وزارة التربية
Ministry of Education
State of Kuwait | دولـــة الكويـــت

الرياضيات

الصفّ التاسع

الفصل الدراسي الثاني ـ القسم الثاني

2/2

المرحلة المتوسّطة

وزارة التربية
Ministry of Education
State of Kuwait | دولــــة الكويــت

الرياضيات

الصفّ التاسع

الفصل الدراسي الثاني ـ القسم الثاني

تأليف
أ. دلال مبارك فلاح الحجرف (رئيسًا)

أ. نوره عبد الله أبورقبة العتيبي　　　أ. ساره زايد شينان العجمي

أ. وسميه بادي هادي الرشيدي　　　أ. عصام عبد الهادي السيد حسن

أ. عفاف عبد العزيز يعقوب الصانع

الطبعة الأولى
١٤٤٧ هـ
٢٠٢٥ - ٢٠٢٦ م

الطبعة الأولى: ٢٠٢٥ / ٢٠٢٦ م

المراجعة العلمية

أ. سمير عبداللَّه أحمد مرسي

ذات السلاسل - الكويت

أودع بمكتبة الوزارة تحت رقم (٩٢) بتاريخ ١٦/ ١/ ٢٠٢٦ م

بسم الله الرحمن الرحيم

حضرة صاحب السمو الشيخ مشعل الأحمد الجابر الصباح
أمير دولة الكويت

H.H. Sheikh Meshal AL-Ahmad Al-Jaber Al-Sabah
Amir Of The State Of Kuwait

سمو الشيخ صباح خالد الحمد الصباح
ولي عهد دولة الكويت

H. H. Sheikh Sabah Khaled Al-Hamad Al-Sabah
Crown Prince Of The State Of Kuwait

مقدّمة

الحمدلله ربّ العالمين والصلاة والسلام على سيد المرسلين محمد بن عبدالله وصحبه أجمعين.

اِنطلاقًا من التوجيهات السامية لحضرة صاحب السموّ أمير البلاد الشيخ مشعل الأحمد الجابر الصباح ، حفظه الله ورعاه ، بضرورة الإسراع في تنفيذ كافّة مشاريع الدولة التنموية ومن ضمنها على وجه الخصوص المشاريع التعليمية ، وتماشيًا مع رؤية الكويت ٢٠٣٥ والتي تنادي بكويت جديدة فقد شرعت وزارة التربية في تطوير مناهجها التعليمية مستندة ، في ذلك إلى أهمّية رأس المال البشري كعنصر أساسي في تنمية الوطن ورفعته.

ولأنّ المناهج التعليمية هي قاعدة الهرم التعليمي إلى جانب المعلّم والمتعلّم ، وتُعدّ أحد الروافد المهمّة في خلق جيل متعلّم وواعٍ ، قادر على المشاركة في بناء المجتمع ، ولأنّ المناهج عبارة عن كمّ الخبرات التربوية والتعليمية التي تُقدَّم للمتعلّم ، فقد أولت الوزارة أهمّية بتطوير المناهج حسب المعايير العلمية وذلك لتحقيق نقلة نوعية في الشكل والمضمون ، وإيمانًا بأهمّيتها وانطلاقًا من أنّها ذات صفة عالمية مع الأخذ في الاعتبار خصوصية المجتمع الكويتي وبيئته المحلّية ، ملتزمة بأن تصبّ جميعها في تعزيز الهويّة الوطنية وبعقلية منفتحة على الآخرين مع احترام حقوق الإنسان وحرّياته الأساسية والتمسّك بمبادئ الإسلام والتسامح من جهة ، وغزيرة بمهارات القرن الواحد والعشرين لتعزيز المفاهيم الرياضية لجميع المتعلّمين من جهة أخرى لكي يكونوا في طليعة المنافسين في المسابقات العلمية والدولية ، وذلك عبر بناء الخطط التعليمية المعتمَدة من قطاع المناهج مؤكِّدين على أهمّية التكامل بين الجوانب العلمية والتطبيقية حتّى تكون ذات طبيعة وظيفية مرتبطة بحياة المتعلّم ، متضمّنة في الكثير من بنودها التمارين ذات المستويات العليا في التفكير والفهم والتحليل والتركيب .

وقد تمّت صياغة وترتيب الكتاب المدرسي في منهجية خاصة ذات هيكل ومجالات معينة تتمحور حول العدّ والجبر والهندسة والقياس ، وأخيرًا الإحصاء والاحتمال .

فقد تمّ بناء الكتاب وفق منهجية تربوية حديثة تراعي التدرّج المنطقي في المفاهيم والمهارات لبناء معرفة رياضية تراكمية تراعي الفروق الفردية بين المتعلّمين وتعزّز التفكير الرياضي العميق .

كما ويحوي الكتاب على وحدات تعليمية وموضوع محوري يتمّ إبرازه في مقدّمة كلّ وحدة ، تساعدهم على تنمية الفهم البنائي وربط المفاهيم الجديدة مع سياقات من واقع الحياة .

وحرصنا على إدراج التمارين المتنوّعة مع نهاية كلّ درس ، والتي تنوّعت بين الأسئلة المباشرة والمسائل الحياتية وأسئلة مهارات تفكير عليا ، مثل التبرير والنقد وتعدّد طرق الحلّ والاستنتاج .

تنتهي كلّ وحدة بقسم خاصّ للتقويم لقياس مدى تحقيق الأهداف متضمّنة أسئلة شاملة للمفاهيم والمهارات التي تمّ تناولها ، حتّى تكون أداة تمكّننا من تحديد الاحتياجات التعليمية لاحقًا .

ممّا سبق من معطَيات وغيرها من الجوانب التعليمية والتربوية ، فقد تمّت صياغة وإعداد كتب الرياضيات لتحقّق نقلة نوعية ذات جودة عالية تلبيّ الطموحات المطلوبة وتكون نافذة واسعة تُطلّ على آمالنا وتطلّعاتنا في المستقبل لما نهدف إليه من تأسيس فكر رياضي في عقول أجيالنا القادمة تنهض بها أمّتنا وتضعها في مكانها المناسِب في الصفوف المتقدّمة ، ويُشار إليها بالبنان مع كلّ محفل.

المحتويات

الوحدة التعليمية السابعة

هندسة المثلّث

الوحدة التعليمية الثامنة

النسبة المئوية - الهندسة والقياس

الوحدة التعليمية
السابعة

هندسة المثلّث

العلوم الهندسية والجسور

على الرغم من بساطة شكل المثلّث ، فإنّه يُخفي في داخله نظامًا هندسيًّا بالغ الدقّة ، لا زال العلماء والمهندسون يعتمدون عليه في تصميم التقنيات الحديثة .

فعندما نرسم منصِّفًا لزاوية ، أو متوسّطًا لضلع ، أو ارتفاعًا من رأس ، فإنّ هذه الخطوط لا تعمل بمعزل عن بعضها ، بل تتّجه دائمًا نحو نقطة توازن ثابتة ، وكأنّ المثلّث يمتلك نظامًا داخليًّا يوجّه عناصره نحو مركز واحد . هذه النقاط الخاصّة ليست مجرّد نهايات لتقاطع خطوط ، بل هي مفاتيح فهم الثبات الهندسي في الروبوتات ، واستقرار الطائرات المسيَّرة ، وتوزيع القوى في الجسور والأبراج المعاصِرة .

في هذه الوحدة ، سنقترب من هذا العالم الدقيق ، ونكتشف كيف تتلاقى هذه الخطوط المختلفة في نقطة واحدة داخل كلّ مثلّث ، وما الذي يجعل هذه الحقيقة الهندسية أساسًا لفهم التوازن في العلوم الحديثة .

المجال	معايير المنهج	مؤشّر الأداء
الهندسة والقياس	اِستخدام التصوّر البصري والتعليل المكاني والنمذجة الهندسية لتمثيل عالمه المادّي ووصفه وحلّ مشكلاته .	التذكّر - التعرّف - الفهم - التعاون - العمل الجَماعي - الاستكشاف والتقصّي - المقارنة والتمييز - العلاقات - التعليل - الاستدلال - الاستنتاج - التقويم - حلّ المشكلات - القوانين - التخطيط - الوسائط
	تحليل صفات وخصائص الأشكال الهندسية ثنائية وثلاثية الأبعاد ، وتنمية التفكير الرياضي حول العلاقات الهندسية ، والمقارنة بين الأشكال وتصنيفها .	

مخطّط تنظيمي للوحدة التعليمية السابعة

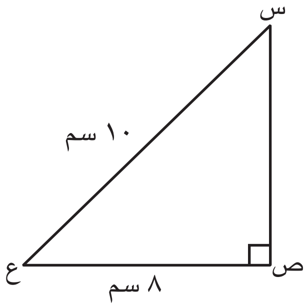
- هندسة المثلّث
  - القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفَي ضلعَين
  - القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة إلى منتصف الوتر
  - محاور أضلاع المثلّث
  - منصِّفات زوايا المثلّث
  - الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث
  - القطع المتوسّطة للمثلّث

هل أنت مستعدّ؟

١ في الشكل المقابِل :

أوجِد بالبرهان طول $\overline{\text{س ص}}$ ،

ثمّ أوجِد مساحة المثلّث .



....

....

....

....

٢ حُلّ المعادلة التالية : س = ٢ (س + ٣) حيث س ∈ ح

....

....

٣ أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي في أبسط صورة :

(أ) $\frac{١}{٢} \times ١٥ =$ ....

(ب) $\sqrt{١٤٤} =$ ....

(ج) $\sqrt{٩} =$ ....

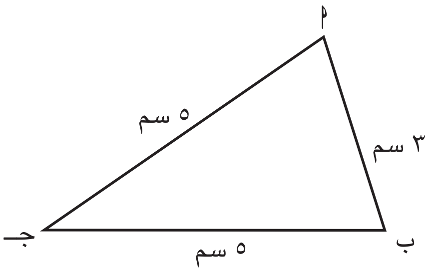
(د) $\frac{٢}{٣} \times ٢٧ =$ ....

(هـ) $\frac{٣}{٢} \times ١٨ =$ ....

(و) $\frac{١}{٣} \times ٣٩ =$ ....

(ز) $\sqrt{١٠٠} =$ ....

٤ في الشكل المقابِل ، أكمِل :



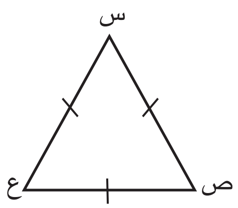
(أ) نوع المثلّث أ ب جـ بالنسبة إلى أضلاعه

....

(ب) محيط المثلّث أ ب جـ = ...

....

٥ في الشكل المقابِل ، أكمِل :

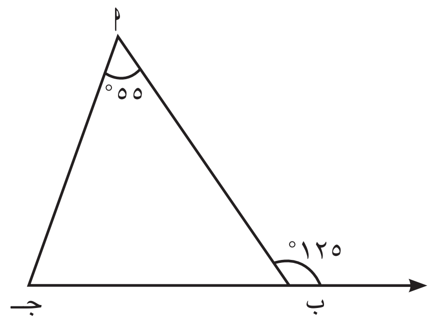


أ) نوع المثّلث س ص ع بالنسبة إلى أضلاعه ....

ب) ق (ص̂) = ق (ع̂) = ق (س̂) = ...

٦ أكمِل ما يلي :

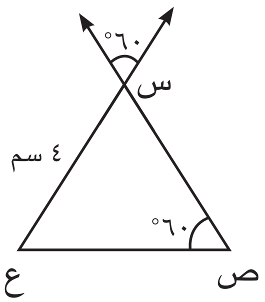
أ)



ق (جـ̂) = ...

السبب = ...

ب)

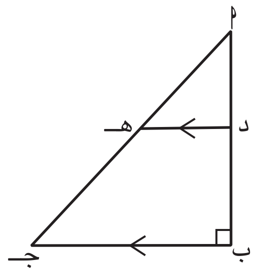


ق (ص س̂ ع) = ... السبب = ...

ق (ع̂) = ... السبب = ...

س ص = ... السبب = ...

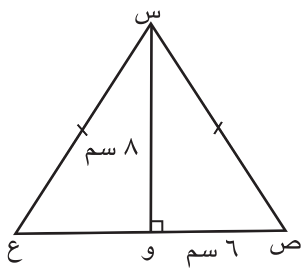
ج)



ق (ا د̂ هـ) = ...

