

شكراً لتحميلك هذا الملف من موقع المناهج العمانية



ملخص شرح درس معادلة الدائرة

موقع المناهج ← المناهج العمانية ← الصف الحادي عشر ← رياضيات متقدمة ← الفصل الأول ← الملف

تاريخ نشر الملف على موقع المناهج: 05:12:09 2023-11-20 | اسم المدرس: مصطفى محمود طه

التواصل الاجتماعي بحسب الصف الحادي عشر



روابط مواد الصف الحادي عشر على تلغرام

[الرياضيات](#)

[اللغة الانجليزية](#)

[اللغة العربية](#)

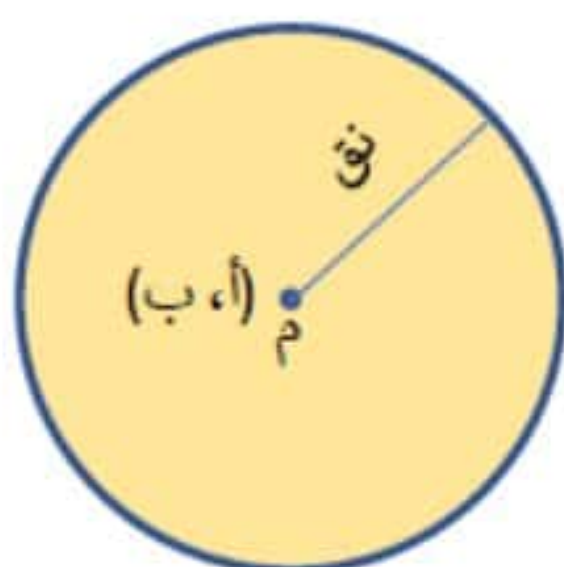
[التربية الاسلامية](#)

المزيد من الملفات بحسب الصف الحادي عشر والمادة رياضيات متقدمة في الفصل الأول

ملخص شرح درس المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة	1
حل أسئلة تمارين الوحدة الرابعة من كتاب الطالب	2
حل كتاب النشاط	3
مراجعة الوحدة الأولى	4
اختبار قصير أول	5

يمكن كتابة معادلة أي دائرة إذا علم إحداثيات مركزها وطول نصف قطرها

أولاً الصورة القياسية لمعادلة الدائرة



الصورة القياسية بمعادلة دائرة مركزها م (أ، ب) ونصف قطرها نق هي:

$$(س-أ)^2 + (ص-ب)^2 = نق^2 \text{ حيث } نق \geq 0$$

من الصورة السابقة يمكنك ملاحظة

لا تحتوي المعادلة على الحد س ص

معامل س = معامل ص = ١

تطبيق التعلم

(١) أوجد معادلة كل دائرة من الدوائر الآتية

<p>(أ) م (٠، ٠) ، نق = ٨</p> <p>الحل</p> <p>.....</p> <p>.....</p>	<p>(ب) م (٥، -٢) ، نق = ٤</p> <p>الحل</p> <p>.....</p> <p>.....</p>
<p>(ج) م (-١، ٣) ، نق = $\sqrt{٧}$</p> <p>الحل</p> <p>(س-١)² + (ص+٣)² = ٧</p> <p>٧ = (ص-٣)² + (س+١)²</p>	<p>(د) م ($\frac{١}{٢}$، $\frac{٣}{٢}$) ، نق = $\frac{٥}{٢}$</p> <p>الحل</p> <p>(س-$\frac{١}{٢}$)² + (ص-$\frac{٣}{٢}$)² = $\frac{٢٥}{٤}$</p> <p>(س-$\frac{١}{٢}$)² + (ص-$\frac{٣}{٢}$)² = $\frac{٢٥}{٤}$</p>

