pi$$ وحدة مكعبة

السؤال الثامن

٨ **يبين الشكل المجاور المنحنى ص = ٤س^٣ – ٤س^٢ – ١٠س + ١٢ ، والمماس عند النقطة أ عند س = ١**

أ **أوجد معادلة المماس .**



الإجابة

عند س = ١

ص = ٤ – ٤ – ١٠ + ١٢ = ٢

(١ ، ٢) نقطة التماس

ميل المماس = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ١٢س^٢ – ٨س – ١٠

عند س = ١

م = ١٢ – ٨ – ١٠ = –٦

معادلة المماس هي : ص – ص١ = م (س – س١)

ص – ٢ = –٦(س – ١)

ص = –٦ (س – ١)

ص = –٦س + ٨

معادلة المماس ص + ٦س = ٨

ب

أثبت أن المماس يقطع المنحنى مرة أخرى في النقطة ب عند س = – ١

ملاحظة

الإجابة

لإيجاد نقاط تقاطع المماس مع المنحنى نحل المعادلتين آنيا

ص = ٤س^{٣} – ٤س^{٢} – ١٠س + ١٢ = –٦س + ٨

٤س^{٣} – ٤س^{٢} – ١٠س + ١٢ = –٦س + ٨

٤س^{٣} – ٤س^{٢} – ١٠س + ٦س + ١٢ – ٨ = ٠

٤س^{٣} – ٤س^{٢} – ٤س + ٤ = ٠ بالقسمة على ٤

س^{٣} – س^{٢} – س + ١ = ٠

(س^{٣} – س^{٢}) – (س – ١)

س^{٢} (س – ١) – (س – ١) = ٠

(س – ١)(س^{٢} – ١) = ٠

(س – ١)(س – ١)(س + ١) = ٠

(س – ١)^{٢} (س + ١) = ٠

إما (س – ١)^{٢} = ٠ أو (س + ١) = ٠

س – ١ = ٠	س = –١
س = ١	

∴ المماس يقطع المنحنى مرة أخرى في النقطة ب عند س = – ١

ج أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى ، والمماس أ ب .

الإجابة

مساحة المنطقة المطلوبة $= \int_{-١}^{١} (٤س^{٣} - ٤س^{٢} - ١٠س + ١٢ + ٦س - ٨) \, ء س$

$$= ٤ \int_{-١}^{١} (س^{٣} - س^{٢} - س + ١) \, ء س$$

$$= ٤ \left[\frac{١}{٤} س^{٤} - \frac{١}{٣} س^{٣} - \frac{١}{٢} س^{٢} + س \right]_{-١}^{١}$$

$$= ٤ \left(\left(\frac{١}{٤} - \frac{١}{٣} - \frac{١}{٢} + ١\right) - \left(\frac{١}{٤} + \frac{١}{٣} - \frac{١}{٢} - ١\right) \right)$$

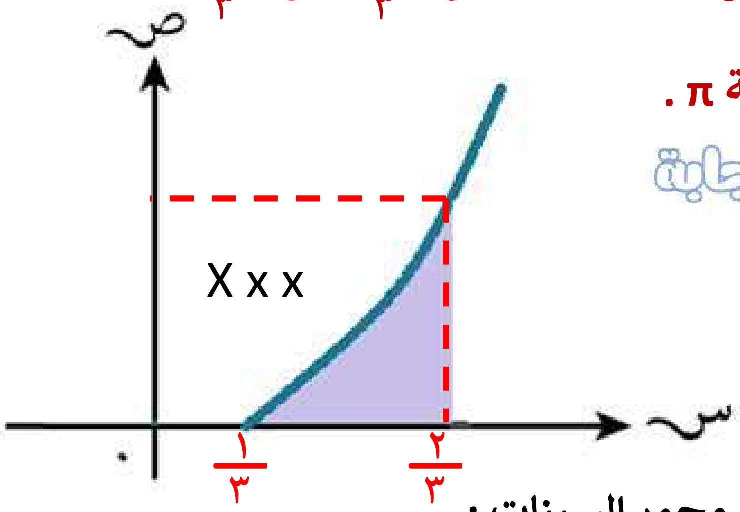
$$= ٤ \left(\frac{٥}{١٢} + \frac{١١}{١٢} \right) = ٤ \times \frac{١٦}{١٢} = \frac{١٦}{٣}$$ وحدة مربعة

السؤال التاسع

٩ يتكون جسم دورانى ناتج من دوران المنطقة المحصورة بين جزء من المنحنى

ص = $(٣س - ١)^{\frac{٣}{٢}}$ ، والمحور السينى والمستقيمين س = $\frac{١}{٣}$ ، س = $\frac{٢}{٣}$ دورة كاملة

أوجد حجم الجسم الدورانى بدلالة π .



الإجابة

ملاحظة

لم يوضح السؤال الدوران حول

محور الصادات أم السينات

سيتم حل السؤال في الحالتين

أولا في حالة الدوران بـ (٣٦٠°) حول محور السينات :

$$ح = π \int_{\frac{١}{٣}}^{\frac{٢}{٣}} ص^٢ \,.\, ءس = π \int_{\frac{١}{٣}}^{\frac{٢}{٣}} (٣س - ١)^٣ \,.\, ءس$$

$$= π \left[\frac{(٣س - ١)^٤}{٣ \times ٤} \right]_{\frac{١}{٣}}^{\frac{٢}{٣}}$$

$$= π \left(\frac{١}{١٢} (١ - ٠) \right) = \frac{π}{١٢}$$ وحدة مكعبة

ثانيا اذا كان الدوران بـ (٣٦٠°) حول محور الصادات :

عند س = $\frac{١}{٣}$ ⟵ ص = ٠

عند س = $\frac{٢}{٣}$ ⟵ ص = ١

$$ص = (٣س - ١)^{\frac{٣}{٢}}$$

$$٣س - ١ = ص^{\frac{٢}{٣}}$$

$$٣س = ص^{\frac{٢}{٣}} + ١$$

$$س = \frac{١}{٣}(ص^{\frac{٢}{٣}} + ١)$$

$$س^٢ = \frac{١}{٩}(ص^{\frac{٢}{٣}} + ١)^٢$$

$$ح = \pi \left[\int_{٠}^{١} \left(\frac{٢}{٣}\right)^٢ ءص - \int_{٠}^{١} \frac{١}{٩}(ص^{\frac{٢}{٣}} + ١)^٢ ءص \right]$$

$$ح = \pi \int_{٠}^{١} \left[\frac{٤}{٩} - \frac{١}{٩}(ص^{\frac{٤}{٣}} + ٢ص^{\frac{٢}{٣}} + ١)\right] ءص$$

$$ح = \frac{\pi}{٩} \int_{٠}^{١} \left[٤ - ص^{\frac{٤}{٣}} - ٢ص^{\frac{٢}{٣}} - ١\right] ءص$$

$$ح = \frac{\pi}{٩} \int_{٠}^{١} (-ص^{\frac{٤}{٣}} - ٢ص^{\frac{٢}{٣}} + ٣) \; ءص$$

$$ح = \frac{\pi}{٩} \left[-\frac{٣ص^{\frac{٧}{٣}}}{٧} - \frac{٦}{٥}ص^{\frac{٥}{٣}} + ٣ص\right]_{٠}^{١}$$

