ملخص وتمارين درس المتطابقات

تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج العمانية
موقع فايلاتي ⇦ المناهج العمانية ⇦ الصف الثاني عشر ⇦ رياضيات متقدمة ⇦ الفصل الأول ⇦ ملفات متنوعة ⇦ الملف
تاريخ إضافة الملف على موقع المناهج: 2025-11-03 11:08:33

المزيد من مادة رياضيات متقدمة:	ملفات ا كتب للمعلم ا كتب للطالب ا اختبارات الكترونية ا اختبارات ا حلول ا عروض بوربوينت ا أوراق عمل منهج انجليزي ا ملخصات وتقارير ا مذكرات وبنوك ا الامتحان النهائي ا للمدرس

التواصل الاجتماعي بحسب الصف الثاني عشر					
صفحة المناهج العمانية على فيسبوك					

المزيد من الملفات بحسب الصف الثاني عشر والمادة رياضيات متقدمة في الفصل الأول	
ملخص درس التحويلات الهندسية للدوال المثلثية	1
دفترية الوحدة الثالثة مقدمة في النهايات والاتصال	2
ملخص شامل وحل تمارين الكتاب للوحدة الأولى القياس الدائري من سلسلة العبير	3
حل تمارين الوحدة الثانية حساب المثلثات	4
حل أسئلة نهاية الوحدة الأولى القياس الدائري	5

المتطابقات

المتطابقة هي تطابق بين مقدارين **تعتمد على :**

(١) ظا س = $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$

(٢) جا^{٢}س + جتا^{٢}س = ١ وبالتالي

جتا^{٢}س = ١ – جا^{٢}س

جتا^{٢}س = ١ – جا^{٢}س

حل تدريبات كتاب الطالب (٢_٧)

(١) أكتب العبارة ٢جا^{٢}س – ٧جتا^{٢}س + ٤ بدلالة جاس

٢جا^{٢}س – ٧(١ – جا^{٢}س) +٤

٢جا^{٢}س – ٧ + ٧جا^{٢}س +٤

= ٩ جا^{٢}س – ٣

(٢) أثبت المتطابقات التالية

(أ) جتا س × ظا س ≡ جاس

الطرف الأيمن = جتا س × $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$ = جا س = الطرف الأيسر

(ب) $\frac{١ - جتا^{٢}س}{جا س \times جتا س} \equiv ظا س$

الطرف الأيمن $= \frac{١ - (١ - جا^{٢}س)}{جا س \times جتا س} = \frac{١ - ١ + جا^{٢}س}{جا س \times جتا س}$

$= \frac{جا^{٢}س}{جا س \times جتا س} = \frac{جا س}{جتا س} = ظا س$

(ج) $\frac{جتا^{٢}س}{١ - جا س} \equiv ١ + جا س$

الطرف الأيمن $= \frac{١ - جا^{٢}س}{١ - جا س}$

$= \frac{(١ - جا س)(١ + جا س)}{١ - جا س} = ١ + جا س$

تذكر أن

$جتا^{٢}س = ١ - جا^{٢}س$

$س^{٢} - ص^{٢}$

$= (س - ص)(س + ص)$

(د) $\frac{١ + جا س - جا^{٢}س}{جتا س} = جتا س + ظا س$

الطرف الأيمن $= \frac{١ + جا س - (١ - جتا^{٢}س)}{جتا س} = \frac{١ + جا س - ١ + جتا^{٢}س}{جتا س}$

$= \frac{جتا^{٢}س + جاس}{جتا س} = \frac{جتا^{٢}س}{جتا س} + \frac{جا س}{جتا س}$

$= جتا س + ظا س$

(هـ) $\frac{\text{جتا}^2\text{س} - \text{جا}^2\text{س}}{\text{جتا س} + \text{جا س}} + \text{جاس} \equiv \text{جتاس}$

الطرف الأيمن $= \frac{(\text{جتا س} - \text{جا س})(\text{جتا س} + \text{جا س})}{\text{جتا س} + \text{جا س}} + \text{جا س}$

$= \text{جتا س} - \text{جا س} + \text{جا س} = \text{جتا س}$

(و) $\text{جتا}^4\text{س} + \text{جا}^2\text{س} \times \text{جتا}^2\text{س} \equiv \text{جتا}^2\text{س}$