مفردة اختبارية

ضع دائرة حول معادلة الدائرة التي مركزها (-٢، ٤) ونصف قطرها ٥

$$٥ = (س+٢)² + (ص-٤)²$$

$$٢٥ = (س+٢)² + (ص-٤)²$$

$$٢٥ = (س+٢)² + (ص-٤)²$$

$$٢٥ = (س+٢)² - (ص-٤)²$$

يمكن إيجاد إحداثيات مركز الدائرة وطول نصف القطر إذا علمت معادلة الدائرة

(٢) أوجد مركز الدائرة ونصف قطر كل دائرة من الدوائر الآتية

<p>(ب) $9 = x^2 + y^2$</p> <p>الحل</p> <p>بقسمة المعادلة على ٢</p> $\frac{9}{2} = x^2 + y^2$ <p>مركز الدائرة (٠، ٠)</p> $\frac{3}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \text{نق}$	<p>(أ) $16 = x^2 + y^2$</p> <p>الحل</p> <p>مركز الدائرة (٠، ٠)</p> $4 = \sqrt{16} = \text{نق}$
<p>(د) $4 = (x-3)^2 + (y-2)^2$</p> <p>الحل</p> <p>مركز الدائرة (٣، ٢)</p> $2 = \sqrt{4} = \text{نق}$	<p>(ج) $25 = (x-2)^2 + y^2$</p> <p>الحل</p> <p>مركز الدائرة (٢، ٠)</p> $5 = \sqrt{25} = \text{نق}$
<p>(و) $45 = (x+4)^2 + (y-3)^2$</p> <p>الحل</p> <p>بقسمة المعادلة على ٢</p> $\frac{45}{2} = (x+4)^2 + (y-3)^2$ <p>مركز الدائرة (٤، ٣)</p> $\frac{\sqrt{45}}{2} = \text{نق}$	<p>(هـ) $18 = x^2 + (y+7)^2$</p> <p>الحل</p> <p>مركز الدائرة (٠، -٧)</p> $\sqrt{2} = \sqrt{2 \times 9} = \sqrt{18} = \text{نق}$

مفردة اختبارية

إذا علمت أن معادلة الدائرة $72 = (x+1)^2 + (y+5)^2$

(أ) أوجد إحداثيات مركز الدائرة

(ب) طول نصف قطر الدائرة

(٣) أوجد معادلة دائرة مركزها (٢، ٥) وتمر بالنقطة (٦، ٨)

الحل

طول القطعة المستقيمة الواصلة
بين مركز الدائرة وأي نقطة على
الدائرة = طول نصف قطر الدائرة