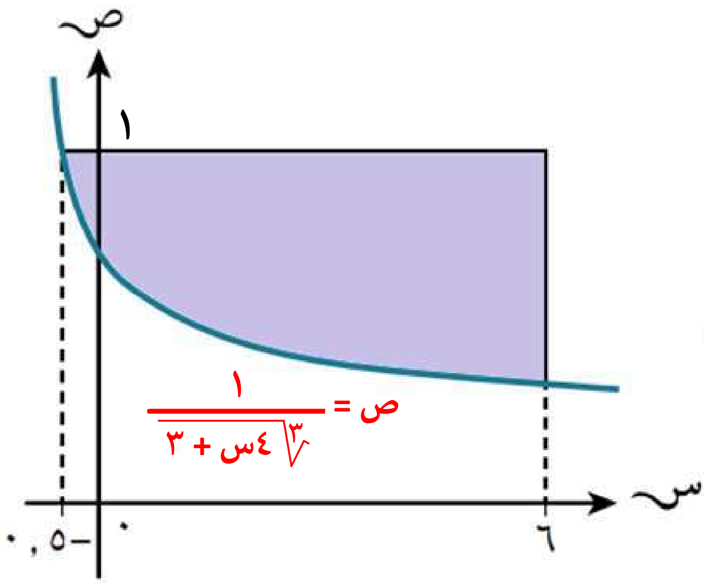
$$ح = \frac{\pi}{٩}\left(-\frac{٣}{٧} - \frac{٦}{٥} + ٣\right) = \frac{١٦\pi}{١٠٥}$$ وحدة مكعبة

السؤال العاشر

١٠ يبين الشكل المجاور المنحنى

$$ص = \frac{١}{\sqrt[٣]{٤س + ٣}}$$

أوجد مساحة المنطقة المظللة .



الإجابة

نقطة تقاطع المستقيم مع المنحنى عندما س = − ٠,٥

$$ص = \frac{١}{\sqrt[٣]{-٢ + ٣}} = \frac{١}{\sqrt[٣]{١}} = ١$$

∴ معادلة المستقيم هي ص = ١

$$\therefore \text{مساحة المنطقة المظللة} = \int_{-٠,٥}^{٦} \left[١ \, ءس - \frac{١}{\sqrt[٣]{٤س + ٣}} \, ءس \right]$$

$$= \int_{-٠,٥}^{٦} \left(١ - (٤س + ٣)^{\frac{-١}{٣}} \right) ءس$$

$$= \left[س - \frac{(٤س + ٣)^{\frac{٢}{٣}}}{\frac{٢}{٣} \times ٤} \right]_{-٠,٥}^{٦}$$

$$= \left(٦ - \frac{٣}{٨}(٢٧)^{\frac{٢}{٣}}\right) - \left(-٠,٥ - \frac{٣}{٨} \times ١\right)$$

$$= \left(٦ - \frac{٢٧}{٨}\right) - \left(- \frac{٧}{٨}\right) = \frac{٢١ + ٧}{٨} = \frac{٢٨}{٨} = \frac{٧}{٢}$$ وحدة مربعة

تمارين متنوعة على الوحدة السادسة

السؤال الأول ظلل الشكل (☐) المقترن بالإجابة الصحيحة للمفردات (١ – ٤٦)

(١) $\int$ س ء س = ... + ج

☐ س^{٢} ☐ $\frac{١}{٢}$ س ☐ $\frac{١}{٢}$ س^{٢} ☐ ١

---

(٢) $\int$ ص^{٨} ء ص = ... + ج

☐ ٨ص^{٧} ☐ $\frac{١}{٩}$ ص^{٩} ☐ صفر ☐ ص^{٩}

---

(٣) $\int$ (س + ٢) ء س = ... + ج

☐ ٢س^{٢} + ٢س ☐ س^{٢} +٢س ☐ $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + ٢س ☐ (س + ٢)^{٢}

---

(٤) $\int$ (س^{٢} – ٣) ء س = ...

☐ ٢س ☐ س^{٢} – ٣س ☐ $\frac{١}{٣}$ س^{٣} – ٣س + ج ☐ ٢س – ٣ + ج

---

(٥) $\int$ ٦س$^{-٢}$ ء س = ... + ج

☐ –٣س ☐ –٣س$^{-١}$ ☐ –٣س$^{-٢}$ ☐ – ١٨س$^{-٤}$

(٦) $\int \text{س}^{\frac{٢}{٣}}\, \text{ء س} =$ .... + جـ

☐ $\frac{٣}{٥}\text{س}^{\frac{٥}{٣}}$ ☐ $\frac{٥}{٣}\text{س}^{\frac{٥}{٣}}$ ☐ $\frac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{-١}{٣}}$ ☐ $\text{س}^{\frac{٥}{٣}}$

(٧) $\int \frac{\text{ء س}}{\text{٥ س}^{٤}} =$ .... + جـ

☐ $\frac{٥}{\text{س}^{٥}}$ ☐ $\frac{-١}{\text{٥ س}^{٣}}$ ☐ $\frac{-١}{\text{١٥ س}^{٣}}$ ☐ $\text{٥س}^{٣}$

(٨) $\int \sqrt[٧]{\text{س}^{٥}}\, \text{ء س} =$ .... + جـ

☐ $\frac{١٢}{٧}\text{س}^{\frac{١٢}{٧}}$ ☐ $\sqrt[٧]{\frac{\text{س}^{٦}}{٦}}$ ☐ $\frac{١}{٦}\text{س}^{٦}$ ☐ $\frac{٧}{١٢}\text{س}^{\frac{١٢}{٧}}$

(٩) $\int ٥\sqrt{\text{س}^{٣}}\, \text{ء س} =$ .... + جـ

☐ $٢\sqrt{\text{س}^{٥}}$ ☐ $\frac{٥}{٢}\sqrt{\text{س}^{٤}}$ ☐ $\text{٥س}^{\frac{٥}{٢}}$ ☐ $\frac{٥}{٢}\text{س}^{٢}$

(١٠) $\int \left(\frac{٢}{\text{ص}^{٣}} - \frac{٤}{\text{ص}^{٥}}\right) \text{ء ص} =$ .... + جـ

☐ $-\text{ص}^{٢} + \text{ص}^{٤}$ ☐ $-\text{ص}^{-٢} + \text{ص}^{-٤}$

☐ $\frac{٢}{٣}\text{ص}^{-٣} - \frac{٤}{٥}\text{ص}^{-٥}$ ☐ $-\text{٢ص}^{-٢} + \text{٤ص}^{-٤}$

(١١) $\int (\text{س}^{٢} - ٣\text{س} - ١)\,.\,\text{ء س} =$ .... + جـ

☐ $\frac{١}{٣}\text{س}^{٣} + ٣\text{س}^{٢} - \text{س}$ ☐ $\frac{١}{٣}\text{س}^{٣} - \frac{٣}{٢}\text{س}^{٢} - \text{س}$

☐ $\text{س}^{٣} - ٣\text{س}^{٢} - \text{س}$ ☐ $\frac{١}{٢}(\text{س}^{٢} - ٣\text{س} - ١)^{٢}$

(١٢) $\int ٢(٣\text{ع}^{٢} - ٥)\,.\,\text{ء ع} =$ .... + جـ

☐ $٣(\text{ع}^{٢} - ٥)^{٢}$ ☐ $٦\text{ع}^{٢} - ١٠$ ☐ $٢\text{ع}^{٣} - ١٠\text{ع}$ ☐ $\text{ع}^{٢} - ٥\text{ع}$

(١٣) $\int \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}}}\,\text{ء س} =$ .... + ث

☐ $\frac{١}{٢}\text{س}^{\frac{١}{٢}}$ ☐ $\frac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}}$ ☐ $٢\text{س}^{\frac{-١}{٢}}$ ☐ $\frac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{-٣}{٤}}$

(١٤) $\int (٢\sqrt{\text{س}} - ٦\text{س}^{٢})\,.\,\text{ء س} =$ .... + جـ

☐ $\frac{٤}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}} - ٢\text{س}^{٣}$ ☐ $\frac{٤}{٣}\text{س}^{\frac{٧}{٢}} - ٢\text{س}^{٣}$

☐ $\text{س}^{\frac{٢}{٣}} - ٣\text{س}$ ☐ $\text{س}^{\frac{-١}{٢}} - ١٢\text{س}$

(١٥) س(س + ٣) . ء س = ... + جـ

☐ $\frac{١}{٢}$ (س + ٣)^{٢} ☐ $\frac{١}{٣}$ س^{٣} + $\frac{٣}{٢}$ س^{٢} ☐ س^{٣} + ٣س ☐ س^{٢} + ٣س

(١٦) (س – ٥)(س + ١) . ء س = ... + جـ

☐ $\frac{١}{٣}$ س^{٣} – ٢س^{٢} – ٥س ☐ س^{٣} – ٢س^{٢} – ٥س

☐ $\frac{٢}{٣}$ س^{٣} – ٢س^{٢} + ٥س ☐ $\frac{١}{٣}$ س^{٣} – ٢س + ٥س

(١٧) (س + ٢)(س – ٢) . ء س = ...

