وحدة : النهايات والاتصال

متعة الرياضيات

مع : أحمد هجرس

متعة الرياضيات مع : أحمد هجرس

نهاية دالة عند نقطة

الكتابة	$\lim_{س \to أ}$ د (س)
القراءة	نهاية الدالة د (س) عندما س تؤول إلي أ
المعني	أوجد قيمة الدالة عندما س تقترب جداً من أ

نقول أن : (س – أ) عامل صفري ، أي أن : د (أ) = ٠

خطوات إيجاد نهاية دالة نسبية (لها قاعدة واحدة) :

بالتعويض المباشر عن قيمة س = أ في الدالة .

	إذا كان الناتج		يكون الحل
١)	عدد حقيقي موجب ، سالب ، كسر ، جذر ، صفر		النهاية = العدد الحقيقي
٢)	∞ ، - ∞		الدالة ليس لها نهاية عند هذه النقطة
٣)	$\frac{صفر}{صفر}$ كمية غير معينة	نستخدم إحدى الطرق الآتية	التحليل بأنواعه المختلفة
			القسمة المطولة
			الضرب في المرافق (إذا وجد جذر)
			النظرية : $\lim_{س \to أ} \frac{س^م - أ^م}{س^ن - أ^ن} = \frac{م}{ن} \times (أ)^{م - ن}$
			قاعدة لوبيتال : نوجد مشتقة البسط والمقام ثم نعوض عن قيمة س (تستخدم هذه الطريقة في المسائل الاختيارية فقط)
			توحيد المقامات
			فصل البسط عن المقام
			الطرح والإضافة
			مسائل بها دالة المطلق
			مسائل بها دالة الصحيح

متعة الرياضيات مع : أحمد هجرس

أوجد قيمة كل من النهايات الآتية :

أولاً : بالتعويض المباشر :

نشاط صفى

١) $\lim\limits_{\text{س} \to -5} \dfrac{\text{س}^2 - 25}{\text{س} - 5}$

٢) $\lim\limits_{\text{س} \to 3} \dfrac{3\text{س}^2 - 2\text{س} + 1}{\text{س}^2 - 2\text{س}}$

٣) $\lim\limits_{\text{س} \to -5} \dfrac{\text{س}^2 - 25}{\text{س} + 5}$

٤) $\lim\limits_{\text{س} \to -2} \dfrac{\text{س}^4 - 8\text{س}^2 + 16}{\text{س}^2 + 2\text{س} + 4}$

٥) $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \sqrt{\dfrac{\text{س}^2 - 5\text{س} + 6}{\text{س} - 2}}$

٦) $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \left(\dfrac{\text{س}^3 - 8}{\text{س}^2 + 4}\right)^2$

٧) $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \dfrac{5\text{س}^2 + 2\text{س} + 3}{3\text{س}^2 - 4\text{س} + 1}$

٨) $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \dfrac{\text{س}^3 - 2\text{س}^2 + 2}{\text{س}^2 - 2\text{س} - 4}$

٩) $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \dfrac{4\text{س}^2 - 2\text{س} + \text{س}^3}{5\text{س}^2 + 3\text{س} + 1}$

١٠) $\lim\limits_{\text{س} \to 3} \dfrac{(\text{س} - 2)^2 - 3}{5\text{س} + 2}$

متعة الرياضيات

مع : أحمد هجرس

ثانياً : **مسائل بالتحليل** : ويمكن استخدام لوبيتال

نشاط صفى

١) $\lim_{\text{س} \to 2} \frac{\text{س}^2 - 5\text{س} + 6}{\text{س}^2 - 4}$

٢) $\lim_{\text{س} \to 2} \frac{\text{س}^2 + 3\text{س} - 10}{\text{س}^3 - 8}$

٣) $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{س}^2 - 6\text{س}}{4\text{س}}$

٤) $\lim_{\text{س} \to 2} \frac{5\text{س} - 10}{4\text{س} - 8}$

٥) $\lim_{\text{س} \to 4} \frac{2\text{س}^2 - 32}{\text{س}^2 - \text{س} - 12}$

٦) $\lim_{\text{س} \to \frac{1}{2}} \frac{2\text{س}^2 - 5\text{س} + 2}{2\text{س} - 1}$

٧) $\lim_{\text{س} \to -1} \frac{3\text{س}^2 + \text{س} - 2}{\text{س}^2 - 1}$

٨) $\lim_{\text{س} \to 3} \frac{3\text{س}^2 - 2\text{س} - 21}{\text{س}^2 + 2\text{س} - 15}$

٩) $\lim_{\text{س} \to 0} \frac{(\text{س} + 2)^2 - 4}{3\text{س}^2 + 3\text{س}}$

١٠) $\lim_{\text{س} \to -3} \frac{(\text{س} + 2)^3 + 1}{2\text{س}^2 + 6\text{س}}$

متعة الرياضيا

مع : أحمد هجرس

واجب منزلى

(١١ $\lim\limits_{2س \to 1} \dfrac{6 - 5س^{-1} + س^{-2}}{4 - س^{-2}}$

(١٢ $\lim\limits_{س \to 2} \dfrac{س^{4} - 2س^{3} - 6س + 12}{س^{2} + س - 6}$

(١٣ $\lim\limits_{س \to -1} \dfrac{3س^{2} + س - 2}{س^{2} - 1}$

(١٤ $\lim\limits_{س \to 3} \dfrac{3 + 2س - س^{2}}{27 - س^{3}}$

(١٥ $\lim\limits_{س \to \frac{3}{2}} \dfrac{8س^{3} - 27}{4س^{2} - 9}$

(١٦ $\lim\limits_{س \to 0} \dfrac{س^{4} - 5س^{3} + 6س^{2}}{س^{4} - 4س^{2}}$

(١٧ أوجد $\lim\limits_{س \to 1} \dfrac{س\sqrt{س} - س}{س - 1}$

١٨) أوجد $\underset{س \to ١}{نهــا} \dfrac{س\sqrt{س} - س}{س - ١}$

١٩) $\underset{س \to ٠}{نهــا} \dfrac{٩ - (س + ٣)^{٢}}{س}$

٢٠) $\underset{س \to ٢}{نهــا} \dfrac{(س - ٢)(س^{٣} - ٨)}{(س^{٢} - ٤)^{٢}}$

٢١) $\underset{س \to ٣_{٥}}{نهــا} \dfrac{٢٥^{س} - ٩}{٢٥^{س} - ٥^{س} - ٦}$

٢٢) $\underset{س \to -٢}{نهــا} \dfrac{٢س^{٢} - س - ١٠}{٧س^{٢} + ١١س - ٦}$

٢٣) $\underset{س \to ٤}{نهــا} \dfrac{(س - ٣)^{٢} - ١}{س^{٣} - ٥س^{٢} + ٤س}$

٢٤) $\underset{س \to ١}{نهــا} \dfrac{(\sqrt{س} - ١)(\sqrt[٣]{س} - ١)}{(س - ١)^{٢}}$

مع : أحمد هجرس

ثالثاً : مسائل بالقسمة المطولة : ويمكن استخدام لوبيتال

نشاط صفي

١) $\lim_{س \to 4} \frac{س^3 - 15س - 4}{س^2 - 16}$

معاملات المقسوم	١	——	١٥ -	٤ -	
الناتج × المقسوم علية		٤	١٦	٤	٤
معاملات الناتج	١	٤	١	صفر	

$$\lim_{س \to ٤} \frac{(س - ٤)(س^٢ - ٤س - ١)}{(س - ٤)(س + ٤)}$$

$$\lim_{س \to ٤} \frac{س^٢ - ٤س - ١}{س + ٤}$$

$$= \frac{١٦ - ١٦ - ١}{٤ + ٤} = \frac{- ١}{٨}$$

٢) $\lim_{س \to 1} \frac{س^3 - 2س + 1}{س^3 - 1}$

٣) $\lim_{س \to 4} \frac{س^4 - 21س^2 + 20س}{س^2 - 6س + 8}$

٤) $\lim_{س \to -2} \frac{2س^3 + 3س^2 + 4}{س^3 + 8}$

واجب منزلي

٥) $\displaystyle \lim_{\text{س} \to -1} \frac{\text{س}^5 - 3\text{س}^3 - 2}{\text{س}^4 - 5\text{س}^2 + 4}$

٦) $\displaystyle \lim_{\text{س} \to 1} \frac{\text{س}^3 - 5\text{س}^2 + 7\text{س} - 3}{\text{س}^3 - 2\text{س}^2 + \text{س}}$

٧) $\displaystyle \lim_{\text{س} \to 1} \frac{\text{س}^4 + \text{س}^2 - 5\text{س} + 3}{\text{س}^3 - 3\text{س} + 2}$

٨) $\displaystyle \lim_{\text{س} \to 1} \frac{5\text{س}^{-3} + 2\text{س}^{-1} - 7}{-4 + 3\text{س}^{-1} + \text{س} - 3}$

ملحوظة : نضرب البسط والمقام × $\text{س}^{٣}$ أولاً

٩) $\displaystyle \lim_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{س}^{٣} - ٢٧}{\text{س}^{٣} - ٧\text{س} - ٦}$

١٠) $\displaystyle \lim_{\text{س} \to -١} \frac{٨\text{س}^{٤} - \text{س}^{٣} - ٣\text{س}^{٢} - ٦}{\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} + ٢}$

رابعاً : **مسائل بالضرب في المرافق :**

المقدار	المرافق	حاصل الضرب	ملاحظات
$\sqrt{س - ٤} + ٣$	$\sqrt{س - ٤} - ٣$	$(س - ٤) - ٩$	# الجذر × نفسه = ما تحت الجذر
$\sqrt{س + ١} - \sqrt{٣}$	$\sqrt{س + ١} + \sqrt{٣}$	$(س + ١) - ٣$	# الفرق بين مربعين = المقدار × مرافقة التربيعي

المقدار	المرافق التكعيبي	حاصل الضرب
$\sqrt[٣]{س - ٤} + ٣$	$(\sqrt[٣]{س - ٤})^{٢} - ٣(\sqrt[٣]{س - ٤}) + (٣)^{٢}$	$(س - ٤) + ٢٧$
$\sqrt[٣]{س + ١} - ٢$	$(\sqrt[٣]{س + ١})^{٢} + ٢(\sqrt[٣]{س + ١}) + (٢)^{٢}$	$(س + ١) - ٨$
# الفرق بين (مجموع) مكعبين = المقدار × مرافقة التكعيبي		

نشاط صفي

١) $\underset{س \leftarrow 1}{\text{نها}} \dfrac{س\sqrt{س} - س}{س - 1}$

$\underset{س \leftarrow 0}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{س + 4} - 2}{س}$

متعة الرياضيات مع : أحمد هجرس

٣) $\lim\limits_{س \to 4} \dfrac{\sqrt{س - 1} - \sqrt{3}}{س - 4}$

٤) $\lim\limits_{س \to 5} \dfrac{س - 5}{\sqrt{س - 4} - \sqrt{6 - س}}$

واجب منزلي

٥) $\lim\limits_{س \to 3} \dfrac{\sqrt{س + 1} - 2}{\sqrt{س - 2} - 1}$

٦) $\lim\limits_{س \to 3} \dfrac{س - 3}{\sqrt{5س + 1} - \sqrt{7س - 5}}$

رياضيات
أحمد هجرس

٧) $\displaystyle \lim_{\text{س}\to 7} \frac{\sqrt[3]{\text{س}+1}-2}{\text{س}-7}$

٨) $\displaystyle \lim_{\text{س}\to 1} \frac{\text{س}-\sqrt{\text{س}+3}+1}{\text{س}^2-\text{س}}$

٩) $\displaystyle \lim_{\text{س}\to 3} \frac{\sqrt{\text{س}^2-\text{س}-2}-2}{\text{س}^3-27}$

١٠) $\displaystyle \lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{س}}{-\text{س}+\sqrt{\text{س}^4+1}-1}$

متعة الرياضيات مع : أحمد هجرس

خامساً : مسائل بالنظرية :

١) $\lim_{\text{س} \to 2} \frac{\text{س}^5 - 32}{\text{س}^3 - 8}$

٢) $\lim_{\text{س} \to -2} \frac{\text{س}^5 + 32}{\text{س}^3 + 8}$

٣) $\lim_{\text{س} \to 2} \frac{2\text{س}^5 - 64}{\text{س}^3 - 8}$

٤) $\lim_{\text{س} \to -2} \frac{\text{س}^6 - 64}{\text{س}^3 + 8}$

واجب منزلي

٥) $\lim_{\text{س} \to -2} \frac{\text{س}^6 - 64}{3\text{س} + 6}$

٦) $\lim_{\text{س} \to -1} \frac{\text{س}^{11} + \text{س}^2}{\text{س}^7 - \text{س}}$

