مراجعة درس التوزيع الهندسي من الوحدة العاشرة توزيع ذي الحدين والتوزيع الهندسي

تاريخ نشر الملف على موقع المناهج: 09-05-2023 13:34:36 ا اسم المدرس: قيس الشبيبي

المزيد من الملفات بحسب الصف الحادي عشر والمادة رياضيات متقدمة في الفصل الثاني

١٠-٣ التوزيع الهندسي

عندما نرمي حجر نرد للحصول على الرقم ٦

ما إمكانية الحصول على الرقم ٦ من أول مرة نرمي فيها حجر النرد؟

وما إمكانية الحصول على الرقم نفسه من ثاني مرة نرمي فيها حجر النرد؟

وما إمكانية الحصول عليه من ثالث مرة نرمي فيها حجر النرد؟ وهكذا...

نجيب عن الأسئلة باستخدام احتمال النجاح والفشل ب، ١ − ب.

ل(الحصول على الرقم ٦ من أول رمية) = ب ← نجاح.

ل(الحصول على الرقم ٦ من ثاني رمية) = (١ − ب)ب ← فشل تبعه نجاح.

ل(الحصول على الرقم ٦ من ثالث رمية) = $(١ - ب)^٢$ب ← فشل مرتَين يتبعهما نجاح.

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل (س) 'عدد المحاولات للحصول على أول نجاح في سلسلة من المحاولات المتكررة المستقلة' يُسمى التوزيع الهندسي.

يبيّن الجدول الآتي احتمال حدوث أول نجاح عند المحاولة 'ر':

ر	١	٢	٣	٤	....	ن	....
ل(ر)	ب	ب(١ − ب)	ب$(١ - ب)^٢$	ب$(١ - ب)^٣$	....	ب$(١ - ب)^{ن-١}$	....

نتيجة ٣

يرمز إلى المتغير العشوائي (س) ذي التوزيع الهندسي بالرمز س ~ هندسي (ب)، واحتمال حدوث أول نجاح هو في المحاولة رقم ر هو ل (س = ر) = ب $(١ - ب)^{ر-١}$، ر = ١، ٢، ٣، ...

س ~ ث (ن، ب)

ر = ٠، ١، ٢، ٣، ... ن

نلاحظ أن الفرق الجوهري بين التوزيعين ذي الحدين والهندسي هو أن عدد التجارب (المحاولات) في التوزيع ذي الحدَّين ثابت من البداية، ويمكن عدّ مرات النجاح، بينما في التوزيع الهندسي تتكرر المحاولات حتى يتم حدوث أول نجاح.

نتيجة ٤

عندما س ~ هندسي (ب)، فإن:

- ل(س ≤ ر) = ١ − $(١ - ب)^ر$
- ل(س > ر) = $(١ - ب)^ر$

① ل(س = ر) = ب$(١-ب)^{ر-١}$

② ل(س ≤ ر) = ١ − $(١-ب)^ر$

③ ل(س > ر) = $(١-ب)^ر$

مثال ٧

وجد في محاولات مستقلة مكررة أن احتمال النجاح في كل محاولة $\boxed{٠{,}٦٦}$ ب = ٠٫٦٦ ١ − ب = ٠٫٣٤

أوجِد احتمال حدوث أول نجاح لأقرب ٣ ارقام معنوية:

أ في المحاولة الثالثة. ر = ٣

ب قبل المحاولة الثالثة.

ج بعد المحاولة الثالثة.

الحل:

أ) ل(س = ٣) = ٠٫٦٦ (٠٫٣٤)^{٢}

= ٠٫٠٧٦٢٩٦ ≃ ٠٫٠٧٦٣

ب) ل(س < ٣) = ل(س ≤ ٢) = ١ − (٠٫٣٤)^{٢}

≃ ٠٫٨٨٤

ج) ل(س > ٣) = (٠٫٣٤)^{٣} = ٠٫٠٣٩٣

القوانين

١ ل(س = ر) = ب (١ − ب)$^{ر-١}$

٢ ل(س ≤ ر) = ١ − (١ − ب)^{ر}

٣ ل(س > ر) = (١ − ب)^{ر}

تمارين ١٠-٣

ب = ٠٫٢ ١ − ب = ٠٫٨

١) إذا علمت أن المتغير العشوائي المنفصل توزيعه الاحتمالي س ~ هندسي (٠٫٢)، فأوجِد:

أ ل(س = ٧)

= ٠٫٢ (٠٫٨)^{٦}

= ٠٫٠٥٢٤

ب ل(س ≠ ٥) = ١ − ل(س = ٥)

= ١ − (٠٫٢ (٠٫٨)^{٤})

= ٠٫٩١٨

ج ل(س > ٤)

= (٠٫٨)^{٤}

= ٠٫٤٠٩٦

$ب = \frac{١}{٦}$ ، $١ - ب = \frac{٥}{٦}$

٢) يُخطئ لاعب كرة قدم، ويعطي الفريق الخصم ضربة جزاء في كل ست مباريات يشارك فيها. أوجد احتمال أن تكون ضربة الجزاء التالية التي يتسبب بها اللاعب:

أ في المباراة الثامنة التي يشارك فيها.

$ر = ٨$

$ل(س = ٨) = \frac{١}{٦}\left(\frac{٥}{٦}\right)^{٧}$

$= ٠٫٠٤٦٥$

ب بعد المباراة الرابعة التي يشارك فيها.

$ل(س > ٤) = \left(\frac{٥}{٦}\right)^{٤}$

$= ٠٫٤٨٢$

القوانين

١ $ل(س = ر) = ب(١ - ب)^{ر-١}$

٢ $ل(س \leq ر) = ١ - (١ - ب)^{ر}$

٣ $ل(س > ر) = (١ - ب)^{ر}$

٣) رُقّمت الأوجه الخمسة لقرص دوّار منتظم بالأرقام ١، ١، ٢، ٣، ٤، دُوّر القرص عددًا من المرات حتى ظهر الرقم ١، أوجد احتمال أن يكون قد دُوّر:

$ب = \frac{٢}{٥}$ ، $١ - ب = \frac{٣}{٥}$

أ مرتَين فقط.

$ر = ٢$

$ل(س = ٢) = \frac{٢}{٥}\left(\frac{٣}{٥}\right)$

$= ٠٫٢٤$

ب على الأكثر خمس مرات.

$\leq$

$ل(س \leq ٥) = ١ - \left(\frac{٣}{٥}\right)^{٥}$

$= ٠٫٩٢٢$

ج على الأقل ثماني مرات.

$\geq$

$ل(س \geq ٨) = ل(س > ٧)$

$= \left(\frac{٣}{٥}\right)^{٧}$

$= ٠٫٠٢٧٩$

ملاحظة:

- عبارة على الأكثر تعني علامة أصغر من أو يساوي (≥)
- عبارة على الأقل تعني علامة أكبر من أو يساوي (≤)

٤) احتمال أن تكون وحدة تالفة من إنتاج مصنع ما ٠,٠٧ ، واختير عدد من وحدات الإنتاج عشوائيًا، واختُبرت صلاحيتها.

ب = ٠٫٠٧ ١ - ب = ٠٫٩٣

أ أوجِد احتمال أن تكون أول وحدة تالفة:

١) هي الوحدة رقم ١٢

ر = ١٢

ل(س = ١٢) = ٠٫٠٧ $(٠٫٩٣)^{١١}$

= ٠٫٠٣١٥

٢) ليست من أول ١٠ وحدات اختُبرت.

ل(س > ١٠) = $(٠٫٩٣)^{١٠}$

= ٠٫٤٨٣٩

٣) واحدة من أول ٨ وحدات اختُبرت.

ل(س ≤ ٨) = ١ - $(٠٫٩٣)^{٨}$

= ٠٫٤٤٠٤

القوانين

١ ل(س = ر) = ب $(١ - ب)^{ر - ١}$

٢ ل(س ≤ ر) = ١ - $(١ - ب)^{ر}$

٣ ل(س > ر) = $(١ - ب)^{ر}$

ب = ٠٫١٤ ١ - ب = ٠٫٨٦

٥) في أحد الشوارع الممتدة ١٤٪ من المركبات هي شاحنات نقل بضائع. تقف فتاة على جسر للمشاة مطل على هذا الشارع، وتبدأ بعَدّ المركبات حتى تعبر أول شاحنة نقل. أوجد احتمال أن تكون قد عدّت:

أ على الأكثر ثلاث مركبات.

