شكراً لتحميلك هذا الملف من موقع المناهج العمانية

شرح وتدريبات درس التوافيق

تاريخ نشر الملف على موقع المناهج: 29-11-2022 09:40:42

التواصل الاجتماعي بحسب الصف الثاني عشر

روابط مواد الصف الثاني عشر على تلغرام

التربية الاسلامية	اللغة العربية	اللغة الانجليزية	الرياضيات

المزيد من الملفات بحسب الصف الثاني عشر والمادة رياضيات تطبيقية في الفصل الأول

1	ملخص شرح درس الراديان
2	المهارت الأساسية في الوحدة الأولى القياس الدائري
3	أسئلة المراجعة النهائية للإمتحان النهائي مع الحل
4	ملخص الوحدة الثالثة الدفع
5	شرح وتدريبات درس نظرية ذات الحدين

يتقدّم فريق بوابة واثق
بالشكر الجزيل لمن أبدع في
عمل هذا المرجع الشامل،
جعله الله في ميزان حسناته

٢) التوافيق

التوافيق :- هو كل مجموعة يمكن تكوينها من مجموعة من الاشياء مأخوذة كلها أو بعضها بصرف النظر عن ترتيبها فمثلا $\binom{٥}{٢}$ هى عدد المجوعات الجزئية التى كل منها يتكون من عنصرين والتى يمكن تكوينها من مجموعة مكونة من ٥ عناصر بصرف النظر عن الترتيب

أما $ل^{٥}_{٢}$ هى عدد المجوعات الجزئية التى كل منها يتكون من عنصرين والتى يمكن تكوينها من مجموعة مكونة من ٥ عناصر مع مراعاة الترتيب

قوانين التوافيق

(١) $\binom{ن}{ر} = \frac{ل^{ن}_{ر}}{ر!}$ (٢) $\binom{ن}{ر} = \frac{ن!}{ر\ !\ (ن-ر)!}$

(٣) $\binom{ن}{ر} = \binom{ن}{ن-ر}$ (قانون التبسيط) فمثلا $\binom{٧}{٥} = \binom{٧}{٢}$

(٤) $\binom{ن}{ن} = \binom{ن}{٠} = ١$

(٥) إذا كان $\binom{ن}{س} = \binom{ن}{ص}$ فان س = ص أو ن = س + ص

(٦) $\frac{\binom{ن}{ر}}{\binom{ن}{ر-١}} = \frac{ن-ر+١}{ر}$ (قانون النسبة) فمثلا $\frac{\binom{٩}{٤}}{\binom{٩}{٣}} = \frac{٩-٤+١}{٤} = \frac{٦}{٤}$

لايجاد النسبة بين حدين غير متتاليين

$$\frac{\binom{٨}{٥}}{\binom{٨}{٣}} = \frac{\binom{٨}{٤}}{\binom{٨}{٤}} \times \frac{\binom{٨}{٣}}{\binom{٨}{٥}} = \frac{٨-٤}{٥} \times \frac{٨-٣}{٤} = \frac{٤}{٥} \times \frac{٥}{٤} = ١$$

$$\frac{\binom{\text{ن}}{\text{الكبير}}}{\binom{\text{ن}}{\text{الصغير}}} = \frac{\text{ن} - \text{الصغير}}{\text{الكبير}}$$

مثال

إذا تم اختيار شخصين من بين أربعة على أن يكون من بينهما الرئيس ونائبه يكون

$$ل^{٤}_{٢} = ٤ \times ٣ = ١٢$$

بينما إذا تم اختيار شخصين من بين أربعة دون تحديد فتكون

$$\binom{٤}{٢} = \frac{٤ \times ٣}{٢ \times ١} = ٦$$

.....