☐ س + ٤ + جـ ☐ $\frac{١}{٣}$ س^{٣} – ٤س + جـ

☐ س^{٣} – ٤س + جـ ☐ (س^{٢} – ٤)^{٢} + جـ

(١٨) (س^{٢} – ٢)^{٢} . ء س = ... + جـ

☐ $\frac{١}{٣}$ (س^{٢} – ٢)^{٣} ☐ ٢(س^{٢} – ٢)(٢س)

☐ $\frac{١}{٥}$ س^{٥} – $\frac{٤}{٣}$س^{٣} + ٤س ☐ س^{٤} – ٤س^{٢} + ٤

(١٩) $\int (\sqrt{\text{س}} - ١)^{٢} \, \text{ء س} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots + \text{جـ}$

☐ $\frac{١}{٣}(\sqrt{\text{س}} - ١)$ ☐ $\frac{١}{٢}\text{س}^{٢} - \frac{٤}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}} + \text{س}$

☐ $\frac{١}{٣}(\sqrt{\text{س}} - ١)^{٣}$ ☐ $\frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + \frac{٤}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}}$

(٢٠) $\int (\text{س} - \frac{١}{\text{س}})(\text{س} + \frac{١}{\text{س}})(\text{س}^{٢} + \frac{١}{\text{س}^{٢}}) . \text{ء س} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots + \text{جـ}$

☐ $\text{س}^{٥} + \text{س}^{-٣}$ ☐ $\text{س}^{٤} - \frac{١}{\text{س}^{٤}}$ ☐ $\frac{١}{٥}\text{س}^{٥} + \frac{١}{٣}\text{س}^{-٣}$ ☐ $\text{س}^{٥} + \frac{١}{٣}\text{س}^{-٣}$

(٢١) $\int \frac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س} - ١} \, \text{ء س} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots + \text{جـ}$

☐ $\text{س} + ١$ ☐ $\frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + \text{س}$ ☐ $\text{س}^{٢} + \text{س}$ ☐ $\text{س}^{٢} + ٢\text{س}$

(٢٢) $\int \frac{\text{س}^{٣} - \text{س}}{\text{س}^{٢} + \text{س}} \, \text{ء س} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots + \text{جـ}$

☐ $\frac{١}{٢}\text{س}^{٢} - \text{س}$ ☐ $\text{س}^{٢} - \text{س}$ ☐ $\frac{٣}{٢}\text{س}^{٣} - \frac{١}{٢}\text{س}$ ☐ $٢\text{س}^{٢} + ١$

(٢٣) $\int$ (٨ – ٣س)^{٤} . ء س = ... + جـ

☐ $\frac{١}{١٥}$ (٨ – ٣س)^{٥} ☐ $\frac{١}{٥}$ (٨ – ٣س)^{٥}

☐ – $\frac{١}{٥}$ (٨ – ٣س)^{٥} ☐ – $\frac{١}{١٥}$ (٨ – ٣س)^{٥}

---

(٢٤) $\int$ (٢س + ١)^{٥} . ء س = ... + جـ

☐ (٢س + ١)^{٦} ☐ $\frac{١}{٢}$ (٢س + ١)^{٦}

☐ $\frac{١}{١٢}$ (٢س + ١)^{٦} ☐ $\frac{١}{٦}$ (٢س + ١)^{٦}

---

(٢٥) $\int \frac{١٢}{(٢س – ٥)^{٤}}$ ء س = ... + جـ

☐ $\frac{– ١}{(٢س – ٥)^{٣}}$ ☐ $\frac{٦}{(٢س – ٥)^{٣}}$ ☐ $\frac{١٢}{(٢س – ٥)^{٣}}$ ☐ $\frac{– ٢}{(٢س – ٥)^{٣}}$

---

(٢٦) إذا كان $\int$ أ س^{٣} . ء س = ٢س^{٤} + جـ فإن أ = ...

☐ ٨ ☐ ٦ ☐ ٤ ☐ ١٦

(٢٧) $\int \frac{\text{س}^{٢} + \text{أ}^{٢}\text{س}}{\text{س}} \, \text{ء س} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots + \text{جـ}$

- ☐ $\text{س} + \text{أ}^{٢}$
- ☐ $\frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + \frac{١}{٣}\text{أ}^{٣}$
- ☐ $\frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + \text{أ}^{٢}\text{س}$
- ☐ $\text{س}^{٣} + \text{أ}^{٣}$

(٢٨) $\int \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س} + ٢} \, \text{ء س} + \int \frac{٤\text{س} + ٤}{\text{س} + ٢} \, \text{ء س} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots + \text{جـ}$

- ☐ $\frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + ٢$
- ☐ $-\frac{١}{٢}\text{س}^{٢} + ٢$
- ☐ $\text{س}^{٢} + ٤\text{س}$
- ☐ $\text{س}^{٢} + \text{س}$

(٢٩) $\int \frac{\text{س} - \frac{١}{٢}}{\sqrt{٢\text{س} - ١}} \, \text{ء س} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots + \text{جـ}$

- ☐ $\frac{١}{٦\sqrt{٢\text{س} - ١}}$
- ☐ $\frac{١}{٦}\sqrt{٢\text{س} - ١}$
- ☐ $\frac{١}{٦}\sqrt{(٢\text{س} - ١)^{٣}}$
- ☐ $\frac{١}{٢}\sqrt{(٢\text{س} - ١)^{٣}}$

(٣٠) $\int \frac{\text{ء}}{\text{ء س}} [\text{د(س)}] \, \text{ء س} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots + \text{جـ}$

- ☐ د(س)
- ☐ $\text{د(س)} + \text{جـ}$
- ☐ $\frac{\text{ء}}{\text{ء س}} [\text{د(س)}]$
- ☐ $\int \text{د(س)} \, . \, \text{ء س}$

(٣١) $\int$ س^{ك} . ء س = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} + جـ فإن ك = ...

☐ ١−   ☐ ١   ☐ ٢   ☐ ٣

---

(٣٢) إذا كان $\int_{١}^{٣}$ د(س) ء س = ٥ ، $\int_{٣}^{١}$ ر(س) ء س = ٧

فإن $\int_{١}^{٣}$ (٤ د(س) + ر(س) + ٣) ء س = ...

☐ ١٢−   ☐ ٧−   ☐ ١٢   ☐ ١٩

---

(٣٣) إذا كان $\int_{أ}^{ب}$ د(س) . ء س = ...

☐ د(ب) − د(أ)   ☐ $\int_{ب}^{أ}$ د(س) . ء س

☐ − $\int_{ب}^{أ}$ د(س) . ء س   ☐ ب − أ

---

(٣٤) إذا كان $\int_{٢}^{٥}$ د(س) . ء س = ٤ فإن $\int_{٢}^{٥}$ [٣ د(س) − ١] ء س = ...