≤

= ل(س ≤ ٣) ١ - $(٠٫٨٦)^{٣}$

= ٠٫٣٦٣٩

ب على الأقل خمس مركبات.

≥

ل(س ≥ ٥) = ل(س > ٤)

= $(٠٫٨٦)^{٤}$

= ٠٫٥٤٧

٦) أي من الحالات الآتية يمثّل توزيعًا هندسيًا؟ وأيّها لا يمثّل؟ أوضح إجابتك.

أ يحتوي صندوق على حبّتَي تفاح حمراوَين، وعلى عدد كبير من حبّات التفاح الأخضر. اختار طفل حبّة تفاح عشوائيًا وأكلها، واختار الحبّة الثانية وأكلها، وهكذا ... المتغير (س) هو عدد حبّات التفاح التي اختارها الطفل وأكلها حتى اختار حبّة تفاح خضراء اللون.

ب يجلس طفل صغير أمام حاسوب محمول وعلى شاشته برنامج كتابة نصوص. س هو عدد المفاتيح التي ينقرها الطفل عشوائيًا حتى نقر أول مفتاح أكمل كلمة من ثلاثة أحرف ذات معنى.

ج المتغير (س) هو عدد مرات إسقاط حبّة أرزّ من ارتفاع مترَين على لوحة شطرنج، إلى أن استقرت أول مرة هذه الحبّة على مربع أبيض في اللوحة.

د المتغير (س) هو عدد المرات التي شارك فيها رياضي في سباق جري حتى ربح أول سباق.

٧) ليكن التوزيع الهندسي للمتغير العشوائي (ط) حيث $\frac{ل(ط = ٢)}{ل(ط = ٥)} = ١٥٫٦٢٥$

أوجِد $\boxed{ل(ط = ٣)}$.

القوانين

١ $ل(س = ر) = ب(١ - ب)^{ر-١}$

٢ $ل(س \leqslant ر) = ١ - (١ - ب)^{ر}$

٣ $ل(س > ر) = (١ - ب)^{ر}$

$$\frac{ل(ط=٢)}{ل(ط=٥)} = \frac{\cancel{ب}\cancel{(١-ب)}}{\cancel{ب}(١-ب)^{\cancel{٤}}} = ١٥٫٦٢٥$$

$$\frac{١}{(١-ب)^{٣}} = ١٥٫٦٢٥$$

$$(١-ب)^{٣} = \frac{١}{١٥٫٦٢٥}$$

$١ - ب = ٠٫٤$

$ب = ٠٫٦$

$\therefore ل(ط = ٣) = ب(١-ب)^{٢}$

$= ٠٫٦(٠٫٤)^{٢}$

$= ٠٫٠٩٦$

٨) إذا علمت أن س ~ هندسي (ب)، ل(س ≤ ٤) = $\frac{٢٣٨٥}{٢٤٠١}$ ، فأوجد ل(١ ≤ س < ٤).

القوانين

١	ل(س = ر) = ب(١ − ب)$^{ر-١}$
٢	ل(س ≤ ر) = ١ − (١ − ب)^{ر}
٣	ل(س > ر) = (١ − ب)^{ر}

$\frac{٢٣٨٥}{٢٤٠١}$ = ١ − (١ − ب)^{٤}

(١ − ب)^{٤} = ١ − $\frac{٢٣٨٥}{٢٤٠١}$

١ − ب = $\frac{٢}{٧}$

ب = $\frac{٥}{٧}$

٧ = س − ١

س = ٧ − ١

∴ ل(١ ≤ س < ٤) = ل(س < ٤) = ل(س ≤ ٣)

= ١ − ($\frac{٢}{٧}$)^{٣}

= ٠٫٩٧٦٦