الملف مذكرة شرح واختبارات في وحدة المشتقات من سلسلة متعة الرياضيات
موقع المناهج ⇦ المناهج العمانية ⇦ الصف الثاني عشر ⇦ رياضيات بحتة ⇦ الفصل الأول

وحدة : المشتقات

متعة

الرياضيات

مع : أحمد هجرس

معدل التغير

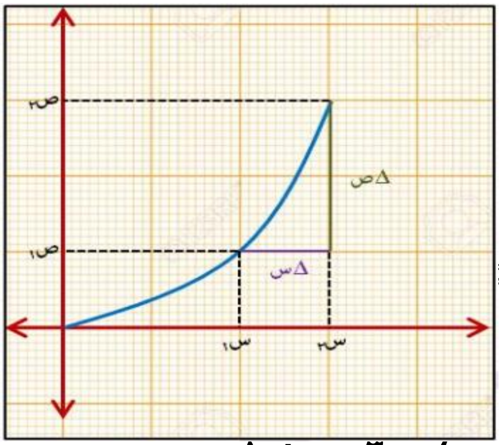
التغير = القيمة الثانية ــ القيمة الأولى

متعة الرياضيات
مع : أحمد هجرس

	التغير في س	هـ = Δ س = س٢ ــ س١ = (س + هـ) - س
١)	التغير في الدالة	Δ ص = ص٢ ــ ص١ = د (س٢) ــ د (س١) = د (س + هـ) ــ د(س)
٢)	متوسط معدل التغير	$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{\text{د}(\text{س}_2) - \text{د}(\text{س}_1)}{\text{س}_2 - \text{س}_1} = \frac{\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}}$
٣)	معدل التغير	$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \underset{\text{هـ} \to 0}{\text{نهـا}} \frac{\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{د}(\text{س})}{\text{هـ}}$

السرعة المتوسطة = $\frac{\text{التغير في المسافة}}{\text{التغير في الزمن}} = \frac{\text{ف}_2 - \text{ف}_1}{\text{ن}_2 - \text{ن}_1}$

التسارع (العجلة) المتوسطة = $\frac{\text{التغير في السرعة}}{\text{التغير في الزمن}} = \frac{\text{ع}_2 - \text{ع}_1}{\text{ن}_2 - \text{ن}_1}$



أوجد التغير و متوسط معدل التغير و معدل التغير (إن أمكن)

١) إذا كان : د (س) = ٢

٢) إذا كان : د (س) = ٣ س + ١

٣) إذا كان : د (س) = س^{٢} ــ ٤ س

٤) أوجد معدل التغير للدالة د (س) = س^{٩}

٥) إذا كان : د (س) = $\frac{س+1}{س-2}$

٦) $\sqrt{٣س+١}$

٧) استخدم التعريف العام للمشتقة لإيجاد مشتقة د(س) = ٧س + |٤-٢س| عند س = ٢

---

٨) طفل ألقي كرة في بركة ماء فكونت موجات دائرية ،
أوجد معدل التغير في مساحة الموجة عندما يتغير نصف قطرها من ٥ سم إلي ٧ سم

---

٩) تتمدد صفيحة مربعة الشكل بحيث تظل محتفظة بشكلها. أحسب:

أ) متوسط معدل التغير في محيطها عندما يتغير طول ضلعها من ١٠ إلى ١٠,١

ب) معدل التغير في محيطها عندما يكون طول ضلعها ٢٠

متعة الرياضيات
مع : أحمد هجرس

١٠) د (س) = { س^{٢} ، س < ١ ؛ ٢ س + ١ ، س > ١ }

أوجد متوسط معدل التغير عندما تتغير س من – ١ إلي ٣

- -

١١) إذا كان متوسط معدل تغير د(س) = $\frac{م}{س+٢}$ عندما تتغير س من ٠ إلى ٣ يساوي -٢ أوجد م

- -

١٢) إذا كان متوسط معدل تغير د(س) = ٢س^{٢} +٣س في [م ، ٣م] يساوي ١١ فما قيمة م

- -

١٣) إذا كانت د(س) دالة في المستوى الاحداثي وكان مقدار التغير في د(س) يساوي ٤ عندما تتغير س من ١ إلى م فإذا علمت أن متوسط معدل التغير في د(س) = ١٦ . اوجد م

- -

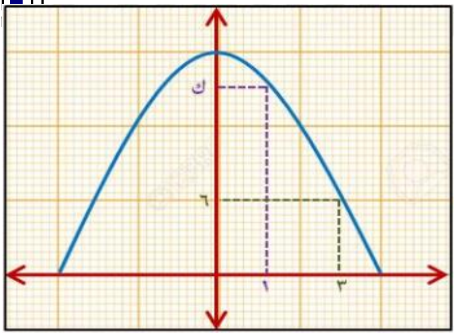
١٤) إذا تحرك جسيم في المستوى البياني من النقطة م(س ، ٣) إلى النقطة ب (٦ ، ص) بحيث Δس = ٢ ، Δص= ٥ فجد س ، ص

- -

١٥) أوجد متوسط معدل التغير للدالة د(س) = -٣ |س-٣| في الفترة [١ ، ٢]

- -

١٦) إذا كانت ص = [١+ $\frac{س}{٤}$] وتغيرت قيمة س من ١ إلى ١,٥ فأوجد $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$



١٧) في الشكل المقابل :

متوسط معدل التغير يساوي -٤ عندما تتغير س من ١ إلى ٣

أوجد قيمة : ك

١٨) أوجد قمة م ، إذا كان متوسط معدل تغير الدالة هـ(س) في الفترة [-١ ، ٤] يساوي ٣ وكانت هـ(-١) = م ، هـ(٤) = ١٣

١٩) إذا كان متوسط التغير في الدالة ى(س) في الفترة [١ ، ٣] يساوي ٥ وكان ى(١) × ى(٣) = ٢

وكان هـ(س) = $\frac{١}{ى(س)}$ فأوجد متوسط تغير الدالة هـ (س) في الفترة نفسها .

٢٠) إذا كانت د(س)= $\frac{١٨}{س}$ وكان س١ = ٢ ، Δس = ٤ ، فإن متوسط التغير في الدالة يساوي

٢١) إذا كانت د(س) = $\begin{cases} س^٢ & ١ \leqslant س < ٣ \\ ٢س+١ & س \geqslant ٣ \end{cases}$ فأوجد متوسط معدل التغير للدالة د(س) عندما تتغير س من ١ إلى ٣,٥

بحث الاشتقاق

د (س) تكون قابلة للاشتقاق عند س = أ إذا كان : نهــا $_{هـ \leftarrow 0}$ $\frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$ موجودة

ملحوظة : إذا كانت الدالة يتغير تعريفها عند س = أ

@ نوجد المشتقة اليمنى : د/ (أ $^+$) = نهــا $_{هـ \leftarrow 0^+}$ $\frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$

@ نوجد المشتقة اليسرى : د/ (أ $^-$) = نهــا $_{هـ \leftarrow 0^-}$ $\frac{د(أ + هـ) - د(أ)}{هـ}$

إذا كان	من الرسم	الاستنتاج
د/ (أ $^+$) = د/ (أ $^-$)	المماس الأيمن نفس المماس الأيسر	الدالة قابلة للاشتقاق ، وتكون متصلة
د/ (أ $^+$) ≠ د/ (أ $^-$)	المماس الأيمن يختلف عن الأيسر	الدالة غير قابلة للاشتقاق ، وتكون متصلة أو غير متصلة

ملحوظة : @ إذا كانت الدالة متصلة : فإنها تكون قابلة للاشتقاق أو غير قابلة .

@ إذا كانت الدالة غير متصلة : فإنها تكون غير قابلة للاشتقاق .

@ لبحث الاشتقاق في [أ ، ب] : # عند أ : نكتفي بالمشتقة اليمنى فقط .

عند ب : نكتفي بالمشتقة اليسرى فقط .

ملاحظات هامة :

١) مسائل بها مطلق : لابد من إعادة تعريف المطلق وملاحظة الآتي :

النقطة المطلوب بحث الاشتقاق عندها	الحل
تقع يمين أصفار المطلق	نوجد المشتقة اليمنى فقط
تقع يسار أصفار المطلق	نوجد المشتقة اليسرى فقط
هي أصفار المطلق	نوجد المشتقة اليمنى واليسرى

متعة الرياضيات مع : أحمد هجرس

٢) مسائل بها جذر تربيعي : نوجد أصفار ما تحت الجذر ونلاحظ ما يأتي :

النقطة المطلوب بحث الإشتقاق عندها	الحل
تقع يمين أصفار الجذر	نوجد المشتقة اليمنى فقط
تقع يسار أصفار الجذر	الدالة غير معرفة وبالتالي غير قابلة للاشتقاق
هي أصفار الجذر	الدالة غير قابلة للاشتقاق (اذكر السبب)

٣) مسائل بها دالة الصحيح : نعيد تعريف دالة الصحيح وملاحظة الآتي :

النقطة المطلوب بحث الإشتقاق عندها	الحل
تقع داخل الفترة	نوجد مشتقة الدالة عند هذه النقطة
تقع في أحد طرفي الفترة	الدالة غير متصلة وبالتالي غير قابلة للاشتقاق

٤) مسائل بها دالة معرفة بأكثر من قاعدة : نلاحظ الآتي :

النقطة المطلوب بحث الإشتقاق عندها	الحل
تقع يمين نقطة التشعب	نوجد المشتقة اليمنى فقط
تقع يسار نقطة التشعب	نوجد المشتقة اليسرى فقط
هي نقطة التشعب	نوجد المشتقة اليمنى واليسرى

١) $د(س) = \begin{cases} س^{٢} + ١ & س > ٣ \\ ٢س + ٤ & س < ٣ \end{cases}$ ابحث قابلية اشتقاق د (س) عند س = ٣

٢) $د(س) = \begin{cases} ٢س - ٣ & س \le ١ \\ س^{٢} - ٢ & س > ١ \end{cases}$ ابحث قابلية اشتقاق د (س) عند س = ١

٣) $$د(س) = \begin{cases} س^{٢} + س + ١ & -٢ \le س < ١ \\ ٣\,س & ١ \le س \le ٣ \end{cases}$$
عند س = ١ & س = - ٢ & س = ٣

---

٤)) إذا كانت $$د(س) = \begin{cases} س^{٢} & س < ١ \\ أ\,س + ب & س \ge ١ \end{cases}$$
قابلة للاشتقاق عند س = ١ فأوجد قيمة أ & ب

---

٥) إذا كان : $د(س) = \sqrt{س - ٣}$ فابحث قابلية اشتقاقها عند أي نقطة في مجالها

---

٦) ابحث قابلية اشتقاق : $د(س) = |س - ٢| + ٣$ عند س = ٢ ثم ابحث الاتصال .

متعة الرياضيات
مع : أحمد هجرس

٧) ابحث قابلية اشتقاق : د (س) = [$\frac{1}{2}$ س − ١] عند س = ٦ ، س = ١

---

٨) د (س) = $\sqrt{\text{س} + ١}$ ابحث قابلية اشتقاق د (س) عند أي نقطة في مجالها .

---

٩) د (س) = ١ + | س + ٢ | ابحث قابلية اشتقاق د (س) عند س = - ٢

تمارين

١٠) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} - ٢\,\text{س} & \text{س} < ٢ \\ \text{ب} - \text{س}^{٢} & \text{س} \geq ٢ \end{cases}$ متصلة فأوجد قيمة ب ثم ابحث الاشتقاق

---

١١) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \text{ب س} + ٧ & \text{س} \leq -١ \\ \text{س}^{٢} - ٢\,\text{س} & \text{س} > -١ \end{cases}$ متصلة فأوجد قيمة ب ثم ابحث الاشتقاق

---

٨) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} - ٤ & \text{س} \leq ٢ \\ \text{أ س} + \text{ب} & \text{س} > ٢ \end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند س = ٢ فأوجد أ & ب

---

٩) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} + \text{ك} & \text{س} \leq ٢ \\ \text{ب س} + ١ & \text{س} > ٢ \end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند س = ٢ أوجد ك & ب

---

١٠) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \text{أ س}^{٢} + \text{ك} & \text{س} < ٢ \\ ٢\,\text{س}^{٢} + \text{ب س} & \text{س} \geq ٢ \end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند س = ٢ & د (٠) = ٢ فأوجد قيمة : أ ، ك ، ب

---

١١) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \text{أ س}^{٢} + \text{ك} & \text{س} < ٢ \\ \text{س}^{٣} + \text{ب س} & \text{س} \geq ٢ \end{cases}$ قابلة للاشتقاق مرتين عند س = - ٢ فأوجد أ & ك & ب

قواعد الاشتقاق

المشتقة الأولي = المعامل التفاضلي الأول = ميل المماس = مشتقة ص بالنسبة لـ س

ظل الزاوية التي يصنعها المماس للمنحني مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ء}{ءس}\left(د\left(س \right) \right) = ص^{/} = د^{/}\left(س \right) = \left.\frac{ءص}{ءس}\right|_{س=1}$$

المشتقة الثانية = مشتقة المشتقة الأولي = $ص^{//} = د^{//}\left(س \right) = \frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$

الدالة	التفاضل	توضيح
أ	صفر	مشتقة الثابت = صفر
أ س	أ	مشتقة س = معامل س
$س^{ن}$	$ن\, س^{ن-١}$	ننزل الأس ونطرح منه واحد
$أ\, س^{ن}$	$أ\, ن\, س^{ن-١}$	مشتقة ثابت × دالة = الثابت × مشتقة الدالة
$(...)^{ن}$	$ن\, (...)^{ن-١}$ × مشتقة ما بداخل القوس	
الجذر التربيعي		$\frac{\text{مشتقة ما تحت الجذر}}{2 \times \text{الجذر}}$
د × هـ	$د \times هـ^{/} + هـ \times د^{/}$	الأولي × مشتقة الثانية + الثانية × مشتقة الأولي
$\frac{د}{هـ}$		$\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{\text{المقام}^{2}}$

@ يفضل وضع الدالة علي الصورة : ص = ٠٠٠٠

@ مشتقة المجموع الجبري لدالتين أو أكثر = مجموع مشتقات هذه الدوال .

@ لإيجاد مشتقة الدالة الجذرية نحولها أولاً إلى دالة أسية .

@ لرفع مقدار من المقام للبسط : نغير إشارة أس المقدار .

دليل الجذر مقام الأس

أوجد المشتقة الأولي لكل مما يأتي :

١) $ص = ٣س^{٥} + ٢س^{٣} - ٧ + \frac{5}{س^{2}} - \sqrt{٣س} + \sqrt[٣]{س^{٤}}$

٢) $٧ص = س^{٢} - ٣س + ٥$

٣) $ص^{٢} = س^{٥}$

٤) $٣ص^{٤} = ٢(س^{٢} + ٣)^{٣}$

٥) $ص = (٢س + ٧)^{٥}$

٦) $ص = ٩(٥س^{٣} - ٦س + ٤)^{٨}$

٧) $ص = ٣(س^{٢} + ١)^{-٦}$

٨) $ص = (٣س - ٢)^{-٣}$

٩) $ص = \frac{5}{(3س - 2)^{6}}$

١٠) $٤ص = \frac{7}{\sqrt{(5س - 3)^{4}}}$

١١) $ص = \left(\frac{5س + 3}{2س - 7}\right)^{5}$

١٢) $ص = \left(\frac{5س + 3}{2س - 7}\right)^{-7}$

١٣) $ص = (٢س + ١)(٥س - ٣)$

١٤) $ص = (س^{٢} + ٣س)(٤س - ٧)$

١٥) $ص = (٥س - ٢)(٤س + ٧) + ٣س$

١٦) $ص = ٤س(٣س^{٢} + ٥)$

١٧) ص = $(\text{٢ س} + ١)^{٣} (\text{س} - ٢)^{٨}$

١٨) ص = $(\text{٢ س} + ١)^{٨} (\text{س} - ٢)^{٨}$

١٩) ص = $(\text{جاس} - ١)^{٥} (\text{جاس} + ١)^{٥}$

٢٠) ص = $\dfrac{2\text{س} + 5}{3\text{س} - 2}$

٢١) ص = $\dfrac{5\text{س}^2 + 3}{2\text{س} - 7}$

٢٢) ص = $\dfrac{5\text{س}^2 + 3\text{س}}{2\text{س}^2 + 7}$

٢٣) ص = $\dfrac{(5\text{س} + 3)^7}{(2\text{س} - 7)^7}$

٢٤) ص = $\dfrac{(5\text{س} + 3)^5}{(2\text{س} - 7)^7}$

٢٥) ص = $\dfrac{(\text{س} + 1)(5\text{س} + 3)}{(2\text{س} - 7)}$

٢٦) إذا كانت : $(\text{ص} - \text{س})^{٥} = ٧$ فاثبت أن : ص$'$ = ١

٢٧) إذا كان : ق ، ك دالتين قابلتين للإشتقاق ، وكان : هـ (س) = ق (س) ∘ ك (س)

وكان : ق (٢) = ٤ ، ق$'$ (٢) = ١ ، ك (٢) = ٣ ، ك$'$ (٢) = - ٢ فأوجد هـ$'$ (٢)

٢٨) إذا كانت د(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٣} - ٢ & \text{س} < ١ \\ \text{س}^{٢} - ٦ & ١ \leqslant \text{س} < ٦ \\ ٥\text{س} & \text{س} \geqslant ٦ \end{cases}$

أوجد: دَ(-١) ، دَ(٤) ، دَ(٨) ، دَ(١) ، دَ(٦)

مع : احمد هجرس

٢٩) إذا كان د(س)= أ س^{٢} + ٢أ س ، وكان دَ(٢)= ٣٠ . أوجد قيمة أ

٣٠) إذا كان ق(س)= أ س^{٢} + ٥س + ب ، وكان ق(١)= ٣ ، قَ(١)= ٧ . أوجد قيمة أ ، ب

٣١) إذا كان ق(١)= ١ ، قَ(١)= ٦ ، ل(١)= ٤ ، لَ(١) = ٢ فأوجد : $\left(\sqrt{\text{ق}+\text{ل}}\right)'$(١)

٣٢) إذا كان ق(١)=٣، هـ(١) = ٢ ، قَ(١)=٥، هـَ(١) = -٢ فأوجد : $\left(\frac{\text{ق}}{\text{هـ}}\right)'$(١)

٣٣) إذا كان ق(٢)=٣ ، قَ(٢)=٤ ، هـ(س) = س^{٢}-١ فأوجد : (ق.هـ)َ(٢)

التفسير الهندسي للمشتقة

أ/ هجرس

	المطلوب	خطوات الحل
١)	أوجد *ميل المماس* للمنحنى : ص = ۰۰۰	١) نوجد المشتقة ٢) نعوض عن قيمة س كما الجدول
٢)	أوجد *قياس الزاوية* التي يصنعها المماس للمنحنى ص =۰۰۰ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات	١) نوجد المشتقة . ٢) نعوض عن قيمة س كما بالجدول . ٣) نوجد SHIFT TAN للناتج بالموجب . وإذا كان العدد سالب نطرح الزاوية من ١٨٠°
٣)	أوجد *معادلة المماس والعمودي علية* $\frac{ص - ص_1}{س - س_1}$ = الميل المطلوب	س١ = ص١ = ميل المماس = من رقم (١) ميل العمودي = مقلوب الميل بإشارة مخالفة

جدول يوضح طريقة **إيجاد قيمة س** حسب المعلومة المعطاة .