☐ ٩   ☐ ١١   ☐ ١٢   ☐ ٨−

---

(٣٥) إذا كان $\int_{٢-}^{٣}$ د(س) ء س = ١٢ ، $\int_{٢-}^{٥}$ د(س) ء س = ١٦

فإن $\int_{٣}^{٥}$ د(س) ء س = ...

☐ ٢٨ −   ☐ ٤−   ☐ ٤   ☐ ٢٨

(٣٦) إذا كان $\int_{-٢}^{٢}$ د(س) . ء س = صفر فإن د (س) يمكن أن تكون ....

☐ س^{٢} + ١ ☐ س ☐ س + ١ ☐ س − ١

---

(٣٧) إذا كان $\int_{-٢}^{٣}$ د(س) ء س + $\int_{٣}^{٧}$ د(س) ء س − $\int_{٥}^{٧}$ د(س) ء س = $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ء س

فإن أ + ب يمكن أن تساوى ....

☐ ٥ ☐ −٣ ☐ ٣ ☐ −٥

---

(٣٨) إذا كانت د(س) = $\frac{٣س^{٢٠٢٣} + ١}{س^{٢٠٢٤} + ١}$ فإن $\int_{٠}^{١}$ د′(س) ء س = ...

☐ صفر ☐ ١ ☐ ٢ ☐ ٣

---

(٣٩) إذا كان $\int_{١}^{ك}$ س$^{ن-١}$. ء س = $\frac{٢}{ن}$ فإن ك = ...

☐ ٣ن ☐ ٣^{ن} ☐ $\frac{٣}{ن}$ ☐ $\sqrt[ن]{٣}$

---

(٤٠) إذا كان $\int_{٣}^{٩}$ د(س) ء س = ٢٠ ، $\int_{٥}^{١١}$ د(س) ء س = ٢٥

فإن $\int_{٣}^{٥}$ د(س) ء س − $\int_{٩}^{١١}$ د(س) ء س = ...

☐ −١٠ ☐ −٥ ☐ صفر ☐ ٥

(٤١) $\int_{.}^{نق} \pi$ س ء س = ...

- محيط دائرة طول نصف قطرها نق
- نصف حجم كرة طول نصف قطرها نق
- نصف محيط دائرة طول نصف قطرها نق
- نصف مساحة دائرة طول نصف قطرها نق

(٤٢) $\int_{.}^{ع} \pi$ نق^{٢} ء س = ...

- حجم أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها (ع) وطول نصف قطر قاعدتها نق
- مساحة سطح كرة طول نصف قطرها يساوى (ع)
- المساحة الجانبية لاسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها (ع)
- $\frac{١}{٣}$ π ع^{٣} + جـ

(٤٣) مساحة المنطقة المحددة بالمستقيمات ص = س ، س = ٢ ، ص = ٠

تساوى .... وحدة مربعة

- $\frac{١}{٢}$
- ١
- ٢
- ٤

(٤٤) مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى ص = س^{٣} والمستقيمان

ص = ٠ ، س = ٢ تساوى ....وحدة مربعة

- ٨
- ٤
- ٢
- ١

(٤٥) $\int_{-1}^{1} \sqrt{16 - 16س^2}$ ء س = ... وحدة مربعة

☐ ١٦π ☐ π ☐ ٢π ☐ ٤π

(٤٦) مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى ص = $\sqrt{4 - س^2}$ ومحور السينات

مقدرة بالوحدات المربعة تساوى ....

☐ ٢ ☐ ٤ ☐ ٢π ☐ ٤π

(٤٧) في الشكل المقابل

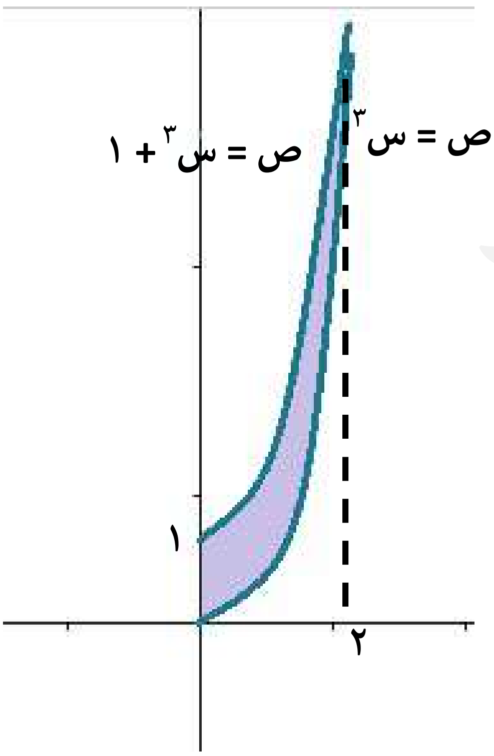
مساحة الجزء المظلل = ... وحدة مربعة .

☐ ١

☐ $\frac{1}{2}$

☐ ٢

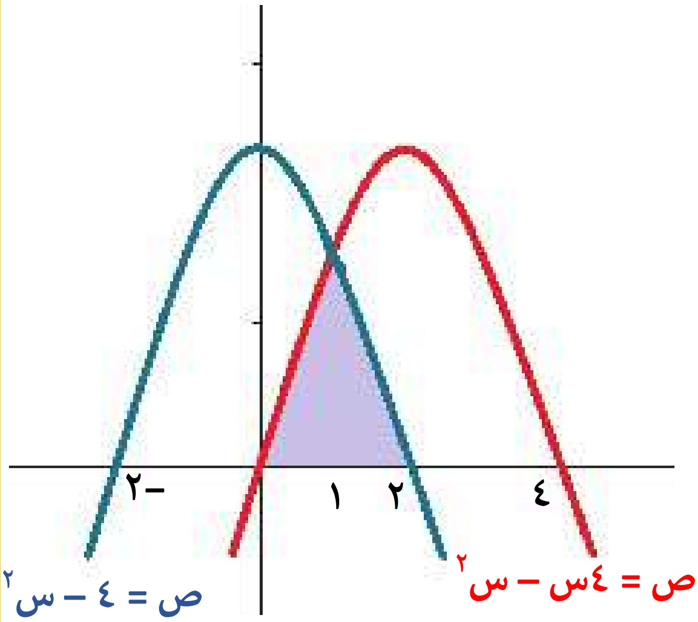
☐ $\frac{3}{2}$



(٤٨) في الشكل المقابل :

مساحة الجزء المظلل

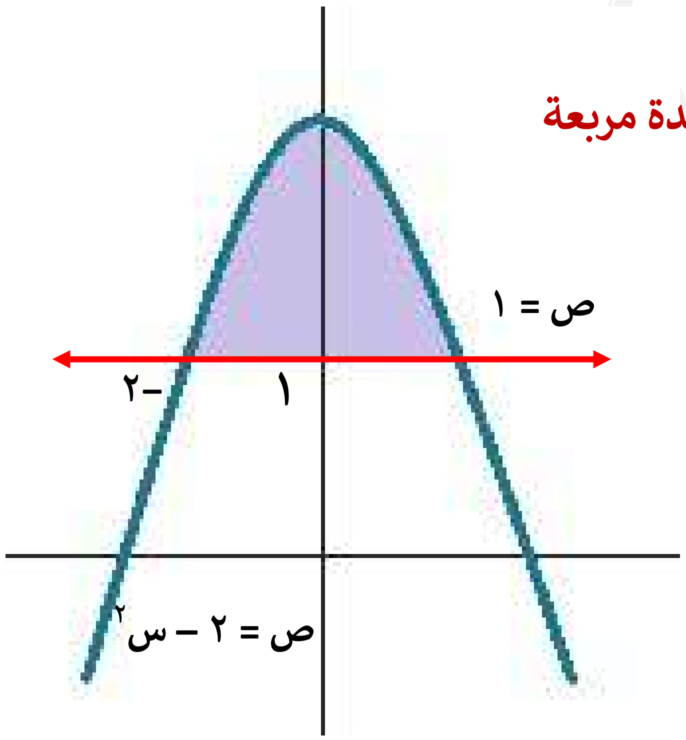
= .... وحدة مربعة



- ☐ $\frac{٧}{٣}$
- ☐ $\frac{١٠}{٣}$
- ☐ ٢
- ☐ ٣

(٤٩) في الشكل المقابل :