السبب = ...

د)

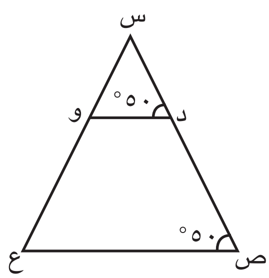


و ع = ... السبب = ...

س ص = ... السبب = ...

٧ في الشكل التالي :

أثبِت أنّ : د و // ص ع

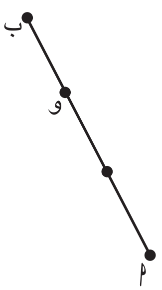


....

....

....

٨ في الشكل المقابِل : النقطة و
تقسم ا ب بنسبة ٢ : ١ من جهة ا
أكمِل ما يلي :



أ) ا و = ... و ب

و ب = ... ا و

ب) ا ب = ... ا و

ا و = ... ا ب

ج) ا ب = ... و ب

و ب = ... ا ب

٧ - ١ القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفَي ضلعَين في مثلّث

The Midsegment of a Triangle

سوف تتعلّم : توظيف نظرية القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفَي ضلعَين في مثلّث لحلّ تمارين هندسية .

العبارات والمفردات :

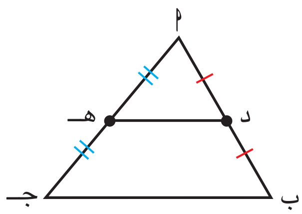
مثلّث	Triangle	قطعة مستقيمة	Segment

اِستكشِف (١)

في المثلّث أ ب جـ :

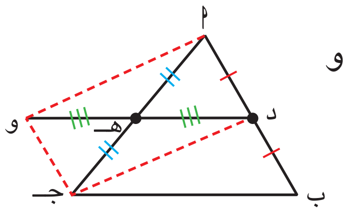
د منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$

ما العلاقة بين $\overline{\text{د هـ}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ؟



العمل : نمدّ $\overrightarrow{\text{د هـ}}$ إلى و ، حيث د هـ = هـ و

ثمّ نصل $\overline{\text{أ و}}$ ، $\overline{\text{د جـ}}$ ، $\overline{\text{و جـ}}$.



اللوازم

أدوات هندسية .

تذكَّر

من خواصّ متوازي الأضلاع القطران ينصّف كلّ منهما الآخر

١ هل الشكل أ د جـ و متوازي أضلاع ؟ لماذا ؟

....

٢ $\overline{\text{أ د}}$ // .... ، أ د = ...

٣ هل الشكل ب جـ و د متوازي أضلاع ؟ لماذا ؟

....

٤ $\overline{\text{د و}}$ // .... ، د و = ...

٥ $\overline{\text{د هـ}}$ // .... ، د هـ = ... ب جـ

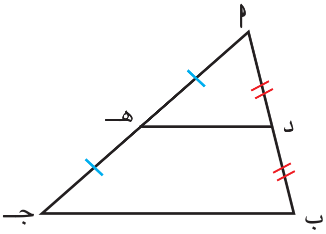
نظرية :

القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفَي ضلعَين في مثلّث توازي الضلع الثالث ، وطولها يساوي نصف طول هذا الضلع .

في المثلّث ﺍ ب جـ :

إذا كان د منتصف $\overline{ﺍب}$ ، هـ منتصف $\overline{ﺍجـ}$

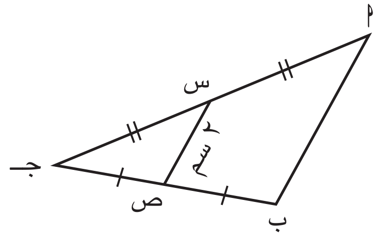
فإنّ $\overline{دهـ}$ // $\overline{بجـ}$ ، د هـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ



دورك الآن (١)

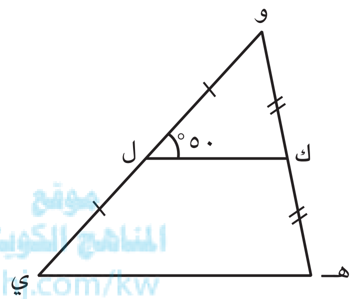
في كلّ من المثلّثات التالية ، أكمِل (دون استخدام الأدوات الهندسية) :

أ



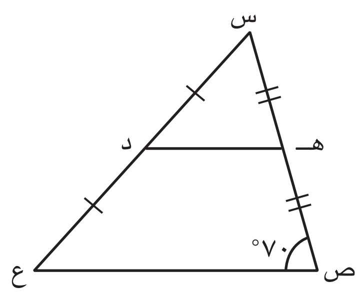
ﺍ ب = ...

ب



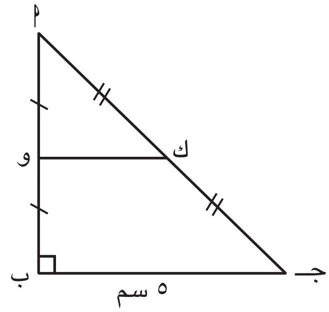
ق ($\hat{ي}$) = ...

جـ



ق (س $\hat{هـ}$ د) = ...

د



و ك = ...

مثال (١) :

في الشكل المقابِل س ص ع مثلّث فيه :

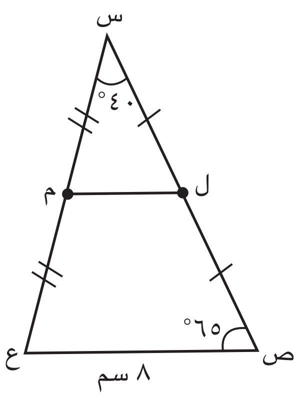
ل منتصف $\overline{سص}$ ، م منتصف $\overline{سع}$ ،

ص ع = ٨ سم ، ق (ص $\hat{س}$ ع) = ٤٠° ، ق (س $\hat{ص}$ ع) = ٦٥° .

أوجِد بالبرهان : (١) طول $\overline{لم}$

(٢) ق (س $\hat{ل}$ م)

(٣) ق (س $\hat{م}$ ل)



الحلّ :

المعطَيات : ل منتصف $\overline{\text{س ص}}$ ، م منتصف $\overline{\text{س ع}}$ ، ص ع = ٨ سم ،

ق (ص $\hat{\text{س}}$ ع) = ٤٠° ، ق (س $\hat{\text{ص}}$ ع) = ٦٥°

المطلوب : إيجاد : (١) طول $\overline{\text{ل م}}$ (٢) ق (س $\hat{\text{ل}}$ م) (٣) ق (س $\hat{\text{م}}$ ل)

البرهان : في Δ س ص ع :

∵ ل منتصف $\overline{\text{س ص}}$ ، م منتصف $\overline{\text{س ع}}$ (معطى)

∴ ل م = $\frac{1}{2}$ ص ع ، $\overline{\text{ل م}}$ // $\overline{\text{ص ع}}$ (نظرية)

∵ ص ع = ٨ سم (معطى)

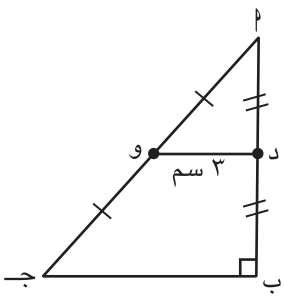
∴ ل م = $\frac{1}{2}$ × ٨ = ٤ سم

∴ ق (س $\hat{\text{ل}}$ م) = ق ($\hat{\text{ص}}$) = ٦٥° (بالتناظر والتوازي)

∵ مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق (س $\hat{\text{م}}$ ل) = ١٨٠° - (٦٥° + ٤٠°) = ١٨٠° - ١٠٥° = ٧٥°

دورك الآن (٢)



في الشكل المقابِل ، أ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب

د منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، و منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ ،

ق ($\hat{\text{أ}}$) = ٤٠° ، د و = ٣ سم

أوجِد بالبرهان : (١) طول $\overline{\text{ب جـ}}$

(٢) ق (أ $\hat{\text{د}}$ و)

(٣) ق (أ $\hat{\text{و}}$ د)

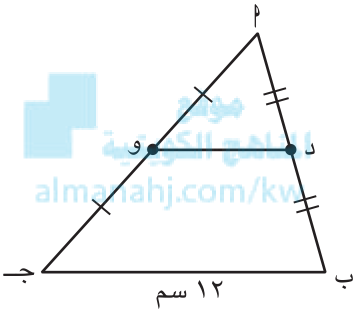
المعطَيات : ....

....

المطلوب : ....

البرهان : ....
....
....
....
....
....
....
....

مثال (٢) :



ء ب جـ مثلّث فيه :

د منتصف $\overline{\text{ء ب}}$ ، و منتصف $\overline{\text{ء جـ}}$

ء ب = ١٠ سم ، ء جـ = ١٣ سم ، ب جـ = ١٢ سم .

أوجِد بالبرهان : (١) طول $\overline{\text{د و}}$

(٢) محيط Δ ء د و .

الحلّ :

المعطَيات : ء ب جـ مثلّث فيه د منتصف $\overline{\text{ء ب}}$ ، و منتصف $\overline{\text{ء جـ}}$

ء ب = ١٠ سم ، ء جـ = ١٣ سم ، ب جـ = ١٢ سم .

المطلوب : إيجاد (١) طول $\overline{\text{د و}}$

(٢) محيط Δ ء د و

البرهان : في Δ ء ب جـ :

∵ د منتصف $\overline{\text{ء ب}}$ ، و منتصف $\overline{\text{ء جـ}}$ (معطى)

∴ $\overline{\text{د و}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، د و = $\frac{1}{2}$ ب جـ (نظرية)

∴ د و = $\frac{1}{2}$ × ١٢ = ٦ سم

ء د = $\frac{1}{2}$ ء ب = $\frac{1}{2}$ × ١٠ = ٥ سم

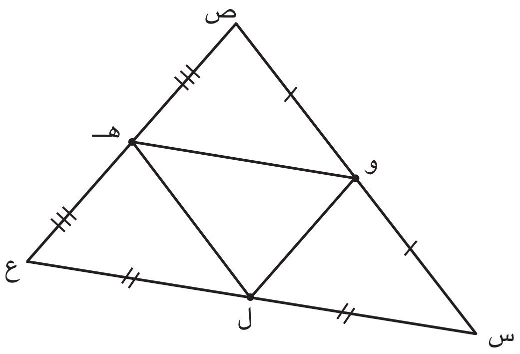
ء و = $\frac{1}{2}$ ء جـ = $\frac{1}{2}$ × ١٣ = ٦,٥ سم

∴ محيط Δ ء د و = مجموع أطوال أضلاعه

= ٦ + ٦,٥ + ٥

= ١٧,٥ سم

دورك الآن (٣)



المثلّث س ص ع فيه :

س ص = ٢٠ سم ، ع ص = ١٦ سم ،

س ع = ٢٤ سم ، و ، هـ ، ل منتصفات

س ص ، ع ص ، س ع على الترتيب .

أوجِد بالبرهان محيط المثلّث ل هـ و .

المعطَيات : ....

....

المطلوب : إيجاد محيط Δ ....

البرهان : في المثلّث س ص ع :

∵ و منتصف س ص ، هـ منتصف ع ص (معطى)

∴ و هـ = $\frac{1}{2}$ س ع = $\frac{1}{2}$ × ٢٤ سم = ١٢ سم (نظرية)

∵ ل منتصف .... ، هـ منتصف ....

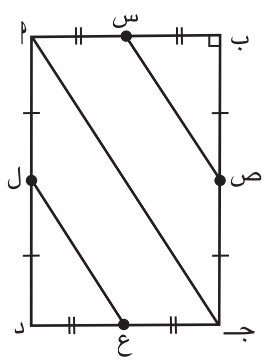
∴ ل هـ = ... = $\frac{1}{2}$ × .... = ... (نظرية)

∵ .... منتصف .... ، .... منتصف ....

∴ ل و = ... = $\frac{1}{2}$ × .... = ... (نظرية)

محيط Δ ل و هـ = ... + ... + ... = ... سم

مثال (٣) :



في الشكل المقابِل ، أ ب جـ د مستطيل فيه :

س ، ص ، ع ، ل منتصفات أضلاعه

أثبِت أنّ س ص = ع ل

الحلّ :

المعطَيات : أ ب جـ د مستطيل

س ، ص ، ع ، ل منتصفات أضلاع المستطيل

المطلوب : إثبات أنّ س ص = ع ل .