المعطيات	خطوات الحل
عند س = ١	نعوض عن قيمة : س = ١
عند النقطة (٤ ، ٥)	نعوض عن قيمة : س = ٤
عند نقطة الأصل	نعوض عن قيمة س = ٠
عند نقطة تقاطعة مع محور الصادات	نعوض عن قيمة : س = ٠
عند نقطة تقاطعة مع محور السينات	نضع الدالة الأصلية = صفر لنوجد قيم س
عند نقطة تقاطعة مع المستقيم ۰۰۰	نحل معادلة المنحنى مع معادلة المستقيم لنوجد قيم س

المعلومة	الاستفادة
المستقيمان متوازيان	ميل الأول = ميل الثاني
المستقيمان متعامدان	ميل الأول = مقلوب ميل الثاني بإشارة مخالفة
المستقيم يمس المنحنى	١) ميل المستقيم = ميل المماس للمنحنى ٢) نقطة التقاطع تحقق معادلة المستقيم وتحقق معادلة المنحنى

	المطلوب	خطوات الحل
١)	أوجد ***قيمة س*** التى يكون عندها ميل المماس للمنحنى ص =٠٠٠	١) نوجد المشتقة ٢) نضع المشتقة = عدد كما بالجدول ٣) نحل المعادلة لإيجاد قيمة س
٢)	أوجد ***النقط الواقعة*** على المنحنى : ص = ٠٠٠ ويكون عندها	١) نوجد المشتقة ٢) نضع المشتقة = كما بالجدول ٣) نحل المعادلة لنوجد س= ؟ ٤) نعوض في المعادلة الأصلية لنوجد قيمة ص ∴ النقطة = (س ، ص)

جدول يوضح طريقة **إيجاد قيمة المشتقة** حسب المعلومة المعطاة .

المعطيات	قيمة المشتقة
ميل المماس مساوياً ٦	نضع المشتقة = ٦
يوازى محور السينات	نضع المشتقة = صفر
يوازى محور الصادات	نضع المشتقة = $\frac{1}{0}$
يوازى المستقيم ٢ س + ٣ ص = ١	نضع المشتقة = $\frac{2-}{3}$
عمودي على المستقيم ٢ س + ٣ ص = ١	نضع المشتقة = $\frac{3}{2}$
يصنع زاوية ٤٥ ° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات	نضع المشتقة = ظا ٤٥ °
يمر بالنقطتين (،) ، (،)	نضع المشتقة = $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$

@ النقطة تقع على المنحنى إذا كانت تحقق معادلته .

@ **الميل الموجب** (المشتقة > ٠) : يصنع زاوية (حادة) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

@ **الميل السالب** (المشتقة < ٠) : يصنع زاوية (منفرجة) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

١) أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د(س) = س^{٢}ــ١ عند س=١

ثم أوجد قياس الزاوية التي يصنعها المماس للمنحنى مع الإتجاة الموجب لمحو السينات عند النقطة (٥و٠ ، - ٧٥و٠)

٢) إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (٠ ، -٢) ، (٢ ، ٦) يمس المنحنى د(س) = ٩س^{٢}+٢س-١ عند س = ٢ ، فما قيمة ٩ ؟

٣) اثبت أن المماس للمنحنى ص = $\frac{\text{٩س}}{\text{١-س}^{٢}}$ عند النقطة (٢ ، -٦) يكون عمودياً على المستقيم س+٥ص+١١=٠

٤) أوجد قيمة : أ ، ب التي تجعل المماس لمنحنى الدالة ٩س^{٣} + ب س + ٣ عند النقطة (-١ ، ٤)

يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{٤}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

٥) إذا كان منحنى الدالة ص = ٩س^{٢} + ب س + ٣ يمر بالنقطة (٢ ، ٧) والمماس للمنحنى عند س = $\frac{١}{٢}$ يوازي محور السينات

أوجد قيمة ٩ ، ب

٦) إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = س^{٢}+ $\frac{\text{٩}}{\text{س}}$ عند النقطة (٤ ، ص) يساوي ٧ أوجد قيمة ٩

٧) إذا كان المستقيم : س + ص = ٣ يمس المنحنى : ص = أ س^{٣} + ب س^{٢} – ٢ س + ٦
عند النقطة (١ ، ٢) فما قيمة أ ، ب ؟

٨) إذا كان المستقيم : ١٣ س - ص – ٧ = ٠ يمس المنحنى : ص = أ س^{٣} + ب س^{٢}
عند النقطة (١ ، ٦) فما قيمة أ ، ب ؟

٩) إذا كان قياس الزاوية بين المنحنى : ص = أ س^{٣} + ب س^{٢} – ٢ س + ١
والاتجاة الموجب لمحور السينات عند النقطة (١ ، - ٣) الواقعة علية هي ١٣٥$^{\circ}$ فأوجد أ ، ب

١٠) أوجد معادلة المماس والعمودي علية للمنحنى : ص = ٥ س^{٢} + ٢ س عند النقطة (٣ ، ٤)

١١) أوجد معادلة كل من المماس والعمودي علية للدالة : د (س) = س^{٣} – ٢٧ عند نقطة تقاطعه مع محور السينات .

١٢) أوجد معادلة المماس للمنحني : د (س) = (س^{٢} + ٢ س) ^{٣} عند س = ١

١٣) أوجد معادلة المماس للدالة : د (س) = س^{٢} – ٦ س + ٥ والذي يعامد المستقيم : ٢ ص – س = ١

١٤) أوجد معادلتي المماس والعمودي على المنحني : ص = $\frac{س + 3}{س + 1}$ عند النقطة (١ ، ٢)

١٥) أوجد معادلة كل من المماس والعمودي علية للدالة : د (س) = $\sqrt{س + ٣}$
عند النقطة التي يكون المماس عندها يوازي المستقيم : س – ٤ ص + ١٣ = صفر

١٦) أوجد النقط التي تقع على المنحنى : ص = س^{٢} – ٣ س + ١ ويكون المماس عندها // المستقيم ص = ٣ س + ٥

١٧) أوجد النقط الواقعة على المنحنى : ص = س^{٣} – ٤ س + ٥ ويكون المماس عندها // المستقيم س + ص + ٢ =٠

١٨) أوجد النقط التي تقع على المنحنى : ص = س^{٣} – ٣ س ويكون المماس عندها موازياً لمحور السينات .

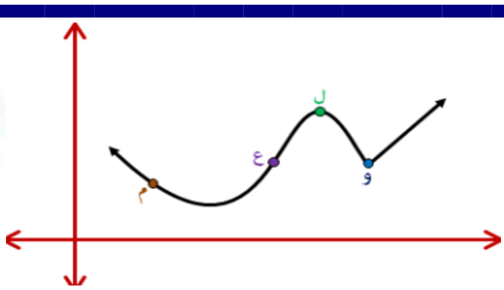
١٩) أوجد النقط التي تقع على المنحنى : ص = $\frac{-2\text{س}}{2\text{ص}}$ ويكون المماس عندها عمودياً على المستقيم س – ٣ ص = ٠

٢٠) أوجد النقط التي تقع على المنحنى : د (س) = س^{٢} - ٣ س

والتي يكون ميل المماس عندها يصنع زاوية قياسها ٤٥ ° مع الاتجاة الموجب لمحور السينات

متعة الرياضيات
مع : أحمد هجرس

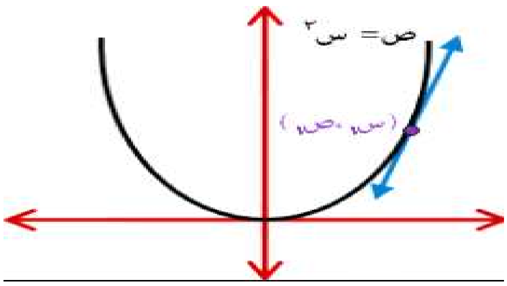
إذا كان الشكل المجاور يمثل بيان الدالة د(س)،
فإن النقطة التي يكون عندها دَ(س) > ٠ هي:



☐ و ☐ ل

☐ ع ☐ م

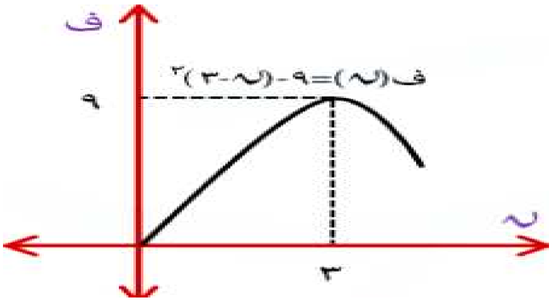
في الشكل المجاور ميل المماس لمنحنى الدالة
ص=د(س) عند النقطة ($س_1$،$ص_1$) يساوي



☐ $س_1^2$ ☐ $٢س_1^2$

☐ $س_1$ ☐ $٢س_1$

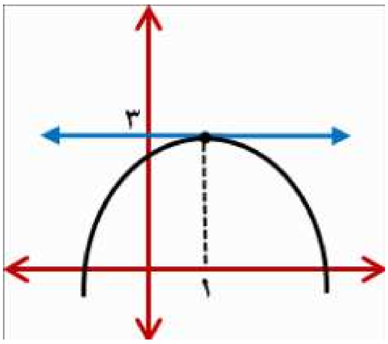
الشكل المجاور يمثل حركة جُسيم وفق دالة المسافة ف(ن) ،
حيث (ن) الزمن بالثواني. السرعة اللحظية عند ٣ ثواني =



☐ ٩ ☐ ٦

☐ ٣ ☐ صفر

الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة د(س)= $س^2$+ب س+جـ
حيث ب ، جـ ثوابت فإن قيمة ب =

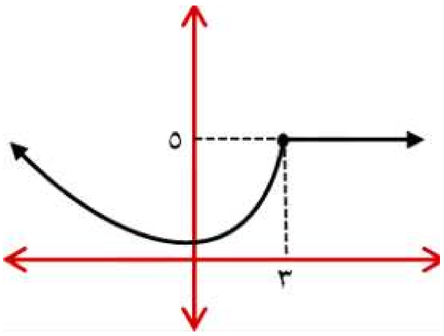


☐ ٣ ☐ ١

☐ -٢ ☐ -٣

الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة ص=د(س)

فإن $\lim\limits_{\text{هـ} \to 0} \dfrac{\text{د}(٣+\text{هـ})-\text{د}(٣)}{\text{هـ}} =$



☐ صفر ☐ ٣

☐ ٥ ☐ غير موجودة

التفسير الفيزيائي للمشتقة

ف = المسافة ⟵ مشتقة ⟵ ع = السرعة ⟵ مشتقة ⟵ ت = التسارع ، ج = العجلة

معدل التغير في السرعة تعني **العجلة**

معدل التغير في المسافة تعني **السرعة**

المعلومة	قيمة ن
السرعة عند أي لحظة	بدون تعويض عن قيمة ن
السرعة الابتدائية (عند بدء الحركة)	ن = ٠
السرعة اللحظية بعد ٣ ثواني من بدء الحركة	ن = ٣
السرعة المتوسطة في الفترة [٣ ، ٥]	$ع = \frac{ف_2 - ف_1}{ن_2 - ن_1} = \frac{\text{التغير في المسافة}}{\text{التغير في الزمن}}$
التسارع المتوسط في الفترة [٣ ، ٥]	$ت = \frac{ع_2 - ع_1}{ن_2 - ن_1} = \frac{\text{التغير في السرعة}}{\text{التغير في الزمن}}$
أوجد السرعة المنتظمة التي يتحرك بها الجسم	العجلة = صفر ونوجد ن ثم نعوض في ع
أوجد سرعة الجسم عندما تبلغ العجلة ١٢ سم / ث^٢^	العجلة = ١٢ونوجد ن ثم نعوض في ع
عند أقصى ارتفاع (يسكن الجسم) يقف الجسم	السرعة = صفر
الجسم يسقط سقوط حر (يسقط تحت تأثير وزنة)	العجلة = ١٠ م / ث^2 لأسفل العجلة = ــ ١٠ م / ث^2 لأعلى

١) يتحرك جسم في خط مستقيم ، فإذا كان بُعد الجسم عن نقطة ثابتة بعد ن ثانية هو ف سم ويتعين من العلاقة : ف = ن^{٣} – ٣ ن^{٢} + ٥

أوجد كلا من : # أوجد المسافة التي تحركها الجسم حتي يقف .

أوجد التسارع (العجلة) المتوسطة في الفترة بين (٣) ثواني و (٥) ثواني

أوجد التسارع عندما (يسكن) يقف الجسم عن الحركة .

أوجد العجلة عندما تبلغ سرعة الجسم (٢٤ سم / ث)

٢) يتحرك جسم بسرعة : ع = ك $\sqrt{\text{ف}}$ حيث ك موجبة وكان تسارعه = ٨ م / ث^{٢}

أوجد قيمة ك .

٣) بدأ متسابق بقطع مسافة مقدارها ٢٠٠ متر في طريق أفقي بالعلاقة : ف = $\frac{1}{2}$ ن^{٢} + ١٥ ن

حيث ن الزمن بالثواني ، ف المسافة بالأمتار .

أوجد : # سرعة المتسابق عندما ن = ٣ ثواني .

تسارع المتسابق لحظة وصولة إلي خط النهاية .

الزمن اللازم لإنهاء السباق ، وسرعة المتسابق عندئذ .

٤) يتحرك جسيم في خط مستقيم طبقاً للعلاقة : ف (ن) = $\frac{١}{١٢}$ ن ^{٤} – ٢ ن ^{٢} + ٦ ن

حيث ف المسافة بالسنتيمتر ، ن الزمن بالثانية ،

أوجد سرعة الجسيم عندما تكون عجلته ١٢ سم / ث ^{٢}

---

٥) يتحرك جسيم في خط مستقيم طبقاً للعلاقة : ف (ن) = ٦ ن ^{٢} – $\frac{١}{٣}$ ن ^{٣}

حيث ف المسافة بالمتر ، ن الزمن بالثانية ،

أوجد السرعة اللحظية للجسيم بعد ٥ ثواني .

اوجد تسارع الجسيم عندما تنعدم سرعته .

---

٦) يتحرك جسيم وفق الدالة ف(ن) = ٢ن ^{٣} – ٩ن + ١٥ حيث ف المسافة بالأمتار، ن الزمن بالثواني. أوجد تسارع الجسيم بعد ٣ ثواني من بدء الحركة.

تطبيقات حياتية للمشتقة

بدأ مستعمرة للبكتيريا بالانقراض مكونة من ١٠٠٠ خلية وكانت دالة الانقراض هي:

م(ن) = ١٠٠٠ − $\frac{٥}{٢}$ن^{٢} ، م(ن) عدد الخلايا البكتيرية ، (ن) الزمن بالأيام.

أ) ما معدل انقراض البكتيريا بعد ١٠ أيام؟

ب) بعد كم يوم سوف تنقرض مستعمرة البكتيريا؟

إذا كانت شدة رد الفعل (ص) لمريض تتوقف على الكمية المعطاة (س) من الدواء وتعطى بالعلاقة:

ص=س^{٢}(٢−س) احسب: أ) معدل التغير اللحظي في شدة رد الفعل عند أي كمية.

ب) معدل التغير اللحظي في شدة رد الفعل عند س=١

المشتقات من الرتب العليا

المشتقة الثانية = مشتقة المشتقة الأولي = ص// = د// (س) = $\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢}$

المشتقة الثالثة = ص/// = د/// (س) = $\frac{ء^٣ ص}{ء س^٣}$

١) إذا كانت المسافة تعطى بالعلاقة : ف = ن^٣ – ٣ ن^٢ + ٥ ن – ١ فأوجد التسارع بعد ثانيتين .