٧) $\lim_{\text{س} \to 2} \frac{32 - \text{س}^5}{\text{س}^3 - 8}$

٨) $\lim_{\text{س} \to 2} \frac{32 - \text{س}^5}{8 - \text{س}^3}$

مع : أحمد هجرس

٩) $\lim\limits_{2س \to 1} \dfrac{32س^5 - 1}{8س^3 - 1}$

١٠) $\lim\limits_{س \to \sqrt{2}} \dfrac{س^6 - 8}{س^4 - 4}$

١١) $\lim\limits_{هـ \to 0} \dfrac{(س + 3هـ)^7 - س^7}{5هـ}$

١٢) $\lim\limits_{هـ \to 0} \dfrac{(س + 3هـ)^5 - س^5}{هـ}$

١٣) $\lim\limits_{س \to ١٦} \dfrac{\sqrt[٤]{س^٣} - ٨}{\sqrt{س} - ٤}$

١٤) $\lim\limits_{2س \to 3} \dfrac{16س^5 - 81س}{2س^3 - 3س^2}$

١٥) إذا كان : $\lim\limits_{س \to ك} \dfrac{س^{12} - ك^{12}}{س^{10} - ك^{10}} = ٣٠$ فأوجد قيمة ك

متعة الرياضيات
مع : أحمد هجرس

سادساً : **مسائل بها مجهول**

١) إذا كان : $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢} - \text{س} + \text{ل}}{٢\,\text{س} - ٦}$ موجودة ، فأوجد قيمة ل

٢) إذا كان : $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢} + \text{أ}\,\text{س} + \text{ب}}{\text{س}^{٢} - ٩} = ٢$ فأوجد قيمة : أ ، ب

٣) إذا كان : $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{م}\,\text{س} - \sqrt{\text{س} + ٣}}{\text{س}^{٢} - \text{س}} = \text{ب}$ فأوجد قيمة ب

٤) أوجد قيمة ل التي تجعل : $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س} - ٢}{٥\,\text{س}^{٢} - ١٠\,\text{س} + ٢\,\text{ل}\,\text{س} - ٤\,\text{ل}} = ٠٫٢٥$

متعة الرياضيات
مع : أحمد هجرس

٥) إذا كان : $\underset{\text{١ – ٢ س} \leftarrow ٣}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{س}^{٢} + (\text{م} + ١)\,\text{س} + \text{م}}{-\,٢\,\text{س} - ٢} = ٢$

فأوجد قيمة م .

٦) إذا كان : $\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{ق}(\text{س}) - ٢٥}{\text{س} - ٥} = ٤$

فأوجد : $\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{ق}(\text{س}) - \text{س}^{٢}}{\text{س} - ٥}$

٧) إذا كان : $\underset{\text{س} \leftarrow 1}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{س}^{2} + \text{أ س} + \text{ب}}{\text{س} - 1} = ٥$

فأوجد قيمة أ ، ب

٨) إذا كان : $\underset{\text{س} \leftarrow 3}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{س}^{2} + \text{ك س} + 6}{\text{س}^{2} - 9}$ موجوده ،

فأوجد قيمة ك

سابعاً : توحيد المقامات :

١) $\lim_{س \to 2} \left(\frac{1}{س - 2} - \frac{12}{س^3 - 8} \right)$

٢) $\lim_{س \to ٢} \left(\frac{٢}{س^٢ - ٤} - \frac{١}{٢س - ٤} \right)$

٣) $\lim_{س \to ١} \left(\frac{١}{س} - \frac{١}{\sqrt{س}} \right) \left(\frac{١}{س - \sqrt{س}} \right)$

٤) $\lim_{س \to ٥} \left(\frac{٤}{س} - \frac{٤}{٥} \right) \left(\frac{١}{س^٢ - ٢٥} \right)$

٥) $\lim_{س \to ٣} (س - ٣)(٤س^٢ - \frac{٦}{س^٢ - ٩})$

٦) $\lim_{س \to -٥} \left(\frac{٢٥}{س + ٥} - \frac{س^٢}{س + ٥} \right)$

متعة الرياضيات مع: أحمد هجرس

ثامناً : تجزئ الكسر :

١) $\lim\limits_{س \to 1} \dfrac{س^{19} + س^{5} - 2}{س - 1}$

٢) $\lim\limits_{س \to 2} \dfrac{س^{5} + س^{2} - 36}{س - 2}$

٣) $\lim\limits_{س \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{س} + \sqrt{س} - 2}{س - 1}$

٤) $\lim\limits_{س \to ٤} \dfrac{٢س - \sqrt{س} - ٦}{٢ - \sqrt{س}}$

٥) $\lim\limits_{س \to ٤} \dfrac{س - \sqrt{س} - ٢}{س^{٢} - ١٦}$

٦)

تاسعاً : **فصل البسط عن المقام** :

١) $\lim\limits_{\text{س} \to -1} \dfrac{\text{س}^{2} - \text{س} - 2}{\sqrt[3]{\text{س}} + 1}$

٢) $\lim\limits_{\text{س} \to -8} \dfrac{\sqrt{1 - \text{س}} - 3}{2 + \sqrt[3]{\text{س}}}$ ن

٣) $\lim\limits_{\text{س} \to 1} \dfrac{\sqrt[5]{\text{س}^{2}} - 1}{\sqrt[5]{\text{س}^{3}} - 1}$

٤) $\lim\limits_{\text{س} \to 4} \dfrac{\text{س} - \sqrt{\text{س}} - 2}{\text{س}^{2} - 16}$

متعة الرياضيات
مع : أحمد هجرس

٥) $\lim\limits_{س \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{س + 8} - 2}{(س + 3)^5 - 243}$

٦) $\lim\limits_{هـ \to 0} \dfrac{\dfrac{3}{س + هـ} - \dfrac{3}{س}}{هـ}$

٧) $\lim\limits_{س \to 0} \dfrac{(1 + 4س)^8 - 1}{9س}$

٨) $\lim\limits_{س \to 0} \dfrac{(1 + 5س)^{10} - 1}{(1 + 7س)^8 - 1}$

متعة الرياضيات
مع : أحمد هجرس

نهاية الدوال المعرفة بأكثر من قاعده

أولاً : لبحث النهاية عندما تتغير قاعدة تعريف الدالة على يمين ويسار أ :

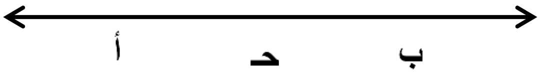
@ نوجد النهاية من اليمين : د (أ$^{+}$) = نهـــا (س ← أ$^{+}$) ..... عند س > أ

@ نوجد النهاية من اليسار : د (أ$^{-}$) = نهـــا (س ← أ$^{-}$) ..... عند س > أ

∵ النهاية من اليمين = النهاية من اليسار ∴ الدالة لها نهاية .

∵ النهاية من اليمين ≠ النهاية من اليسار ∴ الدالة ليس لها نهاية .

ثانياً : لبحث النهاية على فترة (مفتوحة أو مغلقة)



∵ الدالة معرفة على يمين أ فقط . ∴ نوجد النهاية اليمنى فقط .

∵ الدالة معرفة على يسار ب فقط . ∴ نوجد النهاية اليسرى فقط .

∵ الدالة معرفة على يمين ويسار حـ . ∴ نوجد النهاية اليمنى واليسرى .

وجود نهاية للدالة عند س ← أ ، لا يعني بالضرورة أن تكون الدالة معرفة عند س = أ والعكس

إذا كانت الدالة معرفة عند س = أ ، فهذا لا يعني وجود نهاية للدالة عند س ← أ

١) إذا كان : د (س) = { ٢ س + ١   س ≥ ١ ، ٥ س – ٢   س > ١ }

أوجد كلاً من :

نهـــا (س ← 1) د (س)

نهـــا (س ← 2) د (س)

نهـــا (س ← 0) د (س)

٢) إذا كانت : د (س) =

$$د(س) = \begin{cases} ٢س + ٤ & س < -٣ \\ ٣س + ٧ & -٣ < س < ٥ \\ ٥ - س & س \geq ٥ \end{cases}$$

فأوجد : $\lim_{س \to -3} د(س)$

$\lim_{س \to 5} د(س)$

---

٣) أوجد $\lim_{س \to 0} د(س) =$

$$\begin{cases} \dfrac{5س^2 - 5س}{30س^2 - 30س} & س > ٠ \\ \dfrac{\sqrt{س + 9} - 3}{س} & س < ٠ \end{cases}$$

---

٤) إذا كان : د (س) =

$$\begin{cases} \dfrac{س^2 - 5س + 6}{س - 2} & ٢ < س < ٤ \\ \dfrac{1}{س - 5} & ٤ \leq س \leq ٦ \end{cases}$$

فأوجد قيمة كل من : $\lim_{س \to 2} د(س)$

$\lim_{س \to 4} د(س)$

$\lim_{س \to 6} د(س)$

---

٥) إذا كانت : د (س) =

$$\begin{cases} س + أ & س < أ \\ أ س^2 + ب & س \geq أ \end{cases}$$

حيث $\lim_{س \to أ} د(س) = ٤$ فأوجد قيمة : أ ، ب

٦) إذا كان : د (س) = $\begin{cases} \dfrac{س^2 - 9}{س + 3} & س \neq -٣ \\ ك & س = -٣ \end{cases}$ فأوجد قيمة ك حيث د (-٣) = $\lim_{س \to -3}$ د (س)

٧) إذا كان : د (س) = $\begin{cases} س^٢ + ك س + ٣ & س < ١ \\ \dfrac{س^2 - 1}{س - 1} & س > ١ \end{cases}$ فأوجد قيمة ك لتكون $\lim_{س \to 1}$ د (س) موجودة

٨) إذا كان : د (س) = $\begin{cases} ٣ س - ٢ & س < -١ \\ أ س + ب & -١ < س < ٣ \\ ٦ - س & س > ٣ \end{cases}$ فأوجد قيمة أ ، ب

إذا كان د (س) لها نهاية عند س = -١ ، س = ٣

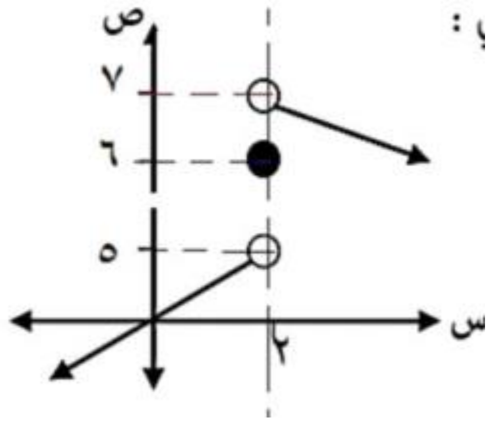
متعة الرياضيات
مع : أحمد هجرس

إيجاد النهاية من خلال الرسم

الدائرة المفتوحة لا تمنع وجود نهاية للدالة ،

النهاية تكون موجودة إذا كان : النهاية اليمنى = النهاية اليسرى

١) باستخدام الشكل المقابل أوجد كلاً من :



أ) د(٢) =

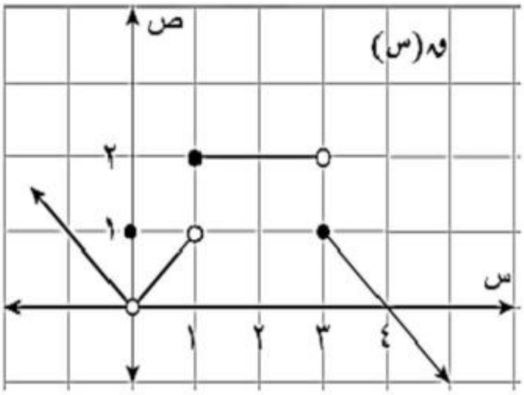
ب) نهــا د(س) =
س ← ٢+

جـ) نهــا د(س) =
س ← ٢−

ى) نهــا د(س)
س ← ٢

---

٢) إذا كان الشكل يمثل منحنى الدالة ه(س) المعرف على (ع)
فإن مجموعة قيم (أ) حيث نهــا ه(س) غير موجودة هي :
س ← أ