تذكَّر

من خواصّ المساواة

إذا كان أ = ب ، ب = جـ ،

فإنّ أ = جـ

البرهان : في Δ ؍ب جـ

∵ س منتصف ؍ب ، ص منتصف ب جـ

س ص = $\frac{١}{٢}$ ؍جـ (١) (نظرية)

في Δ جـ د ؍ :

∵ ع منتصف جـ د ، ل منتصف ؍د

∴ ع ل = $\frac{١}{٢}$ ؍جـ (٢) (نظرية)

من (١) ، (٢)

∴ س ص = ع ل (من خواصّ المساواة)

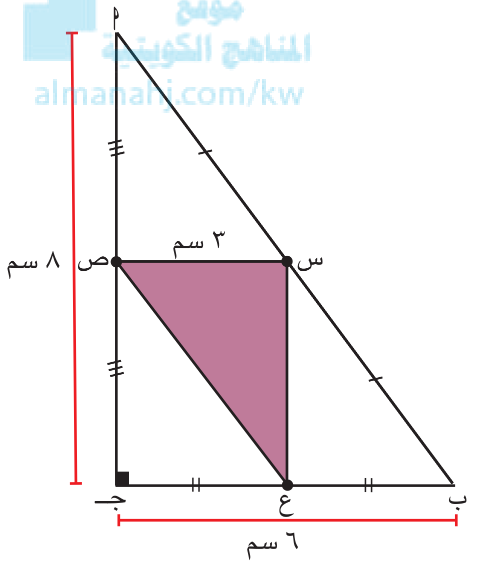
دورك الآن (٤)

في الشكل المقابِل ، Δ ؍ب جـ قائم الزاوية في جـ

س منتصف ؍ب ، ص منتصف ؍جـ ، ع منتصف ب جـ .

أوجِد بالبرهان : (١) محيط المثلّث س ع ص .

(٢) مساحة المثلّث س ع ص .



المعطيَات : المثلّث ؍ب جـ قائم الزاوية في جـ ،

س منتصف ؍ب ، ص منتصف ؍جـ ،

ع منتصف ب جـ

المطلوب : إيجاد (١) محيط المثلّث س ع ص .

(٢) مساحة المثلّث س ع ص .

البرهان : في Δ ؍ب جـ قائم الزاوية في جـ

(باستخدام نظرية فيثاغورث)

(؍ب)^{٢} = (؍جـ)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

∴ ؍ب = $\sqrt{(٨)^{٢} + (٦)^{٢}}$

= $\sqrt{٦٤ + ...}$

= $\sqrt{.............}$ = ... سم

∵ س منتصف ؍ب ، ع منتصف ب جـ

∴ س ع = $\frac{١}{٢}$ ؍جـ (نظرية)

س ع = $\frac{١}{٢}$ × .... = ...

بالمثل :

∵ ع منتصف .... ، .... منتصف ؍جـ

∴ ع ص = ... (نظرية)

= $\frac{١}{٢}$ × ....

= ....

∴ محيط Δ س ع ص = ... + ... + ٣ = ١٢ سم

تذكَّر

نظرية فيثاغورث

في المثلّث القائم الزاوية ، يكون مربّع طول الوتر مساوِيًا لمجموع مربّعَي طولَي الضلعَين الآخرَين .

في Δ س ع ص :

(ص ع)^{٢} = (٥)^{٢} = ٢٥ ،

(س ص)^{٢} + (س ع)^{٢} = (٣)^{٢} + (٤)^{٢} = ٩ + ١٦ = ٢٥

$\because$ (ص ع)^{٢} = (س ص)^{٢} + (س ع)^{٢}

$\therefore$ Δ س ص ع قائم الزاوية في س (عكس نظرية فيثاغورث)

$\therefore$ مساحة المثلّث س ص ع = $\frac{١}{٢}$ × ن × ع

= $\frac{١}{٢}$ × .... × .... = ... سم^{٢}

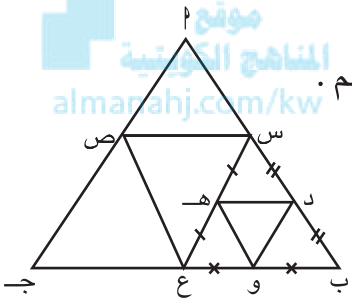
تذكَّر

عكس نظرية فيثاغورث

إذا كان مربّع طول الضلع الأطول في مثلّث مساوِيًا لمجموع مربّعَي طولَي الضلعَين الآخرَين ، فإنّ هذا المثلّث يكون قائم الزاوية والزاوية القائمة هي المقابِلة للضلع الأطول .

عبِّر عن فهمك

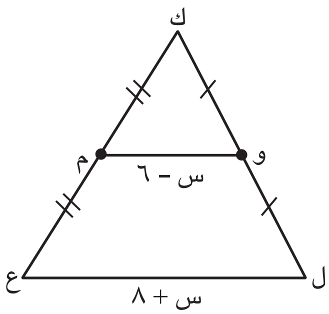
إذا كان س ، ص ، ع منتصفات أضلاع المثلّث ا ب جـ ،
د ، هـ ، و منتصفات أضلاع المثلّث س ب ع ، كما هو موضَّح في الرسم .
فما العلاقة بين محيط المثلّث د هـ و ومحيط المثلّث ا ب جـ ؟



مثال (٤):

المثّلث ك ل ع فيه و منتصف $\overline{\text{ك ل}}$ ، م منتصف $\overline{\text{ك ع}}$.

أوجِد بالبرهان قيمة س .



الحلّ :

المعطَيات : ك ل ع مثلّث فيه و منتصف $\overline{\text{ك ل}}$ ، م منتصف $\overline{\text{ك ع}}$.

المطلوب : إيجاد قيمة س .

البرهان : في Δ ك ل ع

$\because$ و منتصف $\overline{\text{ك ل}}$ ، م منتصف $\overline{\text{ك ع}}$ (معطى)

$\therefore$ $\overline{\text{و م}}$ // $\overline{\text{ل ع}}$ ، و م = $\frac{١}{٢}$ ل ع (نظرية)

$\therefore$ س - ٦ = $\frac{١}{٢}$ (س + ٨)

٢ س - ١٢ = س + ٨ (بالضرب في العدد ٢ لكلا الطرفَين)

٢ س - س = ١٢ + ٨

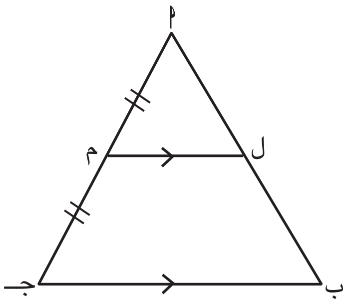
$\therefore$ س = ٢٠

اِستكشِف (٢)

في الشكل المقابِل ، المثلّث ا ب جـ فيه :

م منتصف ا جـ ، ل م // ب جـ ،

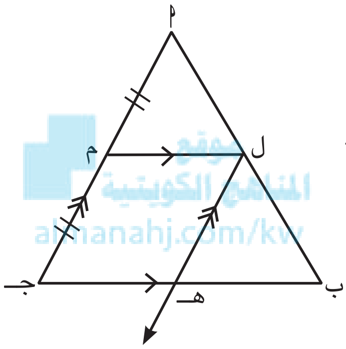
هل ل منتصف ا ب ؟



العمل :

نرسم ل هـ // ا جـ ويقطع ب جـ في هـ .

أجِب عن الأسئلة التالية :



١ هل الشكل ل هـ جـ م يمثّل متوازي أضلاع ؟ وضِّح ذلك .

....

٢ هل Δ ا ل م ≅ Δ ل ب هـ ؟ وضِّح ذلك .

....

....

وينتج من التطابق أنّ ا ل ≅ ....

∴ ل منتصف ....

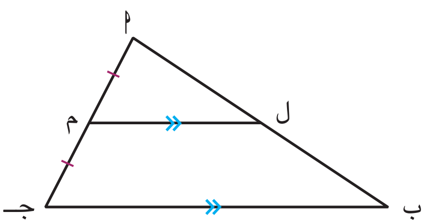
نظرية :

إذا رُسم مستقيم من منتصف أحد أضلاع مثلّث موازِيًا ضلعًا آخر فيه ، فإنّه ينصّف الضلع الثالث .

في المثلّث ا ب جـ :

∵ م **منتصف** ا جـ ، ل م // ب جـ

∴ ل منتصف ا ب

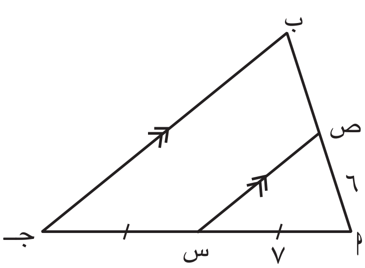


دورك الآن (٥)

في الشكل المقابِل ، أكمِل ما يلي :

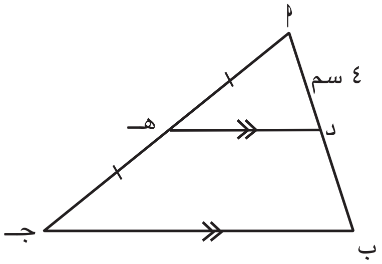
أ ص منتصف ....

ب طول ا ب = ...



مثال (٥) :

أ ب جـ مثلّث فيه : هـ منتصف أجـ ، د هـ // ب جـ ، أ د = ٤ سم .
أوجِد بالبرهان طول أ ب .



الحلّ :

المعطَيات : أ ب جـ مثلّث ، هـ منتصف أجـ ، د هـ // ب جـ ، أ د = ٤ سم .

المطلوب : إيجاد طول أ ب .

البرهان : في المثلّث أ ب جـ :

∵ هـ منتصف أجـ ، د هـ // ب جـ (معطى)

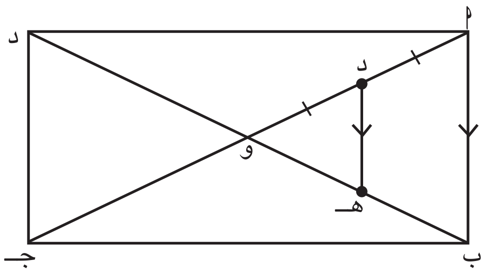
∴ د منتصف أ ب (نظرية)

∴ أ د = د ب = ٤ سم

∴ أ ب = ٨ سم

مثال (٦) :

أ ب جـ د مستطيل فيه : أجـ = ١٢ سم ، د هـ // أ ب ، د منتصف أ و .
أوجِد بالبرهان طول ب هـ .



الحلّ :

المعطَيات : أ ب جـ د مستطيل ، أجـ = ١٢ سم ، د هـ // أ ب ، د منتصف أ و .

المطلوب : إيجاد طول ب هـ .

البرهان : ∵ أ ب جـ د مستطيل (معطى)

∴ قطراه متطابقان وينصّف كلّ منهما الآخر (خواصّ المستطيل)

∴ أجـ = ب د = ١٢ سم

أ و = و ب = ٦ سم

في Δ أ و ب :

∵ د منتصف أ و ، د هـ // أ ب (معطى)

∴ هـ منتصف و ب (نظرية)

∴ هـ ب = $\frac{١}{٢}$ × ٦ = ٣ سم

تذكَّر

من خواصّ المستطيل : القطران متطابقان وينصّف كلّ منهما الآخر .

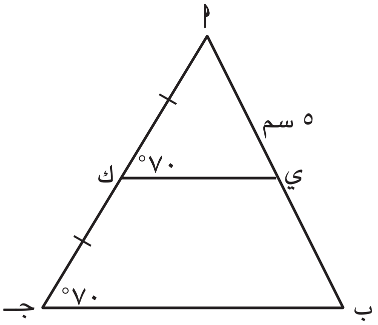
دورك الآن (٦)

أ ب جـ مثلّث فيه :

ك منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ ، ق (جـ^) = ق (أ ك^ ي) = ٧٠° ،

أ ي = ٥ سم .

أوجِد بالبرهان طول $\overline{\text{أ ب}}$.



المعطَيات : ....

....

المطلوب : ....

البرهان : ....

....

....

....

....