٢) إذا كانت ى(س) = س^ن ، ى‎ً(س) = أ س فإن قيمة أ = ☐ ٢١ ☐ ٢٢ ☐ ٢٤ ☐ ٢٣

٣) إذا كانت د(س) = س^ن ، وكانت دً (س) = ٢٠ س$^{ن-٢}$ ، فإن قيمة ن

٤) إذا كانت ل(٢س)= س×هـَ(س) ، ل(-٢) = لَ (-٢) = ٣ ، فإن هـً (-١)=

٥) إذا كانت د(س) دالة قابلة للاشتقاق ، هـ (س) = $\frac{د(س)}{٥س^٢}$ ، وكانت د(٢) = -١ ، دَ (٢) = ١ ، فإن هـَ (٢) =

٦) إذا كانت هـ (س) قابلة للاشتقاق على ح، ى(س) = ٥-٤س×هـ (س) ، بحيث هـ (٢) = ٣ ، هـَ(٢) = -١ ، فإن ىَ(٢) =

٧) إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = ١ - \text{س}^{٣}$ فإن $\displaystyle \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{د}(٢+\text{هـ}) - \text{د}(٢)}{٢\text{هـ}}$

---

٨) إذا كانت $\text{د}'(\text{س}) = ٥\text{س}^{٣} + ٢$ ، فإن $\displaystyle \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{د}'(\text{س}+\text{هـ}) - \text{د}'(\text{س})}{\text{هـ}}$ عند س=-١

---

٩) إذا كانت $\displaystyle \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{د}'(\text{س}+\text{هـ}) - \text{د}'(\text{س})}{\text{هـ}} = \text{س}^{٢} + ٣\text{س}$ ، فإن $\text{د}'''(١)$

---

١٠) إذا كانت $\text{د}''(\text{س}) = \frac{١}{٢}\text{أ}\,\text{س}^{٢}$ ، وكانت $\displaystyle \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{د}'(٤+\text{هـ}) - \text{د}'(٤)}{\text{هـ}} = ٨$ ، فإن قيمة أ

١١) إذا كانت د(س) = ٢س^{٣} − ٥س^{٢} ، فإن $\underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{د}'(\text{هـ} + ١) - \text{د}'(١)}{\sqrt{\text{هـ} + ١} - ١}$

---

١٢) إذا كانت د(١) = ٣ ، د$'$(١) = ٦ ، فإن $\underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{هـ}^{٢} + ٤\text{هـ}}{\text{د}(١ + \text{هـ}) - \text{د}(١)}$

---

١٣) إذا كانت د(س) = (س - $\sqrt[٣]{٣}$)(س^{٢} + $\sqrt[٣]{٣}$ س + $\sqrt[٣]{٩}$) فإن $\underset{\text{هـ} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{د}(\text{هـ} - ٢) - \text{د}(-٢)}{٣\text{هـ}}$

متعة الرياضيات
مع : أحمد هجرس

قاعدة السلسلة (دالة الدالة)

	صيغة السؤال	طريقة الحل
التعويض	إذا كان : ص = ع^{٧} حيث ع = ٥ س + ٣ فأوجد : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$	١) ص = (٥ س + ٣)^{٧} ٢) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٧ (٥ س + ٣)^{٦} × ٥
قاعدة السلسلة	إذا كان : ص = ع^{٧} حيث ع = ٥ س + ٣ فأوجد : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$	١) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}}$ = ٧ ع^{٦} ، $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ = ٥ ٢) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}}$ × $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ = ٧ ع^{٦} × ٥ = ٧ (٥ س + ٣)^{٦} × ٥
تركيب الدوال	د (س) = س^{٢} + ٣ ، هـ (س) = ٤ س – ٢ فأوجد : (د ٥ هـ)$^{/}$ (س)	١) (د ٥ هـ) (س) = (٤ س – ٢)^{٢} + ٣ ٢) (د ٥ هـ)$^{/}$ (س) = ٢ (٤ س – ٢) × ٤ نستخدم القانون : (د ٥ هـ)$^{/}$ (س) = د$^{/}$ (هـ (س)) × هـ$^{/}$ (س)

١) إذا كان : ص = ع^{٢} – ٧ ع + ٣ ، ع = س^{٣} – ١

فأوجد : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ثم اثبت أن : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + ٩ $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$ - ٦ س^{٥} = صفر

- -

٢) إذا كان : ص = ع^{٢} ، ع = س^{٢} + ٣ فأوجد : $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

٣) إذا كان : ص = س^{٢} ، س = ٣ ل ، ل = ٦ ع فأوجد : $\frac{ء ص}{ء ع}$

---

٤) إذا كان : ص = س^{٢} + ٥ ، س = ٥ ع – ٨ فأوجد : $\frac{ء ص}{ء ع}$

---

٥) إذا كان : ص = س^{٣} + ٣ س + ٢ ، ل = ٢ س – ١ فأوجد : $\frac{ء ص}{ء ل}$ عند س = ١

---

٦) إذا كان : ص = ل^{٢} – ٣ ، ل^{٢} = ٥ – س فأوجد : $\frac{ء ص}{ء س}$

---

٧) إذا كان: ص = (س^{٢} + ٢) (س – ١) ، ع = (س – ٥) (س + ١)

فاثبت أن : ٢ (س – ٢)^{٢} $\frac{ء^{٢} ص}{ء ع^{٢}}$ = ٣ س^{٢} – ١٢ س + ٢

---

٨) إذا كان : س = $\frac{ن}{ن+١}$ ، ص = $\frac{ن+١}{ن}$ اثبت أن : س^{٢} ص$''$ = ٢ ص

٩) إذا كان : ص = ن^٣ – ن ، س = ن^٢ – ١ فأوجد : ص$^{//}$

١٠) إذا كان : ق (س) = س^٢ – ٣ س ، هـ (س) = ٨ فأوجد : (ق ∘ هـ) (٢)

١١) إذا كان : هـ (س + ١) = س^٢ + ١ ، ق (س) = ٨ س^٣ + ٢ فأوجد : (هـ ∘ ق) ($\frac{1}{2}$)

١٢) إذا كان : د (س) = س^٣ – س^٢ – ١ ، هـ (س) = ٢ س – ١ اثبت أن : (د ∘ هـ)$^/$ (١) = ٢

١٣) إذا كان : د (س) = ٣ س – ١ ، هـ (س) ٢ س فأوجد (د ∘ هـ)$^/$ (س)

١٤) إذا كان : هـ (٣) = ٦ ، هـ$^/$ (٣) = ٢ ، د$^/$ (٦) = ٥ فأوجد : (د∘ هـ)$^/$ (٣)

١٥) إذا كان : ق (٣) = ٢ ، ق/ (٣) = ٢ ، هـ (٣) = ١ ، هـ/ (٣) = − ١ ، ق/ (١) = ٤
فأوجد قيمة : (ق ∘ هـ)/ (٣)

١٦) إذا كان : ق (س) = ك س^{٢} + ٣ ، هـ (١) = − ٢ ، هـ/ (١) = ٥ ، (هـ ∘ ق)/ (١) = ٢٠
فأوجد قيمة ك

١٧) باستخدام قاعدة السلسلة ، أوجد ص/ للدالة : ص = (س^{٣} − ٢)^{٧}

١٨) باستخدام قاعدة السلسلة ، أوجد ص/ للدالة : ص = (٥ س^{٢} − ٦)^{٥}

١٩) إذا كان د(س) = |٢س - ٢| ، هـ(س) = { س^{٢} - ٣ ، س < ١ ؛ ٤س + ١ ، س ≥ ١ } أوجد (د ∘ هـ)′ (٢)

٢٠) إذا كان $ق(٣س) = ٣س^٢ + ١٢س$ ، أوجد $قَ(٣)$

٢١) إذا كانت $د(س) = س^٢+١$ ، فإن $(دod)َ(-١)$

٢٢) إذا كانت $(هـ o د)َ(٣)= ١٥$ ، حيث $هـ(س) = س^٢-٩$، $دَ(٣)= ٥$ ، فإن $د(٣)=$

٢٣) إذا كان $ق(س)= س^٢+٣$ ، فإن قيمة $(قَ o ق)َ(١)$

٢٤) إذا كانت $ص=د(ع)$ ، $ع= د(س)$ وكان $\frac{ءع}{ءص} = ٤$ ، $\frac{ءع}{ءس} = ٢$ ، فإن $(ص o ع)َ(س)$

الاشتقاق الضمني

ص^٢ مشتقتها ٢ ص ص$^/$

٣ ص مشتقتها ٣ ص$^/$

مع : أحمد هجرس

خطوات إيجاد المشتقة الضمنية : ١) بتفاضل الطرفين بالنسبة إلى س .

٢) نضع $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ في طرف & س ، ص في طرف .

٣) نأخذ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ مشترك .

٤) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{البعيد}}{\text{القريب}}$

تمارين

أوجد المشتقة الأولى لكل مما يأتى :

١) ٢ ص^٢ – س^٢ = ٥ س ص

٢) ٢ س ص + ٣ ص – س + ١ = ٠

٣) س^٣ + ٢ س^{٢}ص – ٥ + ٢ ص^٣ = س ص^٢

٤) س^٢ + ٢ ص^٢ = ١ + ٢ س ص

٥) س^٣ + ص^٣ + ٤ = ٠

٦) س^٢ – ٣ س ص + ص^٣ = ٥

٧) أوجد ميل المماس للمنحنى : $س^٢ + ص^٢ + ٦ س - ٢ ص - ٦ = ٠$

عند النقطة (- ٣ ، ٥) وماذا نستنتج ؟

٨) أوجد قياس الزاوية التي يصنعها المماس للمنحنى : $س^٢ + ص^٢ - ٤ = ٠$

مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة (١ ، ١)

٩) أوجد قيم س التي يكون عندها المماس للمنحنى : $٣ ص^٥ = س^٣ - ٥ س^٢ + ٣ س$ موازياً لمحور السينات

١٠) أوجد النقط التي تقع على المنحنى : $ص = \frac{-٢ س}{٢ ص}$ ليكون المماس عمودي على المستقيم : س - ٣ ص = ٠

١١) أوجد معادلة المماس والعمودي للمنحنى : $س^٢ + ص^٢ - ٤ س + ٢ ص = ٢٠$

عند النقطة (- ١ ، ٣)

١٢) أوجد معادلة المماسات للمنحنى : $ص = س^٣ - ٣ س + ٥$ والموازية للمستقيم : $٩ س - ص = ١$

١٣) أوجد معادلتي المماسين للمنحنى : $س^٢ + ص^٢ = ٥٢$ الموازيين للمستقيم : $٢ س + ٣ ص = ك$

١٤) إذا كان : $ص^٢ = ٢ س^٢ - س^٣$ فاثبت أن : $ص ص'' + ص'^٢ + ٣ س = ٢$

١٥) إذا كان : ص = $\frac{٣ س + ١}{(س - ١)^٢}$

فاثبت أن : (س – ١)^٢ ص$^{//}$ + ٤ (س – ١) ص$^/$ + ٢ ص =

١٦) إذا كان : (ص – ١)^٦ = ١٢ س فاثبت أن : (ص – ١) ص$^{//}$ + ٥ (ص$^/$)^٢ = ٠

١٧) إذا كان : س ص – ٣ ص = ٧ س + ١٥ فاثبت أن : (س – ٣) ص$^{//}$ + ٢ ص$^/$ = صفر

١٨) إذا كان : س ص + س^٢ = ٢ ، س ≠ ٠ فاثبت أن : س ص$^{//}$ + ٢ ص$^/$ = – ٢

١٩) إذا كان : س = س ص + ٢ ص   فاثبت أن : ص$^{\prime\prime}$ (س + ٢) + ٤ ($\frac{ص}{س}$)^{٢} = صفر

---

٢٠) إذا كان : س ص^{٢} = (س + ص)^{٣} فاثبت أن : ص$^{\prime}$ = $\frac{ص}{س}$

---

٢١) إذا كان : (س ص + ١)^{٢} س ص = ١   فاثبت أن : ص + س ص$^{\prime}$ = ٠

---

٢٢) إذا كان : س^{٣} + ص^{٣} = ١   فاثبت أن : ص^{٥} ص$^{\prime\prime}$ + ٢ س = صفر

مع : أحمد هجرس

٢٣) إذا كانت ص = د($\sqrt{\text{س}}$) ، ص$'$ = ٢س^{٤}+٤س^{٢}

فاثبت أن: د$'$($\sqrt{\text{س}}$) = ٤$\sqrt{\text{س}^{٩}}$ + ٨$\sqrt{\text{س}^{٥}}$

- -

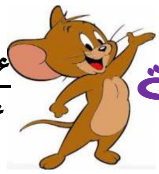
٢٤) إذا كانت ص= د(س) ، ع = $\frac{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}}{\text{ص}}$ ، فاثبت أن: ص × $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ع}}{\text{ء}\text{س}^{٢}}$ + ٢ × $\frac{\text{ء}\text{ص}}{\text{ء}\text{س}}$ × $\frac{\text{ء}\text{ع}}{\text{ء}\text{س}}$ + ع × $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ء}\text{س}^{٢}}$ = $\frac{-٢}{٩\text{ص}^{٢}\text{ع}^{٢}}$

- -

٢٥) إذا كانت ص= د($\sqrt[٣]{\text{س}}$) ، وكان ص$'$ = ٥س^{٢} + س ، فاثبت أن: د$'$($\sqrt[٣]{\text{س}}$) = ١٥$\sqrt[٣]{\text{س}^{٨}}$ + ٣ $\sqrt[٣]{\text{س}^{٥}}$

متعة الرياضيات

مع : أحمد هجرس



المعدلات الزمنية المرتبطة

$\frac{\text{ء س}}{\text{ء ن}}$ = معدل تغير س بالنسبة للزمن ن .

وكذلك $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء ن}}$ & $\frac{\text{ء ع}}{\text{ء ن}}$

المعلومة	الإستفادة
نصب (يتسرب) الماء في اسطوانة	نق ثابت ، ع يتغير
نصب (يتسرب) الماء في مخروط	نق يتغير ، ع يتغير
إذا كان المتغير يزداد (يتمدد) (يبتعد) (يصب) بزيادة ن	المعدل الزمنى يكون موجب
إذا كان المتغير ينقص (ينكمش) (يقترب) (يتسرب) بزيادة ن	المعدل الزمنى يكون سالب

خطوات الحل : # نكتب علاقة تربط بين المتغيرات { إذا كانت غير معطاة }

بإجراء تفاضل الطرفين بالنسبة للزمن ؟

نعوض بالمعطيات .

الأشكال الهندسية

	المساحة	المحيط	ملاحظات
المثلث	$\frac{1}{2}$ القاعدة × الارتفاع	مجموع أطوال أضلاعه	المساحة = $\frac{1}{2}$ أ/ × ب/ × جا حـ
المستطيل	الطول × العرض	٢ (الطول + العرض)	
المربع	ل٢ = $\frac{1}{2}$ (القطر)٢	٤ ل	ل : طول الضلع
شبة المنحرف	$\frac{1}{2}$ (ل١ + ل٢) × ع	مجموع أطوال أضلاعه	ل١ // ل٢
متوازى الأضلاع	القاعدة × الارتفاع	٢× مجموع ضلعين متجاورين	
المعين	القاعدة × الارتفاع	٤ × طول الضلع	المساحة = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب القطرين
القطاع الدائرى	$\frac{1}{2}$ ل × نق	ل + ٢ نق	ل = هـ ء × نق
الدائرة	π نق٢	٢ π نق	

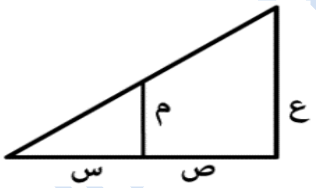
المجسمات

	المساحة الجانبية	المساحة الكلية	الحجم
المنشور القائم	محيط القاعدة × ع	الجانبية + مساحتي القاعدتين	مساحة القاعدة × ع
متوازي المستطيلات		٢(س ص + س ع + ص ع)	س ص ع
المكعب	٤ ل^{٢}	٦ ل^{٢}	ل^{٣}
الإسطوانة	٢ π نق ع	٢ π نق ع + ٢ π نق^{٢}	π نق^{٢} ع
الكرة	مساحة سطحها = ٤ π نق^{٢}		$\frac{4}{3}$ π نق^{٣}
المخروط	π نق ل	π نق ل + π نق^{٢}	$\frac{1}{3}$ π نق^{٢} ع

نظرية فيثاغورس : (الوتر)^{٢} = (ضلع القائمة الأول)^{٢} + (ضلع القائمة الثاني)^{٢}

(البعد بين نقطتين)^{٢} = (فرق السينات)^{٢} + (فرق الصادات)^{٢}

تشابه المثلثات: $\frac{ع}{م} = \frac{س+ص}{س}$



١) تتحرك نقطة على المنحنى س^{٢} + ص^{٢} – ٥ س + ٣ ص – ٦ = ٠

وكان معدل تغير احداثيها السيني بالنسبة للزمن عند النقطة (١ ، ٢) = ٣ أوجد معدل تغير احداثيها الصادي .

٢) تتحرك نقطة (س ، ص) على المنحنى ص = س^{٢} + ٤ س – ٣

عين موضع النقطة عند اللحظة التي يكون فيها سرعة احداثيها الصادي ضعف سرعة احداثيها السيني .

٣) في لحظة ما كان بعدى مستطيل ٨ سم ، ٦ سم فإذا كان البعد الأول ينقص بمعدل ١ سم / دقيقة ،
وكان البعد الثاني يزداد بمعدل ٢ سم / دقيقة . أوجد @ معدل تغير المساحة عند تلك اللحظة .
@ معدل تغير المساحة بعد دقيقتين .