بكم طريقة يمكن اختيار فريق كرة سلة مكون من خمسة لاعبين من بين ١٠ طلاب متميزين ؟

الحـــــــل

عد طرق الاختيار

$$= \binom{١٠}{٥} = \frac{٦ \times ٧ \times ٨ \times ٩ \times ١٠}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥} = ٢٥٢ \text{ طريقة}$$

مثال

أعلنت شركة عن وجود ٥ وظائف بها يشترط أن تشغل سيدتان وظيفتين منها فتقدم لها ٧ رجال ، ٤ سيدات بكم طريقة يمكن أختيار الاشخاص الخمسة

الحـــــــل

يمكن أختيار ٣ رجال بطرق عددها $= \binom{٧}{٣} = \frac{٧ \times ٦ \times ٥}{٣ \times ٢ \times ١} = ٣٥$

يمكن أختيار سيدتان بطرق عددها $= \binom{٤}{٢} = \frac{٤ \times ٣}{٢ \times ١} = ٦$

عدد الطرق الممكنة لاختيار الاشخاص الخمسة $= ٣٥ \times ٦ = ٢١٠$

مثال

إذا أريد أنتخاب ١١ رجل من بين ١٤ رجلا فما عدد الطرق للانتخاب

الحـــــــل

عدد الطرق $= \binom{١٤}{١١} = \binom{١٤}{٣} = \frac{١٤ \times ١٣ \times ١٢}{٣ \times ٢ \times ١} = ٣٦٤$

مثال

بكم طريقة يمكن انتخاب ٣ لجان كل منها يتكون من شخصين من بين ١٠ أشخاص بحيث لا يشترك الشخص فى أكثر من لجنة واحدة ؟

الحـــــــل

يمكن أنتخاب اللجنة الاولى بعدد من الطرق $= \frac{٩ \times ١٠}{٢ \times ١} = ٤٥$ طريقة

إذا انتخبنا اثنين للجنة الاولى يتبقى ٨ أشخاص ينتخب منهم ٢ للجنة الثانية بعدد من الطرق

$= \binom{٨}{٢} = \frac{٧ \times ٨}{٢ \times ١} = ٢٨$ طريقة

وأخيرا يتبقى ٦ أشخاص ينتخب منهم ٢ للجنة الثالثة بعدد من الطرق

$= \binom{٦}{٢} = \frac{٦ \times ٥}{٢ \times ١} = ١٥$ طريقة

∴ عدد الطرق التى يمكن بها اختيار اللجان الثلاث $= ٤٥ \times ٢٨ \times ١٥ = ١٨٩٠٠$

مثال

أعلنت شركة عن وجود ٥ وظائف بها يشترط أن تشغل سيدتان وظيفتين منها فتقدم لها ٧ رجال ، ٤ سيدات بكم طريقة يمكن أختيار الاشخاص الخمسة

الحـــــــل

يمكن أختيار ٣ رجال بطرق عددها $= \binom{٧}{٣} = \frac{٧ \times ٦ \times ٥}{١ \times ٢ \times ٣} = ٣٥$

يمكن أختيار سيدتان بطرق عددها $= \binom{٤}{٢} = \frac{٤ \times ٣}{١ \times ٢} = ٦$

عدد الطرق الممكنة لاختيار الاشخاص الخمسة $= ٣٥ \times ٦ = ٢١٠$

مثال

إذا أريد أنتخاب ١١ رجل من بين ١٤ رجلا فما عدد الطرق للانتخاب

الحـــــــل

عدد الطرق $= \binom{١٤}{١١} = \binom{١٤}{٣} = \frac{١٤ \times ١٣ \times ١٢}{١ \times ٢ \times ٣} = ٣٦٤$

مثال

أوجد قيمة كلا من $\binom{١٠}{٣}$ ، $\binom{١٣}{٤}$ ، $\binom{٢٠}{١٧}$ ، $\binom{١٥}{٠}$ ، $\binom{١}{١٠}$

الحـــــــل

$\binom{١٠}{٣} = \frac{٨ \times ٩ \times ١٠}{١ \times ٢ \times ٣} = ١٢٠$ $\binom{١٣}{٤} = \frac{١٠ \times ١١ \times ١٢ \times ١٣}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤} = ٧١٥$

$\binom{٢٠}{١٧} = \binom{٢٠}{٣} = \frac{١٨ \times ١٩ \times ٢٠}{١ \times ٢ \times ٣}$

$\binom{١٥}{٠} = ١$ $\binom{١٠}{١٠} = ١$

مثال إذا كان $\binom{ن}{٣} = ١٠$ أوجد قيمة ن

الحـــــــل

$\binom{ن}{٣} = ٢٠$

$\frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{١ \times ٢ \times ٣} = ١٠$

$ن(ن-١)(ن-٢) = ٦٠$

٦٠

$ن(ن-١)(ن-٢) = ٥ \times ٤ \times ٣$

$ن = ٥$

حل أخر $\binom{ن}{٣} = ١٠$

$\frac{ل^{ن}_{٣}}{!٣} = ١٠$

$ل^{ن}_{٣} = ١٠ \times !٣ = ١٠ \times ٣ \times ٢ \times ١ =$

ن

$ل^{ن}_{٣} = ٥ \times ٤ \times ٣$

$ن = ٥$

قانون التبسيط $\binom{ن}{ر} = \binom{ن}{ن-ر}$

مثال إذا كان $\binom{ن}{ن-٢} = ٤٥$ أوجد ن

الحـــــــل

$\binom{ن}{ن-٢} = ٤٥$

$\binom{ن}{٢} = ٤٥$

$\frac{ن(ن-١)}{١ \times ٢} = ٤٥$

$ن(ن-١) = ٩٠$

$ن^{٢} - ن - ٩٠ = ٠$

$(ن-١٠)(ن+٩) = ٠$

$ن = ١٠$ $ن = -٩$ (مرفوض)

مثال إذا كان $\binom{\text{ن}}{٣} : \binom{\text{ن}+٢}{٤} = ٥ : ١٨$ فما قيمة ن ؟

الحـــــل

$$\frac{\text{ن}!}{(\text{ن}-٣)! \times ٣!} \times \frac{(\text{ن}+٢-٤)! \times ٤!}{(\text{ن}+٢)!} = \frac{٥}{١٨}$$

$$\frac{\text{ن}!}{(\text{ن}-٣)! \times ٣!} \times \frac{(\text{ن}-٢)! \times ٤!}{(\text{ن}+٢)!} = \frac{٥}{١٨}$$

$$\frac{\text{ن}!}{(\text{ن}-٣)! \times ٣!} \times \frac{(\text{ن}-٢)\,(\text{ن}-٣)! \times ٤ \times ٣!}{(\text{ن}+٢)\,(\text{ن}+١)\,\text{ن}!} = \frac{٥}{١٨}$$

$$\frac{٤\,\text{ن}-٨}{\text{ن}^{٢}+٣\text{ن}+٢} = \frac{٥}{١٨}$$

$$٥\,\text{ن}^{٢}+١٥\text{ن}+١٠ = ٧٢\text{ن}-١٤٤$$

$$٥\text{ن}^{٢}-٥٧\,\text{ن}+١٥٤ = ٠$$

$$(\text{ن}-٧)(٥\,\text{ن}-٢٢) = ٠$$

$$\text{ن} = ٧ \qquad \text{ن} = \frac{٢٢}{٥} \text{ (مرفوض)}$$

مثال إذا كان $\text{ل}_{\text{ر}}^{\text{ن}} = ٧٢٠$ ، $\binom{\text{ن}}{\text{ر}} = ١٢٠$ أوجد قيمة كلا من ن ، ر