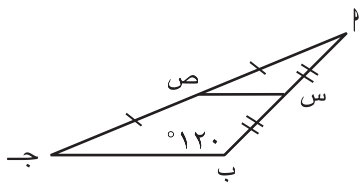
....

....

تمارين ذاتية :

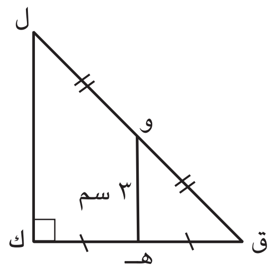
١ في كلّ من المثلّثات التالية ، أكمِل (دون استخدام الأدوات الهندسية) :

(أ)



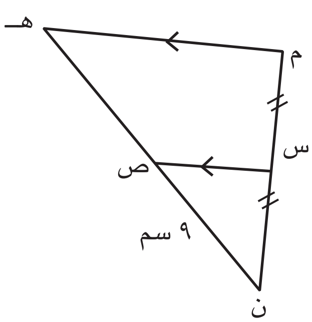
ق (أ س^ ص) = ...

(ب)



ك ل = ...

(ج)



ص هـ = ...

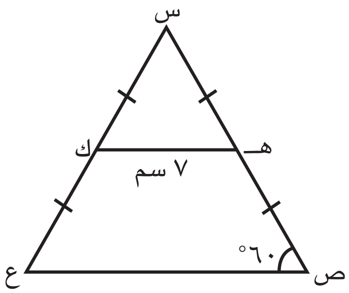
٢ في Δ س ص ع : س هـ = هـ ص = س ك = ك ع

ق ($\widehat{ص}$) = ٦٠° ، هـ ك = ٧ سم .

أوجِد بالبرهان : (١) طول $\overline{ص ع}$.

(٢) ق ($\widehat{ع}$)

(٣) طول $\overline{س ع}$.



تذكَّر

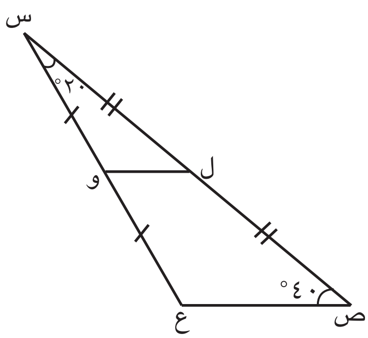
إذا كان المثلّث متطابق الضلعَين وقياس إحدى زواياه ٦٠° ، فإنّ المثلّث يكون متطابق الأضلاع .

٣ س ص ع مثلّث فيه ،

ل منتصف $\overline{س ص}$ ، و منتصف $\overline{س ع}$

ق ($\widehat{ص}$) = ٤٠° ، ق ($\widehat{س}$) = ٢٠°

أوجِد بالبرهان ق (س $\widehat{و}$ ل) .

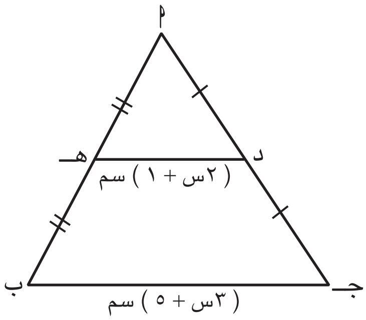


٤ ﺍ ب جـ مثلّث فيه :

د منتصف $\overline{\text{ﺍ جـ}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{ﺍ ب}}$

حيث د هـ = (٢س + ١) سم ، جـ ب = (٣س + ٥) سم .

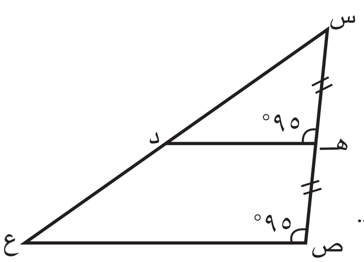
أوجِد بالبرهان قيمة س .



٥ س ص ع مثلّث فيه : هـ منتصف $\overline{\text{س ص}}$ ،

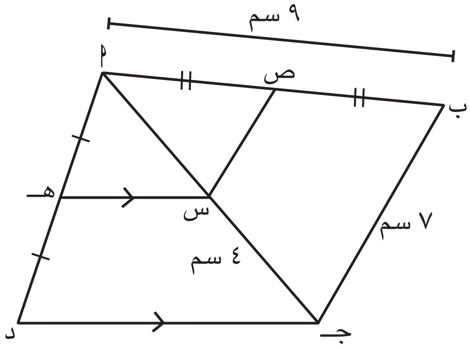
ق ($\hat{\text{ص}}$) = ق (س $\widehat{\text{هـ}}$ د) = ٩٥°

أثبِت أنّ : د منتصف $\overline{\text{س ع}}$.



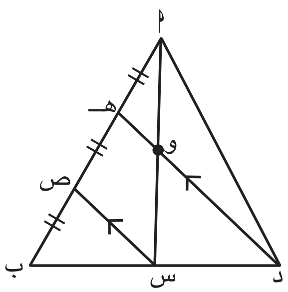
الدرس الأوّل

٦ في الشكل المقابِل : ٢ ب جـ د شكل رباعي فيه :
هـ ، ص منتصفا ٢د ، ٢ب على الترتيب
س ∋ ٢جـ بحيث س هـ // جـ د ، جـ س = ٤ سم .
إذا كان ب جـ = ٧ سم ، ٢ب = ٩ سم ،
أوجِد : (١) طول ٢س .
(٢) محيط ∆ ٢س ص .



مهارات تفكير عليا :

٧ في الشكل المقابِل :
س ص // د هـ ، و هـ = ٤ سم ،
٢هـ = هـ ص = ص ب
أوجِد بالبرهان : طول و د .



٧ ـ ٢ القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة إلى منتصف الوتر

The Segment Joining the Vertex of Right Angle to the Midpoint of the Hypotenuse

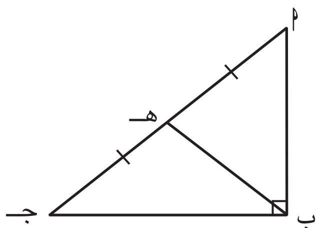
سوف تتعلّم : توظيف نظرية القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة في المثلّث القائم الزاوية إلى منتصف الوتر لحلّ تمارين هندسية .

العبارات والمفردات :

رأس	Vertex	وتر المثلّث	Hypotenuse
زاوية قائمة	Right Angle		

اِستكشِف (١)

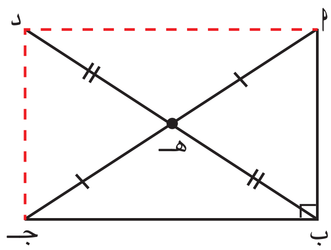
أ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب ،
هـ منتصف الوتر أ جـ .
ما العلاقة بين طول ب هـ ، طول أ جـ ؟



العمل :

١ **نأخذ نقطة د ∈ ب هـ بحيث تكون ب هـ = هـ د**

٢ **أرسم أ د ، جـ د ليكون شكلًا رباعيًّا .**



أجِب عمّا يلي :

أ) هل أ ب جـ د متوازي أضلاع ؟ لماذا ؟

....

ب) هل أ ب جـ د مستطيل ؟ لماذا ؟

....

ج) هل ب هـ = أ هـ = هـ جـ ؟ لماذا ؟

....

د) ما العلاقة بين ب هـ ، أ جـ ؟

ب هـ = ... أ جـ

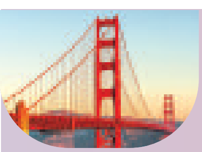
اللوازم

أدوات هندسية .

تذكّر

في المثلّثات القائمة الزاوية ضلعا القائمة هما الضلعان اللذان يحدّدان الزاوية القائمة ، والوتر هو أطول ضلع في المثلّث وهو الضلع المقابِل للزاوية القائمة .

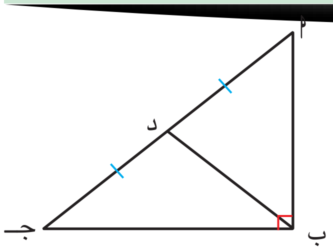
معلومة مفيدة :



يستخدم المهندسون نظرية القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة في مثلّث إلى منتصف الوتر ، لمعرفة طول الدعائم الحديدية المستخدَمة في الجسور .

نظرية :

طول القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة إلى منتصف الوتر في المثلّث القائم الزاوية يساوي نصف طول الوتر .



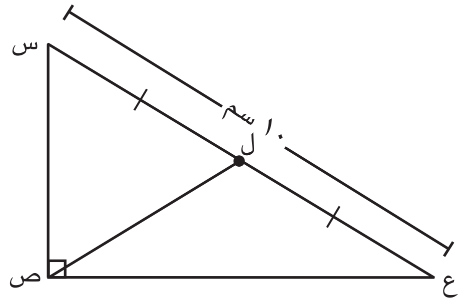
في المثلّث أ ب جـ :

∵ ق (ب̂) = ٩٠° ، د منتصف أجـ

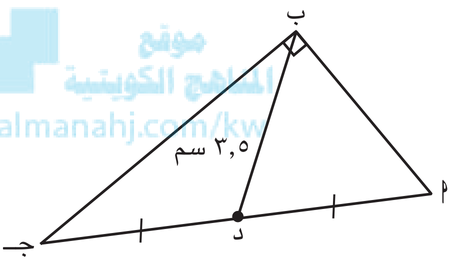
∴ ب د = $\frac{١}{٢}$ أ جـ

دورك الآن (١)

أكمِل ما يلي (دون استخدام الأدوات الهندسية) :



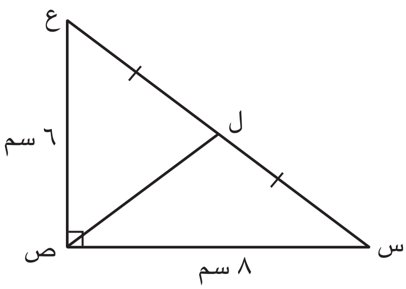
طول ص ل = ...



أ جـ = ...

مثال (١) :

في الشكل المقابِل ، س ص ع مثلّث قائم الزاوية في ص ،
ع ص = ٦ سم ، س ص = ٨ سم ، ل منتصف س ع .
أوجِد بالبرهان طول ص ل .



الحلّ :

المعطَيات : س ص ع مثلّث قائم الزاوية في ص ، ع ص = ٦ سم ، س ص = ٨ سم ، ل منتصف س ع .

المطلوب : إيجاد طول ص ل .

البرهان : س ص ع مثلّث قائم الزاوية في ص (١)

∴ $(س ع)^٢ = (س ص)^٢ + (ص ع)^٢$ (نظرية فيثاغورث)

$= (٨)^٢ + (٦)^٢$

$= ٦٤ + ٣٦ = ١٠٠$

∴ س ع = $\sqrt{١٠٠}$ = ١٠ سم

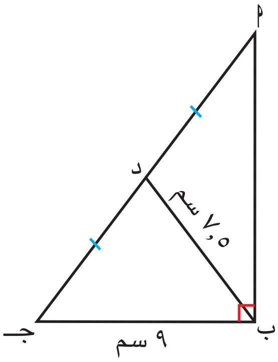
∵ ل منتصف س ع (٢)

من (١) ، (٢)

∴ ص ل = $\frac{١}{٢}$ (س ع) = $\frac{١}{٢}$ × ١٠ = ٥ سم (نظرية)

دورك الآن (٢)

في الشكل المقابِل ، ﺃ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب ، د منتصف $\overline{\text{ﺃ جـ}}$ ،
ب جـ = ٩ سم ، ب د = ٧,٥ سم



أوجِد بالبرهان : (١) ﺃ جـ (٢) ﺃ ب

المعطَيات : ....
....

المطلوب : ....

البرهان : ﺃ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ....

∵ د منتصف ....

∴ ب د = $\frac{١}{٢}$ ....

ﺃ جـ = ٢ × ب د

ﺃ جـ = ...

من نظرية فيثاغورث

$(\text{ﺃ ب})^٢ = (\text{ﺃ جـ})^٢ - (\text{ب جـ})^٢$

$= (١٥)^٢ - (\text{..............})^٢ =$ .... - ....

$(\text{ﺃ ب})^٢ = ١٤٤$

ﺃ ب = $\sqrt{\text{..............}}$ = ... سم

عبِّر عن فهمك

إذا كان طول القطعة المستقيمة الواصلة من رأس مثلّث إلى منتصف الضلع المقابِل له يساوي نصف طول هذا الضلع . فهل المثلّث قائم الزاوية ؟ فسِّر إجابتك .