---

٤) سلم طولة ٥ م يرتكز بأحد طرفية على حائط رأسي ، وبطرفة الآخر على أرض أفقية ،
فإذا انزلق السلم وكان الطرف السفلى يبتعد عن الحائط بمعدل $\frac{1}{4}$ م/ث
احسب معدل هبوط الطرف الآخر عندما يكون السلم مائلاً على الأرض بزاوية قياسها ٦٠ ˚

٥) ونش رأسي طولة ٦ م ، يتحرك بسرعة ٥ م / ث في اتجاه مصباح على ارتفاع ١٦ م

أوجد : @ معدل تحرك نهاية ظل الونش .

@ معدل تغير طول ظل الونش .

@ معدل تغير بعد نهاية الونش العليا عن المصباح عندما يكون على بعد ١٠ م

٦) كرة جوفاء يزداد نصف قطرها الداخلي بمعدل ١ سم / ث بحيث يبقى حجم المادة ثابت وذلك عند اللحظة التى يكون فيها نصفي قطريها ٣ سم ، ٩ سم

أوجد : @ معدل تغير نصف قطرها الخارجي .

@ معدل تغير مساحة سطحها الخارجي .

@ معدل تغير سمكها .

٧) قمع على هيئة مخروط دائري قائم ارتفاعه ٣٠ سم ونصف قطر قاعدته ١٢سم مثبت بحيث رأسه لأسفل ومحورة رأسي ، يصب فيه الزيت بمعدل ٢٠ سم^{٣} / ث بينما يتسرب الزيت من ثقبة بمعدل ٨ سم^{٣} / ث

أوجد معدل ارتفاع الزيت في القمع عندما يصل ارتفاع الزيت إلى $\frac{1}{3}$ ارتفاع القمع .

---

٨) متوازي مستطيلات من المعدن قاعدته مربعة ، وارتفاعه ثلاثة أمثال طول ضلع قاعدته ، يتمدد بالتسخين احسب معدل الزيادة في حجمة عندما يزداد طول ضلع قاعدته بمعدل ٢سم/ث ويكون طولها ٢ سم .

---

٩) إذا كان حجم مكعب يزداد بمعدل ٣ سم^{٣} / ث أوجد : @ معدل زيادة طول ضلعة .

@ معدل زيادة مساحة أحد أوجهه . وذلك عندما يكون طول ضلعة ٦ سم

١٠) تتمدد قطعة معدن على شكل متوازي مستطيلات طول ضلع قاعدته يزيد عن عرضة٢ سم وارتفاعها ثلاثة أمثال عرضها ، فإذا كان الحجم يزداد بمعدل ٦، سم٣ / د عندما يزداد العرض بمعدل ٠١، سم / د

@ فأوجد أبعاد قطعة المعدن .

---

١١) بدأت سفينة الحركة شرقاً الساعة العاشرة صباحاً بسرعة ٢٠ ميل / ساعة ، وبعد ساعتين بدأت سفينة أخري تتحرك جنوباً من نفس النقطة بسرعة ٣٠ ميل / ساعة ، أوجد تباعد السفينتين بعد ٣ ساعات من انطلاق السفينة الثانية

---

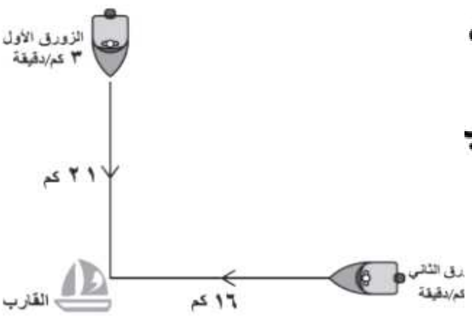
١٢) إذا كان المنطاد أ يبعد عن المنطاد ب مسافة أفقية قدرها ٤ متر ، انطلقا المنطادان رأسياً لأعلي بسرعة ٢ م/ث ، ١ م/ث علي الترتيب ،

أوجد معدل التغير في المسافة بين المنطادين بعد مرور ٣ ثوان من بدء الانطلاق .

١٣) مستطيل طوله س = ١٩سم ، وعرضه ص = ٧سم. إذا كان طول المستطيل يتناقص بمعدل ١سم/ث ، وعرضه يتزايد بمعدل ٢سم/ث ، فاحسب معدل التغير في مساحة المستطيل في اللحظة التي يكون فيها المستطيل مربعاً.

١٤) مثلث متطابق الضلعين ارتفاعه يساوي خمسة أمثال طول قاعدته فإذا كان طول القاعدة يزداد بمعدل ٠,٠٤سم/ث اوجد معدل الزيادة في الارتفاع ثم اوجد معدل الزيادة في المساحة عندما تكون طول القاعدة ١٠سم.

١٥) تحرك زورقا إنقاذ نحو قارب، حيث يبعد القارب عن الزورق الأول ٢١ كم جنوبًا، وعن الزورق الثاني ١٦ كم غربًا، إذا كان معدّل اقتراب كلاً من الزورقين من القارب ٣ كم/دقيقة ، ٢ كم/دقيقة على الترتيب.
أوجد معدّل تغيّر المسافة بين الزورقين بعد مُضي ٦ دقائق من لحظة انطلاقهما.



متعة الرياضيات
مع : أحمد هجرس

فترات التزايد والتناقص

تحديد إشارات الدوال

الدالة	خطوات الحل		خط الأعداد
الثابتة			دائما مثل إشارة العدد
الخطيه			مثل إشارة س ـــ ٢ ـــ عكس إشارة س
التربيعية	١) نوجد أصفار الدالة ٢) نرسم خط الأعداد للمشتقة ٣) نحدد إشارة المشتقة في كل فترة	لها حلان	مثل $س^{٢}$ ـــ ٥ ـــ عكس $س^{٢}$ ـــ ٢ ـــ مثل $س^{٢}$
		لها حل واحد	مثل إشارة $س^{٢}$ ـــ ٢ ـــ مثل إشارة $س^{٢}$
		ليس لها حل	مثل إشارة $س^{٢}$

فإذا كانت الإشارة موجبة ، فإن الدالة تكون تزايدية في هذه الفترة (ميل المماس للمنحنى موجب).

وإذا كانت الإشارة سالبة ، فإن الدالة تكون تناقصية في هذه الفترة (ميل المماس للمنحنى سالب).

ابحث فترات التزايد والتناقص للدالة :

١) د (س) = ٣ س - ٢

٢) د (س) = - ٥ س + ٤

٢) د (س) = $س^{٢}$ – ٤ س + ٣

٤) د (س) = ٥ – ٤ س – $س^{٢}$

٥) د (س) = س^{٣} – ٣ س^{٢} + ٢

٦) د (س) = س^{٣} – ٣ س^{٢} + ١٢ س + ٢

٧) د (س) = س^{٣} + ١٢ س – ١٠

٨) د (س) = س^{٣} - ٣ س^{٢} – ٩ س + ١

٩) ص = س^{٣} (٤ – س)

١٠) ص = س^{٣} (س – ١)^{٢}

١١) ص = $\frac{\text{س}}{\text{س - ٢}}$

١٢) ص = $\frac{\text{س}}{\text{س + ١}}$

١٣) ص = ٢ – | س – ١ |

١٤) ص = ٣ + | س – ٢ |

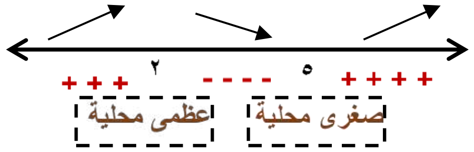
١٥) ص = { س^{٢} + ١ ، س ≤ ٠
            ٢ س – ٣ ، س > ٠

١٦) د(س) = { -٣س+٥ ، س < -١
              ٥ ، -١ ≤ س ≤ ١
              -س^{٢} ، س > ١

القيم (القصوى) العظمى والصغرى المحلية

مع : أحمد هجرس

الحالة الأولى (باستخدام المشتقة الأولى) :



١) نكتب ص = ...

٢) نوجد النقط الحرجة (لابد أن تنتمي للمجال المحدد في المسألة)

٣) نضع ص/ = صفر

لإيجاد قيم س ثم نعوض في المعادلة الأصلية لإيجاد قيم ص { بشرط أن تكون قيم س تنتمى للفترة }

٤) نرسم خط الأعداد ونحدد إشارة ص/

النقطة (٢ ،) عظمى محلية ، النقطة (٥ ،) صغرى محلية .

الحالة الثانية (باستخدام المشتقة الثانية) :

١) ص = ...

٢) ص/ = ...

٣) ص// = ...

٤) نضع ص/ = صفر لإيجاد س١ { قيم س التي يكون عندها نقاط حرجة للدالة }

د// (س١) موجبة تكون القيمة صغرى محلية

د// (س١) سالبة تكون القيمة عظمى محلية

د// (س١) = صفر تكون هذه الطريقة لا تصلح

إيجاد النقط الحرجة : ١) عندها ص/ = صفر أي أن مماس المنحنى عندها // محور السينات

٢) عندها ص/ = غير موجودة

الحالة	النقطة الحرجة
الدالة الكسرية (النسبية)	نضع البسط = صفر عند أصفار المقام يوجد نقط حرجة
الجذر التربيعي	عند أصفار ما تحت الجذر
دالة الصحيح	عند النقاط الطرفية للفترات
دالة المطلق	عند أصفار المطلق
الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة	إذا كانت : المشتقة اليمني ≠ المشتقة اليسري

ملحوظة هامة : # لابد من وجود النقطة الحرجة داخل المجال المحدد في المسألة .

عند بداية ونهاية الفترة المحددة تكون نقاط حرجة .

١) أوجد النقط التي عندها قيم عظمى أو صغرى محلية للدالة : ص = ٢ س^{٣} – ٣ س^{٢} – ١٢ س – ٥ ثم حدد نوعها .

٢) ابحث نقط القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة ص = س$^{\frac{1}{3}}$

٣) إذا كانت : ص = س^{٢} – ب س + ١ لها نقطة حرجة عند س = ٢ أوجد قيمة ب ثم حدد نوع النقطة الحرجة

أوجد النقط الحرجة للدالة : د(س) = $\sqrt{\text{س}^{٢} -٤\text{س}}$

ابحث النقاط الحرجة باستخدام طريقة المشتقة الثانية

٤) ص = س^{٤} + ١

٥) ص = ٣ س^{٥} + ٢ س^{٣} – ١

متعة الرياضيا
مع : أحمد هجرس

٦) $ص = \frac{س^٢ - ١}{س^٢ + ١}$

٧) $ص = \frac{4س - 3}{س^٢ - ١}$

٨) ص = ٥ − | س + ٣ |

٩) د(س) = [س + ٢] في الفترة [٠ ، ٣]

١٠) $ص = \begin{cases} س^٢ + ١ & س \le ٠ \\ ٢س + ١ & س > ٠ \end{cases}$

١١) $ص = \begin{cases} ٢س - ١ & س \le ٣ \\ ٨ - س & س > ٣ \end{cases}$

١٢) $د(س) = \begin{cases} س^٢ - ٢س - ١ & س \le ٠ \\ -(س - ١)^٢ & ٠ < س < ٢ \\ س - ٣ & س \ge ٢ \end{cases}$

١٣) $ص = \begin{cases} س + ١ & س < -١ \\ س^٢ - ١ & س > -١ \end{cases}$

١٤) إذا كانت $د(س) = س^٢ + \frac{ك}{س}$ فعين قيمة ك بحيث يكون للدالة نقطة حرجة عند س = ٢
ثم بين ما إذا كانت هذه النقطة عظمى أو صغرى محلية أو ليست كذلك .

القيم العظمى و الصغرى المطلقة ورسم المنحنيات

القيم القصوى المطلقة يمكن أن تحدث عند أطراف الفترات أو داخلها بينما القيم القصوى المحلية تحدث داخل الفترات فقط.

خطوات الحل : ١) نفس خطوات القيم العظمى والصغرى المحلية .

٢) نعوض عن بداية الفترة ونهايتها في المعادلة الأصلية :

أكبر قيمة لـ ص هي عظمى مطلقة .

أصغر قيمة لـ ص هي عظمى مطلقة .

لرسم منحني الدالة :

١) نسجل في جدول جميع النقاط التي حصلنا عليها (عظمى وصغرى محليه ، عظمى وصغرى مطلقة)

٢) نوجد نقط التقاطع مع محور السينات والصادات .

٣) نرسم جميع النقاط علي المحاور .

أوجد القيمة العظمى المطلقة والقيمة الصغرى المطلقة للدوال الآتية :

١) ص = ١ + ١٢ س – س^{٣} في الفترة [١ ، ٣] ثم ارسم منحني الدالة

٢) ص = س^{٤} – س^{٢} + ١ في الفترة [-١ ، ١] ثم ارسم منحني الدالة

٣) ص = ٣ – ٥ س – س^{٢} في الفترة [-٤ ، ٣] ثم ارسم منحني الدالة

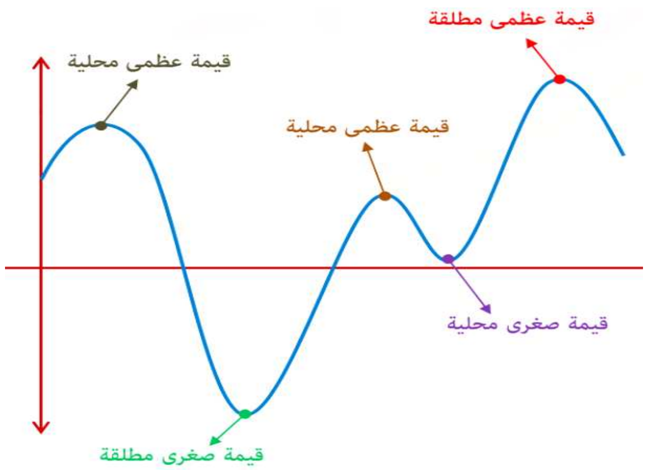
٤) ص = س | س – ٣ | في الفترة [٠ ، ٤]

٥) ص = (س + ٢) (| س |) في الفترة [-٣ ، ٢]

٦) ص = $\frac{\text{س}^2 + \text{س} + 1}{\text{س}^{٢} - \text{س} + ١}$ في الفترة [٠ ، ٢]

٧) ص = س + $\frac{1}{\text{س} + 1}$ في الفترة [-$\frac{1}{2}$ ، ٣]

٨) ص = $\sqrt[٣]{(\text{س} - ١)^{٢}}$ في الفترة [٠ ، ٩]



٩) ص = { ٢ س + ٣ ، س < ١ ؛ س^{٢} + ٤ ، س ≥ ١ } في الفترة [-٢ ، ٢]

تطبيقات على القيم القصوى

متعة الرياضيا مع : أحمد هجرس

كيف نعرف أن المسألة تتبع هذا الدرس ؟ نجد أكبر ما يمكن ، أصغر ما يمكن ، أكبر مساحة ، أصغر حجم ، ....

طريقة الحل : ١) نعبر عن المطلوب كدالة فى متغير واحد (باستخدام المعلومات المساعدة من المعطيات)

٢) نوجد المشتقة الأولي (بالنسبة للمتغير الموجود)

٣) نضع المشتقة = ٠

٤) نوجد قيم المتغير ونأخذ منها الذي ينتمي لمجال الدالة

٥) نوجد المشتقة الثانية

٦) نعوض بقيمة المتغير في المشتقة الثانية ، فإذا كان الناتج موجب (أصغر ما يمكن)

وإذا كان الناتج سالب (أكبر ما يمكن)

١) أوجد عددين مجموعهما ٢٠ وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن .

٢) صفيحة معدنية رقيقة مربعة الشكل طول ضلعها ١٠ سم ، قطع من أركانها أربعة مربعات متساوية ثم ثنى الجزء الباقي على شكل علبة بدون غطاء . أوجد طول ضلع المربع المقطوع بحيث يكون حجم العلبة أكبر ما يمكن .

٣) أوجد أقرب نقطة إلى النقطة (٣ ، ١) وتقع على المنحنى $ص^{٢}$ – ٢ ص + ٤ س – ٢٣ = ٠

٤) نافذة على هيئة مستطيل يعلوه مثلث متساوي الساقين تنطبق قاعدته على أحد بعدى المستطيل ، فإذا كان ارتفاع المثلث $\frac{3}{8}$ طول قاعدته & محيط النافذة ١٢٠ سم فأوجد بعدى المستطيل التي تجعل مساحة النافذة أكبر ما يمكن .

٥) إذا كانت تكاليف تسيير عربة بخارية تتكون من جزئين أحدهما ثابت = ١٠٠ والآخر ثمن الوقود الذى يتناسب مع مربع السرعة فإذا علم أنه لتشغيل العربة بسرعة ٢٥ كم / س تلزم تكلفة قدرها ١٢٥

فأوجد السرعة التي يجب أن تسير بها العربة حتى تكون تكلفة قطع الكيلومتر الواحد أقل ما يمكن .

٦) رجل في قارب عند نقطة حـ تبعد ٥ كم عن أقرب نقطة أ على شاطئ مستقيم ويرغب في الوصول إلى نقطة ب على نفس الشاطئ تبعد ٦ كم من أ فإذا علم أن الرجل يستطيع أن يجدف بسرعة منتظمة ٢ كم / س وأن يمشى على الشاطئ بسرعة منتظمة ٤ كم / س أوجد أين يرسو ليصل إلى ب في أقل وقت ممكن .