الطرف الأيمن بأخذ $\text{جتا}^2\text{س}$ عامل مشترك

$= \text{جتا}^2\text{س} (\text{جتا}^2\text{س} + \text{جا}^2\text{س})$

$= \text{جتا}^2\text{س} \times 1 = \text{جتا}^2\text{س}$

حل آخر

الأيمن $= \text{جتا}^4\text{س} + (1 - \text{جتا}^2\text{س}) \times \text{جتا}^2\text{س}$

$= \text{جتا}^4\text{س} + \text{جتا}^2\text{س} - \text{جتا}^4\text{س} = \text{جتا}^2\text{س}$

حل السؤال الثالث

(أ) $(\text{جاس} + \text{جتاس})^{٢} = ١ + ٢\text{جاس جتاس}$

تذكير : $(\text{الأول} + \text{الثانى})^{٢} =$ الأول تربيع + الثانى تربيع + الأول × الثانى × ٢

(أ) $(\text{جاس} + \text{جتاس})^{٢} = ١ + ٢\text{جاس جتاس}$

الطرف الأيمن = $\text{جا}^{٢}\text{س} + ٢\text{ جاس جتاس} + \text{جتا}^{٢}\text{س}$

$= \text{جا}^{٢}\text{س} + \text{جتا}^{٢}\text{س} + ٢\text{جاس جتاس}$

$= ١ + ٢\text{جاس جتاس}$

(ب) $٢(١ + \text{جتاس}) - (١ + \text{جتاس})^{٢} \equiv \text{جا}^{٢}\text{س}$

الطرف الأيمن = $٢(١ + \text{جتاس}) - (١ + \text{جتاس})(١ + \text{جتاس})$

$= (١+\text{جتاس})[٢ - (١+\text{جتاس})]$

تم أخذ (١ + جتاس) عامل مشترك

$= (١+\text{جتاس})[٢ - ١ - \text{جتاس}]$

$= (١+\text{جتاس})(١ - \text{جتاس})$

$= ١ - \text{جتا}^{٢}\text{س} = \text{جا}^{٢}\text{س}$

لاحظ أنهما تحليل فرق بين مربعين

$(\text{س} - \text{ص})(\text{س} + \text{ص}) = \text{س}^{٢} - \text{ص}^{٢}$

حل أخر

٢(١ + جتاس) – (١ + جتاس)^{٢} ≡ جا^{٢}س

الطرف الأيمن = ٢ + ٢جتاس – (١ + ٢جتاس + جتا^{٢}س)

= ٢ +٢جتاس – ١ – ٢جتاس – جتا^{٢}س

= ١ – جتا^{٢}س = جا^{٢}س

(ج) ٢ – (جاس + جتاس)^{٢} ≡ (جاس – جتاس)^{٢}

الطرف الأيمن = ٢ – (جا^{٢}س + جتا^{٢}س + ٢جاس جتاس)

= ٢ – (١ + ٢جاس جتاس) = ٢ – ١ – ٢جاس جتاس

= ١ – ٢جاس جتاس ← (١)

الطرف الأيسر = (جاس – جتاس)^{٢} = جا^{٢}س + جتا^{٢}س – ٢جاس جتاس

= ١ – ٢ جاس جتاس ← (٢)