اِستكشِف (٢)

أ ب جـ مثلّث ثلاثيني ستّيني ،

ق ($\widehat{\text{جـ}}$) = ٣٠° ، ق ($\widehat{\text{أ}}$) = ٦٠°

نلاحظ أنّ : ب د = $\frac{١}{٢}$ ....

في Δ أ ب د :

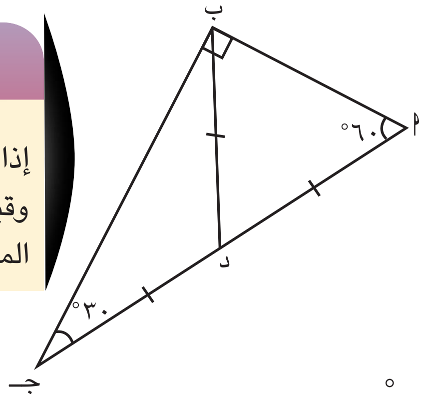
$\because$ د ب = د أ

$\therefore$ ق ($\widehat{\text{أ}}$) = ق (......................) = ...°

هل Δ أ ب د متطابق الأضلاع ؟ ....

أ ب = ... = ...

$\therefore$ أ ب = $\frac{١}{٢}$ أ جـ

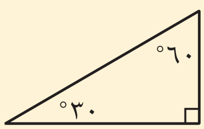


تذكَّر

إذا كان المثلّث متطابق الضلعَين وقياس إحدى زواياه ٦٠° ، فإنّ المثلّث يكون متطابق الأضلاع .

لاحِظ أنّ

المثلّث التالي يُسمّى : مثلّثًا ثلاثينيًّا ستّينيًّا

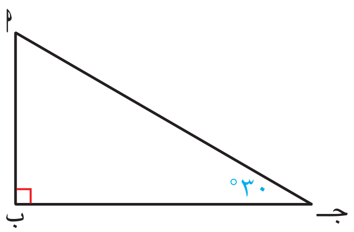


نتيجة (١) :

في المثلّث الثلاثيني الستّيني ، يكون طول الضلع المقابِل للزاوية التي قياسها ٣٠° مساوِيًا نصف طول الوتر.

$\because$ أ ب جـ مثلّث **قائم الزاوية في ب** ، ق ($\widehat{\text{جـ}}$) = ٣٠°

$\therefore$ أ ب = $\frac{١}{٢}$ أ جـ



وعكس ذلك أيضًا صحيح :

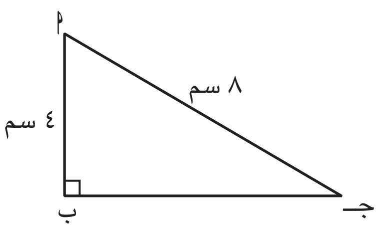
نتيجة (٢) :

في المثلّث القائم الزاوية ، إذا كان طول أحد ضلعَي الزاوية القائمة مساوِيًا نصف طول الوتر ، فإنّ قياس الزاوية المقابِلة لهذا الضلع ٣٠° ويُسمّى المثلّث ثلاثينيًّا ستّينيًّا .

$\because$ أ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب ، أ ب = $\frac{١}{٢}$ أ جـ

$\therefore$ ق ($\widehat{\text{جـ}}$) = ٣٠°

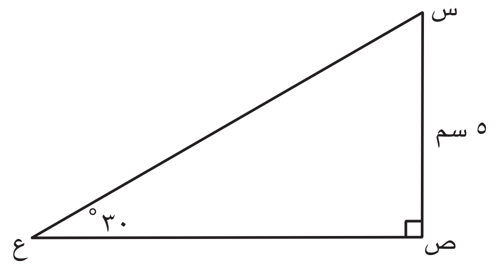
$\therefore$ المثلّث أ ب جـ ثلاثيني ستّيني



دورك الآن (٣)

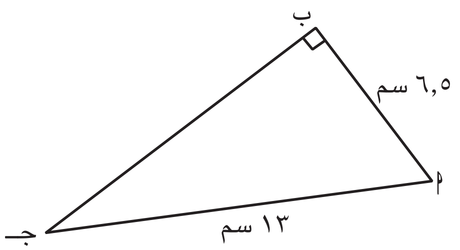
أكمِل ما يلي (دون استخدام الأدوات الهندسية) :

(أ)



س ع = ...

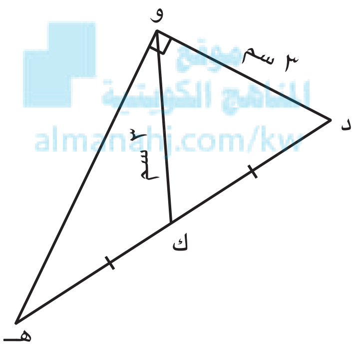
(ب)



ق ($\hat{\text{جـ}}$) = ...

مثال (٢) :

في الشكل المقابِل : د و هـ مثلّث قائم الزاوية في و ،
د و = و ك = ٣ سم ، ك منتصف $\overline{\text{د هـ}}$
أوجِد بالبرهان : (١) ق ($\hat{\text{هـ}}$)
(٢) ق ($\hat{\text{د}}$)



الحلّ :

المعطَيات : د هـ و مثلّث قائم الزاوية في و ، د و = ٣ سم ،
و ك = ٣ سم ، ك منتصف $\overline{\text{د هـ}}$.

المطلوب : إيجاد (١) ق ($\hat{\text{هـ}}$) (٢) ق ($\hat{\text{د}}$)

البرهان : ∵ المثلّث د و هـ قائم الزاوية في و
، ك منتصف $\overline{\text{د هـ}}$

∴ و ك = $\frac{1}{2}$ د هـ (نظرية)

∴ د هـ = ٢ × ٣ = ٦ سم

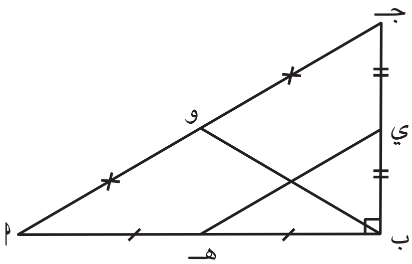
∵ د و = $\frac{1}{2}$ د هـ

∴ ق ($\hat{\text{هـ}}$) = ٣٠° (نتيجة)

∴ د و هـ مثلّث ثلاثيني ستّيني

∴ ق ($\hat{\text{د}}$) = ٦٠°

دورك الآن (٤)



في الشكل المقابِل : أ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب ، فيه :

هـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، ي منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ،

و منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ ، هـ ي = ٥ سم

أوجِد بالبرهان كلًّا ممّا يلي : (١) طول $\overline{\text{أ جـ}}$ (٢) طول $\overline{\text{ب و}}$

المعطَيات : ....

....

المطلوب : ....

البرهان : أ ب جـ مثلّث فيه : .... منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، .... منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ هـ ي = $\frac{١}{٢}$ .... (نظرية)

أ جـ = ٢ × ٥ = ... سم

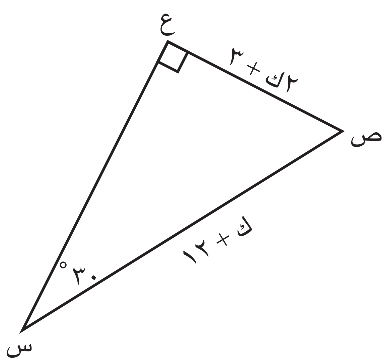
∵ أ ب جـ مثلّث .... الزاوية في ....

و منتصف ....

∴ ب و = $\frac{١}{٢}$ × .... (نظرية)

= $\frac{١}{٢}$ × ١٠ = ...

مثال (٣) :



في الشكل المقابِل : أوجِد بالبرهان قيمة ك .

الحلّ :

المعطَيات : س ع ص مثلّث قائم الزاوية في ع ، ق ($\hat{\text{س}}$) = ٣٠°

المطلوب : إيجاد قيمة ك .

البرهان : ∵ المثلّث س ع ص قائم الزاوية في ع ، ق ($\hat{\text{س}}$) = ٣٠°

∴ Δ س ع ص مثلّث ثلاثيني ستّيني

∴ ع ص = $\frac{١}{٢}$ س ص (نتيجة)

٢ ك + ٣ = $\frac{١}{٢}$ × (ك + ١٢)

٢ × (٢ ك + ٣) = ك + ١٢

٤ ك + ٦ = ك + ١٢

٤ ك − ك = ١٢ − ٦

٣ ك = ٦

∴ ك = $\frac{٦}{٣}$ = ٢

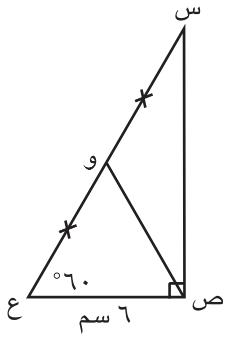
تمارين ذاتية :

١ س ص ع مثلّث قائم الزاوية في ص ، و منتصف $\overline{\text{س ع}}$.

أوجِد بالبرهان كلًّا ممّا يلي : (١) طول $\overline{\text{س ع}}$

(٢) طول $\overline{\text{ص و}}$

(٣) ق (و $\hat{\text{ص}}$ س)



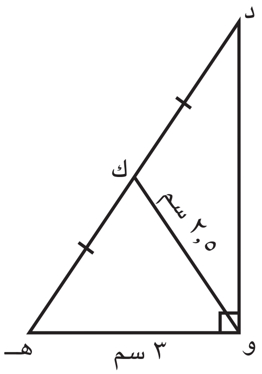
تذكَّر

الزاويتان المتتامّتان مجموع قياسَيهما = ٩٠°

٢ في الشكل المقابِل : المثلّث هـ و د قائم الزاوية في و ، ك منتصف $\overline{\text{هـ د}}$.

أوجِد بالبرهان كلًّا ممّا يلي : (١) طول $\overline{\text{هـ د}}$

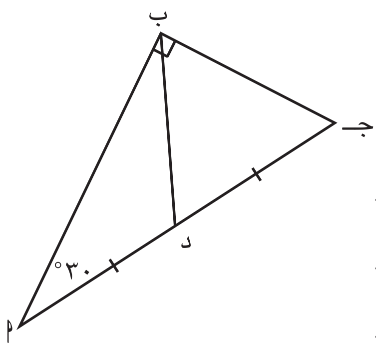
(٢) طول $\overline{\text{د و}}$



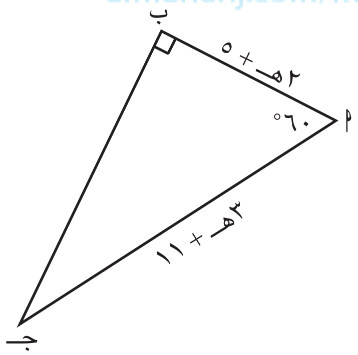
٣ في الشكل المقابِل :

المثلّث أ ب جـ قائم الزاوية في ب ، ق ($\hat{أ}$) = ٣٠° .

أثبِت أنّ المثلّث ب د جـ متطابق الأضلاع .



٤ في الشكل المقابِل : أوجِد بالبرهان طول $\overline{أب}$.

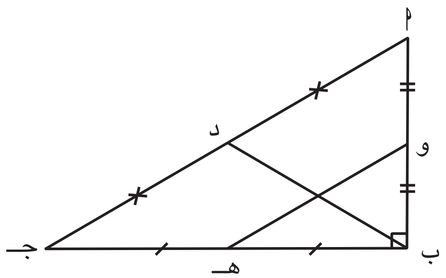


٥ في الشكل المقابِل : أ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب ،

و منتصف $\overline{أب}$ ، هـ منتصف $\overline{بجـ}$ ،

د منتصف $\overline{أجـ}$.

أثبِت أنّ و هـ = ب د



٧ ـ ٣ محاور أضلاع المثلّث
Perpendicular Bisectors of a Triangle

سوف تتعلّم : توظيف نظرية محاور أضلاع المثلّث لحلّ تمارين هندسية .