٧) مصنع سيارات يبيع س سيارة من انتاجه أسبوعياً بسعر السيارة ع ريال حيث ع = ٥٠٠ – ٧ س وكانت التكلفة الكلية للسيارات هي ت = ٢٧٠٠ + ٣٦ س + $\frac{1}{4}$ $س^{٢}$ ريال اوجد قيمة س التي تجعل المصنع يحقق أكبر ربح أسبوعي .

ملحوظة : الربح = ثمن البيع – التكلفة حيث ثمن البيع = السعر × عدد السيارات

١) مصنع ينتج س من أجهزة الراديو في اليوم ، فإذا كانت التكاليف الكلية لهذه الأجهزة تساوي ($\frac{1}{4}$ س^2 + ٢٥س + ٢٥) ريالاً، ويباع الجهاز الواحد بسعر (١٠٠ - $\frac{1}{2}$ س) ريال ، فأوجد الإنتاج اليومي من الأجهزة ليكون المكسب أكبر ما يمكن. ثم أوجد هذا المكسب.

٢) مصنع مركبات كيماوية يبيع س علبة من مركب حمضي بسعر ٤٠ ريال لكل علبة ، فإذا كانت تكلفة إنتاج س علبة من المركب هي ت(س) = ٠,٠١س^2 + ٢٠س + ٤٠٠٠٠٠ ، فأوجد عدد العلب التي يجب ان ينتجها المصنع للحصول على أعلى ربح ممكن.

٣) شركة تنتج عدد ل من أجهزة الهاتف في اليوم. إذا كانت التكاليف الكلية لصناعة هذه الأجهزة تساوي ($\frac{1}{3}$ ل^3 + ٣٠ل) ريالاً. ويباع الجهاز الواحد بسعر (م - $\frac{ل}{2}$) ريالاً . فإذا كان أكبر مكسب حققته الشركة عندما أنتجت ١٢ جهاز في أحد الأيام، فأوجد قيمة م ، ثم أحسب المكسب بالريال في ذلك اليوم.

٤) أوجد عددين موجبين بحيث يكون حاصل ضرب أحدهما في مربع الآخر أكبر ما يمكن ، مع العلم بان مجموع العددين ٣٠.

٥) أوجد عددين موجبين مجموعهما ١٢ بحيث يكون مجموع مكعبيهما أصغر ما يمكن.

٦) ثلاثة أعداد طبيعية موجبة مجموعها ٢٦ ، إذا كان العدد الثاني هو ثلاث أضعاف العدد الأول. فأوجد هذه الأعداد بحيث يكون مجموع مربعاتهم أصغر ما يمكن.

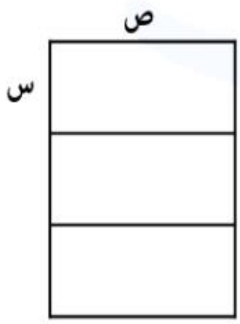
٧) يريد خياط ملابس نسائية تقسيم قطعة قماش طولها ١٢م إلى قطعتين لعمل فستان بحيث يكون مربع طول إحدى القطعتين مضافاً إليه ثلث مكعب طول القطعة الأخرى أصغر ما يمكن. أوجد طول كل من القطعتين

٨) سلك طوله ٥م يراد تقسيمه إلى جزئين ، بحيث يكون مجموع مربع الجزء الأول وأربعة أمثال مكعب الجزء الاخر أقل ما يمكن. فما طول كل جزء؟

٩) قطعة أرض مستطيلة الشكل محاطة بسور طوله ١٢٠م. أوجد بُعديها إذا كانت مساحة سطحها أكبر ما يمكن.

١٠) مستطيل محيطه ٣م ، أوجد بُعديه حتى تكون مساحتها أكبر ما يمكن.

١١) صاحب مزرعة اغنام لديه ٣٦٠م من السلك الشائك يريد عمل ٦ حظائر مستطيلة الشكل ومتساوية المساحة كما بالشكل المقابل جد أكبر مساحة للحظائر يمكن عملها.



١٢) صاحب مزرعة لديه سلك طوله ٦٠٠م ، يريد أن يقسم به ثلاث مناطق زراعيه مستطيلة الشكل ومتساوية المساحة في مزرعته كما هو موضح في الشكل. أوجد أكبر مساحة للمنطقة الواحدة يمكن أن يستخدم فيها السلك.

١٣) متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل مجموع أطوال جميع أحرفه تساوي ١٢٠سم. أوجد أبعاد متوازي المستطيلات التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن.

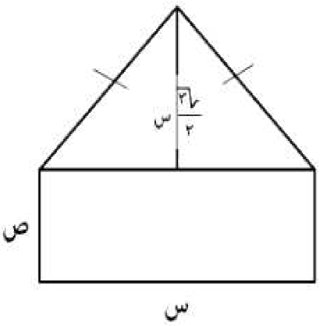
١٤) صفيحة معدنية على شكل مستطيل بعداه ١٠ ، ١٦ قُطعت من أركانه الأربعة ٤ مربعات متساوية ثم ثُنيت الأجزاء البارزة لتكون صندوقاً على شكل متوازي مستطيلات بدون غطاء. أوجد طول ضلع المربع المقطوع ليكون حجم الصندوق أكبر ما يمكن.

١٥) صحيفة من الورق مستطيلة الشكل مساحتها ٣٢سم^{٢} يراد طباعة إعلان عليها ، فإذا كان عرض كل من الهامشين في رأس الورقة أسفلها يساوي سنتيمتر واحد ، وفي كل من الجانبين $\frac{١}{٢}$ سم. فأوجد بعدي الورقة بحيث تكون المساحة المطبوعة أكبر ما يمكن.

١٦) ملعب على شكل مستطيل ينتهي بنصفي دائرة، فإذا كان محيط الملعب ٢٤٠٠م، فأوجد نصف قطر الدائرة لتكون المساحة أكبر ما يمكن.

١٧) مضمار للجري على شكل مستطيل ينتهي بنصفي دائرة ، فإذا كان محيطه ٤٠٠م ، فأوجد نصف قطر الدائرة لتكون المساحة اكبر ما يمكن.

١٨) نافذة على شكل مستطيل يعلوه نصف دائرة فإذا كان محيط النافذة ٥م فأوجد بعدي المستطيل بحيث تسمح النافذة بدخول أكبر كمية من الضوء.



١٩) نافذة على شكل مستطيل يعلوه مثلث متطابق الأضلاع كما هو موضح بالشكل،

إذا علمت أن محيط النافذة يساوي($١٢-٢\sqrt{٣}$)متر، فأوجد بعدي المستطيل لتكون النافذة اكبر ما يمكن.

٢٠) طريق منحني معادلته $ص=\sqrt{س^{٢}-٢س+٥}$ ، يقف رجل عند النقطة (٥ ، ٠) ، أوجد أقصر مسافة يمشيها الرجل ليصل لنهاية الطريق.

٢١) أوجد أقرب نقطة إلى النقطة (٣ ، ١) وتقع على المنحنى: $ص^{٢}-٢ص+٤س-٢٣=٠$

٢٢) أرض زراعية تسع ٢٥ شجرة ويكون المحصول ٤٥٠ ثمرة لكل شجرة فإذا زاد عدد الأشجار ينقص المحصول عن كل شجرة ١٠ ثمرات ، أوجد عدد الأشجار التي يمكن إضافتها بحيث يكون المحصول أكبر كمية ممكنة.

٢٣) مكتبة تبيع ٢٠٠كتاب من نوع واحد ، وتكسب في الكتاب الواحد ٣ريالات ، فإذا زاد عدد الكتب المباعة عن هذا القدر فإن المكتبة تُعطي خصماً تصاعدياً يقل بمقدار ١٠بيسات لكل كتاب زيادة. أوجد عدد الكتب التي تبيعها المكتبة لتحقيق اكبر ربح ممكن.

٢٤) أوجد أكبر حجم لأسطوانة دائرية قائمة إذا كانت المساحة الكلية لسطحها تساوي ٢٤πسم^{٢}.

٢٥) في أحد المصانع يراد صناعة خزان قاعدته مربعة وبدون غطاء بحيث يتسع لأربعة أمتار مكعبة من الماء ، في حين تتكلف المادة التي يُصنع منها الخزان ٥ريالات للمتر المربع الواحد. أوجد أبعاد الخزان التي تجعل تكلفته أقل ما يمكن.

٢٦) حوض لتربية الأسماك على شكل متوازي مستطيلات بعدا قاعدته هما س ، ص وارتفاعه ٢م وحجمه ٢٠٠م^{٣} ، نريد تبليطه من الداخل ، فإذا كانت تكاليف المتر المربع من الجوانب ٣ريالات ومن القاعدة ٥ريالات.
اوجد أبعاد الحوض لتكون تكاليف التبليط أقل ما يمكن.

مراجعة الوحدة الثانية

أسئلة اختبارات الأعوام : ٢٠٠٩ – ٢٠١٩

متعة الرياضيات

اختبار ١٨-١٩ دور أول

٥) إذا كانت د(س) = س^{٢} – ٢س ، هـ(س) = س + ١ وكانت ق(س) = (د ه هـ) (س) فإن متوسط معدل تغير الدالة ق على الفترة [١ ، ٢] يساوي :

▭ ٧ ▭ ٣ ▭ ٢ ▭ ١

٦) إذا كانت ص = ع^{٢} + ٤ ع - ١ ، س = ٢ ع - ١ فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عند س = ١ تساوي :

▭ ١٢ ▭ ٦ ▭ ٣ ▭ ٢

٧) إذا كانت العلاقة بين سرعة جسيم ع(ن) والمسافة المقطوعة ف(ن) خلال الزمن ن بالثواني هي ع(ن) × ف(ن) - ١ = ن ، فإذا كانت ع(١) = ٢ م/ث فإن تسارع الجسيم عند ن = ١ يساوي :

▭ -٣ ▭ $\frac{١}{٢}$ ▭ ١ ▭ ٣

٨) إذا كان المستقيم ص = ٥ س + جـ مماسا لمنحنى الدالة د(س) = ٢س^{٢} + س -٣

فإن قيمة جـ تساوي :

▭ ٥ ▭ ٣ ▭ ١ ▭ -٥

٩) إذا كانت د(س) = س×هـ(س^{٢} – ٣س + ٢) حيث هـ(٢) = ٤ ، هـَ(٢) = -١ فإن دَ(٠) تساوي :

▭ -٤ ▭ -١ ▭ صفر ▭ ٤

١٠) إذا كانت د(س) = س^{٣} + ٢س - ١ ، نهـــا$_{هـ \to ٠}$ $\frac{هـ^{٢} + ٢هـ}{دَ(١ - م هـ) - دَ(١)} = \frac{١}{٦}$

فإن قيمة م تساوي :

▭ ٢ ▭ -٢

▭ ١ ▭ -١

١٨) يتسرب غاز من بالون كروي فإذا كان معدل التغير في نصف قطر البالون ٢ سم/ث ، فأوجد معدل التغير في حجم البالون في اللحظة التي تكون مساحة سطحه تساوي ١٤٤ π سم^{٢}/ث .

(علما بإن مساحة سطح الكرة = ٤ π نق^{٢} ، حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣})

١٩) أوجد فترات التزايد و التناقص لمشتقة الدالة د(س) = س^{٤} -٤س^{٣} + ٥

٢٠) أوجد معادلة المماسين المرسومين من النقطة (٠ ، ٧) للدائرة س^{٢} + ص^{٢} -٤ص -٥ = ٠

٢١) أوجد احداثيات النقط التي تقع على المنحنى س^{٢} = ٤ص + ٩ وتكون أقرب ما يمكن للنقطة (٠ ، ٢)

٢٢) إذا كانت د(س) = (س^{٢} + ١)^{٣} فأوجد دً(١)

٢٣) إذا كانت ص = $\sqrt{(س^{٣} - ٨)^{٢}}$ ، س ≥ ٢ فأثبت إن ٢صَ = ٩س^{٢} $\sqrt[٣]{ص}$

متعة الرياضيات

اختبار ١٧-١٨ تجريبي

٥) قذف جسيم رأسيا إلى أعلى حسب العلاقة ف(ن) = ١٢٠ ن − ٥ ن^{٢} ، فإن الزمن الذي يحتاجه الجسيم وهو صاعد حتى تبلغ سرعته نصف السرعة التي قذف بها يساوي :

- ٤
- ٦
- ٦٠
- ١٢٠

٦) إذا كان ص = د(س) ، Δ ص = ٣ س^{٢} Δ س − (Δ س)^{٢} ، فإن $\underset{هـ \leftarrow ٠}{نـهـا} \frac{هـ}{د(٢+هـ) - د(٢)}$ يساوي:

- ١٢
- −١٢
- $\frac{١}{١٢}$
- $\frac{-١}{١٢}$

٧) إذا كان متوسط التغير للدالة د (س) في الفترة [١ ، ٣] يساوي ٥ ، وكان د (١) × د (٣) = ١٢ ، وكان هـ (س) = $\frac{١}{د(س)}$ ، فإن قيمة متوسط التغير للدالة هـ (س) في الفترة نفسها تساوي:

- $\frac{-٥}{١٢}$
- $\frac{٥}{١٢}$
- $\frac{١}{٥}$
- $\frac{-١}{٥}$

٨) إذا كان المماس للمنحنى د (س) = س^{٢} عند س = ٢ ، يوازي القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين (١ ، د (١)) ، (أ ، د (أ)) ، فأن قيمة أ تساوي :

- ٧
- ٥
- ٤
- ٣

٩) إذا كان $\frac{دص}{دن}$ = ٥ ن^{٢} + ١ ، $\frac{دس}{دن}$ = ٦ عندما ن = ٩ ، فإن $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$ يساوي:

- صفر
- ١٥
- $\frac{٥}{٢}$
- $\frac{٣}{٢}$

---

١٠) إذا كان (١ + س^{٢}) ق(س) + ١٢ = ٤ س^{٢} ، فإن ق$'$(−١) تساوي:

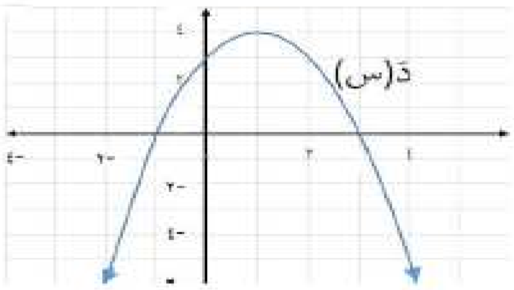
- ١٤
- ٢
- −٢
- −١٤

---

٢) إذا كان س = س ص + ٢ ص ، فاثبت أن ص$''$ (س + ٢) + ٤ $\left(\frac{ص}{س}\right)^{٢}$ = ٠

٣) الشكل المقابل يمثل المخطط البياني للدالة د´(س) المعرفة في الفترة [−١٠ ، ١٠] ، من الرسم أوجد

- فترات التزايد والتناقص
- نقاط القيم العظمى والصغرى المحلية



٣) إذا كان المستقيم ٲ س + ٣ ص = ١ يمس المنحنى د (س) = ٤ س² + ٲ س + ب
عند النقطة (١ ، د (١)) ، فأوجد قيمة كل من ٲ ، ب .

١) إذا كان م(س) = $\frac{د^{٢}(س) + س}{هـ(س)}$ ، هـ (س) ≠ ٠ ، وكان لمنحنيي د (س)، هـ (س) مماسا مشتركاً افقيا
عند النقطة (٣ ، ٤) ، فأوجد م´(٣) .

٢) أوجد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه بحيث يكون أحد رؤوسه نقطة الأصل والثاني على محور السينات والثالث على محور الصادات والرابع على المنحنى ص = ٤ − س² .