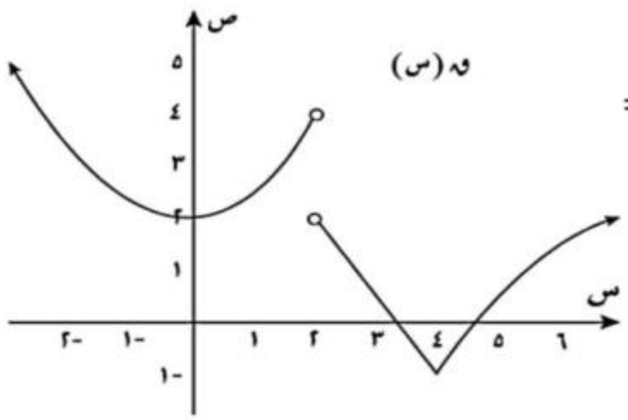


أ) {١ ، ٣ ، ٠}　　ب) {١ ، ٣ ، ٤}

جـ) {١ ، ٣ ، ٤ ، ٠}　　د) {١ ، ٣}

---

٣) معتمداً على الشكل ، اوجد ما يلي :



أ) نهــا ه(س) =
س ← ٢+

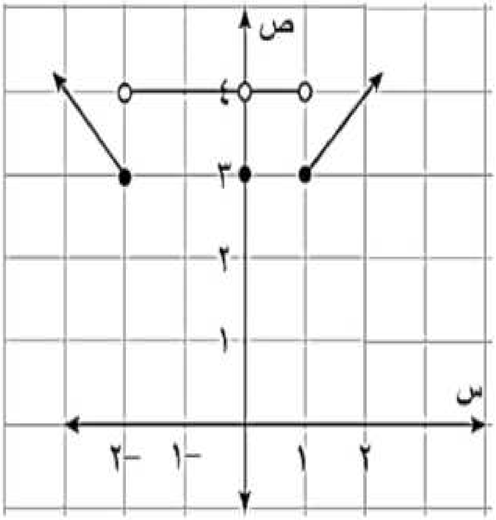
ب) نهــا ه(س) =
س ← ٢−

ج) نهــا ه(س) =
س ← ٢

د) نهــا ه(س) =
س ← ٣

هـ) نهــا ه(س) =
س ← ٤

إذا كان الشكل يمثل منحنى الدالة ه(س) المعرف على (ع) فإن مجموعة قيم (أ) حيث $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}^+} \text{ه(س)} = ٣$ هي :

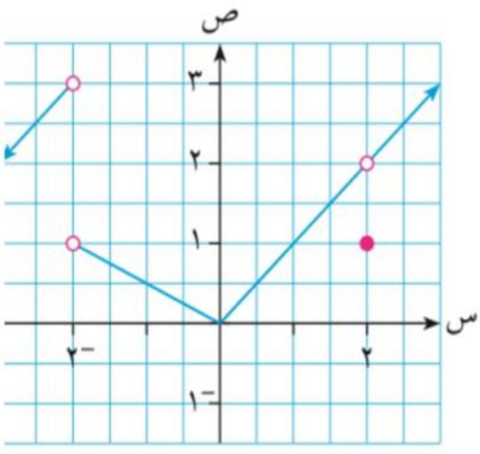


أ) {١} ب) {١، −٢}

ج) {٠، ١} د) {١، ٠، −٢}

---

٥) الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة ق (س) ابحث النهايات الآتية :



أ $\lim\limits_{\text{س} \to -٢^-} \text{ق(س)}$

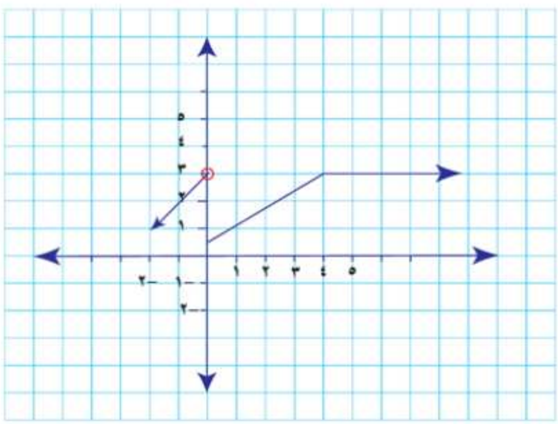
ب $\lim\limits_{\text{س} \to -٢^+} \text{ق(س)}$

جـ $\lim\limits_{\text{س} \to -٢} \text{ق(س)}$

د $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \text{ق(س)}$

هـ $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \text{ق(س)}$

الرسم التالي يمثل بيان إحدى الدوال. من الرسم اوجد:



أ) $\lim\limits_{\text{س} \to ٠^+} \text{د(س)}$ ، $\lim\limits_{\text{س} \to ٠^-} \text{د(س)}$ ، $\lim\limits_{\text{س} \to ٠} \text{د(س)}$

ب) $\lim\limits_{\text{س} \to ٢^+} \text{د(س)}$ ، $\lim\limits_{\text{س} \to ٢^-} \text{د(س)}$ ، $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \text{د(س)}$

جـ) $\lim\limits_{\text{س} \to ٤^+} \text{د(س)}$ ، $\lim\limits_{\text{س} \to ٤^-} \text{د(س)}$ ، $\lim\limits_{\text{س} \to ٤} \text{د(س)}$

مسائل بها دالة المطلق

| س – ٣ | = | ٣ – س |

$\sqrt{(س – ٥)^٢}$ = | س – ٥ |

أولاً : **إعادة تعريف دالة المطلق** : إذا كان : د (س) = | س – ٢ |

١) نوجد أصفار ما بداخل المطلق . س = ٢

٢) نرسم خط الأعداد .

عكس إشارة س   مثل إشارة س

– س + ٢   س – ٢

أصفار المطلق
٢

نهـــا (س ← ٤) د (س) = نهـــا (س ← ٤) س – ٢ = ٤ – ٢ = ٢

نهـــا (س ← ١) د (س) = نهـــا (س ← ١) – س + ٢ = – ١ + ٢ = ١

لدراسة نهـــا (س ← ٢) د (س) ، لابد من إيجاد النهاية اليمنى والنهاية اليسرى

نهـــا (س ← ٢⁺) س – ٢ = ٢ – ٢ = صفر ، نهـــا (س ← ٢⁻) – س + ٢ = – ٢ + ٢ = صفر

النهاية اليمنى = النهاية اليسرى = صفر

إذا كانت د(س) = $\frac{س^٢+٥س}{|س+٥|}$ فأوجد كلاً من :

أ) نهـــا (س ← -٣) د(س)

ب) نهـــا (س ← ٤) د(س)

ج) نهـــا (س ← -٥) د(س)

١) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ - ٤س + ٣}{|س - ١|}$

٢) $\lim_{س \to -٣} \frac{س + ٣}{|س + ٣|}$

٣) $\lim_{س \to -٤} \frac{-٤ + |٢س + ٤|}{س + ٤}$

٤) إذا كان : د (س) = $\begin{cases} ٢ س + \frac{|س - 3|}{3 - س} & س < ٣ \\ س + ٤ & س > ٣ \end{cases}$

فابحث نهاية الدالة عند س = ٣

٥) إذا كانت د(س) = س |س-٣| +٢ ، أوجد $\lim_{س \to ٣}$ د(س)

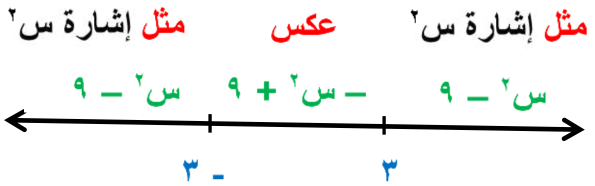
متعة الرياضيا

مع : أحمد هجرس

إذا كانت $\text{د(س)} = \begin{cases} 1 + \dfrac{\text{س}^2 + 2\text{س}}{|\text{س} + 2|} &، \; -3 < \text{س} < 0 \\ 2\text{س} + 1 &، \; 0 < \text{س} < 3 \end{cases}$

أوجد: ٩) $\lim\limits_{\text{س} \to -3^{+}} \text{د(س)}$ ، ب) $\lim\limits_{\text{س} \to 2} \text{د(س)}$ ، ج) $\lim\limits_{\text{س} \to 0} \text{د(س)}$ ، د) $\lim\limits_{\text{س} \to 3^{-}} \text{د(س)}$

$$\lim_{\text{س} \to 3} |\text{س}^2 - 9|$$



بنفس الطريقة في المثال السابق أوجد : $\lim\limits_{\text{س} \to 0} |4 - \text{س}^2|$

أوجد : $\lim\limits_{\text{س} \to 3} \sqrt{\text{س}^2 - 6\text{س} + 9}$

مسائل بها دالة الصحيح

[س + ا] = [س] + ا ، حيث (ا) عدد صحيح

[س] = ا ⇐ ا ≤ س < ا + ١

إعادة تعريف دالة الصحيح : ١) نوجد طول الفترة = $\frac{1}{|معامل س|}$

٢) نرسم خط الأعداد ونوضح علية الفترات .

٣) نعوض في الدالة عن قيم س :

	س : موجبة	س : سالبة
نعوض بـ	بداية الفترة	نهاية الفترة

٤)	نهاية الدالة	السبب
عند بداية الفترة ونهايتها	غير موجودة	النهاية اليمنى ≠ النهاية اليسرى
داخل الفترة	موجودة = ناتج التعويض	

١) إذا كان : د (س) = [٣ - $\frac{1}{2}$ س] حيث س ∋ [- ٢ ، ٤]

فأوجد : $\lim_{س \leftarrow 2}$ د(س)

$\lim_{س \leftarrow 1}$ د(س)

٢) إذا كان : د (س) = [٢ س – ١] فأوجد نهاية الدالة عند كلاً من : س = ١ ، س = ٠٫٥ ، س = ٠٫٢٥

متعة الرياضيات مع : أحمد هجرس

٣) إذا كان : د (س) = $\dfrac{[\frac{س}{4} + 1]}{|س + 4|}$ فابحث نهاية الدالة عند س = - ٤

٤) إذا كان : د (س) = $\dfrac{[\frac{س}{2} + 1]}{|س + 2|}$ فابحث نهاية الدالة عند س = - ٢

٥) إذا كانت د(س) = $\begin{cases} [\frac{س}{٢} + ١] + س & ، \quad س < ٣ \\ |س - ٤| + ك & ، \quad س \geq ٣ \end{cases}$ وكانت $\lim_{س \to ٣}$ د(س) موجودة ، أوجد قيمة ك.

٦) إذا كـــان د(س) = $\begin{cases} [\![٢س + ١]\!] & ، \quad س < ٣ \\ |١٠ - ٢س| & ، \quad س \leq ٣ \end{cases}$ فإن $\lim_{س \to ٣^-}$ د(س)

٧) إذا كانت $\lim\limits_{\text{س} \to -3} \dfrac{2\text{س}^2 + \text{جـ}\left[\frac{\text{س}}{2}\right] - \text{جـ}}{\text{س}^2 - 2\text{س} - 15}$ موجودة فأوجد قيمة جـ

---

٨) إذا كانت $\text{د(س)} = \begin{cases} \left[\frac{\text{س}}{2} + 1\right] + \text{س} &، \text{س} < 3 \\ |\text{س} - 4| + \text{ك} &، \text{س} \geq 3 \end{cases}$ وكانت $\lim\limits_{\text{س} \to 3} \text{د(س)}$ موجودة ، أوجد قيمة ك

---

٩) ابحث نهاية الدالة $\text{هـ(س)} = \dfrac{\left[\frac{1}{2}\text{س} + 1\right]}{|\text{س} + 2|}$ ، عند النقطة س= -٢

متعة الرياضيات
مع : أحمد هجرس

نظريات النهايات

١) $\lim_{س \to أ}$ جـ = جـ حيث جـ عدد حقيقي

٢) $\lim_{س \to أ}$ ك. د(س) = ك $\lim_{س \to أ}$ د(س)

٣) إذا كانت : د (س) دالة كثيرة حدود ، فإن : $\lim_{س \to أ}$ د (س) = د (أ)

٤)

إذا كانت $\lim_{س \to أ}$ د(س) = م ، $\lim_{س \to أ}$ هـ(س) = ن فإن:

١	$\lim_{س \to أ}$ (د(س) ∓ هـ(س)) = $\lim_{س \to أ}$ د(س) ∓ $\lim_{س \to أ}$ هـ(س) = م ∓ ن
٢	$\lim_{س \to أ}$ (د(س) . هـ(س)) = $\lim_{س \to أ}$ د(س) . $\lim_{س \to أ}$ هـ(س) = م . ن
٣	$\lim_{س \to أ} \frac{د(س)}{هـ(س)} = \frac{\lim_{س \to أ} د(س)}{\lim_{س \to أ} هـ(س)} = \frac{م}{ن}$ ، ن ≠ ٠
٤	$\lim_{س \to أ} \sqrt{د(س)} = \sqrt{\lim_{س \to أ} د(س)} = \sqrt{م}$ ، م ≥ ٠ ، د(س) ≥ ٠
٥	$\lim_{س \to أ}$ (د (س))^{ل} = م^{ل}

$\lim_{س \to ٥}$ ٧ = ٧ ، $\lim_{س \to ٣}$ ٧ = ٧

٢) إذا كان : د (س) = ٢ س^{٣} – ٣ س + ٢ فأوجد : نهـا د (س) عندما س ← ٣

٣) إذا كان : $\lim_{س \to ٥}$ هـ (س) = ٨ ، $\lim_{س \to ٥}$ ق (س) = - ٦ فأوجد قيمة كل من :

$\lim_{س \to ٥}$ (د (س) × ق (س))

$\lim_{س \to ٥}$ (٣ هـ (س) – ٢ ق (س))

$\lim_{س \to ٥}$ (س هـ (س) + ق^{٢} (س))

إذا كانت $\lim\limits_{س \to ٣} هـ(س) = ٢$ ، فإن $\lim\limits_{س \to ٣} (٤هـ(س) + ١)$ تساوي :

- ○ ٥
- ○ ٧
- ○ ٩
- ○ ١٣

إذا كانت $\lim\limits_{س \to } \frac{ل(س) - ٤}{س} = ٨$ وكان ل(س) دالة كثيرة حدود فإن $\lim\limits_{س \to } (ل(س) + ١٠) =$

- ○ ٤
- ○ ١٤
- ○ ١٨
- ○ ٦

إذا كانت ق(س) كثيرة حدود وكانت $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{ق(س)}{س} = ٣$ فإن $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{ق^٢(س)}{س} =$

- ○ ٩
- ○
- ○ ٦
- ○ ٣٦

إذا كانت ق(س) كثيرة حدود وكانت $\lim\limits_{س \to } (ق(س) - ٥) = ٣$ فإن $\sqrt{٢ق(س)} =$

- ○ ١٦
- ○ ٤-
- ○ ٤
- ○ غير موجودة

إذا كانت ق(س) دالة كثيرة حدود وكانت $\lim\limits_{س \to } \frac{٢ق(س)}{س} = ٤$ فإن $\lim\limits_{س \to } \frac{(س+١)^٢ - ١}{ق(س)}$

- ○ ٤
- ○ ١
- ○ $\frac{١}{٤}$
- ○ ٢

إذا كانت $\lim\limits_{س \to ٣} \left(٤س\, ق(س) + \frac{١٢}{س}\right) = ٥٢$ فجد: $\lim\limits_{س \to ٣} \left(ق^٣(س) + \frac{٢٤}{\sqrt{ق(س)}}\right)$

إذا كانت $\lim\limits_{س \to ١} \left(٣س^٢ - \frac{٥}{ق(س)} + ٢\right) = ٠$ فأوجد $\lim\limits_{س \to ١} ق(س)$.

متعة الرياضيات
مع : أحمد هجرس

نهاية دوال بها جذور

مجال الجذر التكعيبي = ح

مجال الجذر التربيعي : ما تحت الجذر ≥ صفر

نهاية الجذر التكعيبي دائماً موجودة (بالتعويض المباشر)

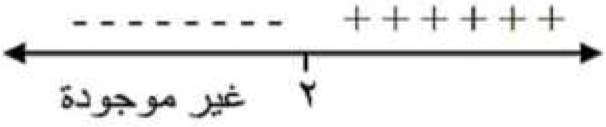
	ناتج ما تحت الجذر	النهاية
الجذر التربيعي بالتعويض المباشر	موجب	= الناتج
	صفر	غير موجودة (اليمين له قيمة واليسار غير مُعرف)
	سالب	غير موجودة (خارج مجال التعريف)

١) إذا كان : د (س) = $\sqrt[3]{س+٢}$ فأوجد مجال د (س) ، نهـا س ← ٥ ، نهـا س ← -٢ ، نهـا س ← -٤

- -

٢) إذا كان : د (س) = $\sqrt{س - ٢}$

فأوجد مجال د (س)



نهـا د (س) س ← ٣

نهـا د (س) س ← ٢^{+}

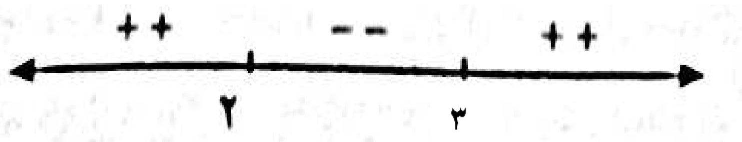
نهـا د (س) س ← ٢

نهـا د (س) س ← ١

متعة الرياضيات مع : أحمد هجرس

٢) إذا كان : د (س) = $\sqrt{س^٢ - ٥ س + ٦}$

فأوجد مجال د (س)



نهـــا د (س) ، س ← ٣

نهـــا د (س) ، س ← ٥و٢

نهـــا د (س) ، س ← ٢

نهـــا د (س) ، س ← ١

نهـــا د (س) ، س ← ٤

- -

اذا كانت نهـــا (س ← ب) $\sqrt{س-ب}$ موجودة فإن قيمة ب تكون أ) ٢ ب) ١ جـ) صفر د) -١

- -

إذا كانت نهـــا (س ← ١) $\sqrt{ل-س^٢}$ موجودة فإن قيمة ل هي : أ) ٢ ب) صفر جـ) -١ د) -٢

- -

اذا كانت د(س)= $\sqrt{س-ب}$ ، ب>٠ فإن نهـــا (س ← جـ) د(س) تكون موجودة عندما جـ

أ) جـ < ب ب) جـ > ب ج) جـ ≤ ب د) جـ ≥ ب

- -

حدد مجال كل من الجذور الآتية :

$\sqrt{١٦ - س^٢}$

$\sqrt{س^٢ + ٩}$

الاستراتيجية :
م ع :

نهاية الدالة عندما س تؤول إلي ∞

$\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{1}{\text{س}} =$ صفر ، $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{أ}}{\text{س}} =$ صفر ، $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{أ}}{\text{س}^{\text{ن}}} =$ صفر

كسر أصغر من (١) أس ∞ = صفر

كسر أكبر من (١) أس ∞ = ∞

خطوات الحل : ١) التعويض المباشر يعطي $\frac{\infty}{\infty}$ أو $\infty - \infty$ أو صفر × ∞ كمية غير معينة

٢) لابد من قسمة البسط والمقام علي أعلي أس في الدالة .

ويمكن استخدام الجدول الآتي مباشرة في بعض المسائل .

	الناتج	الحل
١)	أس البسط = أس المقام	$\frac{\text{معامل أعلي أس}}{\text{معامل أعلي أس}}$
٢)	أس البسط < أس المقام	صفر
٣)	أس البسط > أس المقام	∞

@ إذا كانت س تؤول إلي – ∞ نحول كل س إلي – س ونكمل الحل .

@ س = $\sqrt{\text{س}^2} = \sqrt[3]{\text{س}^3} = ...$

@ إذا كانت الدالة بها جذر تربيعي فقط ، نضرب في المرافق أولاً ليصبح دالة كسرية ونكمل الحل كما سبق .

أوجد قيمة النهايات الآتية :

١) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{2\text{س}^5 + \text{س}^2 - 36}{\text{س}^2 - 3\text{س}^5 - 2}$

٢) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{س}^3 + \text{س}^4 - 6\text{س}}{4\text{س}^2 + 7\text{س}^5 - 2}$

٣) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{\text{س}^3 + \text{س}^4 - 6\text{س}^7}{4\text{س}^2 + 7\text{س}^3 - 2}$

٤) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \sqrt[3]{\dfrac{16\text{س}^7 - 27\text{س}^5}{1 - 2\text{س}^7}}$

٥) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{2\text{س}^{-5} + \text{س}^{-2} - 36}{\text{س}^{-2} - 3\text{س}^{-5} - 2}$

٦) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{\text{س}^{-4} - \text{س}^{-3}}{3\text{س}^{-4} + 2\text{س}^{-1}}$

٧) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{5\text{س}(3\text{س} - 1)(\text{س} + 2)}{3\text{س}^2(\text{س} - 1)}$

٨) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{(3\text{س}^2 - 1)^3(\text{س} + 2)^5}{(3\text{س}^4 + 1)^2(\text{س} - 1)^3}$

٩) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{\sqrt{9\text{س}^3 + 2\text{س}^2 - 3}}{\sqrt[4]{8\text{س}^6 - 3\text{س}^4}}$

١٠) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{\sqrt{9\text{س}^2 + 2\text{س} - 3}}{\sqrt[3]{8\text{س}^3 - 3\text{س}^2}}$

(١١) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \left(\sqrt{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ٢} - \text{س}\right)$

(١٢) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \left(\sqrt{\text{س}^{٢} + \text{س}} - \text{س}\right)$

(١٣) $\lim\limits_{\text{س} \to -\infty} \dfrac{٤\text{س}^{٣} - ٢\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٦} + \text{س}^{٤}}$

(١٤) $\lim\limits_{\text{س} \to -\infty} \dfrac{٢\text{س} - \sqrt{\text{س}^{٢} - ٤}}{\text{س} + ٧}$

(١٥) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{\sqrt[٣]{٨\text{س}^{٣} - ٥\text{س} + ١}}{|٣\text{س} - ٢|}$

(١٦) $\lim\limits_{\text{س} \to -\infty} \dfrac{\sqrt[٣]{٨\text{س}^{٣} - ٥\text{س} + ١}}{|٣\text{س} - ٢|}$

١٧) $\underset{\text{ن} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٥ \times ٩^{\text{ن}}}{٧ \times ٩^{\text{ن}} - ١١ \times ٥^{\text{ن}}}$

١٨) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٣^{(\text{س}+١)} - ٢ \times ٤^{\text{س}}}{٣^{(\text{س}-١)} + ٢^{٢\text{س}}}$

١٩) إذا كانت $\underset{\text{س} \to -\infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٣} - \text{أ}\,\text{س}^{\text{ن}} + ١١}{١٥ - ٣\text{س} - ٢\text{س}^{٦}} = ٢$. أوجد قيمة أ ، ن

- -

٢٠) إذا كانت $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{أ}+٤)\text{س} - (\text{أ}+٢)\text{س}^{٣}}{(\text{أ}-٢)\text{س} + ٥} =$ ب حيث أ ، ب $\in$ ح . أوجد قيمة أ ، ب

- -

أوجد قيمة ن في كل من الحالات الآتية :

٢١) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{\text{ن}} + ٥}{٣\text{س}^{٢} + ١} = \dfrac{١}{٣}$

٢٢) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{\text{ن}} + ٥}{٣\text{س}^{٢} + ١}$ موجودة

٢٣) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{\text{ن}} + ٥}{٣\text{س}^{٢} + ١}$ غير موجودة

متعة الرياضيا
مع : أحمد هجرس

اتصال الدالة عند نقطة ∋ لمجالها

@ معنى اتصال الدالة : أى عند رسمها لا نجد بها ثقب أو قفزة عند هذه النقطة .

@ خطوات بحث اتصال د (س) عند س = أ

#١ نوجد : د (أ) الدالة معرفة عند س = أ

#٢ نوجد : نهـــا$_{س \leftarrow أ}$ د (س) النهاية اليمنى = النهاية اليسرى

#٣ نهـــا$_{س \leftarrow أ}$ د (س) = د (أ) التعريف = النهاية

فتكون الدالة متصلة عند النقطة المحددة .