احسب طول القطعة المستقيمة
بين المركز والنقطة (٦، ٨) تحصل
على طول نصف القطر

يجب الحصول على طول نصف القطر

$$\text{نق} = \sqrt{(٥-٨)^2 + (٢-٦)^2}$$

$$\text{نق} = \sqrt{٩+١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥$$

معادلة الدائرة هي

$$٢٥ = (٢-ص)^2 + (٥-س)^2$$

(٤) طرفا قطر دائرة هما أ(٦، ٨)، ب(٢، -٤) أوجد معادلة هذه الدائرة

الحل

طول القطعة المستقيمة الواصلة
بين طرفا قطر الدائرة = طول قطر
الدائرة

احداثيات نقطة منتصف القطعة
المستقيمة بين طرفي قطر الدائرة
هي مركز الدائرة

$$\text{طول قطر الدائرة} = \sqrt{(٦+٤)^2 + (٨-٢)^2}$$

$$= \sqrt{١٤٤+٦٤} = \sqrt{٢٠٨}$$

$$= \sqrt{٥٢ \times ٤} = ٢\sqrt{٥٢}$$

طول نصف قطر الدائرة = $\sqrt{٥٢}$

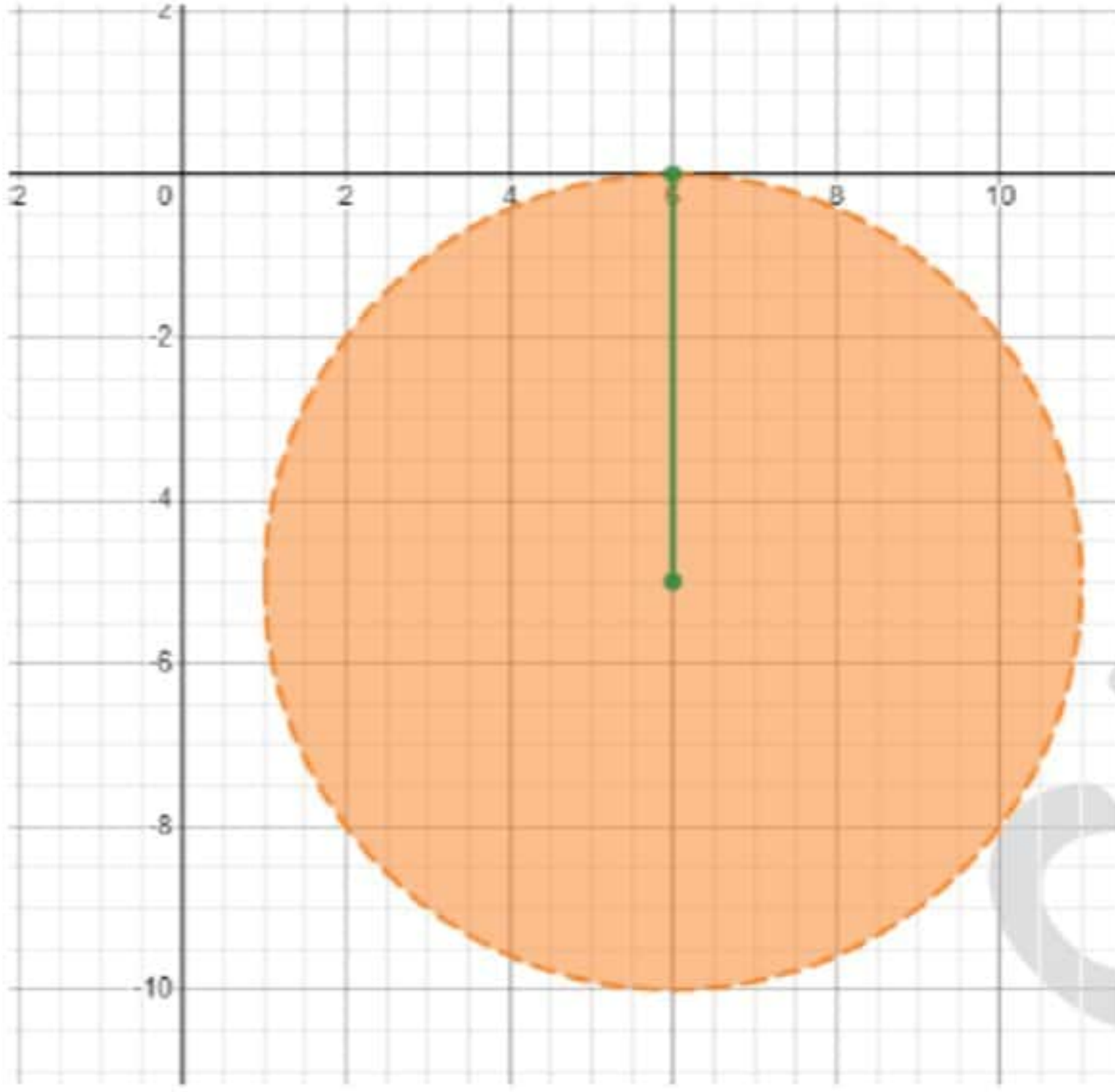
$$\text{مركز الدائرة هو } \left(\frac{٦+٤}{٢}, \frac{٨-٢}{٢} \right) = (٢, ٣)$$

معادلة الدائرة هي

$$٥٢ = (٢-ص)^2 + (٣-س)^2$$

(٥) أوجد معادلة الدائرة التي تمس محور السينات ومركزها (٦، -٥)

الحل



محور السينات مماس للدائرة

∴ محور السينات \perp نصف القطر

يمكن استنتاج طول نصف قطر الدائرة من خلال رسم مخطط تقديري للدائرة موضحاً فيها المركز والتماس مع المحور السيني

من الرسم المقابل نق = ٥

وتكون معادلة الدائرة هي

$$(x-6)^2 + (y+5)^2 = 25$$

من التمرين السابق يمكن استنتاج أن

نصف قطر الدائرة التي تمس محور

السينات = القيمة الموجبة

للإحداثي الصادي لمركز الدائرة

نصف قطر الدائرة التي تمس محور

الصادات = القيمة الموجبة

للإحداثي السيني لمركز الدائرة

مفردة اختبارية

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (١، ٤) وتمس محور الصادات

(٦) تقع النقطتان د(١، -٢)، ل(٧، ١) على محيط دائرة. بين أن مركز الدائرة يقع على المستقيم $٤س + ٢ص = ١٥$