اختبار ١٦ – ١٧ تجريبي

٤) إذا علمت أن ق´(٢)= ١ ، ق(٢)=١ فإن نهـا $\frac{ق(٢-س) - ق(٢)}{س - ١}$ تساوي:

☐ ١ ☐ ٢
☐ ٤ ☐ ٦

٥) إذا علمت أن ق(س) = [٤س + ١] ، فإن ق´($\frac{١}{٢}$) =

☐ ٤ ☐ ٢
☐ صفر ☐ غير موجودة

٦) إذا كانت (ن∘هـ)´(٣) = ٨ وكان (ن´∘هـ)(٣) = ٢ فإن هـ´(٣) تساوي:

☐ ٢ ☐ ٤
☐ ٨ ☐ ١٦

٧) إذا كان متوسط تغير الدالة ق(س) في الفترة [٣، ٥] يساوي ١٠ وكان ق(٣) = ق(٥) +أ فإن قيمة أ تساوي:

☐ ٢٠ ☐ −٥
☐ −١٠ ☐ −٢٠

٨) قذف جسم رأسيا إلى أعلى بحيث يقاس أرتفاعه حسب العلاقة ف = ٤أن − ٢ن^2 ، أ $>$ ٠

إذا كان أقصى أرتفاع وصل إليه الجسم يساوي ٣٢مترا فإن قيمة أ تساوي:

- ▭ ٤   ▭ ٨
- ▭ ١٦   ▭ ٣٢

٩) إذا كان ص = $\frac{\text{ع} - ١}{\text{ع} + ١}$ ، س = $\frac{\text{ع} + ١}{\text{ع} - ١}$ فإن $\left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right)_{\text{س}=٢}$

- ▭ $\frac{١}{٤}$ ▭ $-\frac{١}{٤}$
- ▭ صفر   ▭ $\frac{١}{٢}$

١٠) إذا كان ص = $\sqrt{\text{س}}$ فإن $\frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{ص ص}')$ تساوي:

- ▭ $\frac{١}{٢\text{س}}$ ▭ $\frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$
- ▭ صفر   ▭ ١

١٧) إذا كان ن(٢س^3 − ١) = $\sqrt[3]{(\text{س} + ٦)^4}$ ، س $>$ ٠

أوجد $\lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ن}(٧ + \text{هـ}) - \text{ن}(٧)}{٦\text{هـ}}$

١٨) إذا كانت $\sqrt{\text{ص}} = \frac{\text{ص}}{\text{س} - ١}$ اثبت أن ص$''$ص = ص$'$(س − ١)

١٩) إذا كان منحنيي الدالتين د(س) = س^2 + أس + ب ، هـ(س) = س^3 − س^2 − س + جـ

متماسين عند النقطة (-١ ، ٠) فأوجد قيمة أ ، ب ،جـ

٢٠) يتساقط رمل مكونا على شكل مخروط دائري على الأرض بمعدل ١٢ سم^3/ث أرتفاعه دائما يساوي ربع قطر قاعدته ، أوجد طول أرتفاع المخروط عندما يكون معدل زيادة أرتفاعه تساوي ٣سم/ث

٢٢) إذا كان ق(س) = ٣س^2 − س^3 ، س ∈ [−٢ ، ٥] فجد كلا مما يأتي :

أ) فترات التزايد و التناقص للدالة ق(س)

ب) القيم القصوى المحلية للدالة ق(س) (إن وجدت)

٢٣) صندوق بلا غطاء قاعدته مربعة الشكل حجمه ٣٢ سم^3 . أوجد أبعاد الصندوق لتكون كمية المادة المستخدمة لصنعه أقل ما يمكن؟

متعة الرياضيات

اختبار ١٥ – ١٦ تجريبي

٥) اذا كانت هـ(س) كثيرة حدود من الدرجة ن وكان متوسط معدل تغيرها دائما يساوي ٣ فإن قيمة ن تساوي:

أ) ٣ ب) ٢ جـ) ١ د) صفر

٦) اذا كان المستقيم ص= س + ٤ مماساً للمنحنى هـ(س) عند س=١ وكان ق(س) = $\frac{هـ(س)}{٢س}$

فإن ق′(١) =

أ) ٢ ب) -٢ جـ) $\frac{١}{٢}$ د) $\frac{١}{-٢}$

٧) خزان على شكل مكعب طول ضلعه ٢ م يصب فيه ماء بمعدل 0.4 م^٣/ث ، معدل ارتفاع الماء في الخزان بـ (م/ث) يساوي:

أ) 1.6 ب) ٤ جـ) $\frac{١}{١٠}$ د) ٨

٨) اذا كانت للدالة د(س) = ٤ س^٢ + $\frac{أ}{س}$ نقطة حرجة عند س= $\frac{١}{٢}$ فإن قيمة أ تساوي:

أ) ٨ ب) ٤ جـ) ٢ د) ١

٩) اذا كانت د(س) = ٢ س^٢ +١ ، ع(س) = س+١ وكانت ل(س)= د(س) × ع(س) فإن ل′(١) =

أ) ١٣ ب) ١١ جـ) ٧ د) ٥

١٠) اذا كانت ع(س) = $\frac{١}{أ}\sqrt{أ س+٤}$ ، هـ(١) =٣ ، هـ′(١) = ٢ وكانت (ع ∘ هـ)′(١) = $\frac{١}{٤}$ فإن قيمة أ تساوي :

أ) ٢ ب) ٣ جـ) ٤ د) ٧

١١) اذا كانت د(س) = ٢س^٣ +٦س^٢ – ٩س فأوجد د′(٢)

٢٠) اوجد معادلة المماس للمنحنى (٢س+ص)^٢ +س + ص=٤٠ عند نقط تقاطع المنحنى مع المستقيم ٢س +ص=٦

٢٢) اذا كانت س^٢ = ص^٢(١–س) فأثبت أن ص′ = $\frac{ص}{س} + \frac{ص^٣}{٢س^٢}$

٢٣) يتحرك جسيم وفق العلاقة ٢ع = أ^٢ $\sqrt{ف}$ ، أ عدد ثابت . أثبت أن التسارع ثابت

اختبار ١٥ – ١٦ دور أول

٤) إذا كانت ق(س) حدودية من الدرجة الثانية، وكانت $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـــا}} \frac{ق(س) + ١٦}{(س - ٤)^{٢}} = ١$ ،

فإن $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـــا}}$ ق(س) تساوي:

- ∞
- ٤
- صفر
- −١٦

---

٥) إذا كانت د(س) = ٤س^{٢} − ١ وتغيّرت س من ١ إلى ٢ ، فإن متوسط معدّل تغيّر د(س) يساوي:

- ١٦
- ١٢
- ٨
- ٤

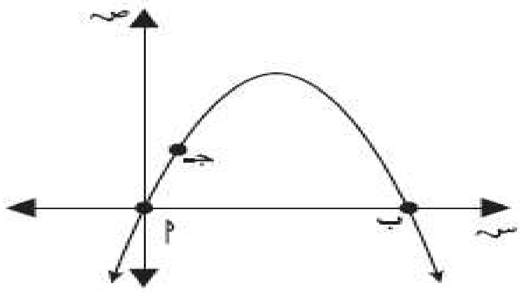
٦) إذا كانت د(س) = س^{٣} − ٢س^{٢} ، فإن د$''$(٢) تساوي:

- −٢
- صفر
- ٤
- ٨

٧) يتحرك جسيم وفق دالة المسافة ف (ن) = ن^{٢} + ٥ ن ، حيث ف هي المسافة التي يقطعها الجسيم بعد ن ثانية، فإن سرعة الجسيم عند اللحظة ن = ٣ ثوانٍ تساوي:

- ٢٤
- ١١
- ١٠
- ٢

٨) الشكل المجاور يمثّل منحنى ص = ٤س − س^{٢}، وكانت النقطة جـ تقع على المنحنى في الفترة [أ ، ب] ، فإن أكبر مساحة ممكنة للمثلث أ ب جـ عندما يكون الإحداثي السيني للنقطة جـ يساوي:



- $\frac{٢}{٣}$
- $\frac{٣}{٢}$
- ٢
- ٣

٩) إذا كانت ع(س) ، ق(س) دوالّاً قابلةً للاشتقاق على مجالها ، حيث ع(س) = (٣س + ٢) × ق$'$(س) ، ق$'$(١) = ٥ ، ق$''$(١) = ٦ ، فإن ع$'$(١) تساوي:

- ٥١
- ٤٥
- ٤٣
- ١٨

---

١٠) إذا كان ق(س^{٣}) = (٢ + ل)س^{٢} ، حيث ل ∈ ح ، ق$'$(١) = −٤ ، فإن قيمة ل تساوي:

- ٨
- ٤
- −٤
- −٨

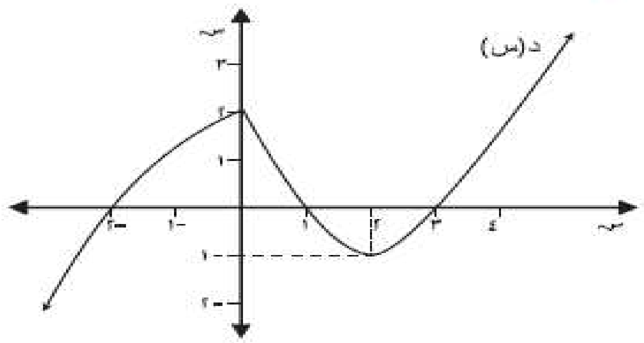
---

١٧) استخدم التعريف $\frac{ءص}{ءس} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$ لإيجاد $\frac{ءص}{ءس}$ للدالة د(س) = س + ٢ ، عند س = ٤

١٨) إذا كانت س = $\frac{ص + ١}{ص - ١}$ ، فأوجد ص″ عند ص = ٢

٢٠) أوجد النقاط الواقعة على المنحنى ص^{٢} + ٣س^{٢} = ٢٧ ، والتي يكون عندها المماس للمنحنى موازيًا لمحور الصادات.

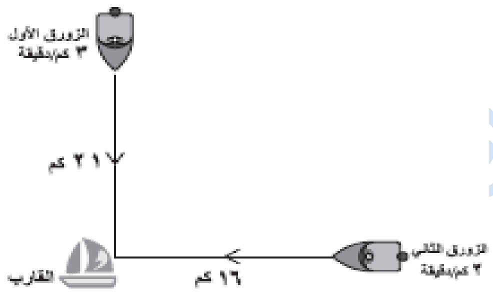
٢٢) الشكل المجاور يمثّل بيان الدالة د(س) على ح ، أوجد :



أ) فترات التزايد للدالة د(س) .

ب) النقاط الحرجة.

٢٣) تحرك زورقا إنقاذ نحو قارب، حيث يبعد القارب عن الزورق الأول ٢١ كم جنوبًا، وعن الزورق الثاني ١٦ كم غربًا، إذا كان معدّل اقتراب كلًّا من الزورقين من القارب ٣ كم/دقيقة ، ٢ كم/دقيقة على الترتيب. أوجد معدّل تغيّر المسافة بين الزورقين بعد مُضي ٦ دقائق من لحظة انطلاقهما.



اختبار ١٤ - ١٥ تجريبي

٥) إذا كانت د(س) = س + ٢ ، فإن $\underset{هـ \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{د(هـ) - د(٠)}{هـ}$ تساوي :

أ) صفر   ب) ١   ج) ٢   د) ٣

٦) إذا كانت ق(س) = |٤ − س| ، فإن ق′(- ٢) تساوي :

أ) - ٦   ب) - ١   ج) ١   د) ٦

٧) إذا كانت (هـ ∘ د)′(٣) = ١٥ ، حيث هـ(س) = س^{٢} − ٩ ، د′(٣) = ٥ فإن د(٣) تساوي

أ) صفر   ب) $\frac{٣}{٢}$ ج) $\frac{٢}{٣}$ د) ٣

٨) إذا كان ق(س) × هـ(س) = ١ ، هـ(١) = - ٢ ، هـ′(١) = ٣ ، فإن قيمة ق′(١) تساوي :

أ) $\frac{٣}{٢}$ ب) $\frac{٣}{٤}$ ج) $\frac{-٣}{٤}$ د) $\frac{-٣}{٢}$

معادلة المماس لمنحنى الدالة د(س) = س^{٢} − ٣س + ١ الذي يعامد المستقيم الذي معادلته س + ٣ص + ١٥ = ٠ هي :

أ) ص − ١ = ٣س   ب) ص − ١ = - ٣س

ج) ص − ١ = ٣(س − ٣)   د) ص − ١ = - ٣(س − ٣)

١٠) إذا كانت ق(س) = س^{ن} ، ق‴(س) = م س ، فإن قيمة م تساوي :

أ) ٢٤   ب) ١٢   ج) ٣   د) ١

١٧) إذا كان : س ص − ٣ س^{٢} = ٦ ، أثبت أن : س ص″ + ٢ص′ = ٦.

١٨) إذا كانت د(س) = س(س − ٦)^{٢} − ٤ حيث س ∈ [- ١، ٧] ، فأوجد القيم القصوى و بيّن نوعها.

٢٠) إذا كانت فـ(ن) المسافة التي يقطعها جسيم حيث فـ(ن) = ن^{٢}(ن − ٦) م/ ث ،

أوجد سرعة الجسم عندما يكون تسارعه ١٨ م/ ث^{٢}.

٢٢) بالون كروي الشكل يزداد حجمه نتيجة لنفخه ، فإذا كان معدل ازدياد طول نصف قطر البالون يساوي $\frac{٢}{٥}$ سم / دقيقة ، أوجد معدل ازدياد حجمه عندما يكون طول نصف قطره يساوي ٥ سم.

٢٣) لتكن السرعة المتوسطة لدالة المسافة فـ(ن) في الفترة الزمنية [١، ٤] تساوي ٣ ، وكان فـ(١) + فـ(٤) = ١٢ ، أوجد السرعة المتوسطة للدالة هـ(س) = فـ^{٢}(س) في الفترة نفسها .

اختبار ١٤ - ١٥ دور أول

٥) متوسط معدّل التغير للدالة هـ(س) = −٧ بين س = ١ ، س = ٥ يساوي :

☐ −٢٨ ☐ −٧

☐ صفر ☐ ٤

٦) إذا كانت ق(س) = م^{٤}س^{٢} ، حيث م عدد حقيقي ، فإن ق″(س) تساوي :

☐ ٢م^{٤} ☐ ٢٤ م^{٢}

☐ ١٢م^{٢} س^{٢} ☐ ٢م^{٤} س

٧) إذا كانت د(س) = س^{٢} + ١ ، فإن (د ∘ د)′(−١) تساوي :

☐ ٤ ☐ ٢

☐ −٢ ☐ −٨

٨) لتكن العلاقة بين سرعة جسيم ع(ن) ، والمسافة المقطوعة ف(ن) خلال الزمن ن هي ٣(ع(ن))^{٢} = ٥ ف(ن) + ٤ ، ع(ن) ≠ صفر ، فإن تسارع الجسيم يساوي :

☐ ٦ ☐ ٥

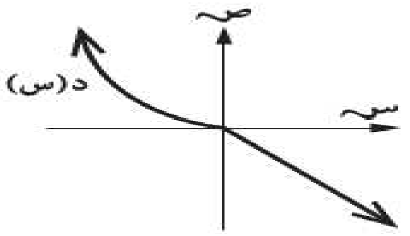
☐ $\frac{٥}{٣}$ ☐ $\frac{٥}{٦}$

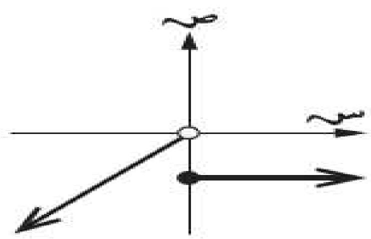
٩) إذا كانت ق(س) كثيرة حدود حيث أن ق(س) = س^{٣} + هـ(س) ، وكان للدالة ق(س) قيمة قصوى محلية عند س = −٢ ، فإن هـ′(−٢) تساوي :

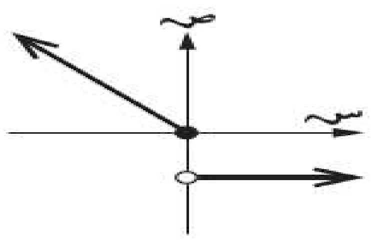
☐ −١٢ ☐ −٢

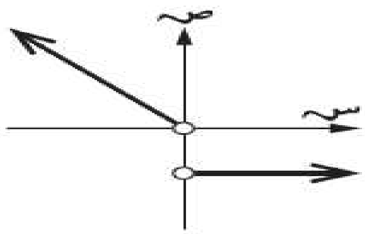
☐ صفر ☐ ٨

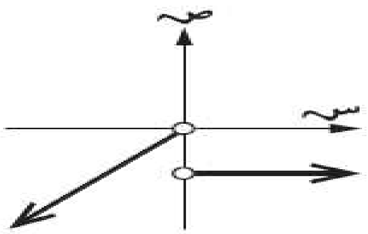
١٠) الشكل المقابل يمثّل بيان الدالة د(س) ، فإن الشكل الذي يُمثل بيان د′(س) هو :



☐ 

☐ 

☐ 

☐ 

١٧) أوجد ميل المماس للدالة ق(س) = س^{٣} + س^{٢} + س + ١ عند النقطة (١ ، ٤)

١٨) إذا كانت ص^{٢} − ٢س ص = −٣ ، فأوجد ص$''$ عند ص = ٣

٢٠) مصنع يبيع عدد س من الطابعات في الشهر بسعر (٨٤٠ − ١٠ س) ريالًا عمانيًا للطابعة الواحدة. إذا كانت التكاليف الكلية الشهرية لهذه الطابعات هي (٤س^{٢} + ١٤٠س + ٥٠٠) ريالًا عمانيًا ، فأوجد عدد الطابعات التي يبيعها المصنع شهريًا ليكون الربح أكبر ما يمكن.

٢٢) عيّن فترات التزايد والتناقص للدالة ص = د(س) حيث $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = (٤ − س^{٢})(س^{٢} + ١)

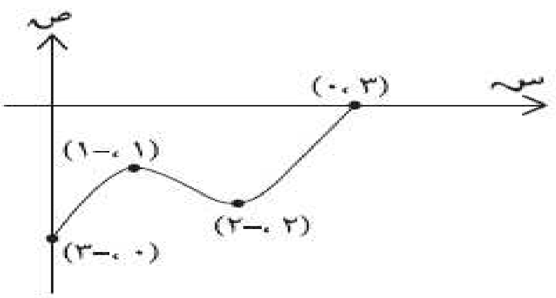
٢٣) مستطيل طوله س = ١٩ سم ، وعرضه ص = ٧ سم . إذا كان طول المستطيل يتناقص بمعدّل ١ سم / ثانية ، وعرضه يتزايد بمعدّل ٢ سم / ثانية ، فاحسب معدّل التغيّر في مساحة المستطيل في اللحظة التي يكون فيها المستطيل مربعًا.