تمارين

	الدالة	المجال	الاتصال
١)	الحدودية ثابتة ، خطية ، تربيعية ، تكعيبية ، ...	ح	متصلة على مجالها
٢)	الكسرية	ح – { أصفار المقام }	متصلة ما عدا عند أصفار المقام
٣)	الجذر التربيعي	ما تحت الجذر ≥ صفر	# ما تحت الجذر > صفر (متصلة) # ما تحت الجذر = صفر (غير متصلة) # ما تحت الجذر > صفر (غير متصلة)
	الجذر التربيعي في المقام	ما تحت الجذر > صفر	
٤)	الجذر التكعيبي	ح	متصلة
	دالة المطلق	ح	متصلة على مجالها
	دالة الصحيح	ح	# عند بداية ونهاية الفترة (غير متصلة) # داخل الفترة (متصلة)

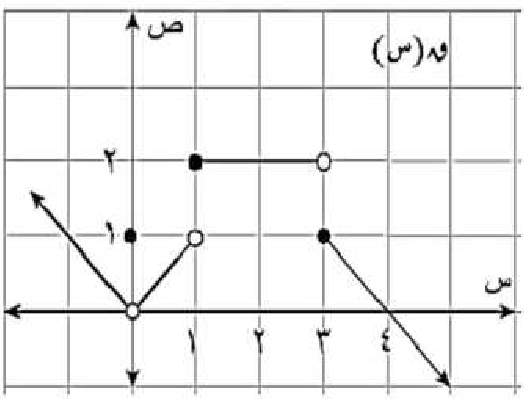
الشكل المقابل يوضح أن :

الدالة معرفة بأكثر من قاعدة (اكتب الدالة)

الدالة متصلة عند كل من : س = - ١ ، س = ٢ ، س = ٤

الدالة غير متصلة عند كل من : س = ٠ ، س = ١ ، س = ٣

اذكر السبب في كل حالة



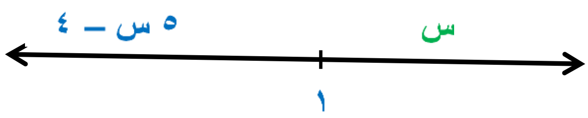
مع : أحمد هجرس

١) إذا كان : د (س) = { ٥ س – ٤   س ≥ ١ ، س   س < ١ }   فابحث اتصال الدالة عند س = ١

@ التعريف : د (١) = ٥ × ١ – ٤ = ١

@ النهاية اليمنى : نهـــا (س ← ١⁺) س = ١

@ النهاية اليسرى : نهـــا (س ← ١⁻) ٥ س – ٤ = ١



التعريف = النهاية اليمنى = النهاية اليسرى   تكون الدالة متصلة عند س = ١

لبحث اتصال الدالة عند س = ٣   نوجد التعريف والنهاية اليمنى فقط

لبحث اتصال الدالة عند س = ٠   نوجد التعريف والنهاية اليسرى فقط

---

٢) إذا كان : د (س) = { ٥ س – ٤   س > ١ ، س   س < ١ }   فابحث اتصال الدالة عند س = ١

التعريف : د (١) غير موجودة   الدالة غير متصلة عند س = ١

---

٣) إذا كان : د (س) = { ٥ س – ٤   س ≥ ١ ، ٢ س   س < ١ }   فابحث اتصال الدالة عند س = ١

@ التعريف : د (١) = ٥ × ١ – ٤ = ١

@ النهاية اليمنى : نهـــا (س ← ١⁺) ٢ س = ٢

@ النهاية اليسرى : نهـــا (س ← ١⁻) ٥ س – ٤ = ١   النهاية غير موجودة عند س = ١

التعريف = النهاية اليسرى ≠ النهاية اليمنى   تكون الدالة غير متصلة عند س = ١

---

٤) ابحث اتصال : د (س) = $\frac{\text{س} - 1}{\text{س} + 1}$ عند س = ٢

٥) إذا كان : د (س) = $\begin{cases} ٢ س - ٣ & س \geq ٢ \\ س + ١ & س < ٢ \end{cases}$ فابحث اتصال الدالة عند س = ٢

---

٦) إذا كان : د (س) = $\begin{cases} \frac{س^2 - 9}{س - 3} & س \neq ٣ \\ ٥ & س = ٣ \end{cases}$ فابحث اتصالها عند س = ٣

@ وإذا كانت غير متصلة ، فأعد تعريف الدالة لتكون متصلة عند س = ٣

---

٧) إذا كان : د (س) = $\begin{cases} س^{٢} & س < ك \\ ٤ س - ك & س \leq ك \end{cases}$ فأوجد قيمة ك لتكون الدالة متصلة عند س = ك

---

٨) إذا كان : د (س) = $\begin{cases} س + ٣ & س < ٢ \\ س^{٢} + ١ & س > ٢ \end{cases}$ أعد تعريف الدالة لتكون متصلة عند س = ٢

٩) ابحث اتصال د (س) = | س -1| + ٢   عند س = ١

---

١٠) ابحث اتصال د (س) = س | س - 3| + ١   عند س = ٣

---

١١) ابحث اتصال الدالة : د (س) = [٢ س – ١]   عند س = ١   ، س = ٣   ، س = ٢٥و٠

---

١٢) اثبت أن الدالة : $د(س) = \frac{س^{٣} - ٧٢٩}{\sqrt{س} - ٣}$ غير متصلة عند س = ٩   ثم أعد تعريف الدالة لتكون متصلة

---

١٣)

أوجد قيمة ل التي تجعل الدالة $د(س) = \begin{cases} \frac{\sqrt{٤+س} - ٢}{س} & س \neq ٠ \\ ل & س = ٠ \end{cases}$ متصلة عند س = ٠

١٤) ابحث اتصال الدالة د(س) = { س^٢-٢س+٢ ، س ⩽ ٢ ؛ |س-٣| ، س > ٢ } عند س= ٢ ، س=٣

---

١٥) إذا كانت الدالة د(س) = { س+ﻫ ، س ⩽ ٥ ؛ ٣س+ب ، س > ٥ } متصلة عند س=٥ وكانت د(٥)=٨ . أوجد قيمة ﻫ ، ب

---

١٦) إذا كانت الدالة د(س) = { ٣س^٢-١ ، س ⩽ ٠ ؛ ﻫس^٢+ب ، ٠ < س < ١ ؛ √(٤س+٥) ، س ⩾ ١ } متصلة عند س= ٠ و عند س=١ أوجد قيمة ﻫ ، ب

متعة الرياضيا
مع : أحمد هجرس

اتـصال دالة على فترة

١) نرسم خط أعداد ونوضح علية النقاط التي يتغير حولها تعريف الدالة .

الخطوة الأولي : نبحث اتصال الدالة : فى كل فترة على حدة .

الخطوة الثانية : نبحث اتصال الدالة : # عند النقط التى يتغير عندها تعريف الدالة ،

وكذلك عند طرفي المجال (إن وجد) نبحث يمين البداية ، يسار النهاية

@ نذكر وصف إجمالي لاتصال الدالة

@ إذا كانت الدالتان : د (س) & ر (س) معرفتين ومتصلتين على الفترة [أ ، ب]

فإن كل من الدوال الآتية تكون متصلة أيضاً على نفس الفترة :

د (س) ± ر (س)

د (س) ٠ ر (س)

$\frac{\text{د}(\text{س})}{\text{ر}(\text{س})}$ ما عدا عند أصفار ر (س)

في كل من الدوال الآتية حدد مجال اتصالها :

١) د (س) = ٥	٢) د (س) = ٣ س + ٢
٢) د (س) = س^{٣} + ٣ س^{٢} – ٧	٣) د (س) = ٤ س^{٢} + ٥ س - ١
٤) د (س) = $\frac{\text{س}^2 + 1}{\text{س}^2 - 5\text{س} + 6}$	٥) د (س) = $\frac{\text{س} + 7}{\text{س}^3 - 8}$
٦) د (س) = $\frac{2\text{س}}{\text{س}^2 + 16}$	٧) د (س) = $\frac{\text{س}^2 - 1}{5}$

منصة الرياضيات
مع : أحمد هجرس

٨) د (س) = | س – ٢ | + ٣

٩) د (س) = س | س – ١ |

١٠) د (س) = [٢ س – ١]

١١) د (س) = [٣ – ٠,٥ س]

١٢) د(س) = $\sqrt{\text{س} - ٢}$

١٣) د(س) = $\sqrt[٣]{\text{س} - ١}$

١٤) ابحث اتصال د (س) = { س^{٢} + ٢ س + ٢ ، س < ٠
 ٣ – س ، س ≥ ٠
علي مجالها .

١٥) ابحث اتصال الدالة : د (س) = { ٣ س – ٥ ، -١ ≤ س < ٣
 س^{٢} – ٥ ، ٣ ≤ س ≤ ٥
علي مجالها .

١٦) د (س) =
$$\begin{cases} ٥\text{س} - ٢ & -١ \le \text{س} \le ٣ \\ \text{س}^{٢} + ٤ & ٣ < \text{س} < ٥ \\ \text{س}^{٢} - ٣ & ٥ \le \text{س} < ٧ \end{cases}$$

ابحث اتصال د (س) علي مجالها

---

١٧) د (س) =
$$\begin{cases} \dfrac{\text{س}^{6} - 1}{\text{س}^{3} - 1} & -٤ < \text{س} < ١ \\ |\text{س} - ٢| & ١ \le \text{س} < ٣ \\ \text{س}^{٢} & ٣ \le \text{س} < ٦ \end{cases}$$

ابحث اتصال د (س) علي مجالها

@ إذا كانت الدالة متصلة على ح فأوجد قيمة الثوابت فى كل مما يأتى :

١٨) د (س) =
$$\begin{cases} ٣\text{س} + ٧ & \text{س} \le ٤ \\ \text{ك س} - ١ & \text{س} > ٤ \end{cases}$$

١٩) د (س) =
$$\begin{cases} ٣\text{س} + \text{ك} & \text{س} < ٢ \\ ١ - \text{ك س}^{٢} & \text{س} \ge ٢ \end{cases}$$

متعة الرياضيات
مع : أحمد هجرس

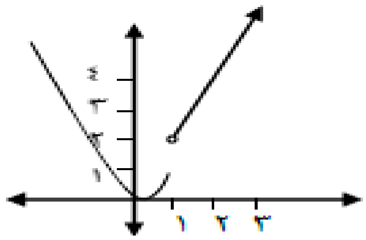
مراجعة الوحدة الأولى

أسئلة اختبارات الأعوام : ٢٠٠٩ – ٢٠١٩

منعة الرياضيات

اختبار ١٨-١٩ دور أول

١) إذا كان الشكل المجاور يمثل بيان الدالة د(س) فإن $\lim_{س \to ٥}$ د(س) تساوي :



☐ ٥ ☐ ١٠

☐ ٢٥ ☐ ∞

٢) إذا كانت $\lim_{س \to ٤}$ ق(س) = ١ وكانت ق(٤) = ٢ فإن

$\lim_{س \to ١}$ (ق(٣س+١) + ق(٤س) + ٣س − ٤) تساوي :

☐ ١ ☐ ٢ ☐ ٣ ☐ ٤

٣) تكون الدالة د(س) = $\frac{\sqrt{س + ٤}}{٢ - \sqrt{١ - س}}$ متصلة على :

☐ [-٤ ، ١] ☐ [-٤ ، ١] - { -٣ }

☐] -٤ ، ١ [- { -٣ } ☐ ح

٤) $\lim_{١-٢س \to ٣}$ $\frac{س^٢ + (م+١) س + م}{- ٢س - ٢}$ = ٢ تساوي :

☐ -٤ ☐ -٣ ☐ صفر ☐ ٣

١٥) أوجد $\lim_{س \to \infty}$ $\frac{٤س (٣ − س^٢)}{٢س^٣ − ٣س + ١}$

١٦) ابحث اتصال الدالة د(س) على مجالها حيث د(س) = $\begin{cases} \frac{س^٢ − ٤س + ٣}{س + ١} ، & س < ٠ \\ [\frac{س}{٢} + ٣] ، & ٠ \le س < ٤ \end{cases}$

١٧) بدون استخدام الاشتقاق ، أوجد $\lim_{س \to ٣}$ $\frac{٢\sqrt{س + ١} − ٣\sqrt[٣]{س + ٥} + ٢}{| ٤ − ٣س | - ٥}$

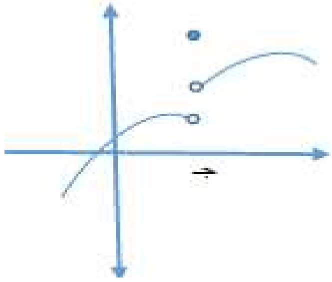
متعة الرياضيات

اختبار ١٧ – ١٨ تجريبي

١) إذا كانت $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{(س^{٢ن} + ١)(س^{٢} - ٣س + ٤)}{س^{٨}} = ١$ فإن قيمة ن تساوي:

- ١
- ٢
- ٣
- ٤

٢) إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د(س) فإن سبب الانفصال عند النقطة جـ هو :



- $\underset{س \to جـ^{-}}{\text{نهـا}}$ د(س) غير موجودة
- $\underset{س \to جـ^{+}}{\text{نهـا}}$ د(س) غير موجودة
- $\underset{س \to جـ}{\text{نهـا}}$ د(س) غير موجودة
- د(جـ) غير معرفة

٣) إذا كانت د(س) = م . هـ(س) ، حيث م عدد حقيقي ، م $\neq$ ٠ وكانت $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \sqrt{د(س)}$ = صفر فإن قيمة $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}$ هـ(س) تساوي :

- صفر
- $\sqrt{م}$
- م
- غير موجودة

٤) $\underset{٣^{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \left[\frac{٢٧^{س} - ٨}{٩^{س} + ٣^{س} - ٦} \right]$ يساوي :

- صفر
- $\frac{١٢}{٥}$
- $\frac{٧٢١}{٨٤}$
- غير موجودة

١) ابحث اتصال الدالة على مجالها :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{٤}{س - ١} & ، \quad ٠ \leq س < ٢ \\ ٤س + ٣ & ، \quad ٢ \leq س < ٤ \end{cases}$$

١) إذا كانت

$$د(س) = \begin{cases} [س - ٤] & ، \quad س < أ \\ ٧ - [س] & ، \quad س > أ \end{cases}$$

أوجد قيمة أ التي تجعل الدالة متصلة عند س = أ حيث أ $\in$ ص .