الحل

يقع مركز الدائرة على العمود
المنصف للقطعة المستقيمة (الوتر)
بين أي نقطتين على محيط الدائرة

نقطة منتصف القطعة المستقيمة دل

$$\left(\frac{1+7}{2}, \frac{-2+1}{2}\right) = \left(\frac{4}{2}, \frac{-1}{2}\right) = (2, -\frac{1}{2})$$

$$\text{ميل القطعة المستقيمة دل} = \frac{-\frac{1}{2} - (-2)}{2 - 1} = \frac{3/2}{1} = \frac{3}{2}$$

ميل العمودي على دل = -٢

معادلة العمودي على دل هي

$$ص + ٢(٤ - س) = \frac{1}{2}$$

$$ص + ٢(-٨) = \frac{1}{2} \Rightarrow ص - ١٦ = \frac{1}{2}$$

$$٢س + ص = ١٦ + \frac{1}{2} = \frac{33}{2}$$

$$٤س + ٢ص = ١٥$$

∴ مركز الدائرة يقع على المستقيم $٤س + ٢ص = ١٥$

(٧) تمر دائرة بالنقطتين (٣، ٢)، (٧، ٢) ونصف قطرها $٢\sqrt{٢}$ أوجد المعادلتين الممكنتين لهاتين الدائرتين.

الحل

تمر بأي نقطتين مختلفتين دائرتين
مختلفتين، وتكون هاتان النقطتان
هما نقطتي التقاطع

بعد كل نقطة عن المركز = نق

نفرض أن إحداثيات المركز هي (أ، ب)

بعد النقطة الأولى عن المركز	بعد النقطة الثانية عن المركز
$2\sqrt{2} = \sqrt{(أ-٣)^2 + (ب-٢)^2}$	$2\sqrt{2} = \sqrt{(أ-٧)^2 + (ب-٢)^2}$
بتربيع الطرفين	بتربيع الطرفين
$٨ = (أ-٣)^2 + (ب-٢)^2$	$٨ = (أ-٧)^2 + (ب-٢)^2$
$٨ = ٩ - ٦أ + ٣أ^٢ + ٤ - ٤ب + ٤ب^٢$	$٨ = ٤٩ - ١٤أ + ٣أ^٢ + ٤ - ٤ب + ٤ب^٢$
$٥ = -٦أ + ٣أ^٢ - ٤ب + ٤ب^٢$ (١)	$٤٥ = -١٤أ + ٣أ^٢ - ٤ب + ٤ب^٢$ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) آنياً بطرح المعادلتين

$$٢٤ + ٢ب - ١٦ - ٤ب = ٥ -$$

$$٢٤ - ٢ب + ١٦ + ٤ب = ٥ -$$

$$٤٠ = ٨$$

$$٥ = أ$$

بالتعويض عن أ في المعادلة (١)

$$٥ - ٢٥ + ٢ب - ٣٠ - ٤ب = ٥ -$$

$$٠ = ٢ب - ٤ب$$

$$٠ = (٤ - ب)$$

$$٠ = ب \quad ب = ٤$$

الدائرة الأولى مركزها (٥ ، ٠) تكون معادلتها (س-٥)² + ص² = ٨

الدائرة الثانية مركزها (٤ ، ٥) تكون معادلتها (س-٤)² + (٥-ص)² = ٨

(٨) تمر دائرة بالنقاط و(٠ ، ٠) ، أ(٨ ، ٤) ، ب(٦ ، ٦). بين أن وأ قطر في الدائرة وأوجد معادلة الدائرة.