اختبار ١٤ - ١٥ دور ثاني

٥) إذا كانت ص = (٣س + ١)^{٢} ، فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ تساوي:

- ٢(٣س + ١)
- ٦س + ١
- ٦(٣س + ١)
- ٣س + ١

٦) إذا كان الشكل المقابل يُمثّل بيان الدالة ل(س) في الفترة [٠ ، ٣] ، فإن القيمة العظمى المطلقة للدالة في هذه الفترة تساوي:



- ٣
- صفر
- −١
- −٣

٧) ميل المستقيم العمودي على مماس منحنى الدالة د(س) = س^{٢} − س عند النقطة (١ ، ٠) يساوي:

- −٢
- −١
- ١
- ٢

٨) تتحرك نقطة على منحنى الدالة ص = س^{٣} + ٣س^{٢} − ٤ ، فإن قيمة ص التي يتساوى عندها مُعدّل تغيُّر الإحداثي السيني بالنسبة للزمن مع مُعدّل تغيُّر الإحداثي الصادي بالنسبة للزمن هي:

- $-\frac{٢٧}{٤}$
- −٦
- $-\frac{٣}{٢}$
- −١

٩) إذا كانت ق(– ١) = هـ(– ١) = ٣ ، ق$'$(–١) = ٨ ، $\left(\frac{ق}{هـ}\right)'$(–١) = –٤ ،

فإن هـ$'$(– ١) تساوي:

- ٢٠
- ١٢
- – ١٢
- – ٢٠

١٠) إذا كانت (ع ○ ل)(س) = س ، وكانت ع(س) ، ل(س) دالتين قابلتين للاشتقاق على مجالهما

بحيث أن ع$'$(س) = $\frac{١}{س^٢}$ ، فإن ل$'$(س) تساوي:

- س(ل(س))^٢
- ل(س)
- ٢ ل(س)
- (ل(س))^٢

---

١٧) إذا كانت ص^٢ = س ص ، فأوجد $\frac{ءص}{ءس}$.

---

١٨) إذا كانت ق(س) متصلة على ح حيث ق(س) = $\begin{cases} س^٤ + ٥ \text{ ، } س < ١ \\ ٢س^٢ + ٤ \text{ ، } س \geq ١ \end{cases}$ ، فأوجد:

أ) متوسط مُعدّل التغير للدالة ق(س) عندما تتغير س من صفر إلى ٣ .

ب) مُعدّل التغير للدالة ق(س) عند س = – ٢ .

---

٢٠) إذا كان ق$'$(٣) = ٨ ، فأوجد:

$$\underset{م \leftarrow ٠}{نهـــا} \frac{ق(٣ + ٢م) - ق(٣ - م)}{م}$$

---

٢٢) يتحرك جسيم وفق الدالة ف(ن) = ٢ن^٣ – ٩ن + ١٥ حيث ف المسافة بالأمتار،

ن الزمن بالثواني. أوجد تسارع الجسيم بعد ٣ ثواني من بدء الحركة.

---

٢٣) إذا كانت د(س) = $\frac{هـ(س)}{ل(س)}$ ، ل(س) ≠ صفر، بحيث أن هـ$'$(س) ، ل$'$(س) دالتين

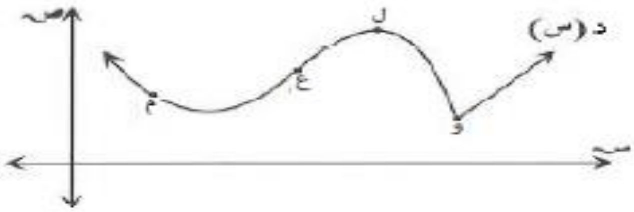
قابلتين للاشتقاق على مجالهما، وكان د$'$(٢) = د$''$(٢) = صفر .

أثبت أن: د(٢) = $\frac{هـ''(٢)}{ل''(٢)}$.

منصة رياضيات

اختبار ١٣ - ١٤ دور أول

٥) إذا كان الشكل المجاور يمثل بيان الدالة د(س) ،
فإن النقطة التي يكون عندها دَ(س) < ٠ هي :



○ و　○ ل

○ ع　○ م

٦) إذا كانت ص = م^{٣} + ٤م + ٥ ، م = ٩ − س ، فإن قيمة $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عندما م = ١ تساوي:

○ −٧　○ −٣　○ ٣　○ ٧

٧) إذا كانت الدالة د(س) قابلة للاشتقاق لكل س ∈ ح، وكان △ص لها يساوي
٣هـ س^{٢} + ٣هـ^{٢} س + ٨هـ س + هـ^{٣} ، △س = هـ ، فإن دَ(٢) تساوي:

○ صفر　○ ١٤　○ ٢٨　○ ٣٤

٨) إذا تحرك جسيم وفق دالة المسافة ف(ن) = ن^{٣} − ٩ن^{٢} − ٢٧ن + ٣ ، حيث ف المسافة بالأمتار، ن الزمن بالثواني ، فإن معدّل التغير في سرعته عندما ن = ٤ يساوي :

○ ٣١　○ ٢٤　○ ٦　○ ٣

٩) إذا كان ق(س) = ٢ س^{٢} + ٢ ، هـ(١) = −٢ ، هـَ(١) = ٥ ، (ق∘هـ)َ(١) = ٢٠ ،
فإن قيمة ٢ تساوي:

○ −٥　○ −١　○ ١　○ ٥

- -

١٠) إذا كانت ل(٢س) = س × هـَ(س) ، ل(−٢) = لَ(−٢) = ٣ ، فإن هـً(−١) =

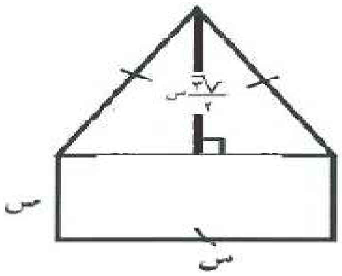
○ ٩　○ ٦　○ −٦　○ −٩

- -

١٦) إذا كان د(س) = س^{٢} + ٣ ، فأوجد متوسط معدّل التغير للدالة د(س) في الفترة [−٢، ٢]

١٨) دائرتان متحدتان في المركز، نصفا قطريهما ٦ سم ، ٢٤ سم ، ابتدأت الدائرة الصغرى تتسع بحيث يزداد نصف قطرها بمعدّل ٢ سم / ث ، وفي اللحظة نفسها أخذت الدائرة الكبرى تصغر بحيث يتناقص نصف قطرها بمعدّل ٤ سم / ث ، أوجد معدّل التغير في المساحة المحصورة بين الدائرتين في اللحظة التي يكون فيها نصف قطر كل منهما مساوياً ١٢سم . (علماً بأن مساحة الدائرة = π نق^2)

٢٠) نافذة على شكل مستطيل يعلوه مثلث متطابق الأضلاع كما هو موضح بالشكل ، إذا علمت أن محيط النافذة يساوي $(١٢ - ٢\sqrt{٣})$ متر، فأوجد بعدي المستطيل لتكون مساحة النافذة أكبر ما يمكن .



٢٢) أوجد النقاط الحرجة في مجال الدالة: د(س) = س^2 − ١٢ س

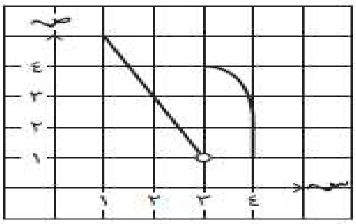
٢٣) إذا كان س = س ص + ٢ص ، أثبت أن ص$''$ (س + ٢) + ٤ $\left(\frac{\text{ص}'}{\text{س}}\right)^2$ = صفر

اختبار ١٣ - ١٤ دور ثاني

٥) إذا علمت أن ق$'$(٣) = −٨ ، فإن $\underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(٣ + \text{هـ}) - \text{ق}(٣)}{٧\text{هـ}}$

- ⬭ $-\frac{٨}{٧}$
- ⬭ $-\frac{٧}{٨}$
- ⬭ $\frac{٧}{٨}$
- ⬭ $\frac{٨}{٧}$

٦) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة (س) المعرّفة على الفترة [١، ٤]، فإن النقطة (٣، ق(٣)) هي نقطة:



- ⬭ عظمى مطلقة
- ⬭ صغرى مطلقة
- ⬭ صغرى محلية
- ⬭ عظمى محلية

٧) إذا كان د(س) = $\begin{cases} \text{س}^2 - ٧ \text{ ، } ٠ \le \text{س} < ٢ \\ \text{س} - ٥ \text{ ، } ٢ \le \text{س} < ٤ \end{cases}$ ، فإن متوسط معدل التغير عندما تتغير س من ١ إلى ٣ تساوي :

- ⬭ ٢
- ⬭ ٣
- ⬭ ٤
- ⬭ ٦

٨) إذا تحرك جسيم في خط مستقيم بحيث أن بعده عن نقطة الأصل بالأمتار بعد ن ثانية من بدء حركته تعطى بالعلاقة ف(ن) = ن^3 − ٦ن^2 + ٣٤ ، ن ≥ ٠، فإن المسافة التي يقطعها الجسيم عندما ينعدم تسارعه تساوي:

- ⬭ ٣٤
- ⬭ ١٨
- ⬭ ٤
- ⬭ ٢

٩) إذا كانت $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} + \text{س}$ ، وكان $(\text{هـ} \circ \text{ق})'(٢) = ٥٥$ ، فإن $\text{هـ}'(٦) =$

- [ ] $\frac{٥٥}{٦}$
- [ ] ١١
- [ ] $\frac{٥٥}{٤}$
- [ ] ٥٥

١٠) إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \text{أ}\text{س}^{٤} - ٥\text{س}^{٢} + ٦$ ، وكان $\lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{د}''(٢ + \text{هـ}) - \text{د}''(٢)}{\text{هـ}} = ٤٨$ ، فإن قيمة أ تساوي:

- [ ] ١
- [ ] ٢
- [ ] ١٢
- [ ] ٢٤

---

١٧) إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٣} + ١٢ & ، \text{س} \geq ٢ \\ \text{س}^{٢} + ٨\text{س} & ، \text{س} < ٢ \end{cases}$ ، فأوجد $\text{د}'(٢)$.

---

٢١) أنبوب من الحديد على شكل أسطوانة دائرية قائمة مجوف طوله ثابت ونصف قطريه الداخلي والخارجي يتغيران بحيث يبقى حجم الحديد ثابت فإذا كان نصف القطر الداخلي يزداد بمعدل $\frac{١}{٤}$ سم / د أوجد معدل التغير في قطره الخارجي عندما يكون نصف القطر الداخلي ٨ سم ونصف القطر الخارجي ١٠ سم . (علما بأن حجم الأسطوانة الدائرية القائمة = $\pi \text{نق}^{٢} \times ع$)

---

٢٣) عيّن فترات التزايد والتناقص للدالة $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٣} + ٣\text{س}^{٢} - ٩\text{س} + ٦$

---

٢٤) إذا كان $\text{ص} = \frac{٢\text{س} + ٥}{٣\text{س} + ٤}$ ، $\text{س} \neq \frac{-٤}{٣}$ ، فأثبت أن $٢\text{ص}'\ \text{ص}''' = ٣(\text{ص}'')^{٢}$

اختبار ١٢ - ١٣ تجريبي

٥) إذا كان متوسط معدل تغير الدالة هـ(س) في الفترة [−١،٤] يساوي ٣ وكانت هـ(−١) = م ، هـ(٤)=١٣ ، فإن قيمة م تساوي :

- [ ] −٦
- [ ] −٢
- [ ] ٢
- [ ] ٦

٦) اذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \left(\text{س} - \sqrt[٣]{٣}\right)\left(\text{س}^{٢} + \sqrt[٣]{٣}\,\text{س} + \sqrt[٣]{٩}\right)$ ، فإن $\lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{د}(\text{هـ} - ٢) - \text{د}(-٢)}{٣\text{هـ}} =$

- [ ] صفر
- [ ] ٤
- [ ] ١٢
- [ ] ٣٦

٧) اذا كانت د(س) $= \frac{\text{ك}^{٢}\text{س}^{٣}}{٣} - ٢\text{ك}\text{س}^{٢} + ٤\text{س}$ وكان د/ (١)= صفر ، فإن قيمة ك تساوي :

☐ ٤ ☐ ٢ ☐ $\frac{٤}{٣}$ ☐ $\frac{٣}{٤}$

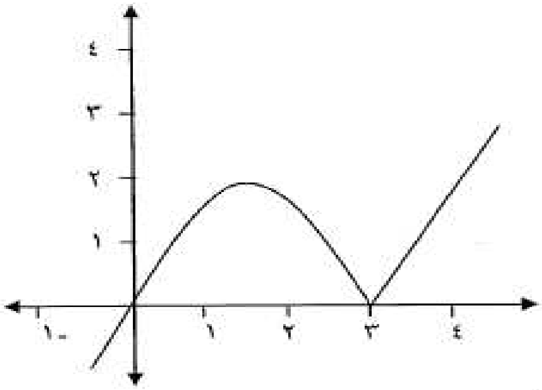
٨) اذا كانت د(س) = هـ(س) × (٣س + ١)، د(١) = ٢ ، د/ (١) = $\frac{٥}{٢}$ ، فان هـ/ (١) =

☐ −١ ☐ $-\frac{١}{٤}$ ☐ $\frac{١}{٤}$ ☐ ١

٩) إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الدالة د(س) المعرفة على ح ، فإن عدد النقاط الحرجة للدالة د(س) يساوي :

☐ صفر ☐ ١

☐ ٢ ☐ ٣



١٠) اذا كانت هـ (س + ١) = س^{٢} +١ ، ق (س) = ٨س^{٣} + ٢ ،

فإن (هـ ∘ ق)/ ($\frac{١}{٢}$) =

☐ ٣٦ ☐ ٣٢ ☐ ٢٤ ☐ ١٦

ج) ثلاثة اعداد طبيعية موجبة مجموعها ٢٦ ، اذا كان العدد الثاني هو ثلاث اضعاف العدد الاول فأوجد هذه الاعداد بحيث يكون مجموع مربعاتهم اصغر ما يمكن .

ب) يتحرك جسيم في خط مستقيم طبقاً للعلاقة ف(ن) $= ٦\text{ن}^{٢} - \frac{١}{٣}\text{ن}^{٣}$ ، حيث ن بالثواني ، ف بالمتر

اوجد ما يأتي :

١ـ سرعة الجسيم عندما ن = ٥ ثواني .

٢ـ تسارع الجسيم عندما تنعدم سرعته

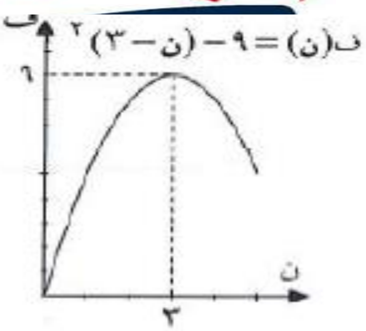
ج) خزان على شكل اسطوانة دائرية قائمة طول قطر قاعدتها ٥٠ سم ، وارتفاعها ١٢٠ سم ، يصب فيها الماء بمعدل $\frac{٥٠٠٠}{\text{م}+٤٠}$ سم^{٣}/ ثانية ، حيث م ارتفاع الماء عند أي لحظة .

أوجد معدل ارتفاع الماء في الخزان عندما يمتلئ ربعه.(علما بإن حجم الاسطوانة الدائرية القائمة = π نق^{٢}ع)

أ) إذا كانت ص = د (س) ، ع = $\frac{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}}{\text{ص}}$ فأثبت أن:

$$\text{ص} \times \frac{د^{٢}\text{ع}}{د\text{س}^{٢}} + ٢ \times \frac{د\text{ص}}{د\text{س}} \times \frac{د\text{ع}}{د\text{س}} + \text{ع} \times \frac{د^{٢}\text{ص}}{د\text{س}^{٢}} = \frac{-٢}{٩\text{ص}^{٢}\text{ع}^{٢}}$$

اختبار ١٢ - ١٣ دور أول



٥) الشكل المجاور يمثل حركة جُسَيْم وفق دالّة المسافة ف (ن)، حيث ن الزمن بالثواني. السرعة اللحظية عند ٣ ثواني تساوي:

- ٩
- ٦
- ٣
- صفر

٦) إذا كانت د′(س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س}}$ ، فإن جميع قِيَم س التي توجد عندها نقاط حرجة للدالة د(س) هي:

- { ٠ }
- { −٢ ، ٢ }
- { −٢ ، ٠ ، ٢ }
- { −٢ ، ٠ ، ٢ ، ٤ }

٧) متوسط تغيّر الدالّة د(س) = −٣|س − ٣| في الفترة [١ ، ٢] يساوي:

- ٣
- ١
- −١
- −٣

٨) إذا كانت د(س) = س^{٢} + س ، هـ (س) = س − ١ ، فإن (د ∘ هـ)′(س) =

- س^{٢} + س − ١
- س^{٢} − س
- ٢س + ١
- ٢س − ١

٩) إذا كان ص = ل^{٢} − ٣ ، ل^{٢} = ٥ − س ، فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ تساوي:

- −٢ل
- ٢ل
- −١
- ١

١٠) إذا كان د(١) = ٣ ، د′(١) = ٦ ، فإن $\lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{هـ}^{٢} + ٤\text{هـ}}{\text{د}(١ + \text{هـ}) - \text{د}(١)}$ تساوي:

- $\frac{٢}{٣}$
- $\frac{٤}{٣}$
- ١٢
- ٢٤

عيّن فترات التزايد وفترات التناقص للدالة د(س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٣} − س^{٢} .

إذا كان محور السينات مماس مشترك للدائرة س^{٢} + (ص − نق)^{٢} = نق^{٢} والمنحنى ص = ٢س^{٢} ، وكانت المشتقة الثانية لكلٍ منهما متساوية عند نقطة التماس ، فأوجد قيمة نق .