٢) أوجد $\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \frac{س + ٢}{س^{٣} + س + ١٠}$.

متعة الرياضيات
مع : أحمد هجرس

اختبار ١٦ - ١٧ تجريبي

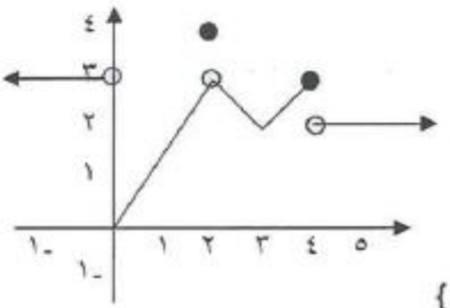
١) إذا كانت $\lim_{س \to \infty} \frac{س - م س^{٢}}{٢ س^{٢}} = -٨$ فإن قيمة الثابت م تساوي:

☐ −١٦ ☐ −٤
☐ ٤ ☐ ١٦

---

٢) إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى ق المعرف على ح

فإن مجموعة قيم أ حيث $\lim_{س \to أ}$ ق (س) = ٣ هي :



☐]−∞ ، ٠[∪ {٢} ☐]−∞ ، ٠] ∪ {٢}
☐]−∞ ، ٠[∪ {٢ ، ٤} ☐]−∞ ، ٠[∪ {٢ ، ٤}

---

٣) اذا كان ه(س) = $\begin{cases} [س] + ب ، & ١ \le س < ٢ \\ \frac{١٠}{س} ، & ٢ \le س \le ٣ \end{cases}$ فان قيمة ب التي تجعل ه(س) متصلا عند س=٢ هي

☐ −١ ☐ −٢
☐ ٣ ☐ ٤

---

١٥) أوجد $\lim_{س \to} \frac{\frac{١}{س + ٢} - \frac{١}{٢}}{س}$

---

١٦) إذا كانت د(س) = $\begin{cases} \frac{ب}{س} + س ، & ٠ < س \le ٢ \\ [س] + ٣ ، & ٢ < س < ٣ \end{cases}$

وكانت د(س) متصلة عند س=٢ ، فأوجد قيمة ب

متعة الرياضيات

اختبار ١٥ - ١٦ تجريبي

١) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^2 - 1}{\text{س} + 1} =$

أ) ∞ ب) -1 ج) 1 د) $-\infty$

٢) إذا كان $\underset{\text{س} \to 1}{\text{نها}} \text{د(س)} = 8$ ، $\underset{\text{س} \to 1}{\text{نها}} \text{ه(س)} = 5$ فإن $\underset{\text{س} \to 1}{\text{نها}} \dfrac{\text{د(س)}}{2\text{ه(س)}} =$

أ) $\frac{2}{5}$ ب) $\frac{8}{5}$ ج) $\frac{4}{5}$ د) $\frac{16}{5}$

٣) اذا كانت $\text{د(س)} = \begin{cases} \text{أ س}^2 + 1 & \text{،}\ \text{س} \le 5 \\ |\text{س}| + 1 & \text{،}\ \text{س} > 5 \end{cases}$ فإن قيمة أ التي تجعل $\underset{\text{س} \to 5}{\text{نها}}$ د(س) موجودة هي:

أ) $\frac{4}{5}$ ب) $\frac{6}{25}$ ج) $\frac{7}{25}$ د) $\frac{1}{5}$

٤ اذا كانت $\text{د(س)} = \begin{cases} [\text{س} + \text{ك}] & \text{،}\ 1 \le \text{س} < 2 \\ 7 - 2\text{س} & \text{،}\ \text{س} \ge 2 \end{cases}$

فإن قيم ك التي تجعل د(س) متصلة عند س = ٢ تنتمي للفترة :

أ) $[1،2]$ ب) $]1،2[$ ج) $[1،2[$ د) $]1،2]$

- -

١٥) ابحث نهاية الدالة $\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^2 - \text{س}}{\text{س} - 1} & \text{،}\ \text{س} \le -2 \\ \text{س} + 8 & \text{،}\ \text{س} > -2 \end{cases}$ عند س = −٢

- -

١٦) ابحث اتصال الدالة $\text{ق(س)} = \left[\dfrac{\text{س}}{2}\right] + 4$ ، $0 \le \text{س} < 3$ على مجالها

- -

١٨) أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة $\text{د(س)} = \begin{cases} |10 - 3\text{س}| & \text{،}\ \text{س} \ge 1 \\ 2\text{س}^2 + 3\text{س} + 2 & \text{،}\ \text{س} < 1 \end{cases}$

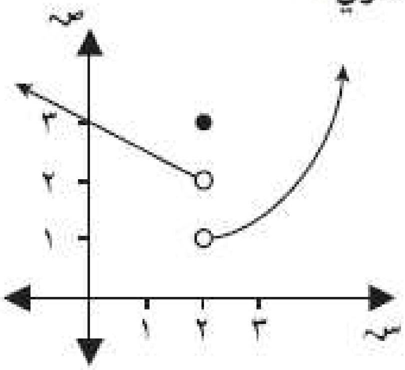
اذا علمت أن د(س) متصلة على مجالها.

- -

١٩) أوجد $\underset{\text{س} \to 1}{\text{نها}} \dfrac{\text{س} - 1}{\sqrt{\text{س}} + \sqrt{5 - \text{س}} - 3}$

اختبار ١٥ - ١٦ دور أول

١) إذا كان الشكل المجاور يمثّل بيان الدالة د(س)، فإن $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ د(س) تساوي:



- ١
- ٢
- ٣
- غير موجودة

٢) $\underset{\text{س}\leftarrow \frac{٥}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{[\text{س}]}{\text{س}} =$

- $\frac{٥}{٢}$
- ٢
- ١
- $\frac{٤}{٥}$

٣) إذا كانت د(س) $= \begin{cases} |\text{س}| + \text{ب} &، \text{س} \geq ٣ \\ ٢\text{س} - ١ &، \text{س} < ٣ \end{cases}$ متصلة على ح ، فإن قيمة ب تساوي:

- ٢
- ٤
- ٨
- ١٠

١٥) أوجد $\underset{\text{س}\leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{٤\text{س}^{٥} + ٣\text{س} + ١}{٢\text{س}^{٥} + ٩}$

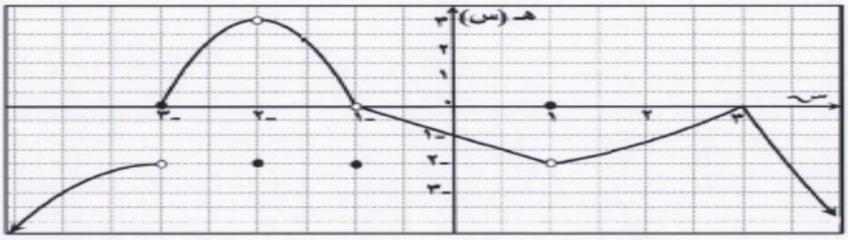
١٦) ابحث اتصال الدالة د (س) على مجالها حيث د (س) $= \begin{cases} \dfrac{٢\text{س} + ٣}{\text{س} - ٢} &، ٠ < \text{س} \leq ٣ \\ \text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ٦ &، ٣ < \text{س} < ٦ \end{cases}$

١٩) أوجد $\underset{\text{س}\leftarrow -١}{\text{نهـا}} \dfrac{٢\sqrt[٣]{\text{س}} + ٢}{(\sqrt[٣]{\text{س}} + ١)^{٥} - ٢\sqrt[٣]{\text{س}} - ٢}$

متعة الرياضيات

اختبار ١٤ - ١٥ تجريبي

١) الشكل أدناه يمثل منحنى الدالة هـ(س) المعرفة على ح . مجموعة كل قيم (ف) التي تكون عندها هـ(ف) $\neq$ $\underset{س \leftarrow ف^+}{\text{نهـا}}$ هـ(س) هي :



أ) {-٢ ، -١ ، ١}

ب) {-٣ ، -٢ ، -١ ، ١}

ج) {-٣ ، -٢ ، -١ ، ١ ، ٣}

د) {-٣}

٢) إذا كانت $\underset{س \leftarrow -٣}{\text{نهـا}} \dfrac{٢س^٢ + جـ\left[\frac{س}{٢}\right] - جـ}{س^٢ - ٢س - ١٥}$ موجودة ، فان قيمة جـ تساوي :

أ) -٣ ب) صفر ج) ٣ د) ٦

٣) إذا كانت الدالة ل(س) دالة ثابتة توازي محور السينات وتمر بالنقطة (-٤ ، ٢) ،
فان $\underset{س \leftarrow ٥}{\text{نهـا}}$ (س × ل^٢(س) + ل(س^٢)) =

أ) ١٢ ب) ٢٢ ج) ٧٦ د) ٩٦

---

٤) إذا كانت الدالة ق(س) = $\left[\frac{١}{٢}س + م\right]$ متصلة عند س = ١ ، وغير متصلة عند س = ٢ ،
فان قيمة م من الممكن أن تكون :

أ) ٢ ب) ١ ج) ٠.٦ د) ٠.٢

---

١٥) أوجد $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \sqrt{س + ١ + \sqrt{س}} - \sqrt{س - ١}$

$$هـ(س) = \begin{cases} \dfrac{س\sqrt{س} - \sqrt{٨}}{س - ٢} & ، س > ٢ \\ ب & ، س = ٢ \\ ٢م س & ، س < ٢ \end{cases}$$

متصلة عند س = ٢ فأوجد قيم كل من م ، ب

---

١٩) أدرس اتصال الدالة التالية على الفترة]$-\infty$ ، ٢[

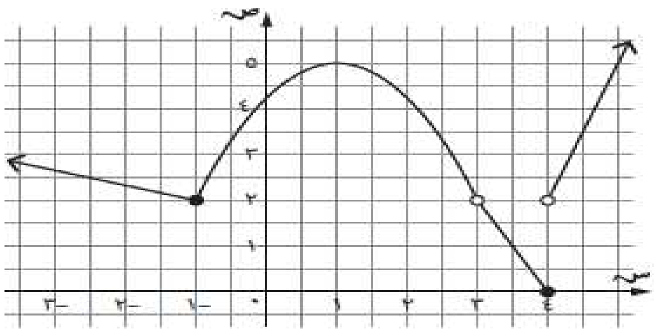
$$ل(س) = \begin{cases} \sqrt{س^٢ + ٣} & ، س < -١ \\ ٣ & ، س = -١ \\ \dfrac{س|س|}{|س - ٢|} & ، -١ < س \leq ١ \\ \left[\dfrac{٢س}{٣}\right] & ، ١ < س < ٢ \end{cases}$$

اختبار ١٤ - ١٥ دور أول

١) إذا كانت $\lim\limits_{س \to ٣} \text{هـ}(س) = ٢$ ، فإن $\lim\limits_{س \to ٣} (٤\text{هـ}(س) + ١)$ تساوي :

- ٥
- ٧
- ٩
- ١٣

٢) إذا كان الشكل المقابل يمثل بيان الدالة د(س)،



$\lim\limits_{س \to ب} د(س) = ٢$ ، فإن قيم ب هي :

- $\{-١ ، ٣ ، ٤\}$
- $\{٣ ، ٤\}$
- $\{-١ ، ٤\}$
- $\{-١ ، ٣\}$

٣) $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{س^{-٤} - س^{-٣}}{٣س^{-٤} + ٢س^{-١}}$ تساوي :

- $\frac{١}{٣}$
- صفر
- $\frac{-١}{٢}$
- $-\infty$

---

٤) إذا كانت الدالة $د(س) = \begin{cases} ٢ - [س] & ، س \le ل \\ ٨ + ٢[س] & ، س > ل \end{cases}$ متصلة عند س = ل ،

فإن قيم ل تنتمي إلى الفترة :

- $[-١ ، ٠[$
- $[-٢ ، -١[$
- $[-٣ ، -٢[$
- $[-٤ ، -٣[$

---

١٥) أوجد $\lim\limits_{س \to -١} \dfrac{١ - \sqrt{س + ٢}}{١ - س}$

---

١٦) إذا كانت ل(س) = |س| ، $\text{هـ}(س) = \begin{cases} س + ٤ & ، س \le ٠ \\ ٤ - س & ، س > ٠ \end{cases}$

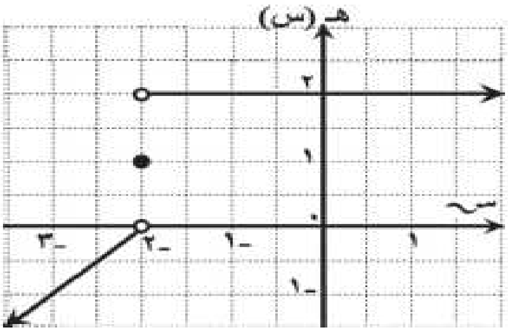
ابحث إتصال الدالة د(س) = ل(س) × هـ(س) على ح .