الحل

الزاوية المحيطية المرسومة في
نصف دائرة قائمة

حقيقة

إذا كان ق(أ ب ج) زاوية محيطية
قائمة فإن أ ج يكون قطر في هذه
الدائرة

إذا كانت ق (و ب أ) قائمة يكون أ و قطر

$$\text{ميل و ب} = \frac{-٦}{-٦} = ١$$

$$\text{ميل أ ب} = \frac{٨-٦}{٤-٦} = ١ -$$

$$\text{ميل أ ب} \times \text{ميل و ب} = ١ -$$

$$\therefore \text{ق (و ب أ)} = ٩٠^\circ$$

∴ أ و قطر في الدائرة

$$\text{مركز الدائرة} = \left(\frac{٨+٠}{٢}, \frac{٤+٠}{٢} \right) = (٢, ٤)$$

$$\sqrt{80} = \sqrt{2(0-4) + 2(0-8)} = \text{طول قطر الدائرة}$$

$$\sqrt{5} = \sqrt{5 \times 16} =$$

$$\sqrt{2} = \text{طول نصف قطر الدائرة}$$

معادلة الدائرة هي

$$20 = 2(2-ص) + 2(4-س)$$

ثانياً الصورة العامة لمعادلة الدائرة

الصورة العامة لمعادلة دائرة هي

$$س^2 + ص^2 + ل س + ن ص + ج = ٠$$

اقسم معامل س على (٢-)

اقسم معامل ص على (٢-)

مركز الدائرة هو $(\frac{ل}{٢}, \frac{ن}{٢})$

$$\frac{1}{٢} \sqrt{ل^2 + ن^2 - ٢(ل س + ن ص) + ٤ ج} = \text{طول نصف قطر الدائرة}$$

وأثناء عرض بعض المسائل سوف نقدم طريقة أخرى لإيجاد طول نصف القطر

مثال: أوجد مركز وطول نصف قطر كل دائرة من الدوائر التالية

$$(ب) ٢س^2 + ٢ص^2 - ١٤س - ١٠ص - ١٦٣ = ٠$$

الحل

بقسمة المعادلة على ٢

$$س^2 + ص^2 - ٧س - ٥ص - ٨١,٥ = ٠$$

مركز الدائرة هو $(\frac{٧}{٢}, \frac{٥}{٢})$

$$\text{نق} = \sqrt{٨١,٥ + 2(\frac{٧}{٢}) + 2(\frac{٥}{٢})} = ١٠$$

$$(أ) س^2 + ص^2 - ٨س + ٢٠ص + ١١٠ = ٠$$

الحل

مركز الدائرة هو $(٤, -١٠)$

$$\text{نق} = \frac{1}{٢} \sqrt{١١٠ \times ٤ - 2(٢٠) + 2(٨-١٠)}$$

$$\text{نق} = \frac{1}{٢} \sqrt{٢٤} = ٢ \times \frac{1}{٢} = ٢$$

يمكن إيجاد طول نق باستخدام إحداثيات المركز

$$\text{نق} = \sqrt{١١٠ - 2(١٠) + 2(٤)} = ٢$$

(٩) بين أنه يمكن كتابة $s^2 + 2s - 6 = 0$ في صورة $(s - 3)^2 + (s - 1)^2 = 10$ حيث أ، ب،
نق أعداد ثابتة، اكتب إحداثيات مركز الدائرة ونصف قطرها.

الحل

باستخدام الاكمال الى المربع

$$s^2 - 6s + 2s + 2 = 0$$

$$(s - 3)^2 + (s - 1)^2 = 10$$

$$(s - 3)^2 + (s - 1)^2 = 10$$

مركز الدائرة هو (٣، ١)

طول نصف قطر الدائرة = $\sqrt{10}$

$$(١٠) \text{ دائرة معادلتها } (s - 3)^2 + (s - 1)^2 = 25$$

- بين أن النقطة أ(٦، ٦) تقع على الدائرة
- أوجد معادلة مماس الدائرة عند النقطة أ

الحل

بالتعويض بإحداثيات النقطة أ في الطرف الأيمن لمعادلة الدائرة

$$\therefore (6 - 3)^2 + (6 - 1)^2 = 25 \text{ الطرف الأيسر}$$

حقيقة

في أي دائرة يكون المماس عمودياً
على نصف القطر

∴ النقطة أ تقع على الدائرة

المماس يكون عمودياً على نصف القطر

مركز الدائرة هو (٣، ٢)

$$\text{ميل القطعة المستقيمة (نق) الواصلة بين المركز والنقطة أ} = \frac{6 - 2}{6 - 3} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \text{ميل المماس} = -\frac{3}{4}$$

$$\text{معادلة المماس هي } (s - 3) \cdot \frac{3}{4} = (s - 1) \cdot \frac{4}{3}$$

$$\text{معادلة المماس هي } 3s - 9 = 4s - 4 \Rightarrow s = -5$$

(١١) يقطع المستقيم $٢س + ٥ص = ٢٠$ المحور السيني في النقطة أ، ويقطع المحور الصادي في النقطة ب، النقطة ج هي نقطة منتصف القطعة المستقيمة أ ب

- أوجد معادلة الدائرة التي مركزها ج وتمر بالنقطتين أ، ب
- بين أن الدائرة تمر بالنقطة $(٠, ٠)$.