من ١ ، ٢ الطرفان متساويان

(د) (جتا^{٢}س – ٢)^{٢} – ٣ جا^{٢}س ≡ جتا^{٤}س + جا^{٢}س

الطرف الأيمن = (جتا^{٤}س + ٤ – ٤جتا^{٢}س) – ٣جا^{٢}س

مفكوك التربيع

= جتا^{٤}س + ٤ – ٤جتا^{٢}س – ٣جا^{٢}س

= جتا^{٤}س +٤(١ – جتا^{٢}س) -٣ جا^{٢}س

= جتا^{٤}س + ٤ جا^{٢}س – ٣جا^{٢}س

= جتا^{٤}س + جا^{٢}س = الطرف الأيسر

حل السؤال الرابع

(أ) $جتا^{٢}س - جا^{٢}س \equiv ٢ جتا^{٢}س - ١$

الطرف الأيسر = $٢ جتا^{٢}س - ١$

$= ٢جتا^{٢}س - (جتا^{٢}س + جا^{٢}س)$

$= ٢ جتا^{٢}س - جتا^{٢}س - جا^{٢}س$

$= جتا^{٢}س - جا^{٢}س$ = الطرف الأيمن

حل آخر

الطرف الأيمن = $جتا^{٢}س - جا^{٢}س$

عوضنا عن $جا^{٢}س$
لأنه غير موجود في الطرف الأيسر

$= جتا^{٢}س - (١ - جتا^{٢}س)$

$= جتا^{٢}س - ١ + جتا^{٢}س$

$= ٢ جتا^{٢}س - ١$

(ب) $جتا^{٢}س - جا^{٢}س \equiv ١ - ٢جا^{٢}س$

الطرف الأيسر : $١ - ٢(١ - جتا^{٢}س)$

$١ - ٢ + ٢ جتا^{٢}س$

$٢ جتا^{٢}س - ١$

$٢ جتا^{٢}س - (جتا^{٢}س + جا^{٢}س)$

$٢ جتا^{٢}س - جتا^{٢}س - جا^{٢}س$

$جتا^{٢}س - جا^{٢}س$ الطرف الأيمن

حل آخر

جتا^{٢}س – جا^{٢}س ≡ ١ – ٢ جا^{٢}س

الطرف الأيمن = جتا^{٢}س – جا^{٢}س

(١ – جا^{٢}س) – جا^{٢}س

١ – جا^{٢}س – جا^{٢}س

١ – ٢ جا^{٢}س الطرف الأيسر

(ج) ظا^{٢}س – جا^{٢}س ≡ ظا^{٢}س × جا^{٢}س

الطرف الأيمن = ظا٢س – جا٢س

$$= \frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} - \text{جا}^{٢}\text{س}$$

$$= \frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} - \frac{\text{جا}^{٢}\text{س جتا}^{٢}\text{س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$$

$$= \frac{\text{جا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س جتا}^{٢}\text{س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} = \frac{\text{جا}^{٢}\text{س(١ – جتا}^{٢}\text{س)}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$$

$$= \frac{\text{جا}^{٢}\text{س} \times \text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} = \frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} \times \text{جا}^{٢}\text{س}$$

= ظا^{٢}س × جا^{٢}س

(د) $جتا^{٤}س + جا^{٢}س \equiv جا^{٤}س + جتا^{٢}س$

الطرف الأيمن = $جتا^{٢}س \times جتا^{٢}س + جا^{٢}س$

= $جتا^{٢}س (١ - جا^{٢}س) + جا^{٢}س$

= $جتا^{٢}س - جا^{٢}س \times جتا^{٢}س + جا^{٢}س$

= ١ $- جا^{٢}س \times جتا^{٢}س$

= ١ $- جا^{٢}س (١ - جا^{٢}س)$

= ١ $- جا^{٢}س + جا^{٤}س$

= $جتا^{٢}س + جا^{٤}س$

حل آخر :

الطرف الأيمن = $جتا^{٤}س + جا^{٢}س$

= $جتا^{٢}س \times جتا^{٢}س + ١ - جتا^{٢}س$

= $(١ - جا^{٢}س)(١ - جا^{٢}س) + ١ - جتا^{٢}س$

= $١ - ٢جا^{٢}س + جا^{٤}س + ١ - جتا^{٢}س$

= $٢ - ٢جا^{٢}س + جا^{٤}س - جتا^{٢}س$

= $٢(١ - جا^{٢}س) + جا^{٤}س - جتا^{٢}س$

= $٢ جتا^{٢}س + جا^{٤}س - جتا^{٢}س$

= $جتا^{٢}س + جا^{٤}س$

حل السؤال الخامس

تذكر

$أ^{٢} - ب^{٢} =$

$(أ - ب)(أ + ب)$

(أ) $\frac{\text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جتا س} - \text{جا س}} \equiv \text{جتا س} + \text{جا س}$

الطرف الأيمن $= \frac{(\text{جتا س} - \text{جا س})(\text{جتا س} + \text{جا س})}{\text{جتا س} - \text{جا س}}$