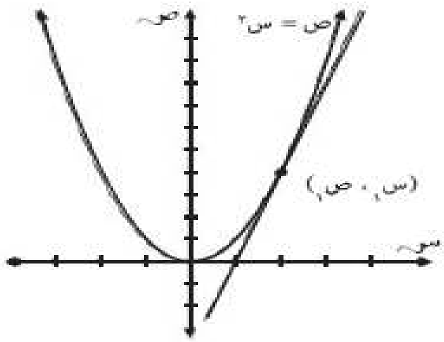
إذا كان ص^{٢} − س ص = ١ ، فأثبت أن (٢ ص − س)^{٣} ص″ − ٢ = ٠

يُراد صناعة علبة زجاجية أسطوانية الشكل ذات غطاء معدني لتكون سعتها ٩٦ π م³.
إذا كانت تكلفة المتر المربع الواحد من الزجاج ريالين وهي ضعف تكلفة المعدن ، فأوجد ارتفاع العلبة (ع) ونصف قطرها (نق) لتكون تكلفة صناعتها أقل ما يمكن. (علماً بأن مساحة الأسطوانة = ٢ π نق ع +٢ π نق²، حجم الأسطوانة = π نق²ع)

اختبار ١٢ - ١٣ دور ثاني

٥) في الشكل المجاور ميل المماس لمنحنى الدالة ص = د(س) عند النقطة (س١ ، ص١) يساوي :

- ▭ س١²
- ▭ ٢س١²
- ▭ س١
- ▭ ٢س١



٦) عدد النقاط الحرجة لدالة د(س) = ٢(س – ٥) تساوي:

- ▭ صفر
- ▭ ١
- ▭ ٢
- ▭ ٥

٧) إذا كان متوسط التغير في الدالة د (س) في الفترة [٣ ، أ] يساوي ٢ وكان د(٣) = ٥ ، د(أ) = ٩
فإن قيمة أ تساوي :

- ▭ ٤
- ▭ ٥
- ▭ ٩
- ▭ ١٠

٨) إذا كان $\sqrt{\text{ص}}$ = ١ – س فإن $\frac{\text{دس}}{\text{دص}}$ =

- ▭ ٢(س – ١)
- ▭ ٢(١ – س)
- ▭ (س – ١)
- ▭ (١ – س)

- -

٩) إذا كان د´ (س) = هـ (٢س) ، هـ´ (٢) = –٢ فإن د″(١) =

- ▭ ٤
- ▭ ٢
- ▭ –٢
- ▭ –٤

١٠) نهـــا (هـ ← ٠) $\frac{\text{هـ}}{(\frac{1}{2}+\text{هـ})^{4}-(\frac{1}{2})^{4}}$ =

- ▭ ٤
- ▭ ٢
- ▭ $\frac{1}{2}$
- ▭ $\frac{1}{8}$

أوجد القيم القصوى المحلية للدالة د(س) = ٢ س^{٣} + ٣ س^{٢} – ١٢ س وحدد نوعها

- -

إذا كان المنطاد (أ) يبعد عن المنطاد (ب) بمسافة أفقية قدرها ٤ م، انطلقا المنطادان (أ) و (ب) رأسيا إلى الأعلى بسرعة ٢ م / ث ، ١ م / ث على الترتيب .

أوجد معدل التغير في المسافة بين المنطادين بعد مرور ٣ ثوان من بدء الانطلاق.

- -

إذا كانت (س ص + ١)^{٢} س ص = ١ فاثبت أن : ص + س صَ = ٠

- -

٢٢) اذا كانت د (س) = $\begin{cases} ٢س^{٢} + ٣ &، س \geq ٢ \\ ٨س - ٥ &، س < ٢ \end{cases}$

دالة متصلة على مجالها، فابحث قابلية الاشتقاق للدالة د (س) (باستخدام تعريف المشتقة) عند س = ٢

اختبار ١١ - ١٢ دور أول

٥) إذا كانت د(س) = ١ – س^{٢} فإن $\lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{د(٢ + هـ) - د(٢)}{٢هـ} =$

○ -١٢ ○ -٦ ○ ٦ ○ ١٢

٦) عند إلقاء حجر في بركة ماء تحدث موجات دائرية يزداد طول نصف قطر كل منها بمعدل $\frac{١}{٢}$ م/ث، فالمعدل الذي تزداد به مساحة سطح إحدى الموجات التي طول نصف قطرها ٢م بوحدة (م^{٢}/ث) يساوي:

○ π ○ ٢π ○ ٤π ○ ٨π

٧) إذا كانت ص = س^٣ + ٣س + ٢ ، ل = س^٢ − ١ فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءل}}$ عندما س = ١ يساوي:

- ٢
- ٣
- ٦
- ١٢

٨) إذا كانت د(س) = $\begin{cases} ٢س^٢ + ٤ & ، س < ١ \\ ٦س & ، س \geq ١ \end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند س=١، فإن د̀(٢) تساوي:

- ٦
- ١٢
- ٢٠
- ٢٤

٩) إذا كانت د(س) = $\frac{س}{س + ١}$ ، س ≠ −١ فإن للدالة د(س) :

- نقطة حرجة واحدة
- نقطتين حرجتين
- ثلاث نقاط حرجة
- ليس لها نقاط حرجة

١٠) إذا كانت ق(س) = $\begin{cases} س^٣ - ٥ & ، س > ٠ \\ ٢س^٢ & ، س \leq ٠ \end{cases}$ ، فإن ق(س) متزايدة في الفترة:

-]−∞ ، ٠[
-]$\sqrt[٣]{٥}$ ، ∞[
-]٠ ، ∞[
- ح

مضمار للجري على شكل مستطيل ينتهي بنصفي دائرة ، إذا كان محيطه ٤٠٠م ، فأوجد نصف قطر الدائرة لتكون المساحة أكبر ما يمكن.

أوجد النقاط التي يكون عندها المماس للمنحنى ص = س(س − ١)^٢ موازياً لمحور السينات.

أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة د(س) = $\begin{cases} س^٢ - ٢س - ١ & ، س \leq ٠ \\ -(س - ١)^٢ & ، ٠ < س < ٢ \\ س - ٣ & ، س \geq ٢ \end{cases}$

إذا كانت د(س) = $\frac{(هـ(س))^٣}{ل(س)}$ حيث ل(س) ≠ ٠ ، وكانت هـ(س) = $\sqrt{س^٢ + ٢س}$ ،

ل(س) = ٢س + ٢

فأثبت أن د̀(س) = $\frac{٣}{٢}$ هـ(س) − $\frac{٢(هـ(س))^٣}{(ل(س))^٢}$

اختبار ١١ - ١٢ دور ثاني

٥) ميل المماس لمنحنى الدالة ص = $\text{س}^{٢}$ − س + ٣ عند س = ٢ يساوي:

- ٣
- ٥
- ٦
- ٧

٦) إذا كان د(س) = ٣ − ٢ س ، وتغيّرت قيمة س من ١ إلى ٣ ، فإن متوسط معدل تغير الدالة يساوي:

- −٢
- $-\frac{١}{٢}$
- $\frac{١}{٢}$
- ٢

٧) إذا تدحرجت كرة من أعلى جبل بحيث تكون المسافة التي قطعتها بالأمتار عن نقطة البداية بعد ن ثانية تعطى بالعلاقة ف = $\frac{١}{٣}$ $\text{ن}^{٣}$ − $\text{ن}^{٢}$ + ٢ ، فإن سرعتها تبلغ ٨ م/ث عندما ن تساوي:

- ١
- ٢
- ٣
- ٤

٨) إذا كانت د″(س) = $\frac{١}{٢}$ أ $\text{س}^{٢}$ وكانت $\lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{د}'(٤ + \text{هـ}) - \text{د}'(٤)}{\text{هـ}}$ = ٨ فإن قيمة أ تساوي:

- ١
- ٢
- ٤
- ٨

- -

٩) إذا كانت ص = ٢$\text{ن}^{٣}$ − ٤ ، س = $\text{ن}^{٢}$ فإن $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}}$ عندما ن = ٢ تساوي :

- $\frac{٣}{٤}$
- $\frac{٣}{٢}$
- ٣
- ٦

١٠) إذا كانت د(س) = $\frac{\text{س}}{\text{س} - ٢}$ ، س ∋ [−٢، ١] فإن القيمة الصغرى المطلقة للدالة د(س) تكون عندما س تساوي:

- −٢
- −١
- صفر
- ١

١ إناء على شكل مخروط دائري قائم رأسه إلى أسفل ، طول نصف قطر قاعدته ٣ سم وارتفاعه ٦ سم يتسرب من رأسه الماء بمعدل ٣ سم٣/ث . أوجد معدل تغير ارتفاع سطح الماء عندما يكون ارتفاع الماء فيه يساوي ٤ سم، (علماً بأن حجم المخروط = $\frac{١}{٣}\pi$ نق^{٢}ع).

أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة د(س) = $\begin{cases} \text{س} + ٢ \text{ ، س} < ١ \\ ٤ - \text{س}^{٢} \text{ ، س} \geq ١ \end{cases}$

إذا كانت د(س) = س^{٣} − س^{٢} − ١ ، هـ(س) = ٢س − ١ فأثبت أن (د ه هـ)$'$(١) = ٢

إذا كانت ص = $\sqrt{٣\text{س}^{٢} + ٤}$ ، ل = (٢ + ٢س)^{٢} فاثبت أن: ٨ + $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ × ص + ٥س − $\frac{\text{ءل}}{\text{ءس}}$ = ٠

اختبار ٨ - ٩ دور أول

٥) إذا كان متوسط معدل التغير للدالة د(س) عندما تتغير س من ١ إلى م يساوي ٢ ، ومقدار التغير في الدالة يساوي ٦ ، فإن قيمة م تساوي :

أ) ١٣ ب) ٤ جـ) $\frac{٣}{٢}$ د) $\frac{٤}{٢}$

٦) يتحرك جسيم حسب العلاقة ف(ن) = ن^{٣} − ن^{٢} حيث ف : المسافة بالسنتيمتر ، ن: الزمن بالثانية ، فإن سرعته اللحظية عند ٢ ثانية تساوي .

أ) ٤ ب) ٦ جـ) ٨ د) ١٠

٧) إذا كانت هـ (س) قابلة للإشتقاق على ح ، ق(س) = ٥ − ٤س×هـ (س) ، بحيث أن هـ (٢) = ٣ ، هـ$'$(٢) = -١ فإن ق$'$(٢) تساوي :

أ) -٨ ب) -٤ جـ) ٤ د) ٨

٨) إذا كانت نهـــا $\frac{\text{د}'(\text{س}+\text{هـ}) - \text{د}'(\text{س})}{\text{هـ}}$ = س^{٢} + ٣س فإن د$'''$(١) تساوي :

أ) صفر ب) ٢ جـ) ٤ د) ٥

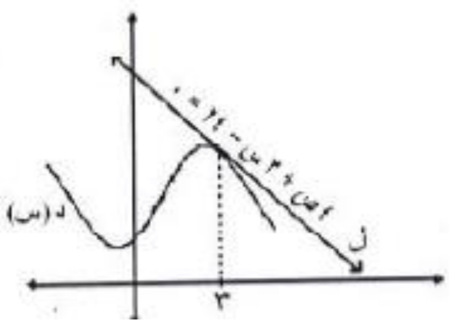
٩) إذا كانت ص دالة حدودية ،ص= د(ع) ، ع = س^{٢} − ١ ، (ص ه ع)$'$ (٢) = ١٢ فإن ص$'$(٣) تساوي :

أ) ٣ ب) ٢ جـ) $\frac{١}{٢}$ د) $\frac{١}{٣}$

١٠) إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى د(س) حيث المستقيم ل مماسا للمنحنى عند س=٣ فإن د$'$(٣) تساوي :

أ) $\frac{-٤}{٣}$ ب) $\frac{-٣}{٤}$

جـ) صفر د) $\frac{١٥}{٤}$



١) يصب عطر في زجاجة على شكل اسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطرها يساوي ثلث ارتفاعها ، فإذا كان معدل إنسياب العطر في الزجاجة هو ٠,٨ $سم^٣$ / ث .
أوجد معدل ارتفاع مستوى العطر في الزجاجة عندما يكون ارتفاعه ٢سم .
(حجم الإسطوانة ح = π نق٢ ع)

---

٢) إذا كانت س = س ص + ٥ ، اثبت أن $ص'' = \frac{٢ (ص - ١)}{س^٢}$

---

١) إذا كانت $د(س) = \begin{cases} ٥ س & ، س \leq ١ \\ ٦ - س^٢ & ، س > ١ \end{cases}$ متصلة على ح

فاوجد $د'(١^+)$ المشتقة اليمنى) باستخدام التعريف .

---

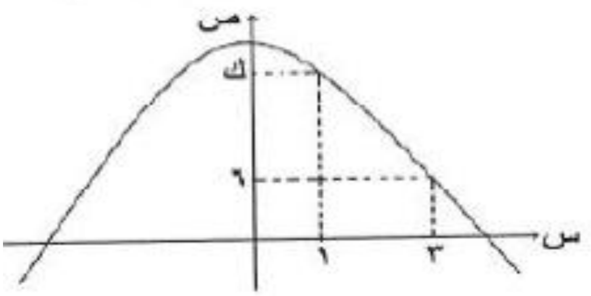
١) يريد خياط ملابس نسائية تقسيم قطعة قماش طولها ١٢م الى قطعتين لعمل فستان بحيث يكون (مربع طول إحدى القطعتين مضافا إليه ثلث مكعب طول القطعة الأخرى) أصغر ما يمكن.
أوجد طول كل من القطعتين .

ب) إذا كانت $د(س) = \frac{٣ س}{س^٢ + ١}$ فأوجد :
١) فترات التزايد والتناقص للدالة د(س) .
٢) القيم العظمى والصغرى المحلية إن وجدت .

اختبار ٨ - ٩ دور ثاني

٥) الشكل المجاور يمثل منحنى الدالة د(س) ، فإذا كان متوسط معدل التغير يساوي - ٤ عندما تتغير س من ١ إلى ٣ فإن قيمة ك تساوي :

أ) ١١ ب) ١٢
ج) ١٣ د) ١٤



٦) يتحرك جسيم حسب العلاقة ع(ن)= ٣ن^{٢} − ٢ ن حيث ع: السرعة بالسنتيمتر/ الثانية ، ن: الزمن بالثواني، فإن التسارع اللحظي عند ٢ ثانية يساوي :

أ) ١٠ ب) ٨ ج) ٦ د) ٤

٧) إذا كانت هـ(س) قابلة للاشتقاق على ح ، ق (س) = $\frac{١ + هـ(س)}{س}$ حيث س ≠ ٠ ،

هـ(-١) = ٢، هـ′(-١) = ٣ ، فإن ق′(-١) تساوي :

أ) ٦ ب) ٢ ج) -٢ د) -٦

٨) إذا كانت دَ(س)= ٢س^{٤} ، فإن نهـــا$_{هـ ← ٠}$ $\frac{دً(س + هـ) - دً(س)}{هـ}$ =

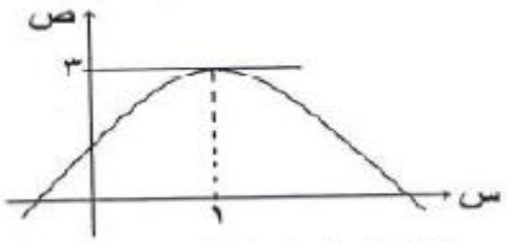
أ) ٢س^{٤} ب) ٨ س^{٣} ج) ٢٤ س^{٢} د) ٤٨ س

٩) إذا كانت ص = د(ع) ، ع = د(س) وكان $\frac{ءع}{ءص}$ = ٤ ، $\frac{ءع}{ءس}$ = ٢ ، فإن (ص ه ع)′(س) =

أ) $\frac{١}{٨}$ ب) $\frac{١}{٢}$ ج) ٢ د) ٨

١٠) إذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى الدالة د(س) = س^{٢} + ب س + جـ حيث ب ، جـ ثوابت فإن قيمة ب تساوي :

أ) ٣ ب) ١ ج) -٢ د) -٣



١١) إذا كانت د(س) =(س−٢)^{٢}+٢ فإن للدالة قيمة صغرى مطلقة في [−١، ٣] عند س تساوي:

أ) ٣ ب) ٢ ج) صفر د) -١

---

١) يتم حصاد حبوب القمح من الحقول بواسطة الآلات ، فإذا كانت الحبوب تتساقط من فوهة إحدى الآلات بمعدل $\frac{٤\pi}{٣}$م^{٣} / د مكونة مخروط دائري قائم قطره يساوي ثلاثة أمثال ارتفاعه. أوجد معدل التغير في ارتفاع المخروط عندما يكون الارتفاع ٢ م .

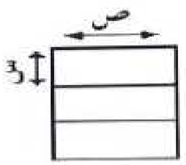
(حجم المخروط = $\frac{١}{٣}\pi$ نق^{٢} ع)

---

٢) إذا كانت ص^{٢}− ٥ س + ص اثبت ص″ = $\frac{٥٠}{(١ - ٢ص)^{٣}}$

اذا كانت د(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ١ ، & س < ١ \\ س + ١ ، & س \geq ١ \end{cases}$ متصلة على ح فأوجد دُ(١) (المشتقة اليسرى) باستخدام التعريف.

صاحب مزرعة لديه سلك طوله ٦٠٠م ، يريد أن يقسم به ثلاث مناطق زراعية مستطيلة الشكل ومتساوية المساحة في مزرعته كما هو موضح في الشكل .
أوجد أكبر مساحة للمنطقة الواحدة يمكن أن يستخدم فيها السلك .



اذا كانت د (س) = $\frac{١}{٣}$س^{٣} - $\frac{١}{٢}$س^{٢} - ٦ س فأوجد :

١) فترات التزايد وفترات التناقص للدالة د(س) .

٢) القيم العظمى والصغرى المحلية إن وجدت.