الحـــــل

$$\binom{\text{ن}}{\text{ر}} = ١٢٠$$

$$\frac{\text{ل}_{\text{ر}}^{\text{ن}}}{\text{ر}!} = ١٢٠$$

$$\frac{٧٢٠}{\text{ر}!} = ١٢٠$$

$$\text{ل}_{٣}^{\text{ن}} = ٧٢٠$$

$$\text{ل}_{٣}^{\text{ن}} = ١٠ \times ٩ \times ٨$$

$$\text{ن} = ١٠$$

$$١٢٠ \times \text{ر}! = ٧٢٠ \Longleftarrow \text{ر}! = ٦$$

$$\text{ر}! = ٣ \times ٢ \times ١ \Longleftarrow \text{ر} = ٣$$

مثال إثبت أن $\binom{ن-١}{م} + \binom{ن-١}{م+١} = \binom{ن}{م+١}$ ومن ذلك

أوجد قيمة $\binom{١٠}{٦} + \binom{١٠}{٧}$

الحـــــــل

$$\text{الايمن} = \frac{(ن-١)!}{م! \times (ن-م-١)!} + \frac{(ن-١)!}{(م+١)!\ (ن-م-٢)!}$$

$$= \frac{(ن-١)!}{م!\ (ن-م-١)(ن-م-٢)!} + \frac{(ن-١)!}{(م+١)\times م! \times (ن-م-٢)!}$$

$$= \frac{(ن-١)!}{م! \times (ن-م-٢)!} \left[\frac{١}{ن-م-١} + \frac{١}{م+١}\right]$$

$$= \frac{(ن-١)!}{م! \times (ن-م-٢)!} \times \frac{م+١+ن-م-١}{(ن-م-١)(م+١)} = \frac{(ن-١)!}{م! \times (ن-م-٢)!} \times \frac{ن}{(ن-م-١)(م+١)}$$

$$= \frac{ن!}{(م+١)! \times (ن-م-١)!} = \binom{ن}{م+١}$$

$$\text{المقدار} = \binom{١٠}{٦} + \binom{١٠}{٧} = \binom{١١}{٧} = \frac{٨ \times ٩ \times ١٠ \times ١١}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤} = ٣٣٠$$

مثال إثبت أن $\binom{ن}{ر} = \frac{ن}{ن-ر} \times \binom{ن-١}{ر}$

$$\text{الايسر} = \frac{ن}{ن-ر} \times \frac{(ن-١)!}{ر! \times (ن-ر-١)!} = \frac{ن\,(ن-١)!}{ر!\ (ن-ر)\ (ن-ر-١)!}$$

$$= \frac{ن!}{ر!\ (ن-ر)!} = \binom{ن}{ر} = \text{الايمن}$$

إذا كان $(س^{ن}) = (ص^{ن})$ فان

(١) س = ص أو (٢) ن = س + ص

مثال أوجد قيمة س التى تحقق أن $(٢س^{١٤}) = (٣س - ٦)^{١٤}$

الحـــــــل

أما ٢س = ٣س – ٦ أو ٢س +٣س -٦ = ١٤

٢س – ٣س = -٦ ٥س = ١٤ + ٦

- س = -٦ ٥س = ٢٠

س = ٦ س = ٤

مثال إذا كان $(٣س^{١١}) = (س^{٢} - ٧)^{١١}$ أوجد قيمة س

الحـــــــل

٣س = $س^{٢}$ – ٧ أو ٣س + $س^{٢}$ – ٧ = ١١

$س^{٢}$ – ٣ س – ٧ = ٠ $س^{٢}$ + ٣س – ١٨ = ٠

لا تحلل (س + ٦)(س – ٣) = ٠

س = -٦(مرفوض) س = ٣

مثال إذا كان $(٤ر^{٧٥}) = (٣ر + ٥)^{٧٥}$ أوجد قيمة ر

الحـــــــل

٤ ر = ٣ ر +٥ أو ٤ ر +٣ر +٥ = ٧٥

٤ ر – ٣ ر = ٥ ٧ر = ٧٥ – ٥

ر = ٥ ٧ر = ٧٠

ر = ١٠

قانون النسبة

$$\frac{(\text{ر})^{\text{ن}}}{(\text{ر}-١)^{\text{ن}}} = \frac{\text{ن}-\text{ر}+١}{\text{ر}} \quad \text{أو} = \frac{\text{ن} - \text{الصغير}}{\text{الكبير}}$$