$= \text{جتا س} + \text{جا س} =$ الطرف الأيسر

(ب) $\text{جا}^{٤}\text{س} - \text{جتا}^{٤}\text{س} \equiv ٢\text{جا}^{٢}\text{س} - ١$

الطرف الأيمن $= (\text{جا}^{٢}\text{س} + \text{جتا}^{٢}\text{س})(\text{جا}^{٢}\text{س} - \text{جتا}^{٢}\text{س})$

$= ١ \times (\text{جا}^{٢}\text{س} - \text{جتا}^{٢}\text{س})$

$= \text{جا}^{٢}\text{س} - \text{جتا}^{٢}\text{س}$

$= \text{جا}^{٢}\text{س} - (١ - \text{جا}^{٢}\text{س}) = \text{جا}^{٢}\text{س} - ١ + \text{جا}^{٢}\text{س}$

$= ٢\text{جا}^{٢}\text{س} - ١$

ارشاد : $\frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{أ ب}}$ يمكن تجزئتها الى $\frac{\text{س}}{\text{أ ب}} + \frac{\text{ص}}{\text{أ ب}}$

لكن $\frac{\text{س}}{\text{أ} + \text{ب}}$ لا يمكن تجزئتها إلى $\frac{\text{س}}{\text{أ}} + \frac{\text{س}}{\text{ب}}$

(ج) $\frac{\text{جتا}^4\text{س} - \text{جا}^4\text{س}}{\text{جتا}^2\text{س}} = 1 - \text{ظا}^2\text{س}$

الطرف الأيمن $= \frac{(\text{جتا}^2\text{س} - \text{جا}^2\text{س})(\text{جتا}^2\text{س} + \text{جا}^2\text{س})}{\text{جتا}^2\text{س}}$

$= \frac{(\text{جتا}^2\text{س} - \text{جا}^2\text{س}) \times 1}{\text{جتا}^2\text{س}} = \frac{(\text{جتا}^2\text{س} - \text{جا}^2\text{س})}{\text{جتا}^2\text{س}}$

$= \frac{\text{جتا}^2\text{س}}{\text{جتا}^2\text{س}} - \frac{\text{جا}^2\text{س}}{\text{جتا}^2\text{س}}$

$= 1 - \text{ظا}^2\text{س}$

حل آخر

$\frac{\text{جتا}^4\text{س} - \text{جا}^4\text{س}}{\text{جتا}^2\text{س}} = 1 - \text{ظا}^2\text{س}$

$\frac{\text{جتا}^4\text{س}}{\text{جتا}^2\text{س}} - \frac{\text{جا}^4\text{س}}{\text{جتا}^2\text{س}}$

$= \text{جتا}^2\text{س} - \frac{\text{جا}^2\text{س} \times \text{جا}^2\text{س}}{\text{جتا}^2\text{س}}$

$= \text{جتا}^2\text{س} - \frac{\text{جا}^2\text{س}}{\text{جتا}^2\text{س}} \times \text{جا}^2\text{س} = \text{جتا}^2\text{س} - \text{ظا}^2\text{س} \times \text{جا}^2\text{س}$

$= \text{جتا}^2 س - \text{ظا}^2 س (1 - \text{جتا}^2 س)$

$= \text{جتا}^2 س - \text{ظا}^2 س + \text{ظا}^2 س \times \text{جتا}^2 س$

$= \text{جتا}^2 س - \text{ظا}^2 س + \frac{\text{جا}^2 س}{\text{جتا}^2 س} \times \text{جتا}^2 س$

$= \text{جتا}^2 س - \text{ظا}^2 س + \text{جا}^2 س = 1 - \text{ظا}^2 س$

(د) $\frac{\text{جتا س}}{\text{ظا س (1 - جاس)}} \equiv 1 + \frac{1}{\text{جاس}}$

الطرف الأيمن $= \frac{\text{جتا س}}{\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} (1 - \text{جاس})} = \frac{\text{جتا س} \times \text{جتاس}}{\text{جا س (1 - جاس)}}$

$= \frac{\text{جتا}^2 س}{\text{جا س (1 - جاس)}} = \frac{(1 - \text{جا}^2 س)}{\text{جا س (1 - جاس)}}$