الحل

تقع النقطة أ على المحور السيني أي الاحداثي الصادي لها $= ٠$
 بالتعويض عن $ص = ٠$ في معادلة المستقيم

$$٢س + ٥ \cdot ٠ = ٢٠ \quad س = ١٠$$

احداثيات النقطة أ هي $(١٠, ٠)$

تقع النقطة ب على المحور الصادي أي الاحداثي السيني لها $= ٠$
 بالتعويض عن $س = ٠$ في معادلة المستقيم

$$٢ \cdot ٠ + ٥ص = ٢٠ \quad ص = ٤$$

احداثيات النقطة ب هي $(٠, ٤)$

$$\text{احداثيات النقطة ج هي } \left(\frac{١٠+٠}{٢}, \frac{٠+٤}{٢} \right) = (٥, ٢)$$

إذا كانت ج مركز للدائرة وتقع في منتصف أ ب
 \therefore أ ج = ب ج

$$٢٩ = \sqrt{(٤-٢)^2 + (٥-١٠)^2} = \sqrt{٢^2 + ٥^2}$$

تكون معادلة الدائرة التي مركزها ج وتمر بالنقطتين أ، ب هي

حتى تكون النقطة $(٠, ٠)$ تقع على الدائرة يجب أن تحقق معادلة الدائرة أي بالتعويض عنها في معادلة الدائرة