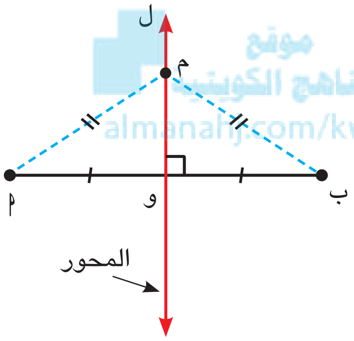
العبارات والمفردات :

محور القطعة المستقيمة — Perpendicular Bisector

تعلم أنّ محور القطعة المستقيمة هو العمود المنصِّف لها .

في الشكل المقابِل : $\overleftrightarrow{ل}$ محور $\overline{أ ب}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{ل} \perp \overline{أ ب}$ ، أ و = ب و



خواصّ محور قطعة مستقيمة

- **أيّ نقطة تنتمي إلى محور قطعة مستقيمة تكون على أبعاد متساوية من طرفَي القطعة المستقيمة .**
- **أيّ نقطة على أبعاد متساوية من طرفَي قطعة مستقيمة تنتمي إلى محور هذه القطعة المستقيمة .**

اِستكشِف

أكمِل :

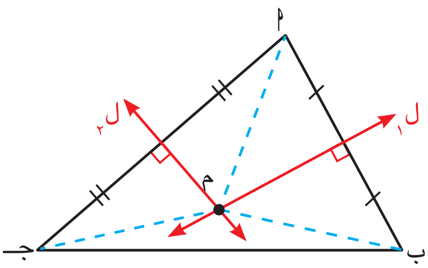
$\because$ $\overleftrightarrow{ل_1}$ محور .... ، م $\in$ $\overleftrightarrow{ل_1}$

م أ = ... (١)

بالمثل :

$\overleftrightarrow{ل_2}$ محور .... ، م $\in$ $\overleftrightarrow{ل_2}$

م أ = ... (٢)



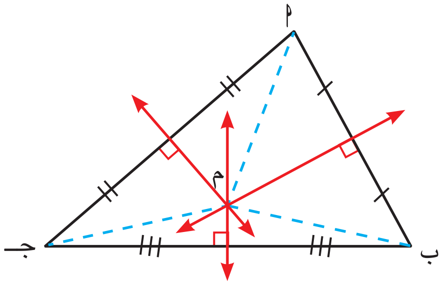
من (١) ، (٢)

$\therefore$ م ب = ...

$\therefore$ م $\in$ محور ....

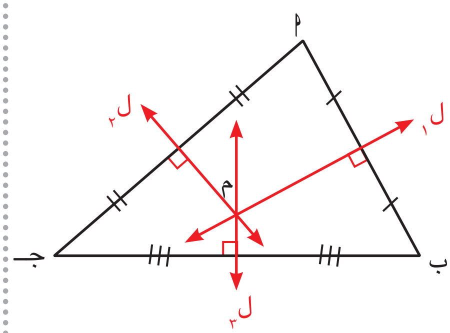
$\therefore$ محاور أضلاع المثلّث ....

نظرية : محاور أضلاع المثلّث تتقاطع في نقطة واحدة .

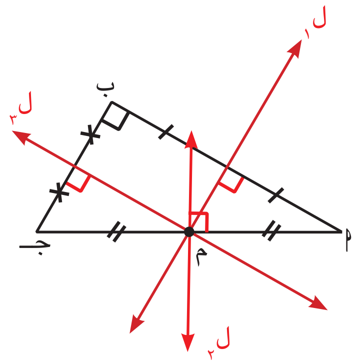


من « اِستكشِف » السابق ،
م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث ﻫ ب جـ
∴ م ﻫ = م ب = م جـ

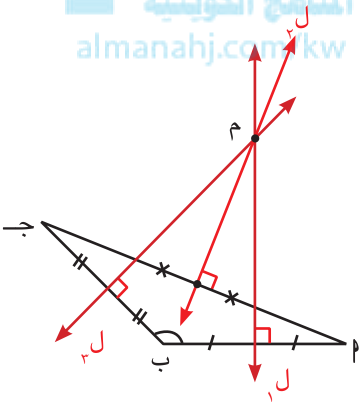
نتيجة :
نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث تقع على أبعاد متساوية من رؤوسه .



مثلّث حادّ الزوايا



مثلّث قائم الزاوية



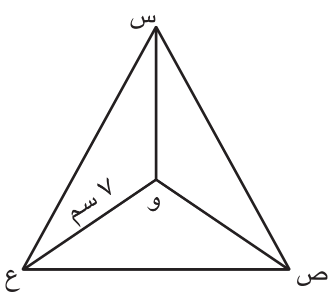
مثلّث منفرج الزاوية

من الأشكال السابقة نلاحظ أنّ :

- نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث الحادّ الزوايا تقع داخل المثلّث .
- نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث القائم الزاوية تقع في منتصف الوتر .
- نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث المنفرج الزاوية تقع خارج المثلّث .

دورك الآن (١)

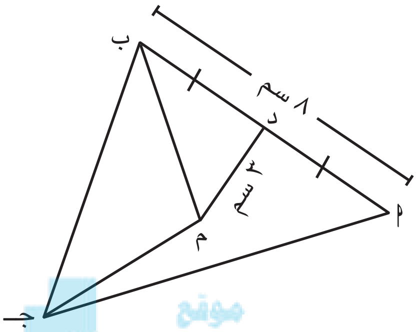
المثلّث س ص ع فيه : و نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث ،
و ع = ٧ سم . أكمِل دون استخدام الأدوات الهندسية :
و س = ... سم
و ص = ... سم



عبِّر عن فهمك (١)

لتكن م نقطة تقع على أبعاد متساوية من رؤوس مثلّث . فهل م هي نقطة تقاطع محاور أضلاعه ؟ فسِّر إجابتك .

مثال (١) :



أ ب جـ مثلّث فيه : أ ب = ٨ سم ، د منتصف $\overline{\text{أب}}$
م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث ، م د = ٣ سم .
أوجِد بالبرهان كلًّا مما يلي : (١) طول $\overline{\text{م ب}}$.   (٢) طول $\overline{\text{م جـ}}$.

الحلّ :

المعطيات : أ ب جـ مثلّث فيه : أ ب = ٨ سم ، د منتصف $\overline{\text{أب}}$
م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث ، م د = ٣ سم

المطلوب : إيجاد : (١) طول $\overline{\text{م ب}}$ (٢) طول $\overline{\text{م جـ}}$

البرهان : ∵ أ ب = ٨ سم ، د منتصف $\overline{\text{أب}}$ (معطى)

∴ د ب = $\frac{1}{2} \times 8$ = ٤ سم

∵ م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث ، د منتصف $\overline{\text{أب}}$ (معطى)

∴ $\overline{\text{م د}} \perp \overline{\text{أب}}$

∴ Δ م د ب قائم الزاوية في د

(م ب)^2 = (م د)^2 + (د ب)^2 (نظرية فيثاغورث)

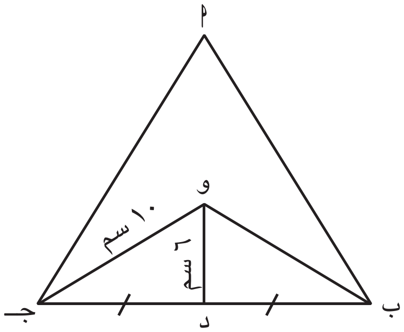
∴ م ب = $\sqrt{(3)^2 + (4)^2}$

= $\sqrt{9 + 16}$ = $\sqrt{25}$ = ٥ سم

∵ نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث تقع على أبعاد متساوية من رؤوسه

∴ م جـ = م ب = ٥ سم   (نتيجة)

دورك الآن (٢)



ٲ ب جـ مثلّث فيه :

و نقطة تقاطع محاور أضلاعه ،

د منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ،

و جـ = ١٠ سم ، و د = ٦ سم

أوجِد بالبرهان كلًّا ممّا يلي :

(١) ب و (٢) ب د (٣) ب جـ

المعطَيات : ....

....

المطلوب : ....

البرهان : ∵ و نقطة تقاطع .... (معطى)

∴ و ب = ... (نتيجة)

= .... سم

∵ د منتصف ....

∴ $\overline{\text{و د}}$ ⊥ ....

∴ Δ و د ب .... في ....

∴ $(\text{ب د})^2 = (\text{ب و})^2 - (\text{و د})^2$ (نظرية فيثاغورث)

ب د = $\sqrt{(\text{.........})^2 - (\text{.........})^2}$

= $\sqrt{100 - 36}$

= $\sqrt{\text{.........}}$

= ....

∴ ب جـ = ٢ × ....

= ٢ × ....

= .... سم

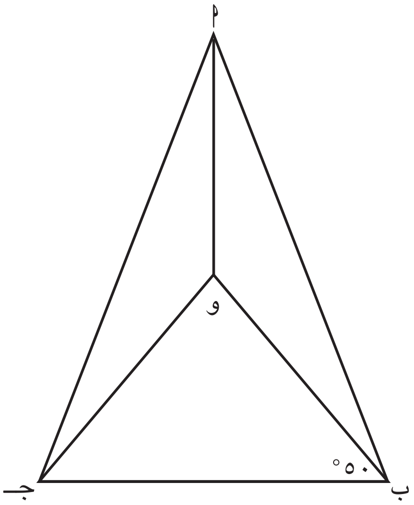
مثال (٢) :

أ ب جـ مثلّث فيه : و نقطة تقاطع محاور أضلاعه ،

إذا كان ق (و $\hat{ب}$ جـ) = ٥٠° .

(١) أثبِت أنّ المثلّث ب و جـ متطابق الضلعَين .

(٢) أوجِد ق (ب $\hat{و}$ جـ) .



الحلّ :

المعطَيات : أ ب جـ مثلّث فيه و نقطة تقاطع محاور أضلاعه .

المطلوب : إثبات أنّ المثلّث ب و جـ متطابق الضلعَين .

إيجاد ق (و $\hat{جـ}$ ب)

البرهان : ∵ و نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث (معطى)

∴ و ب = و جـ (نتيجة)

∴ Δ ب و جـ متطابق الضلعَين

∴ ق (و $\hat{ب}$ جـ) = ق (و $\hat{جـ}$ ب) = ٥٠° (زاويتا القاعدة في مثلّث متطابق الضلعَين متطابقتان)

∴ ق (ب $\hat{و}$ جـ) = ١٨٠° − (٥٠° + ٥٠°) = ٨٠° (مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلة = ١٨٠°)

دورك الآن (٣)

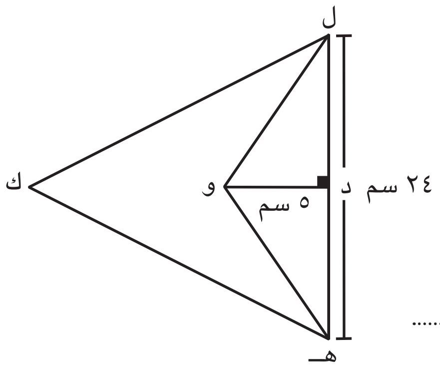
ك ل هـ مثلّث فيه :

و نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث ك ل هـ ،

$\overline{و د}$ ⊥ $\overline{ل هـ}$ ، ل هـ = ٢٤ سم ، د و = ٥ سم .

أوجِد بالبرهان كلًّا مما يلي : (١) هـ و

(٢) محيط Δ ل و هـ



المعطَيات : ....
....

المطلوب : إيجاد (١) هـ و (٢) محيط Δ ل و هـ

البرهان : ∵ و نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث ك ل هـ ، $\overline{و د}$ ⊥ ....

∴ د منتصف $\overline{ل هـ}$ ،

∴ د هـ = $\frac{١}{٢}$ × .... = ... سم

Δ و د هـ .... الزاوية في د

(و هـ)^2 = (د هـ)^2 + (و د)^2 (نظرية فيثاغورث)

و هـ = $\sqrt{(\text{..............})^2 + (5)^2}$

= $\sqrt{\text{..............} + \text{..............}}$

= $\sqrt{169}$

$\therefore$ و هـ = ... سم

$\because$ و نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث ك ل هـ، تقع على ....