---

١٩) إذا كانت $\lim\limits_{س \to ٣} \dfrac{ب س^٢ - أ}{س - ٣} = ١٢$ ، حيث أ ، ب $\in$ ح ، فأوجد قيمة كلًا من أ ، ب.

اختبار ١٤ - ١٥ دور ثاني

١) في الشكل المقابل الذي يمثل بيان الدالة هـ(س)،



$\lim\limits_{\text{س} \to -٢}$ هـ(س) تساوي:

- ▢ صفر
- ▢ ١
- ▢ ٢
- ▢ غير موجودة

٢) إذا كانت ق(س) دالة متصلة على مجالها، و كان $\lim\limits_{\text{س} \to ٧}$ ق(س) = −٥ ،
فإن $\lim\limits_{\text{س} \to ٣}$ (٣ × ق(س+٤)) تساوي:

- ▢ ٢١
- ▢ ١٢
- ▢ −٥
- ▢ −١٥

٣) إذا كانت $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{\text{أ س}^٢ (\text{س} + ١)^٤}{(٣ - ٢\text{س}^٣)^٢} = \dfrac{٣}{٢}$ ، فإن قيمة أ تساوي:

- ▢ ٦
- ▢ ٣
- ▢ −٣
- ▢ −٦

٤) مجموعة نقاط انفصال الدالة د(س) = $\left[٣ - \dfrac{٢}{٥}\text{س}\right]$ ، [ ] ترمز لدالة الصحيح ، هي :

- ▢ $\{\dfrac{٢}{٥}\text{م} : \text{م} \in \text{ص}\}$
- ▢ $\{٥\text{م} : \text{م} \in \text{ص}\}$
- ▢ $\{\dfrac{١}{٥}\text{م} : \text{م} \in \text{ص}\}$
- ▢ $\{\dfrac{٥}{٢}\text{م} : \text{م} \in \text{ص}\}$

---

١٥) إذا كانت $\lim\limits_{\text{س} \to ٥}$ ق(س) = ٦ ، فأوجد $\lim\limits_{\text{س} \to ٥} \dfrac{\text{س} \times \text{ق(س)}}{١ - \text{ق(س)}}$.

---

١٦) لتكن الدالة هـ(س) = $\begin{cases} \text{ب} - \text{أ س}^٢ & \text{، س} < ٣ \\ ٨ & \text{، س} = ٣ \\ \text{أ س}^٢ + \text{ب} + ٤ & \text{، س} > ٣ \end{cases}$ ،

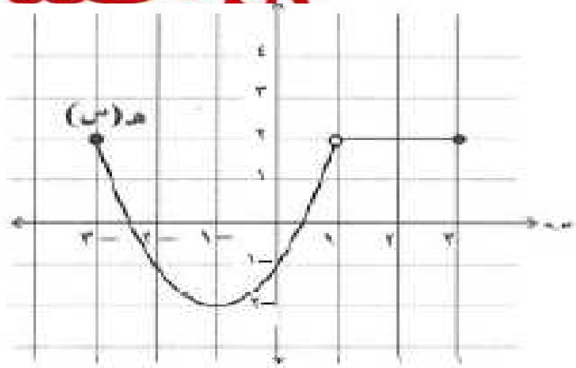
أوجد قيم كلًا من أ ، ب التي تجعل هـ(س) متصلة عند س = ٣ .

---

١٩) أوجد $\lim\limits_{\text{س} \to ٤} \dfrac{(٢\text{س} - ١٦) + \text{س}\sqrt{\text{س}}}{\text{س} - ٤}$

اختبار ١٣ - ١٤ دور أول

١) من الشكل المجاور : $\underset{\text{س}\to ١^{+}}{\text{نها}}\ \text{هـ}(\text{س}) =$



○ ٢−   ○ ١

○ ٢   ○ غير موجودة

٢) إذا كانت الدالة د(س) = $\begin{cases} \text{س} - \text{ل} & ، \text{س} > ٣ \\ ٢\text{ل} & ، \text{س} \leq ٣ \end{cases}$ متصلة عند س = ٣ ، فإن قيمة ل تساوي:

○ صفر   ○ ١   ○ ٢   ○ ٣

٣) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \left(\dfrac{٤\text{س}^{٢} - ٦}{٥ - ٢\text{س}^{٢}}\right)^{٢} =$

○ ٤−   ○ ٢−   ○ ٢   ○ ٤

٤) إذا كانت $\underset{\text{س}\to -٤}{\text{نها}} \dfrac{\text{هـ}(\text{س}) - ٤}{\text{س} + ٤} = ٦$ ، فإن $\underset{\text{س}\to -٤}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ٤}{\text{هـ}(\text{س}) - ٤} =$

○ $-\dfrac{٥}{٦}$ ○ $-\dfrac{٦}{٥}$ ○ ١٨−   ○ ٣٠−

---

١٥) أوجد $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نها}} \dfrac{|\text{س}^{٢} - ٣\text{س} - ٢٨|}{٢\text{س} - ٢}$

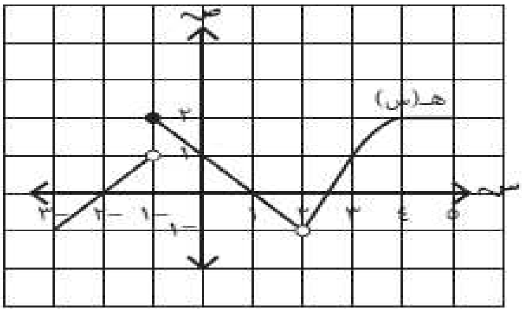
---

١٧) ابحث اتصال الدالة د(س) = $\begin{cases} ٧\text{س} - ١٣ & ، \text{س} \leq ٢ \\ \left[\!\left[٢ - \dfrac{١}{٢}\text{س} \right]\!\right] & ، ٢ < \text{س} < ٦ \end{cases}$ على مجالها.

---

١٩) أوجد $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نها}} \dfrac{\text{س}^{٢} + \sqrt{\text{س}} - ٢}{\text{س} - ١}$

اختبار ١٣ - ١٤ دور ثاني



١) إذا كان الشكل المجاور يمثل بيان الدالة هـ(س) المعرفة على الفترة [−٣، ٥]، فإن مجموعة قيم ل بحيث تكون $\lim\limits_{\text{س} \to \text{ل}} \text{هـ(س)} = ١$ تساوي :

- ◯ {−١، ٠}
- ◯ {−١، ٣}
- ◯ {٠، ٣}
- ◯ {−١، ٠، ٣}

٢) $\lim\limits_{\text{س} \to ٤} \dfrac{-٤\text{س}\left(\sqrt{\text{س}} - ٢\right)}{\text{س} - ٤}$

- ◯ ٤
- ◯ ٢
- ◯ −٢
- ◯ −٤

٣) $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} (\text{س} + ١)\left(\dfrac{٥}{\text{س}} + \dfrac{٧}{\text{س}^٢} + \dfrac{٤}{\text{س}^٣}\right) =$

- ◯ ١
- ◯ ٤
- ◯ ٥
- ◯ ٧

٤) إذا كان $\lim\limits_{\text{س} \to \text{أ}} [١ - ٢\text{س}] = -١$ فإن أ تنتمي إلى الفترة:

- ◯ $[\frac{١}{٢}، ١]$
- ◯ $[\frac{١}{٢}، ١[$
- ◯ $]\frac{١}{٢}، ١[$
- ◯ $]\frac{١}{٢}، ١]$

---

١٥) إذا كانت $\text{د(س)} = \dfrac{\text{س}^٢ - ٢\text{س} - ٨}{\text{س} + ٢}$ ، فأوجد $\lim\limits_{\text{س} \to ٥} \text{د(س)}$

---

١٦) ابحث اتصال الدالة $\text{ق(س)} = \begin{cases} ١ - \text{س} & ، \text{س} \geq ٣ \\ \dfrac{|٢\text{س} - ٦|}{\text{س} - ٣} & ، \text{س} < ٣ \end{cases}$ عند س = ٣

---

١٩) إذا كان $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{(٣ + ٤\text{س}^٢)^٥}{\text{أ}\text{س}(٧ + \text{س}^٢)^{\text{ن}}} = -٤$ ، حيث $\text{ن} \in \text{ص}^+$ ، $\text{أ} \in \text{ح}$ فأوجد قيمة كلاً من أ، ن

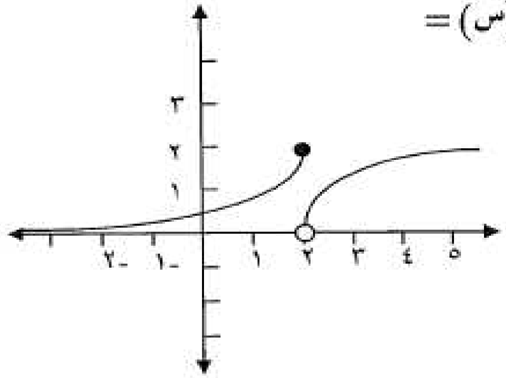
---

٢٠) إذا كانت $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \dfrac{\text{م}\text{س} - \sqrt{\text{س} + ٣}}{\text{س}^٢ - \text{س}} = \text{ب}$ ، م، ب $\in$ ح، فأوجد قيمة كلاً من م، ب

متعة الرياضيات

اختبار ١٢ - ١٣ تجريبي

١) اذا كان الشكل المجاور يمثل الدالة هـ (س) ، فان نهـا$_{\text{س}\to ٢^-}$ ٣هـ(س) =



☐ ٦ ☐ ٢

☐ صفر ☐ غير موجودة

٢) نهـا$_{\text{س}\to\infty}$ $\sqrt[3]{\dfrac{١٦\text{س}^{٧} - ٢٧\text{س}^{٥}}{١ - ٢\text{س}^{٧}}}$ =

☐ $-\infty$ ☐ -٢ ☐ ٢ ☐ ∞

٣) نهـا$_{\text{س}\to -٥}$ $\left(\dfrac{٢٥}{\text{س}+٥} - \dfrac{\text{س}^{٢}}{\text{س}+٥}\right)$ =

☐ صفر ☐ ٥ ☐ ١٠ ☐ ∞

٤) د(س) دالة متصلة يمر بالنقطتين (١ ، ٣) ، (٢ ، ٥) وكانت

نهـا$_{\text{س}\to ٢}$ (٣د(٤س − ٧) − أ) = صفر ، فان قيمة أ تساوي :

☐ ٣ ☐ ٥ ☐ ٩ ☐ ١٥

أ) إذا كانت الدالة د (س) = $\begin{cases} \text{س} + \text{أ} & \text{س} \le ٣ \\ ٣\text{س} + \text{ب} & \text{س} > ٣ \end{cases}$ متصلة عند س = ٣ ، وكانت د (٥) = ٨

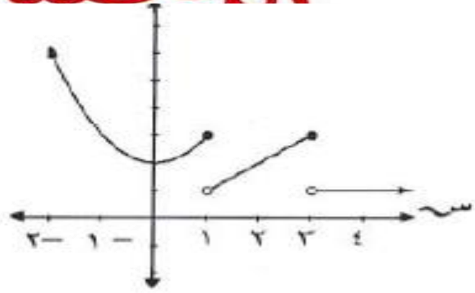
فأوجد قيمة كل من أ ، ب .