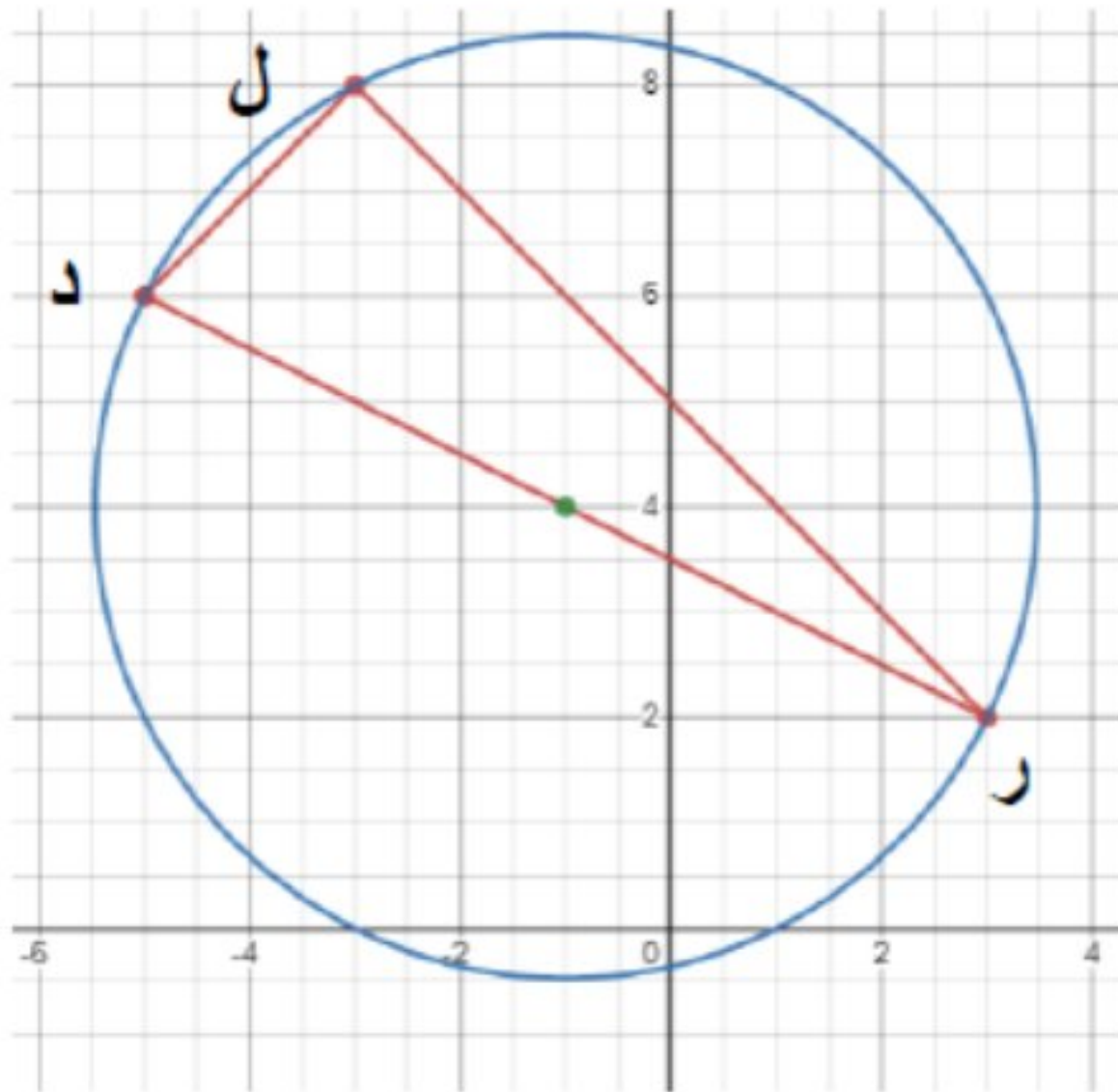
$$٢٩ = ٤ + ٢٥ = ٢(٢-٠)^2 + ٢(٥-٠)^2$$

\therefore النقطة وتقع على الدائرة

(١٢) تشكل النقط د(-٥، ٦)، ل(-٣، ٨)، ر(٣، ٢) مثلثاً

- بين أن (د ل ر) زاوية قائمة
- أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقط د، ل، ر

الحل



$$\text{ميل د ل} \times \text{ميل ل ر} = \frac{2-8}{3-(-3)} \times \frac{8-6}{-3-(-5)} = -1 \times 1 = -1$$

$$-1 = -1 \times 1 =$$

∴ د ل ⊥ ل ر

∴ (د ل ر) زاوية قائمة

زاوية (د ل ر) زاوية محيطية قائمة

∴ د ر قطر في الدائرة

يكون مركز الدائرة نقطة منتصف القطر د ر $(-4, -1) = \left(\frac{-5+3}{2}, \frac{6+2}{2}\right)$

$$\text{قطر الدائرة} = \sqrt{(-5-3)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

$$\text{نصف قطر الدائرة} = 2\sqrt{5}$$

تكون معادلة الدائرة التي مركزها (-4, -1) ونصف قطرها $2\sqrt{5}$ هي

(١٣) أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين (٣، ٧) و (١١، -١) ويقع مركزها على المستقيم $2x + y = 1$

الحل

يقع مركز الدائرة على العمود المنصف للقطعة المستقيمة الواصلة بين أ(٣، ٧)، ب(١١، -١)

نقطة المنتصف أ ب هي $(\frac{1+3}{2}, \frac{7-1}{2}) = (2, 3)$

يقع مركز الدائرة على العمود
المنصف للقطعة المستقيمة (الوتر)
بين أي نقطتين على محيط الدائرة

$$\text{ميل أ ب} = \frac{3-1}{7-11} = -1$$

ميل العمودي على أ ب = ١

معادلة العمودي على أ ب هي

$$1 - x = 1 - (y - 3)$$

$$8 = x - y$$

لدينا الان نتيجة أن مركز الدائرة يقع على المستقيمين $2x + y = 1$ ، $8 = x - y$

بحل المعادلتين معاً

$$2x + y = 1$$

$$8 = x - y$$

$$10 = 3x$$

$$x = \frac{10}{3}$$

بالتعويض عن قيمة x في معادلة أي مستقيم

$$y = 1 - 2x$$

$$y = -\frac{20}{3} + 1$$

مركز الدائرة هو (٥، -٢)

$$r^2 = (3 - \frac{10}{3})^2 + (7 - (-\frac{20}{3} + 1))^2 = 40$$

معادلة الدائرة هي: $(x - \frac{10}{3})^2 + (y + \frac{20}{3} - 1)^2 = 40$

(١٤) اوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقط و(٠، ٠) د(٣، ٩) ل(١١، ١١)