$\therefore$ ل و = ... = ١٣ سم

محيط Δ ل و هـ = ٢٤ + ... + ١٣

= .... سم

تمارين ذاتية :

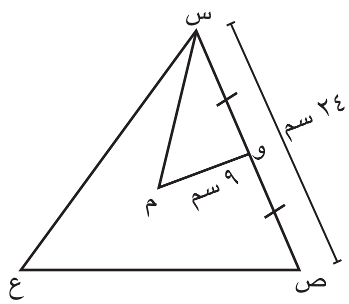
١ س ص ع مثلّث فيه :

م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث ، و م = ٩ سم ،

$\overline{\text{س ص}}$ = ٢٤ سم ، و منتصف $\overline{\text{س ص}}$.

أوجِد بالبرهان كلًّا ممّا يلي :

(١) و س (٢) س م (٣) م ص



....

....

....

....

....

....

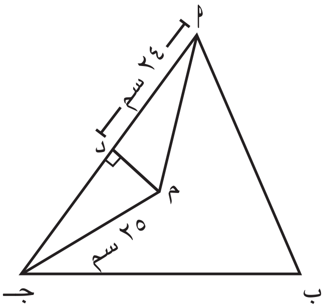
....

....

....

....

....

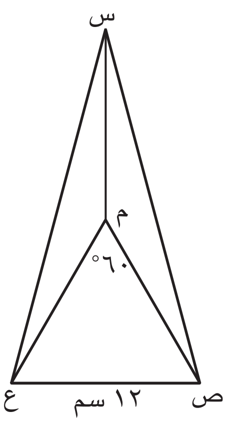


٢ Δ أ ب جـ فيه : م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث ،
جـ م = ٢٥ سم ، د أ = ٢٤ سم .

أوجِد بالبرهان :

(١) طول $\overline{\text{م أ}}$

(٢) محيط Δ م جـ أ



٣ س ص ع مثلّث فيه : م نقطة تقاطع محاور أضلاعه ،
إذا كان ص ع = ١٢ سم ، ق (ص $\hat{\text{م}}$ ع) = ٦٠° .

(أ) أثبِت أنّ المثلّث ص م ع متطابق الأضلاع .

(ب) أوجِد طول $\overline{\text{م س}}$.

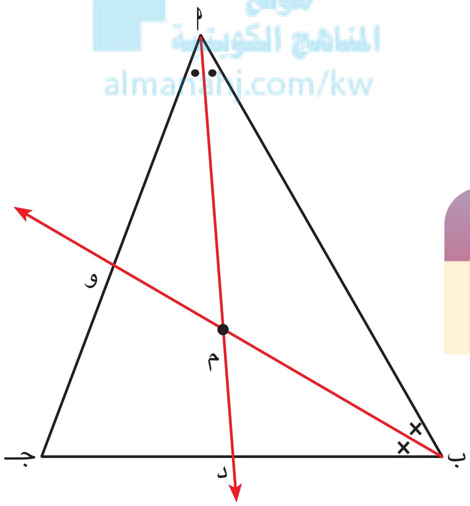
٧ - ٤ منصِّفات الزوايا الداخلة للمثلّث
Interior Angles Bisectors of a Triangle

سوف تتعلّم : توظيف نظرية منصِّفات الزوايا الداخلة للمثلّث لحلّ تمارين هندسية .

العبارات والمفردات :

منصِّفات الزوايا — Angle Bisectors

اِستكشِف (١)



Δ أ ب جـ مثلّث فيه :

$\overleftarrow{\text{أ د}}$ منصِّف $\hat{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب و}}$ منصِّف $\hat{\text{ب}}$ ،

$\overleftarrow{\text{أ د}} \cap \overleftarrow{\text{ب و}} = \{ \text{م} \}$

اللوازم

أدوات هندسية .

أجِب عمّا يلي :

١ ما نوع المثلّث بالنسبة إلى زواياه ؟

....

٢ أرسم $\overleftarrow{\text{جـ م}}$ يقطع $\overline{\text{أ ب}}$ في هـ .

٣ أوجِد ق ($\hat{\text{أ جـ م}}$) = ...

٤ أوجِد ق ($\hat{\text{ب جـ م}}$) = ...

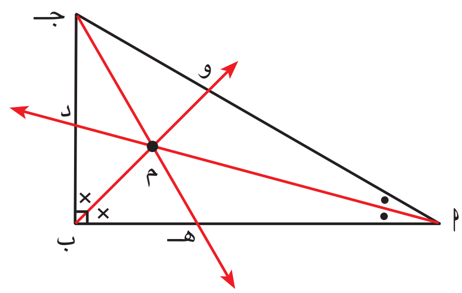
ماذا تلاحظ ؟ ....

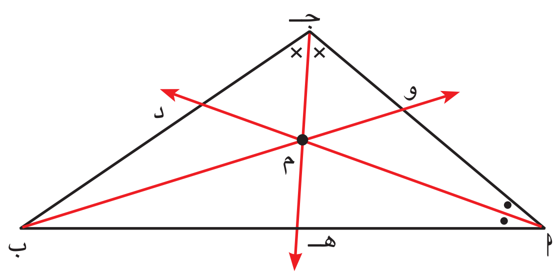
$\overleftarrow{\text{جـ هـ}}$ منصِّف $\hat{\ }$ ....

بالمثل للمثلّث القائم الزاوية والمنفرج الزاوية .

تذكَّر

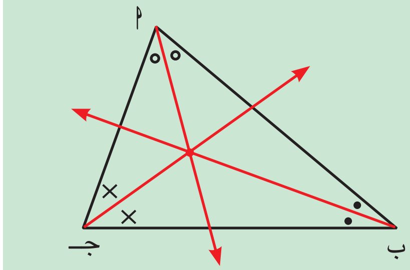
منصِّف الزاوية هو شعاع مرسوم من رأس الزاوية يقسم الزاوية إلى زاويتَين متطابقتَين .





نظرية :

منصِّفات الزوايا الداخلة للمثلّث تتقاطع في نقطة واحدة .



دورك الآن (١)

في الشكل المقابِل :

م نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلة للمثلّث أ ب جـ

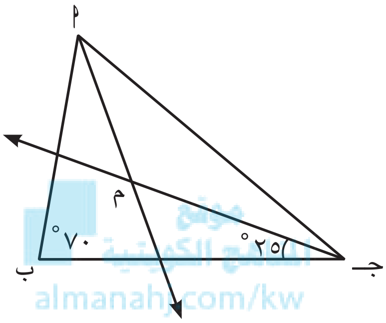
أكمِل ما يلي (دون استخدام الأدوات الهندسية) :

ق (م $\widehat{\text{جـ}}$ أ) = ...

السبب ....

ق ($\widehat{\text{أ}}$) = ...

السبب ....



اِستكشِف (٢)

إذا كانت م هي نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلة للمثلّث أ ب جـ ،

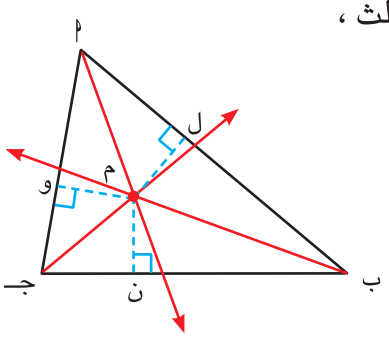
$\overline{\text{م ل}}$ ، $\overline{\text{م ن}}$ ، $\overline{\text{م و}}$ هي الأعمدة المرسومة من النقطة م على أضلاع المثلّث ،

فأوجِد باستخدام الأدوات الهندسية كلًّا ممّا يلي :

١ طول $\overline{\text{م ل}}$ = ...

٢ طول $\overline{\text{م ن}}$ = ...

٣ طول $\overline{\text{م و}}$ = ...



• **ماذا تلاحظ ؟ م ل = ... = ...**

نتيجة :

نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلة للمثلّث على أبعاد متساوية من أضلاعه .

لاحِظ أنّ

بُعْد نقطة عن مستقيم هو طول العمود المرسوم من هذه النقطة على المستقيم .

بالمثل تتحقَّق صحّة النتيجة للمثلّث القائم الزاوية والمثلّث المنفرج الزاوية .

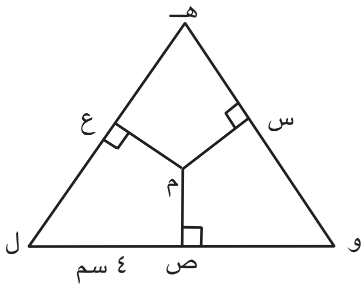
دورك الآن (٢)

المثلّث هـ و ل فيه :

م نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلة ،

م ع = ٣ سم ، ص ل = ٤ سم .

أكمِل ما يلي (دون استخدام الأدوات الهندسية) :



م ص = ...

السبب ....

م س = ...

السبب ....

م ل = ...

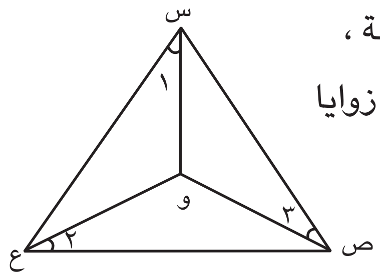
السبب ....

تذكَّر

الوتر : هو الضلع المقابل للزاوية القائمة في المثلّث قائم الزاوية .

عبِّر عن فهمك (١)

إذا كانت و نقطة تقاطع منصِّفات زوايا المثلّث س ص ع الداخلة ، فما علاقة (ق ($\hat{1}$) + ق ($\hat{2}$) + ق ($\hat{3}$)) بمجموع قياسات زوايا المثلّث س ص ع الداخلة ؟



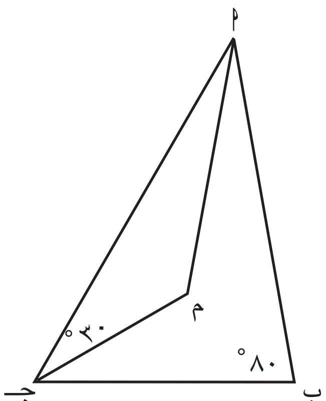
مثال (١) :

في الشكل المقابِل ، Δ أ ب جـ فيه : م نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلة ، أوجِد بالبرهان ق (جـ $\hat{أ}$ م) .

الحلّ :

المعطيات : في Δ أ ب جـ : م نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلة

المطلوب : إيجاد ق (جـ $\hat{أ}$ م)



البرهان : ∵ م نقطة تقاطع منصِّفات زوايا المثلّث الداخلة (معطى)

∴ $\overrightarrow{\text{جـ م}}$ منصِّف $\hat{\text{جـ}}$ (نظرية)

∴ ق ($\hat{\text{جـ}}$) = ٢ × ٣٠° = ٦٠°

∵ مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلة يساوي ١٨٠°

∴ ق ($\hat{\text{أ}}$) = ١٨٠° - (٨٠° + ٦٠°) = ١٨٠° - ١٤٠° = ٤٠°

∵ $\overrightarrow{\text{أ م}}$ منصِّف $\hat{\text{أ}}$

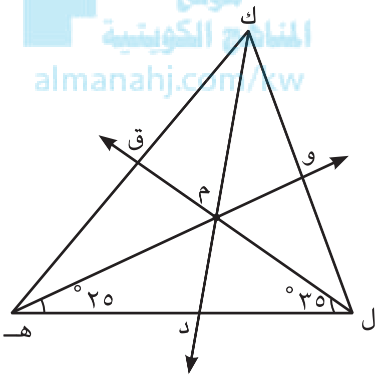
∴ ق (جـ $\hat{\text{أ}}$ م) = $\frac{٤٠°}{٢}$ = ٢٠°

دورك الآن (٣)

∆ ك ل هـ فيه : م نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلة ،

ق (م $\hat{\text{ل}}$ هـ) = ٣٥° ، ق (م $\hat{\text{هـ}}$ ل) = ٢٥°

أوجِد بالبرهان ق (ل $\hat{\text{ك}}$ هـ) ، ق (م $\hat{\text{ك}}$ هـ) .



المعطيات : ....

....

المطلوب : ....

البرهان : ∵ م نقطة تقاطع .... زوايا المثلّث الداخلة ،

∴ $\overrightarrow{\text{ل م}}$ منصِّف ....

∴ ق ($\hat{\text{ل}}$) = ٢ × ٣٥° = ...

∵ $\overrightarrow{\text{هـ م}}$ منصِّف ....