مساحة المنطقة المظللة = ...وحدة مربعة

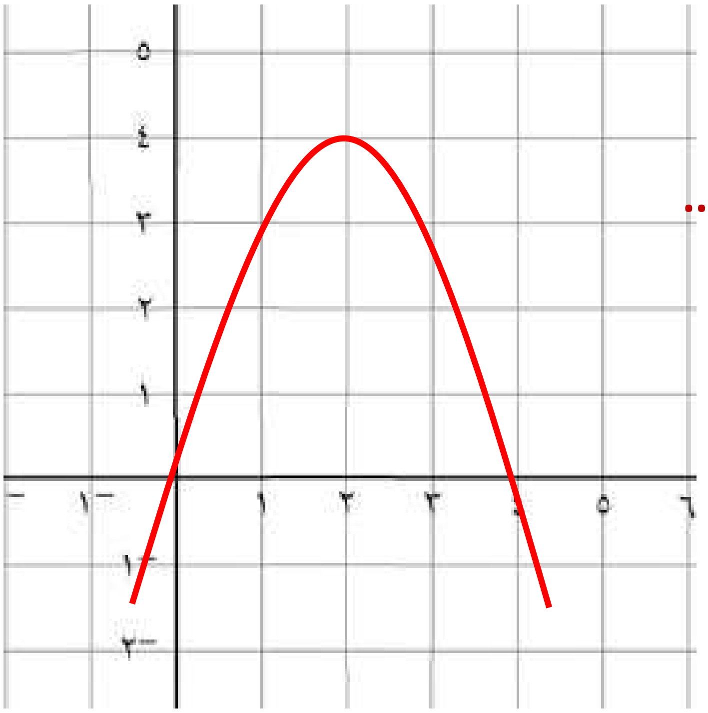


- ☐ $\frac{٢}{٣}$
- ☐ $\frac{٤}{٣}$
- ☐ $\frac{٥}{٣}$
- ☐ ٢

(٥٠) الشكل المقابل يمثل منحنى

الدالة د : د(س) = − س (س − ٤)

فإن كل مما يأتي صحيح ما عدا ....



- [ ] $\int_{٠}^{١} \text{د(س)}\ \text{ء س} = \int_{٣}^{٤} \text{د(س)}\ \text{ء س}$
- [ ] $\int_{٠}^{٤} \text{د(س)}\ \text{ء س} = ٢ \int_{٠}^{٢} \text{د(س)}\ \text{ء س}$
- [ ] $\int_{١-}^{٠} |\text{د(س)}|\ \text{ء س} = \int_{٠}^{١} \text{د(س)}\ \text{ء س}$
- [ ] $\int_{١-}^{٠} \text{د(س)}\ \text{ء س} = \int_{٤}^{٥} \text{د(س)}\ \text{ء س}$

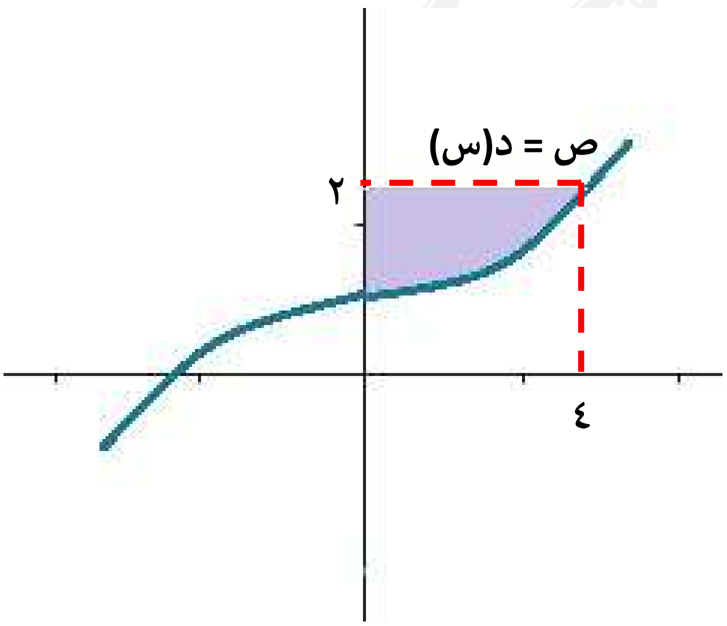
---

(٥١) في الشكل المقابل :

إذا كانت مساحة المنطقة المظللة

= ٣ وحدات مربعة

فإن $\int_{٠}^{٤} \text{د(س)}\ \text{ء س} =$ ....



- [ ] ٣
- [ ] ٤
- [ ] ٥
- [ ] ٦

(٥٢) في الشكل المقابل :

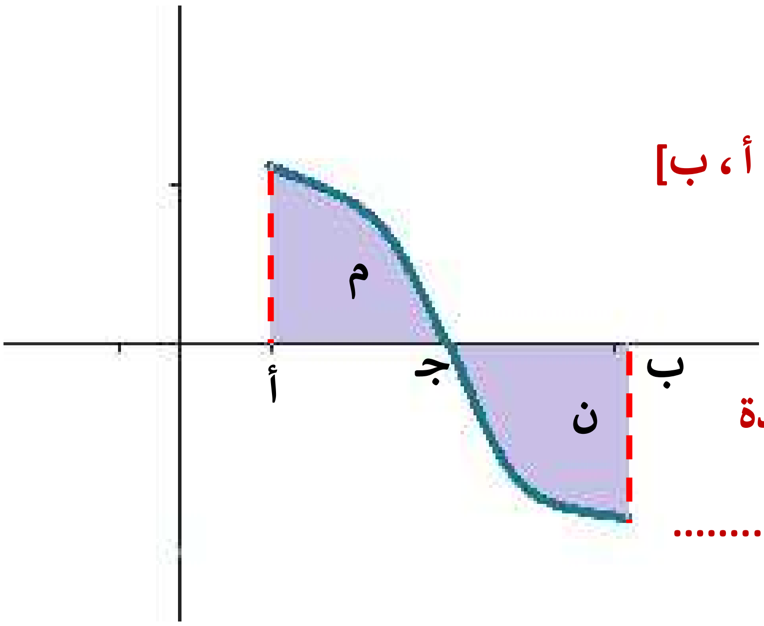
جزء من المنحنى د(س) في الفترة [أ ، ب]

فإذا كانت مساحة السطح م

تساوى ٥ وحدة مساحة

ومساحة السطح ن تساوى ٣ وحدة

مساحة فإن $\int_{أ}^{ب}$ د(س) ء س = ...