ب) اذا كانت الدالة د (س) = $\begin{cases} -٥ & ، \text{س} < ٢ \\ |٤ - ٢\text{س}| & ، ٢ \le \text{س} \le ٣ \\ \left[\dfrac{\text{س}}{٦}\right] + ٢ & ، ٣ < \text{س} \le ٦ \end{cases}$

فابحث اتصال الدالة د(س) على مجالها

أ) أوجد نهـا$_{\text{س}\to ٠}$ $\dfrac{\text{س}}{-\text{س} + \sqrt[٤]{\text{س} + ١} - ١}$

اختبار ١٢ - ١٣ دور أول



١) الشكل المجاور يمثل الدالة ص = د(س).
إذا كان أ ∈ { ١ ، ٢ ، ٣ }، فإن $\lim\limits_{س \to أ}$ د(س) موجودة عندما أ تساوي:

- ٢
- ٣
- ١ ، ٢
- ١ ، ٣

٢) قيمة ك التي تجعل الدالة $د(س) = \begin{cases} \dfrac{٣س^٢ - ١٢}{س + ٢} & ، س \neq -٢ \\ ك & ، س = -٢ \end{cases}$ ، متصلة على ح تساوي:

- ٣
- صفر
- −٤
- −١٢

٣) $\lim\limits_{س \to -٤} \dfrac{|٢س + ٤| - ٤}{س + ٤} =$

- −٢
- −١
- صفر
- ∞

٤) إذا كانت $\lim\limits_{س \to \infty} \dfrac{(أ + ٤)س - (أ + ٢)س^٢}{(أ - ٢)س + ٥} = ب$ ، حيث أ ، ب ∈ ح ، فإن قيمة ب تساوي:

- $\dfrac{٣}{٢}$
- $\dfrac{١}{٢}$
- $-\dfrac{١}{٢}$
- $-\dfrac{٣}{٢}$

- -

أ) إذا كانت $\lim\limits_{س \to ٢} \left(\dfrac{ق(س)}{٣} + ٢س \right) = ٥$ ، فأوجد $\lim\limits_{س \to ٢}$ ق(س)

- -

ب) ١) إذا كانت د(س) = هـ(س) × ق(س) ، حيث هـ(س) = [س − ٢] ، ق(س) = س ،
فابحث اتصال الدالة د(س) على الفترة [٠ ، ١].

- -

أعد تعريف الدالة $د(س) = \dfrac{٣ - \sqrt{س + ٦}}{س - ٣}$ ، بحيث تكون متصلة عند س = ٣

- -

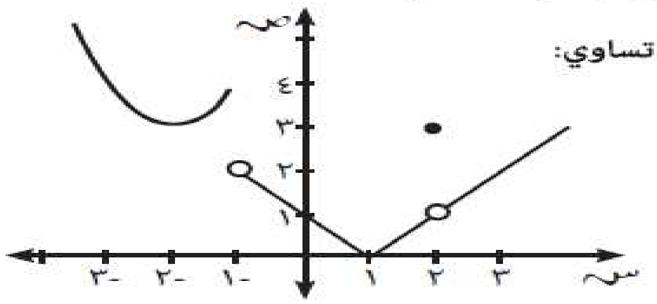
إذا كانت $د(س) = \dfrac{\sqrt{س^٢ - ٣س + ١} + س(س - ١)}{|س| - ١}$ ،

$\lim\limits_{س \to -\infty} د(س) = ٥ك \times \lim\limits_{س \to ١^+} د(س)$ ، فأوجد قيمة ك .

اختبار ١٢ - ١٣ دور ثاني

١) الشكل المجاور يمثل الدالة ص = د (س) ، إذا كان أ $\in$ {−١، ١، ٢}

فإن $\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}}$ د (س) غير موجودة عندما أ تساوي:



○ −١ ○ ١ , ٢

○ −١ , ٢ ○ ١

٢) قيمة أ التي تجعل الدالة د (س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{أ}\text{س}^{٢} - ٢\text{س}}{\text{س} - ٢} & ، \text{س} \neq ٢ \\ ٢ & ، \text{س} = ٢ \end{cases}$ ، متصلة على ح تساوي :

○ صفر ○ ١

○ ٢ ○ ٤

٣) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{٩\text{س}^{٤} + \text{س}^{٢}}}{\text{س}^{٢} - ٨} =$

○ صفر ○ ٣

○ ٩ ○ ∞

---

٤) إذا كانت $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س} - ٣\text{أ} - ٢}{\text{س} - ٢}$ = م ، حيث أ ، م $\in$ ح فإن قيمة م تساوي :

○ صفر ○ ١

○ ٢ ○ ٣

---

١٥) إذا كانت $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \left(٣\text{س}^{٢} - \dfrac{٥}{\text{ق(س)}} + ٢\right) = ٠$ فأوجد $\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}}$ ق (س).

---

١٦) أعد تعريف الدالة د(س) = $\dfrac{١ - \text{س}^{٣}}{\sqrt{\text{س}} - ١}$

بحيث تكون متصلة عند س = ١

---

١٧) ابحث اتصال الدالة د(س) = $\begin{cases} ١ & ، \text{س} = ١ \\ [\text{س} - ٢] & ، ١ < \text{س} \leq ٢ \end{cases}$ على الفترة [١ ، ٢]

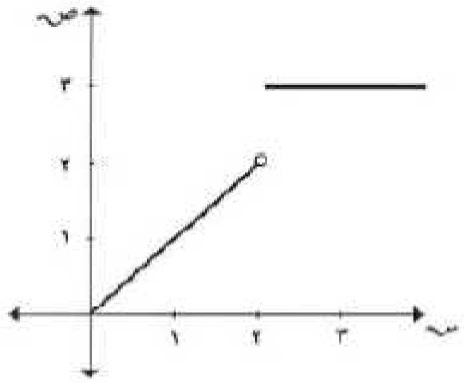
---

١٨) إذا كانت د (س) = $\dfrac{\text{س}^{٢} + \text{س}(١ + |\text{س} + ٣|)}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٣} - ٩}}$ ، $\underset{\text{س} \to -\infty}{\text{نهـا}}$ د (س) = $\dfrac{\underset{\text{س} \to ١}{\text{نهـا}} \text{د(س)}}{٢\text{ل}}$

فأوجد قيمة ل.

اختبار ١١ - ١٢ دور أول

١) إذا كان الشكل المجاور يمثل الدالة د (س)، فإن $\lim\limits_{س \to ٢}$ د(س) تساوي:



- صفر
- ٢
- ٣
- غير موجودة

٢) $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{٣٧ + س^٣ - ٢س^٤}{س + ٢ - ٤س^٢} =$

- $-\infty$
- صفر
- $\frac{١}{٢}$
- ∞

٣) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{(-٢ + س)^٢ - ٤}{س} =$

- ٤-
- صفر
- ٤
- ∞

٤) إذا كان $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^٣ د(س) - ٢٤}{س - ٢} = ٣٦$ ، حيث د(س) دالة حدودية، فإن د (٢) تساوي:

- ٣٦
- ٢٤
- ٤
- ٣

ابحث اتصال الدالة د(س) = $\begin{cases} ٣س + ٢ &، س = ٣ \\ \frac{س^٢ - ٩}{٣س - ٩} &، س \neq ٣ \end{cases}$ عند س = ٣

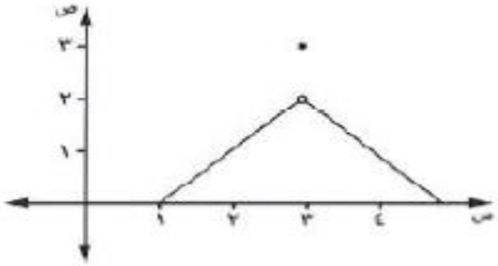
إذا كانت د(س) = $\begin{cases} س^٢ - أس + ٥ &، س \leq ٤ \\ |س - ٣| &، س > ٤ \end{cases}$

متصلة على ح ، فأوجد قيمة أ .

أوجد $\lim\limits_{س \to ١} \frac{\sqrt{س} - \frac{١}{س}}{\frac{١}{س} - ١}$

اختبار ١١ - ١٢ دور ثاني

١) من الشكل المجاور $\lim\limits_{\text{س} \to ٢}$ د (س) =



☐ ١ ☐ ٢

☐ ٣ ☐ غير موجودة

٢) $\lim\limits_{\text{س} \to -١} \dfrac{\frac{١}{\text{س}} + ١}{\text{س} + ١}$

☐ ∞ ☐ ١

☐ صفر ☐ −١

٣) إذا كانت $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \dfrac{١ - \text{س}^{٣}}{\text{س}^{٢\text{م}} \left(٢\text{س}^{(\text{ن}+١)} + ٣\right)^{٢}} = \dfrac{-١}{٤}$ فإن م + ن =

☐ $\frac{١}{٢}$ ☐ ١

☐ $\frac{٥}{٢}$ ☐ ٣

- -

٤) إحدى الدوال التالية متصلة على ح − { ١ ، ٣ } :

☐ د (س) = $\dfrac{\sqrt{\text{س}^{٢} + ٢}}{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٣}$ ☐ د (س) = $\dfrac{\sqrt{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٢}}{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٣}$

☐ د (س) = $\dfrac{\sqrt{\text{س}^{٢} + ٢}}{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٣}$ ☐ د (س) = $\dfrac{\sqrt{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٢}}{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٣}$

- -

إذا كانت ه (س) = $\begin{cases} ٢\text{س}^{٢} \quad \text{س} \quad ٢ \text{ ، } & \text{س} > ١ \\ \text{س} + ٢\text{ل} \text{ ، } & \text{س} \le ١ \end{cases}$

فأوجد قيمة ل التي تجعل الدالة ه (س) متصلة عند س = ١

- -

ابحث اتصال الدالة د(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} + ١ \text{ ، } & ١ \le \text{س} < ٣ \\ ٧ + \text{س} \text{ ، } & ٣ \le \text{س} < ٥ \end{cases}$ على مجالها.

- -

إذا كان $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \dfrac{\text{س}^{٢} + (\text{م} - ٢)\text{س} - ٢\text{م}}{\text{س} - ٢} = ٥$ فأوجد قيمة م

اختبار ٨ - ٩ دور ثاني

١) إذا كانت د (س) دالة حدودية ، $\lim_{س \to ٩} \left(\frac{٣د(س)}{\sqrt{س}} + ٢ \right) = ٥$ ، فإن قيمة $\lim_{س \to ٩} (د(س))^{٣} =$

أ) -٨ ب) -٢ ج) ٢ د) ٨

٢) إذا كانت $\lim_{س \to \infty} \frac{[م - ١] س}{٣ س - ١} = \frac{-١}{٣}$ ، فإن قيمة م من الممكن أن تساوي:

أ) ٠,٥ ب) ١,٥ ج) ٢,٥ د) ٣,٥

٣) إذا كانت $\lim_{س \to ٢} د(س) = ٥$ وكانت د(س) <u>معرفة وغير متصلة</u> عند س = ٢ ، فإن قيمة د(٢) تنتمي إلى :

أ) ح -]-٥ ، ٥[ب) ح -]-٥ ، ٥] ج) ح - {٥} د) {٥}

٤) إحدى الفترات التالية تكون عندها الدالة $د(س) = \frac{س}{\sqrt{|س|} - ١}$ متصلة :

أ) [-١ ، ١] ب) ح -]-١ ، ١[ج) ح - [-١ ، ١] د)]-١ ، ١[

- -

ب) أوجد $\lim_{س \to \sqrt{٣}} \frac{س^{٦} - ٢٧}{س^{٣} - ٣\sqrt{٣}}$

- -

السؤال الثالث :

أ) إذا كانت $د(س) = \begin{cases} \frac{س^{٢} - ٨س + ١٥}{س - ٣} & ، س \neq ٣ \\ ٢ك & ، س = ٣ \end{cases}$ أوجد قيمة ك التي تجعل د(س) متصلة على مجالها

- -

ب) لتكن $د(س) = \begin{cases} س^{٢} - ٢س + ٣ & ، ٠ < س \leq ٢ \\ [\frac{١}{٢}س + ٢] & ، ٢ < س < ٤ \\ |٢س - ٨| & ، س \geq ٤ \end{cases}$ ابحث اتصال د(س) على مجالها.