الحل

$$\text{نقطة منتصف الوتر و د} = \left(\frac{9+0}{2}, \frac{3+0}{2} \right) = (4,5)$$

$$\text{ميل الوتر و د} = \frac{3-0}{-3-0} = -1$$

ميل العمودي على الوتر و د هو $\frac{1}{3}$

معادلة العمودي على الوتر و د هي

$$\text{ص} - 4,5 = \frac{1}{3}(\text{س} - 1,5)$$

$$3(\text{ص} - 4,5) = (\text{س} - 1,5)$$

$$3\text{ص} - 13,5 = \text{س} - 1,5$$

$$\text{س} + 3\text{ص} = 12$$

(١)

$$\text{نقطة منتصف الوتر و ل} = \left(\frac{11+0}{2}, \frac{11+0}{2} \right) = (5,5)$$

$$\text{ميل الوتر و ل} = \frac{11-0}{11-0} = 1$$

ميل العمودي على الوتر و ل هو -١

معادلة العمودي على الوتر و ل هي

$$\text{ص} - 5,5 = -1(\text{س} - 5,5)$$

$$(\text{ص} - 5,5) = -(\text{س} - 5,5)$$

$$\text{ص} - 5,5 = -\text{س} + 5,5$$

$$\text{س} + \text{ص} = 11$$

(٢)

بحل المعادلتين (١)، (٢) معاً

$$\text{س} + 3\text{ص} = 12$$

$$\text{س} + \text{ص} = 11 \quad \text{بطرح المعادلتين}$$

يقع مركز الدائرة في نقطة تقاطع
الاعمدة المنصفة لأوتار الدائرة

خطوات الحل: إيجاد معادلة العمود
المنصف للوتر و د ، ومعادلة العمود
المنصف للوتر و ل

ثم حل المعادلتين معاً للحصول على
إحداثي مركز الدائرة

حساب طول نصف القطر ويكون
المسافة بين المركز وأي نقطة من
الثلاث

$$٢ص = ٤$$

$$ص = ٢$$

بالتعويض عن قيمة ص = ٢ في المعادلة (٢)

$$١١ = ٢ + س$$

$$س = ٩$$

∴ احداثي نقطة مركز الدائرة (٢، ٩)

$$نصف قطر الدائرة = \sqrt{(٠-٢)^2 + (٠-٩)^2} = \sqrt{٨٥}$$

تكون معادلة الدائرة التي مركزها (٢، ٩) ونصف قطرها $\sqrt{٨٥}$

$$٨٥ = (٢-ص)^2 + (٩-س)^2$$

(١٥) دائرة نصف قطرها ١٠ وحدات وتمر بالنقطة (٥، -١٦) وتمس محور السينات أوجد المعادلات الممكنة لهذه الدائرة.

الحل

الدائرة التي تمس محور السينات يكون
الاحداثي الصادي للمركز = نق

النقطة (٥، -١٦) تقع في الربع الرابع

يكون احداثي المركز على صورة (أ، -١٠)

تكون معادلة الدائرة على الصورة

$$(س-أ)^2 + (ص+١٠)^2 = ١٠٠$$

$$(س-أ)^2 + (ص+١٠)^2 = ١٠٠$$

بالتعويض بالنقطة (٥، -١٦) في معادلة الدائرة

$$١٠٠ = (٥-أ)^2 + (-١٦+١٠)^2$$

$$١٠٠ = ٢٥ - ١٠أ + ٣٦$$

$$٠ = ٣٩ - ١٠أ$$

$$٠ = (٣+أ)(١٣-أ)$$

$$٣ = -أ$$

$$١٣ = أ$$

معادلة الدائرة الأولى (س-١٣)^٢ + (ص+١٠)^٢ = ١٠٠

معادلة الدائرة الثانية (س+٣)^٢ + (ص+١٠)^٢ = ١٠٠