☐ ٥− ☐ ٢− ☐ ٢ ☐ ٨

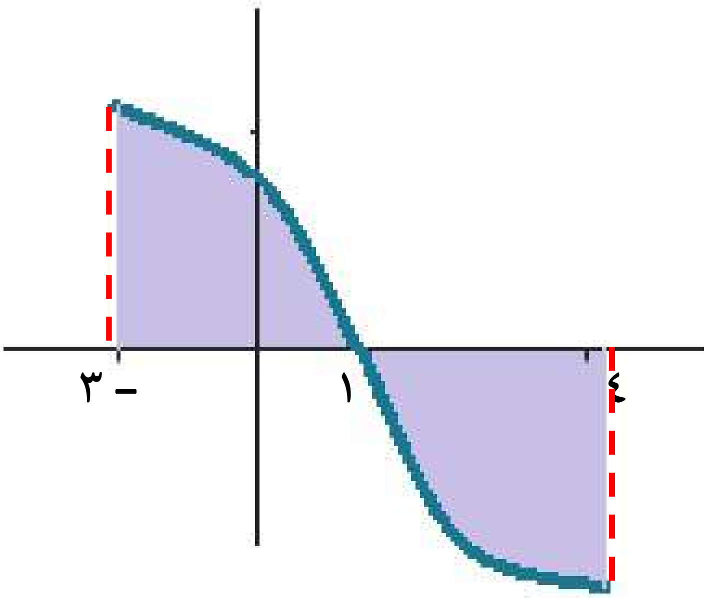
(٥٣) في الشكل المقابل

إذا كان : $\int_{-٣}^{٤}$ د(س) ء س = ١٢

وكانت مساحة الجزء المظلل = ٢٨

وحدة مربعة فإن

$\int_{١}^{٤}$ د(س) ء س = ...



☐ ١٦

☐ ٨−

☐ ٨

☐ ٢٠

(٥٤) في الشكل المقابل :

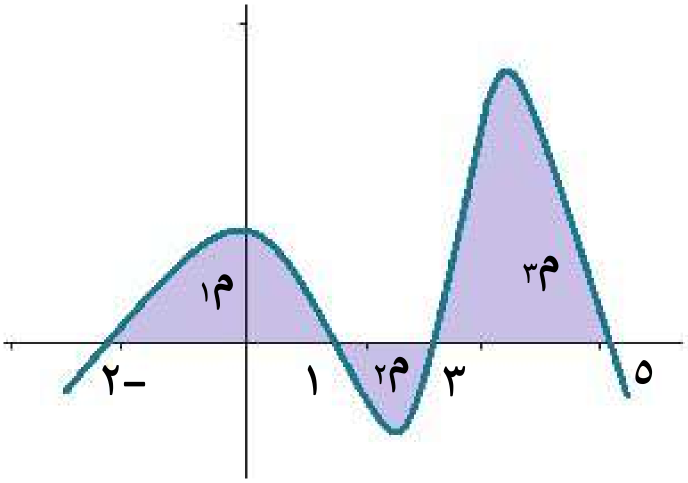
إذا كان م$_1$ = ٥ وحدة مربعة

، م$_2$ = ٢ وحدة مربعة

، م$_3$ = ٨ وحدة مربعة

فإن $\int_{-2}^{5}$ د(س) ء س + $\int_{-2}^{5}$ |د(س)| ء س

= ....



☐ ١٥ ☐ ٢٠ ☐ ٢٢ ☐ ٢٦

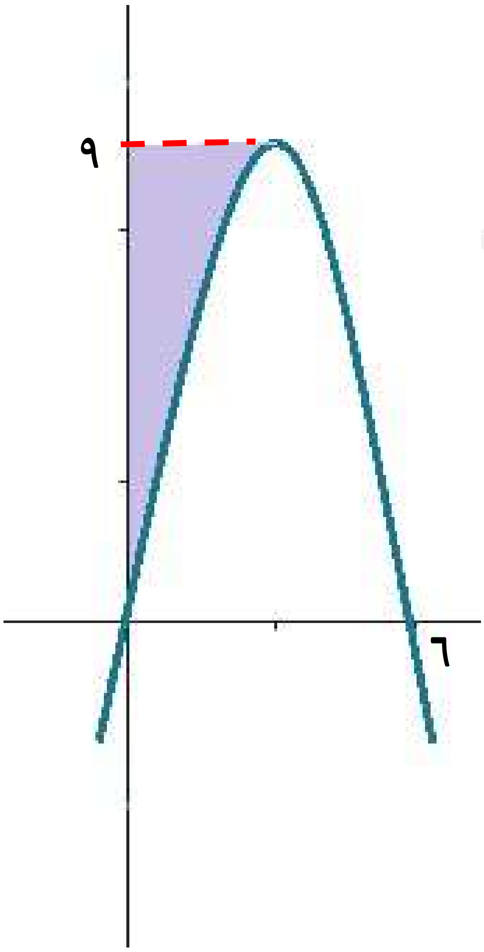
(٥٥) الشكل المقابل يمثل

منحنى دالة تربيعية نقطة الرأس

(ك، ٩)

فإن مساحة المنطقة المظللة

= ....وحدة مربعة



☐ ٦

☐ ٩

☐ ١٢

☐ ٨

(٥٦) في الشكل المقابل

إذا كانت كل من د ، ق دوال متصلة

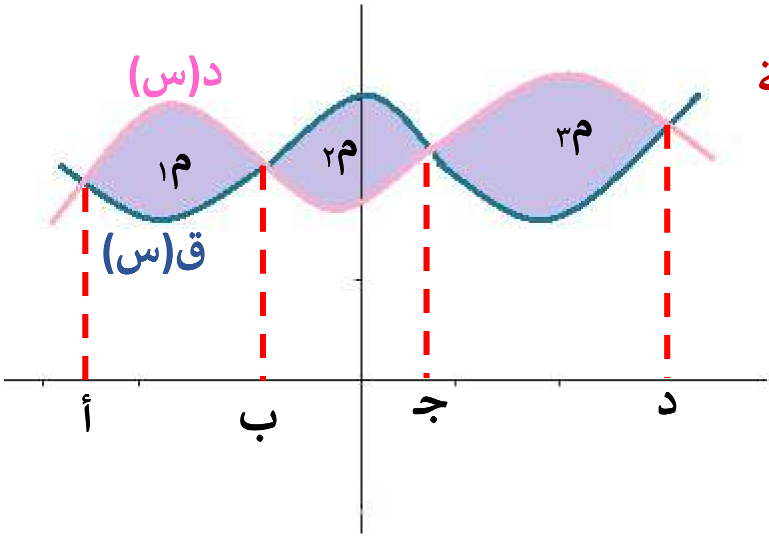
والشكل البيانى يوضح منحنى

كل من د(س) ، ق(س)

وكانت $م_١$ = ٣ وحدات مربعة

، $م_٢$ = وحدتان مربعتان

، $م_٣$ = ٤ وحدات مربعة



أي من العبارات الأتية غير صحيح ؟

☐ $\int_{أ}^{جـ} (د(س) - ق(س))\ ءس = ١$

☐ $\int_{ب}^{د} (ق(س) - د(س))\ ءس = -٢$

☐ $\int_{أ}^{د} (د(س) - ق(س))\ ءس = ٥$

☐ $\int_{د}^{جـ} (د(س) - ق(س))\ ءس = ٤$

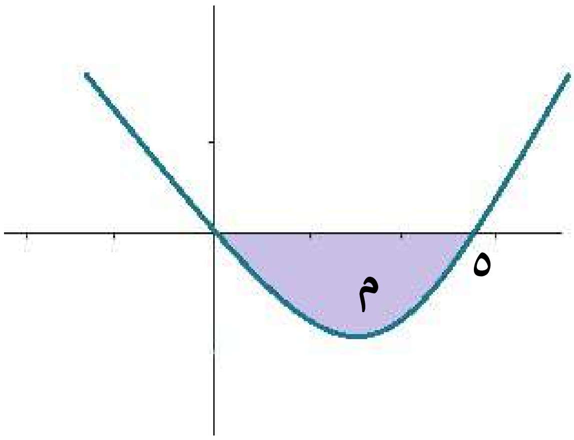
---

(٥٧) في الشكل المقابل :