$= \frac{(1 - \text{جاس})(1 + \text{جاس})}{\text{جا س (1 - جاس)}} = \frac{(1 + \text{جاس})}{\text{جاس}}$

$= \frac{1}{\text{جاس}} + \frac{\text{جاس}}{\text{جاس}}$

$= \frac{1}{\text{جاس}} + 1$

تذكر

مقام المقام بسط

(هـ) $\frac{\text{جا س} - \text{جتا س}}{\text{جا س} + \text{جتا س}} \equiv \frac{\text{ظا س} - ١}{\text{ظا س} + ١}$

الطرف الأيمن = $\frac{\text{جتاس} \left(\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} - ١\right)}{\text{جتاس} \left(\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} + ١\right)}$

توضيح

تم أخذ جتا س عامل مشترك

$= \frac{\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} - ١}{\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} + ١} = \frac{\text{ظا س} - ١}{\text{ظا س} + ١}$

حل أخر

$\frac{\text{جا س} - \text{جتا س}}{\text{جا س} + \text{جتا س}} \equiv \frac{\text{ظا س} - ١}{\text{ظا س} + ١}$

الطرف الأيسر = (ظا س − ١) ÷ (ظا س + ١)

$= \left(\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} - ١\right) \div \left(\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} + ١\right)$

توضيح

$١ = \frac{\text{جتاس}}{\text{جتاس}}$

$= \left(\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} - \frac{\text{جتاس}}{\text{جتاس}}\right) \div \left(\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} + \frac{\text{جتاس}}{\text{جتاس}}\right)$

$= \left(\frac{\text{جا س} - \text{جتا س}}{\text{جتا س}}\right) \div \left(\frac{\text{جا س} + \text{جتا س}}{\text{جتا س}}\right)$

$= \left(\frac{\text{جا س} - \text{جتا س}}{\text{جتا س}}\right) \times \left(\frac{\text{جتا س}}{\text{جا س} + \text{جتا س}}\right) = \frac{\text{جا س} - \text{جتا س}}{\text{جا س} + \text{جتا س}}$

[و] أثبت أن

$$\left(\frac{1}{\text{جاس}} - \frac{1}{\text{ظاس}}\right)^2 \equiv \frac{1 - \text{جتا س}}{1 + \text{جتا س}}$$

الطرف الأيمن : $\left(\frac{1}{\text{جاس}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\text{ظاس}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\text{جاس}} \times -\frac{1}{\text{ظاس}}\right) \times 2$

$$= \frac{1}{\text{جا}^2\text{س}} + \frac{1}{\text{ظا}^2\text{س}} + 2 \times \frac{1}{-\text{جا س ظا س}}$$

$$= \frac{1}{\text{جا}^2\text{س}} + \frac{\text{جتا}^2\text{س}}{\text{جا}^2\text{س}} - \frac{2\ \text{جتاس}}{\text{جا س جا س}}$$

$$= \frac{1}{\text{جا}^2\text{س}} + \frac{\text{جتا}^2\text{س}}{\text{جا}^2\text{س جا}^2\text{س}} - \frac{2\ \text{جتاس}}{\text{جا}^2\text{س}}$$

$$= \frac{\text{جتا}^2\text{س} - 2\text{جتاس} + 1}{\text{جا}^2\text{س}}$$

$$= \frac{\text{جتا}^2\text{س} - 2\text{جتاس} + 1}{1 - \text{جتا}^2\text{س}}$$

تحليل الى مقدار ثلاثي ←

تحليل فرق بين مربعين ←

$$= \frac{(1 - \text{جتا س})(1 - \text{جتا س})}{(1 + \text{جتا س})(1 - \text{جتا س})} = \frac{1 - \text{جتا س}}{1 + \text{جتا س}}$$

توضيح :

القسمة علي واحد

لا يغير القيمة

$$\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} = ١$$

(ز) أثبت أن $\frac{\text{ظا س} + ١}{\text{جاس} \times \text{ظا س} + \text{جتاس}} \equiv \text{جاس} + \text{جتا س}$

الطرف الأيمن $= \frac{١ + \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}}{\text{جا س} \times \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} + \text{جتا س}} \times \frac{\text{جتا س}}{\text{جتا س}}$