مثال أوجد قيمة كلا من $\frac{(٧)^{١٥}}{(٦)^{١٥}}$ ، $\frac{(٥)^{١٠}}{(٦)^{١٠}}$ ، $\frac{(٨)^{١٧}}{(٦)^{١٧}}$

الحـــــل

$$\frac{(٧)^{١٥}}{(٦)^{١٥}} = \frac{٦-١٥}{٧} = \frac{٩}{٧} \text{ ،،،،} \frac{(٥)^{١٠}}{(٦)^{١٠}} = \frac{٦}{٥-١٠} = \frac{٦}{٥}$$

$$\frac{(٨)^{١٧}}{(٦)^{١٧}} = \frac{(٨)^{١٧}}{(٧)^{١٧}} \times \frac{(٧)^{١٧}}{(٦)^{١٧}} = \frac{٧-١٧}{٨} \times \frac{٦-١٧}{٧} = \frac{١٠}{٨} \times \frac{١١}{٧} = \frac{٥٥}{٤٢}$$

مثال إذا كان $(٤)^{\text{ن}} : (٣)^{\text{ن}} = \frac{٣}{٢}$ فما قيمة ن

الحـــــل

$$\frac{٣}{٢} = \frac{(٤)^{\text{ن}}}{(٣)^{\text{ن}}}$$

$$\therefore \frac{٣}{٢} = \frac{٣-\text{ن}}{٤}$$

$$١٢ = ٦ - ٢\text{ن}$$
$$١٨ = ٢\text{ن}$$
$$٩ = \text{ن}$$

مثال إذا كان $ل_{٢}^{م+ن} = ٢١٠$ ، $\binom{ن-٣}{٣} = ٣٥$ أوجد قيمتى م ، ن

الحـــــل

$ل_{٢}^{م+ن} = ٢١٠ = ١٥ \times ١٤$

$م + ن = ١٥$

$\binom{ن-٣}{٣} = ٣٥$

$\frac{(ن-٣)(ن-٤)(ن-٥)}{١ \times ٢ \times ٣} = ٣٥$

$(ن-٣)(ن-٤)(ن-٥) = ٧ \times ٦ \times ٥$

$ن - ٣ = ٧$ $ن = ١٠$

بالتعويض فى المعادلة الاولى نجد أن

$م + ١٠ = ١٥$ $م = ٥$

مثال إذا كان $\binom{ن}{٣} : \binom{ن-١}{٤} = ٨ : ٥$ أوجد قيمة ن

الحـــــل

$\frac{\binom{ن}{٣}}{\binom{ن-١}{٤}} = \frac{٨}{٥}$

$\frac{ن!}{!٣ \times (ن-٣)!} \times \frac{!٤ \times (ن-٥)!}{(ن-١)!} = \frac{٨}{٥}$

$\frac{ن \quad (ن-١)!}{!٣ \quad (ن-٣)(ن-٤) \quad (ن-٥)!} \times \frac{٤ \times ٣! \times (ن-٥)!}{(ن-١)!} = \frac{٨}{٥}$

$\frac{٤ن}{ن^{٢} - ٧ن + ١٢} = \frac{٨}{٥}$

$٨ن^{٢} - ٥٦ن + ٩٦ = ٢٠ن$

$٨ن^{٢} - ٧٦ن + ٩٦ = ٠$ ÷٤

$٢ن^{٢} - ١٩ن + ٢٤ = ٠$

$(٢ن-٣)(ن-٨) = ٠$

$ن = ٨$

مثال

إذا كان $\binom{\text{ن}}{٥} = \frac{١}{٢}\left[\binom{\text{ن}}{٤} + \binom{\text{ن}}{٦}\right]$ فما قيمة ن