إذا كانت المساحة م المحصورة بين

منحنى الدالة د(س) ومحور السينات

تساوى ٨ وحدات مربعة فإن :



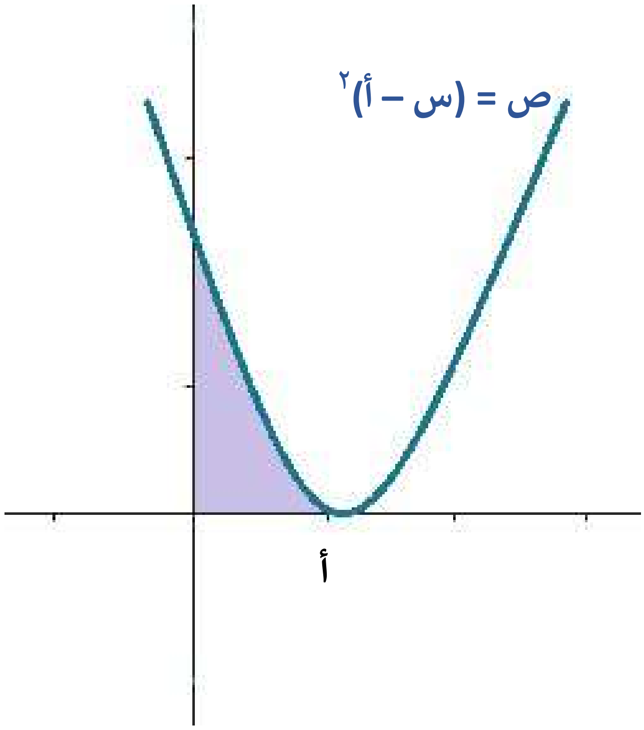
$\int_{٠}^{٥} (١ - د(س))\ ءس$ = ...

☐ ١٢ ☐ ١٣ ☐ ١٤ ☐ ١٥

(٥٨) في الشكل المقابل :

إذا كانت مساحة المنطقة المظلل

$= \frac{٨}{٣}$ وحدة مربعة فإن : أ = ...



☐ $\frac{١}{٢}$

☐ ١

☐ $\frac{٣}{٢}$

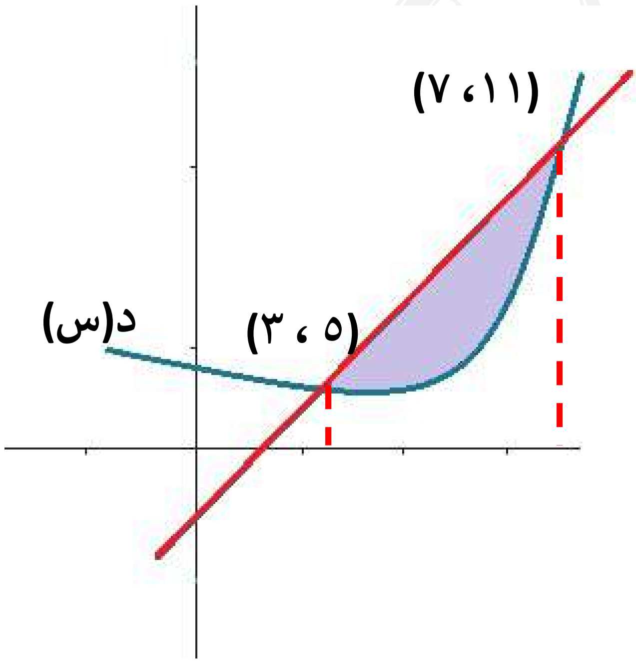
☐ ٢

(٥٩) الشكل المقابل يمثل منحنى

ص = د(س) فإذا كانت المساحة

المظللة = ٧ وحدة مربعة فإن

$\int_{٥}^{١١}$ د(س) ء س = ... وحدة مربعة



☐ ٢٥

☐ ٢٣

☐ ٢١

☐ ١٩

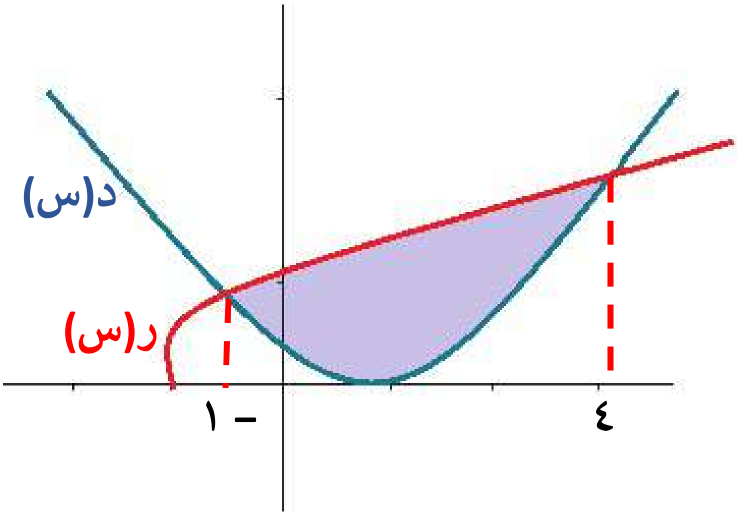
(٦٠) في الشكل المقابل :

إذا كانت د(س) = ٣(س − ١)^{٢}

، $\int_{-١}^{٤}$ ر(س) ء س = ١٥٠

فإن مساحة المنطقة المظللة

تساوي .... وحدة مساحة



☐ ١٣١ ☐ ١٢٣ ☐ ١١٩ ☐ ١١٥

الأسئلة المقالية

أوجد كلا مما يلى:

(٦١) $\int$ س^{٢} ء س

(٦٢) $\int$ صفر ء س

(٦٣) $\int \frac{\text{ء س}}{٥}$

(٦٤) $\int$ −٤س^{٣} ء س

(٦٥) $\int ٥\sqrt[٣]{س}\ ء س$

(٦٦) $\int \frac{١}{٥\sqrt{س^{٣}}}\ ء س$

(٦٧) $\int \frac{١٢}{س\sqrt{س}}\ ء س$

(٦٨) $\int \frac{٦\sqrt{ص}}{\sqrt[٣]{ص}}\ ء ص$

(٦٩) $\int (س + ١)\ ء س$

(٧٠) $\int (٣س^{٢} + ٢س - ١)\ ء س$

(٧١) $\int (س^{٤} - س^{-٢} + ٥)\ ء س$

(٧٢) $\int (س^{٣} + \sqrt{س})\ ء س$

(٧٣) $\int$ ٧س^{٢} (س^{٤} – ١) ء س

(٧٤) $\int$ س^{٣} (٢ – س)^{٢} ء س

(٧٥) $\int$ (٢س + ٣)(س – ١) ء س

(٧٦) $\int$ (١ – س^{٢})^{٢} (١ + س^{٢})^{٢} ء س

(٧٧) $\int$ $\sqrt{س}$ (١ + $\sqrt{س}$) ء س

(٧٨) $\int$ $\sqrt{س}$ (س + $\sqrt{س}$ + ٢ $\sqrt{س}$ – $\frac{١}{\sqrt{س}}$) ء س