$= \frac{\text{جا س} + \text{جتا س}}{\text{جا}^٢\text{س} + \text{جتا}^٢\text{س}} = \frac{\text{جا س} + \text{جتا س}}{١}$

$= \text{جا س} + \text{جتا س}$

(ح) $\frac{\text{جا}^٢\text{س} (١ - \text{جتا}^٢\text{س})}{\text{جتا}^٢\text{س} (١ - \text{جا}^٢\text{س})} \equiv \text{ظا}^٤\text{س}$

الطرف الأيمن $= \frac{\text{جا}^٢\text{س} \times \text{جا}^٢\text{س}}{\text{جتا}^٢\text{س} \times \text{جتا}^٢\text{س}} = \frac{\text{جا}^٤\text{س}}{\text{جتا}^٤\text{س}} = \text{ظا}^٤\text{س}$

(٦) أثبت أن المتطابقة $\frac{1}{\text{جتا س}} - \frac{\text{جتا س}}{1 + \text{جاس}} \equiv$ ظا س

الطرف الأيمن $= \frac{1 + \text{جاس}}{\text{جتا س} \times (1 + \text{جا س})} - \frac{\text{جتا}^2\text{س}}{\text{جتا س} \times (1 + \text{جا س})}$

$= \frac{1 + \text{جاس} - \text{جتا}^2\text{س}}{\text{جتا س} \times (1 + \text{جا س})} = \frac{\text{جا}^2\text{س} + \text{جاس}}{\text{جتا س} \times (1 + \text{جا س})}$

$= \frac{\text{جاس}(\text{جاس} + 1)}{\text{جتا س} \times (1 + \text{جا س})} = \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} =$ ظا س

تذكر

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} - \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$

$= \frac{\text{أ د}}{\text{ب د}} - \frac{\text{ب جـ}}{\text{ب د}}$

$= \frac{\text{أ د} - \text{ب جـ}}{\text{ب د}}$

(٧) بين أن (١ + جتاس)^2 + (١ – جتاس)^2 + ٢جا^{2}س لها قيمة ثابتة

الحل

١ + جتا^{2}س + ٢ جتاس + ١ + جتا^{2}س – ٢جتاس + ٢جا^{2}س

= ٢ + ٢ جتا^{2}س + ٢ جا^{2}س

= ٢ + ٢(جتا^{2}س + جا^{2}س)

= ٢ + ٢×١ = ٤ مقدار ثابت

(٨) (أ) اكتب العبارة ٧ جا^{٢}س + ٤ جتا^{٢}س في صورة أ + ب جا^{٢}س

الحل : العبارة مطلوب وضعها في صورة أ + ب جا^{٢}س

∴ نستبدل جتا^{٢}س = ١ – جا^{٢}س

العبارة = ٧ جا^{٢}س + ٤ (١ – جا^{٢}س)

= ٧ جا^{٢}س + ٤ – ٤جا^{٢}س = ٤ + ٣جا^{٢}س

(ب)

أذكر مدى الدالة حيث ٠ ≤ س ≤ ٢π

س = ٠ ← القيمة = ٤

س = $\frac{\pi}{٢}$ ← = ٧

س = π ← ٤

س = $\frac{\pi ٣}{٢}$ ← ٧

س = ٢π ← ٤

المدى : ٤ ≤ د(س) ≤ ٧

(٩) أ : اكتب العبارة ٤ جاهـ - جتا٢هـ في صورة (جاهـ + أ)٢ + ب

٤ جاهـ – جتا٢هـ

= ٤ جاهـ - (١ – جا٢هـ)

= ٤ جاهـ - ١ + جا٢هـ

= جا٢هـ + ٤ جاهـ - ١

= (جاهـ + ٢)٢ – ٤ – ١

= (جاهـ + ٢)٢ – ٥

تذكر :

س٢ + د س

عند وضعه علي صورة اكمال مربع

يكون : $(س + \frac{د}{٢})^{٢} - \frac{د^{٢}}{٢}$

(ب) اذكر القيمة العظمى والصغرى ل ٤ جا هـ – جتا٢ هـ

حيث ٠ ≤ هـ ≤ π٢

الحل :