الحـــــــل

$$٢\binom{\text{ن}}{٥} = \binom{\text{ن}}{٤} + \binom{\text{ن}}{٦}$$

$$٢ = \frac{\binom{\text{ن}}{٤}}{\binom{\text{ن}}{٥}} + \frac{\binom{\text{ن}}{٦}}{\binom{\text{ن}}{٥}}$$

$$٢ = \frac{٥}{\text{ن} - ٤} + \frac{\text{ن} - ٥}{٦}$$

$$٢ = \frac{٣٠ + \text{ن}^{٢} - ٩\,\text{ن} + ٢٠}{٢٤ - ٦\text{ن}}$$

$$٣٠ + \text{ن}^{٢} - ٩\,\text{ن} + ٢٠ = ١٢\text{ن} - ٤٨$$

$$\text{ن}^{٢} - ٢١\,\text{ن} + ٩٨ = ٠$$

$$(\text{ن} - ٧)(\text{ن} - ١٤) = ٠$$

$$\text{ن} = ٧ \qquad \text{ن} = ١٤$$

مثال

إذا كان $\binom{\text{ن}}{٩} < \binom{\text{ن}}{٨}$ إثبت أن ن > ١٧

الحـــــــل

$$\binom{\text{ن}}{٩} < \binom{\text{ن}}{٨}$$

$$\frac{\binom{\text{ن}}{٩}}{\binom{\text{ن}}{٨}} < ١$$

$$\frac{\text{ن} - ٨}{٩} < ١$$

$$\text{ن} - ٨ < ٩$$

$$\text{ن} < ٩ + ٨$$

$$\text{ن} < ١٧$$

مثال إذا كان $(\ ^{ن}_{ر}\ ) : (\ ^{ن}_{ر+١}\ ) : (\ ^{ن}_{ر+٢}\ ) = ٣ : ٨ : ١٤$ أوجد قيمة ن ، ر

الحـــــــل

$$\frac{(\ ^{ن}_{ر+١}\ )}{(\ ^{ن}_{ر}\ )} = \frac{٨}{٣}$$

$$\frac{ن - ر}{ر+١} = \frac{٨}{٣}$$

$$٣ن - ٣ر = ٨ر + ٨$$

$$٣ن - ١١ر = ٨ \quad (١)$$

$$\frac{(\ ^{ن}_{ر+٢}\ )}{(\ ^{ن}_{ر+١}\ )} = \frac{١٤}{٨}$$

$$\frac{ن - ر - ١}{ر + ٢} = \frac{٧}{٤}$$

$$٤ن - ٤ر - ٤ = ٧ر + ١٤$$

$$٤ن - ١١ر = ١٨ \quad (٢)$$ وبحل المعادلتين معا

$$٤ن - ١١ر = ١٨$$

$$٣ن - ١١ر = ٨$$

بالطرح

$$ن = ١٠$$

بالتعويض فى الاولى

$$٣\times١٠ - ١١ر = ٨$$

$$-١١ر = ٨ - ٣٠ = -٢٢$$

$$ر = ٢$$

مثال إذا كان $(\ ^{ر}_{٥}\ )^{٢} = (\ ^{ر+١}_{٦}\ ) \times (\ ^{ر}_{٤}\ )$ أوجد قيمة ر

الحـــــــل

$$(\ ^{ر}_{٥}\ ) \times (\ ^{ر}_{٥}\ ) = (\ ^{ر+١}_{٦}\ ) \times (\ ^{ر}_{٤}\ )$$

$$\frac{(\ ^{ر}_{٥}\ )}{(\ ^{ر}_{٤}\ )} = \frac{(\ ^{ر+١}_{٦}\ )}{(\ ^{ر}_{٥}\ )}$$

$$\frac{ر - ٤}{٥} = \frac{(ر+١)!}{!٦ \times (ر - ٥)!} \times \frac{!٥ \times (ر - ٥)!}{!ر}$$

$$\frac{ر - ٤}{٥} = \frac{ر + ١}{٦}$$

$$٦ر - ٢٤ = ٥ر + ٥$$

$$٦ر - ٥ر = ٥ + ٢٤$$

$$ر = ٢٩$$