(٧٩) $\int \frac{\text{٣س}^{٢} - \text{٤س}}{\text{س}} \, \text{ء س}$

(٨٠) $\int \frac{\text{س}^{٥} - \text{٣س}^{٣} + ٢}{\text{س}^{٢}} \, \text{ء س}$

(٨١) $\int \frac{\text{٤س}^{٢} - ٩}{\text{٢س} - ٣} \, \text{ء س}$

(٨٢) $\int \frac{\text{س}^{٢} - \text{٢س} - ٨}{\text{س} + ٢} \, \text{ء س}$

(٨٣) $\int \frac{(\text{س}^{٢} + ٢)^{٢}}{\text{س}^{٢}} \, \text{ء س}$

(٨٤) $\int (\text{س} - ٧)^{٩} \, \text{ء س}$

(٨٥) $\int ٧(\text{٢س} - ٧)^{٦} \, \text{ء س}$

(٨٦) $\int \frac{١٥}{(\text{٣س} - ٥)^{٦}} \, \text{ء س}$

(٨٧) $\int \sqrt[3]{(٢س - ٤)^{٢}}$ ء س

(٨٨) $\int \frac{٧}{\sqrt{٣س - ٤}}$ ء س

(٨٩) $\int س^{٦} \left(١ - \frac{٢}{س}\right)^{٦}$ ء س

(٩٠) $\int س \sqrt[3]{\frac{٢}{س^{٣}} - \frac{١}{س^{٢}}}$ ء س

(٩١) $\int \sqrt{س - ٣}\ (س - ٣)^{٤}$ ء س

(٩٢) $\int (\text{٤س}^{٢} + \text{٤س} + ١)^{٥} \; \text{ء س}$

(٩٣) $\int \frac{(\text{٤س}^{٢} - \text{٤س} + ١)^{٧}}{(\text{٢س} - ١)^{٢}} \; \text{ء س}$

(٩٤) $\int \text{س} \, (\text{س} - ٥)^{٣} \; \text{ء س}$

(٩٥) $\int \text{س} \sqrt{\text{س} + ٤} \; \text{ء س}$

(٩٦) $\int \frac{\text{س} + ١}{\sqrt{\text{س} - ١}} \; \text{ء س}$

(٩٧) $\int \frac{\text{س}}{(\text{س} + ١)^{٢}} \; \text{ء س}$

(٩٨) $\int \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{٢س} + ٢}} \, \text{ء س}$

(٩٩) $\int \frac{\sqrt{\text{س}}}{(\sqrt{\text{س}} - ١)^{٦}} \, \text{ء س}$

(١٠٠) $\int \sqrt{\text{س}} \, (\sqrt{\text{س}} - ٣)^{٤} \, \text{ء س}$

(١٠١) $\int_{١}^{٤} ٧ \, \text{ء س}$

(١٠٢) $\int_{-١}^{٢} (\text{٢س} + ٣) \, \text{ء س}$

(١٠٣) $\int_{٠}^{٥} \sqrt{\text{٣س} + ١} \, \text{ء س}$

(١٠٤) $\int_{٠}^{٤} (\text{٢س} + ١)^{\frac{٣}{٢}} \, \text{ء س}$

(١٠٥) $\int_{١}^{٤} \frac{س - ١}{\sqrt{س} - ١} \, ءس$

عبر عن كل مما يأتي بإستخدام تكامل واحد

(١٠٦) $\int_{٠}^{٥} س^{٢} \, ءس + \int_{-٢}^{٠} س^{٢} \, ءس$

(١٠٧) $\int_{-٤}^{-١} \sqrt{س + ٦} \, ءس - \int_{٤}^{-١} \sqrt{س + ٦} \, ءس$

(١٠٨) $\int_{٢}^{٦} ك \, ءس + \int_{٣}^{٢} ك \, ءس$

(١٠٩) $\int_{٠}^{٤} ٢\text{س}^{٢}\,\text{ءس} + \int_{٤}^{٥} \text{س}^{٢}\,\text{ءس}$

إذا كان $\int_{٢}^{٤} \text{د(س)}\,\text{ءس} = ٥$ ، $\int_{٢}^{٤} \text{ر(س)}\,\text{ءس} = -٣$ فأوجد

(١١٠) $\int_{٢}^{٤} ٣\,\text{د(س)}\,\text{ءس}$

(١١١) $\int_{٤}^{٢} ٢\,\text{ر(س)}\,\text{ءس}$

(١١٢) $\int_{٢}^{٤} [\,٣\,\text{د(س)} - ٢\,\text{ر(س)}\,]\,\text{ءس}$

(١١٣) $\int_{2}^{4}$ [٣ ر(س) + ٤س] ء س

(١١٤) إذا كان $\int_{-2}^{3}$ د(س) ء س = ٩ ، $\int_{5}^{3}$ د(س) ء س = ٤

أوجد قيمة $\int_{-2}^{5}$ [٣د(س) − ٦س] ء س

(١١٦) $\int_{0}^{2}$ س (س^{2} − ٣)^{2} ء س

(١١٧) $\int_{0}^{3}$ س $\sqrt{\text{٢٥} - \text{س}^{2}}$ ء س

(١١٨) $\int_{0}^{4} \frac{س}{\sqrt{9 + س^2}}$ ء س

(١١٩) $\int_{-4}^{0} س (س + 4)^3$ ء س

(١٢٠) إذا علمت أن ص = $\frac{2}{س^2 + 5}$ فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$ ثم قيمة $\int_{0}^{2} \frac{2}{(س^2 + 5)^2}$ ء س

(١٢١) إذا علمت أن ص = $(س^2 - 2)^5$ فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$ ثم قيمة $\int_{0}^{1} س^2 (س^2 - 2)^4$ ء س

(١٢٢) إذا علمت أن ص = $\frac{(\sqrt{س} + 1)^5}{10}$ فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$ ثم قيمة $\int_{1}^{4} \frac{(\sqrt{س} + 1)^4}{\sqrt{س}}$ ء س

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين كل المنحنيات الآتية ومحور السينات

(١٢٣) ص = س (س – ٣)(س + ١)

(١٢٤) ص = س (س^{٢} – ٩)

(١٢٥) ص = س(٢س – ١)(س + ٢)

(١٢٦) ص = (س – ١)(س + ١)(س – ٤)

(١٢٧) أوجد المساحة المحصورة بين المنحنى ص = س^{٣} ومحور الصادات والمستقيمين ص = ٨ ، ص = ٢٧

(١٢٨) أوجد المساحة المحصورة بين المنحنى س = ص^{٢} + ١ ومحور الصادات والمستقيمين ص = −١ ، ص = ٢

(١٢٩) اوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين المنحنى ص = (س − ٢)^{٢} والمحورين السينى والصادى دورة كاملة حول محور السينات

(١٣٠) اوجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحددة بالمنحنى $\frac{س^{٢}}{جـ^{٢}} + \frac{ص^{٢}}{د^{٢}} = ١$ حيث جـ ، د ثابتان دورة كاملة حول

(أ) محور السينات (ب) محور الصادات

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بالمنحنيات والمستقيمات المعطاه حول محور السينات

(١٣١) ص = ٢س + ١ ، ص = ٠ ، س = ٠ ، س = ٤

(١٣٢) ص = ٣ − س ، ص = ٠ ، س = ٠

(١٣٣) ص = س^{٢} + ١ ، ص = ٠ ، س = − ١ ، س = + ١

(١٣٤) ص = $\sqrt{\text{س}}$ ، ص = ٠ ، س = ١ ، س = ٤

(١٣٥) ص = $\frac{١}{س}$ ، س = ١ ، س = ٤ ، ص = ٠

أوجد حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحصورة المحددة بالمنحنيات والمستقيمات المعطاة دورة كاملة حول محور الصادات في كل مما يأتي :

(١٣٦) ص = س ، ص = ١ ، س = ٠

(١٣٧) س + ٢ص = ٠ ، س = ٠ ، ص = ٠ ، ص = ٣

(١٣٨) ص = س^{٢} + ١ ، س = ٠ ، ص = ٥ وتقع في الربع الأول

(١٣٩) ص = $س^٢$ ، س = ٠ ، ص = ٨ وتقع في الربع الأول

(١٤٠) ص = $س^٣$ ، س = ٠ ، ص = ٨