– ١ ≤ جاهـ ≤ ١ بإضافة +٢

١ ≤ جاهـ +٢ ≤ ٣

١ ≤ (جاهـ +٢)٢ ≤ ٩

١ ـ ٥ ≤ (جاهـ +٢)٢ ـ ٥ ≤ ٩ ـ ٥

– ٤ ≤ (جاهـ +٢)٢– ٥ ≤ ٤

القيمة الصغرى للعبارة ٤ جاهـ – جتا٢هـ هي – ٤

القيمة العظمى للعبارة ٤ جاهـ – جتا٢هـ هي ٤

(١٠) اذا علمت أن أ = $\frac{(١ - جا هـ)}{٢ جتا هـ}$

تذكر أن
(أ – ب)(أ + ب)
= $أ^{٢} - ب^{٢}$

(أ) أثبت أن $\frac{١}{أ} = \frac{٢ (١ + جا هـ)}{جتا هـ}$

.. $أ \times \frac{١}{أ} = ١$ حقيقة رياضية

$$أ \times \frac{١}{أ} = \frac{١ - جا هـ}{٢ جتا هـ} \times \frac{٢ (١ + جا هـ)}{جتا هـ} = \frac{٢ (١ + جا هـ)(١ - جا هـ)}{٢ جتا^{٢} هـ}$$

$$= \frac{٢ (١ - جا^{٢} هـ)}{٢ جتا^{٢} هـ} = \frac{٢ جتا^{٢} هـ}{٢ جتا^{٢} هـ} = ١$$

لاحظ أن
$أ = أ \times \frac{جـ}{جـ}$

حل أخر : أ = $\frac{(١ - جا هـ)}{٢ جتا هـ}$

أثبت أن $\frac{١}{أ} = \frac{٢ (١ + جا هـ)}{جتا هـ}$

$$\frac{١}{أ} = \frac{٢ جتا هـ}{١ - جا هـ} \times \frac{١ + جا هـ}{١ + جا هـ} = \frac{٢ جتا هـ \times (١ + جا هـ)}{١ - جا^{٢} هـ}$$

$$= \frac{٢ جتا هـ \times (١ + جا هـ)}{جتا^{٢} هـ} = \frac{٢ (١ + جا هـ)}{جتا هـ}$$

(ب) أوجد قيمتى كل من جا هـ ، جتا هـ بدلالة أ

بفرض أن جا هـ = ص ، جتا هـ = س

$$أ = \frac{١ - جا هـ}{٢ جتا هـ}$$

$$أ = \frac{١ - ص}{٢ س}$$

$$٢أس = ١ - ص$$

$$٢أ س + ص = ١$$

$$\frac{١}{أ} = \frac{٢ (١ + جا هـ)}{جتا هـ}$$

$$\frac{١}{أ} = \frac{٢(١ + ص)}{س}$$

بإجراء الضرب التبادلي

$$\frac{١}{أ} = \frac{٢ + ٢ص}{س}$$

$$س = ٢أ + ٢ص$$

$$س - ٢أص = ٢ أ$$

بحل المعادلتين أنيا

$$٢أ س + ص = ١ \quad \times ٢أ$$

$$س - ٢أص = ٢أ$$

$$٤أ^{٢}س + ٢أص = ٢أ$$

بالجمع

$$س - ٢أص = ٢أ$$

$$(٤أ^{٢}+١)س = ٤أ$$

$$س = \frac{٤أ}{٤ أ^{٢} + ١}$$

$$\therefore \text{ جتا هـ} = \frac{٤أ}{٤ أ^{٢} + ١}$$

بالتعويض في المعادلة ٢أس + ص = ١

$$٢أ \times \frac{٤أ}{١ + ٤أ^{٢}} + ص = ١$$

$$\frac{٨أ^{٢}}{١ + ٤أ^{٢}} + ص = ١$$

$$ص = ١ - \frac{٨أ^{٢}}{١ + ٤أ^{٢}}$$

$$ص = \frac{١ + ٤أ^{٢}}{١ + ٤أ^{٢}} - \frac{٨أ^{٢}}{١ + ٤أ^{٢}}$$

$$ص = \frac{١ + ٤أ^{٢} - ٨أ^{٢}}{١ + ٤أ^{٢}} = \frac{١ - ٤أ^{٢}}{١ + ٤أ^{٢}}$$