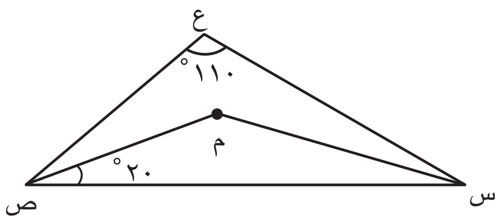
∴ ق ($\hat{\text{هـ}}$) = ٢ × ٢٥° = ...

∵ مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلة ....

∴ ق (ل $\hat{\text{ك}}$ هـ) = ١٨٠° - (.......... + ...) = ١٨٠° - .... = ...

∵ $\overrightarrow{\text{ك م}}$ منصِّف ....

∴ ق (م $\hat{\text{ك}}$ هـ) = ...



مثال (٢) :

Δ س ع ص فيه م نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلة ،
ق ($\hat{ع}$) = ١١٠° ، إذا كان ق (م $\hat{ص}$ س) = ٢٠°
أوجِد بالبرهان كلًّا من :
(١) ق (س $\hat{ص}$ ع)
(٢) ق ($\hat{س}$)
(٣) ق (س $\hat{م}$ ص)

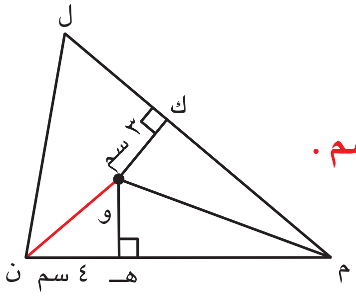
الحلّ :

المعطَيات : م نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلة ،
ق ($\hat{ع}$) = ١١٠° ، ق (م $\hat{ص}$ س) = ٢٠°

المطلوب : إيجاد : (١) ق (م $\hat{ص}$ ع)
(٢) ق ($\hat{س}$)
(٣) ق (س $\hat{م}$ ص)

البرهان : في Δ س ع ص ،
∵ م نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلة (معطى)
∴ $\overleftarrow{م ص}$ منصِّف $\hat{ص}$ (نظرية)
∴ ق (س $\hat{ص}$ ع) = ٢ × ٢٠° = ٤٠°
∴ ق ($\hat{س}$) = ١٨٠° − (١١٠° + ٤٠°) (مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلة يساوي ١٨٠°)
= ١٨٠° − ١٥٠°
= ٣٠°
∵ $\overleftarrow{س م}$ منصِّف $\hat{س}$
∴ ق (م $\hat{س}$ ص) = $\frac{٣٠°}{٢}$ = ١٥°
في Δ م س ص ،
ق (س $\hat{م}$ ص) = ١٨٠° − (١٥° + ٢٠°) (مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلة يساوي ١٨٠°)
= ١٨٠° − ٣٥°
= ١٤٥°

مثال (٣) :



في الشكل المقابِل ، المثلّث ل م ن فيه :
و نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلة ، و ك = ٣ سم ، هــ ن = ٤ سم .
أوجِد و ن .

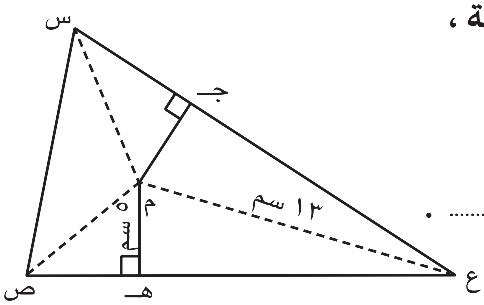
الحلّ :

المعطَيات : Δ ل م ن فيه : و نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلة ،
و ك = ٣ سم ، هــ ن = ٤ سم

المطلوب : إيجاد و ن

البرهان : $\because$ و نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا في Δ م ل ن
تقع على أبعاد متساوية من أضلاعه (نتيجة)
$\therefore$ و هــ = و ك = ٣ سم
$\because$ $\overline{\text{و هــ}} \perp \overline{\text{م ن}}$ ، ق (و $\hat{\text{هــ}}$ ن) = ٩٠° .
$\therefore$ Δ و هــ ن قائم الزاوية
(و ن)^2 = (و هــ)^2 + (هــ ن)^2 (نظرية فيثاغورث)
$\therefore$ و ن = $\sqrt{(٣)^2 + (٤)^2}$
= $\sqrt{٩ + ١٦}$
$\therefore$ و ن = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ سم

دورك الآن (٤)



المثلّث س ص ع فيه : م نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلة ،
م ع = ١٣ سم ، م هــ = ٥ سم
أوجِد طول $\overline{\text{ع جـ}}$.

المعطَيات : Δ س ص ع فيه : م نقطة تقاطع ....

المطلوب : إيجاد طول ....

البرهان : $\because$ م نقطة تقاطع .... Δ س ص ع
$\therefore$ م تقع على أبعاد متساوية من ....
م جـ = ... = ... سم
$\because$ $\overline{\text{م جـ}} \perp \overline{\text{س ع}}$
$\therefore$ ق (م $\hat{\text{هــ}}$ ص) = ٩٠°
$\therefore$ Δ ع م جـ قائم الزاوية في جـ

(ع جـ)^٢ = (ع م)^٢ - (جـ م)^٢ (نظرية فيثاغورث)

∴ ع جـ = √((..............)^٢ - (٥)^٢)

= √(١٦٩ - ....)

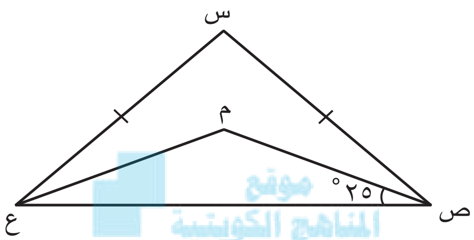
= √(..............)

∴ ع جـ = ... سم

مثال (٤) :

المثلّث س ص ع متطابق الضلعَين فيه : م هي نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلة ، ق (م ص^ ع) = ٢٥° .

أوجِد بالبرهان ق (ص س^ ع) .



الحلّ :

المعطَيات : س ص ع مثلّث متطابق الضلعَين :

م نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلة ، ق (م ص^ ع) = ٢٥°

المطلوب : إيجاد ق (ص س^ ع)

البرهان : ∵ م نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلة للمثلّث س ص ع (معطى)

∴ ص م منصِّف ص^ (نظرية)

∴ ق (ص^) = ٢ × ٢٥° = ٥٠°

∵ Δ س ص ع متطابق الضلعَين (معطى)

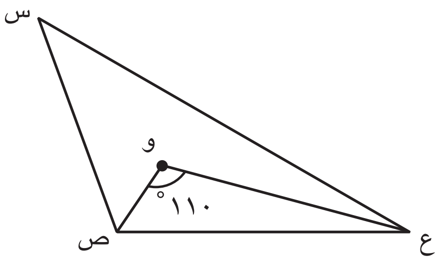
∴ ق (ص^) = ق (ع^) = ٥٠° (زاويتا القاعدة متطابقتان في المثلّث المتطابق الضلعَين)

∴ ق (س^) = ١٨٠° - (٥٠° + ٥٠°) (مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمثلّث يساوي ١٨٠°)

= ١٨٠° - ١٠٠°

= ٨٠°

دورك الآن (٥)



في الشكل المقابِل : Δ س ص ع فيه :

و نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلة ، ق (ص $\hat{و}$ ع) = ١١٠°

أوجِد بالبرهان ق ($\hat{س}$) .

المعطَيات : ....

....

المطلوب : إيجاد ق ($\hat{س}$)

البرهان : في Δ ص و ع ،

∵ ق (ص $\hat{و}$ ع) = ١١٠°　　　(معطى)

∵ مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلة = ...

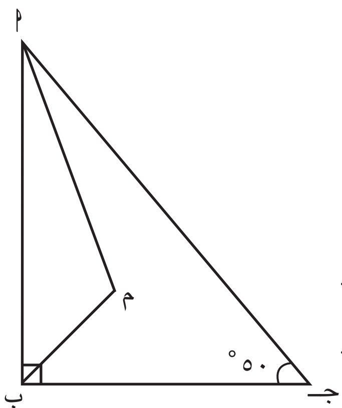
∴ ق (و $\hat{ص}$ ع) + ق (و $\hat{ع}$ ص) = ١٨٠° - ١١٠° = ...

∵ و نقطة تقاطع .... المثلّث س ص ع

∴ ق (....................) + ق (....................) = ٢ × ٧٠° = ...

∴ ق ($\hat{س}$) = ١٨٠° - .... = ...　(مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمثلّث = ١٨٠°)

تمارين ذاتية :



١ أ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب

م نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلة ، ق ($\hat{جـ}$) = ٥٠° .

أوجِد بالبرهان : أ ق (م $\hat{ب}$ أ)　　ب ق (م $\hat{أ}$ ب)

....

....

....

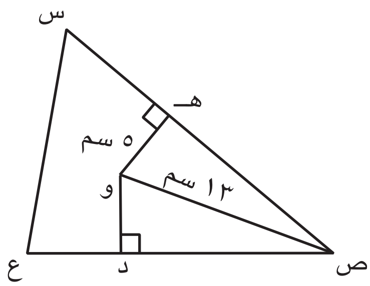
....

....

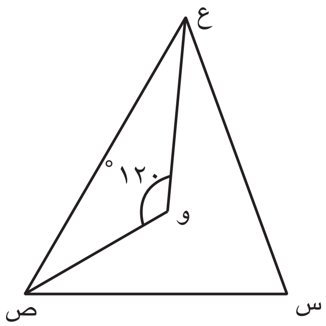
....

....

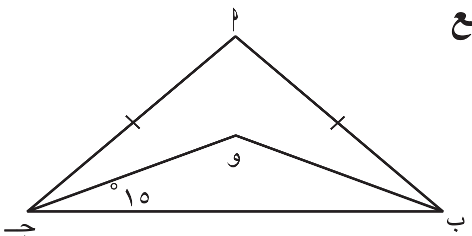
٢ المثلّث س ص ع فيه : و نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلة ،
هــو = ٥ سم ، ص و = ١٣ سم
أوجِد بالبرهان :
(أ) و د **(ب)** ص د



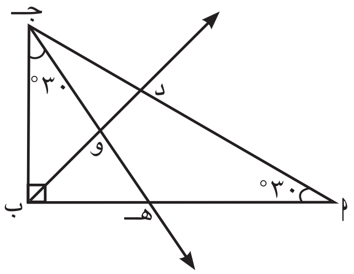
٣ المثلّث س ص ع فيه : و نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلة ، ق ($\hat{و}$) = ١٢٠°
أوجِد بالبرهان ق ($\hat{س}$) .



٤ المثلّث ا ب جـ متطابق الضلعَين فيه : و هي نقطة تقاطع
منصِّفات زواياه الداخلة ، ق ($\hat{و جـ ب}$) = ١٥° .
أوجِد بالبرهان ق ($\hat{ا}$) .



٥ أ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في $\hat{ب}$ ،
ق (هـ $\hat{جـ}$ ب) = ق ($\hat{أ}$) = ٣٠° ،
إذا كان $\overleftarrow{ب د}$ منصِّف $\hat{ب}$ ،
$\overline{د ب}$ ∩ $\overline{جـ هـ}$ = { و } ،
أثبِت أنّ و نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلة للمثلّث أ ب جـ .



....

....

....

....

....

....

....

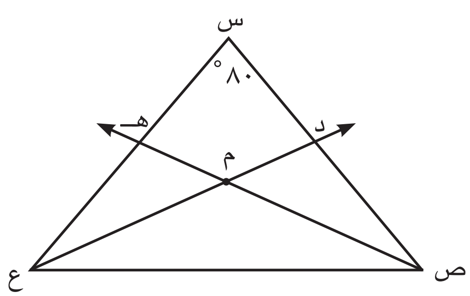
....

....

مهارات تفكير عليا :

اِختر الإجابة الصحيحة .

٦ س ص ع مثلّث فيه : $\overleftarrow{ص هـ}$ منصِّف $\hat{ص}$ ،
$\overleftarrow{ع د}$ منصِّف $\hat{ع}$
ق (د $\hat{م}$ هـ) = ...



(أ) ١٠٠° (ب) ٥٠°
(ج) ١٣٠° (د) ٤٠°

٧ - ٥ الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه

Altitudes from Vertices of a Triangle to its Sides

سوف تتعلّم : توظيف نظرية الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه لحلّ تمارين هندسية .

العبارات والمفردات :

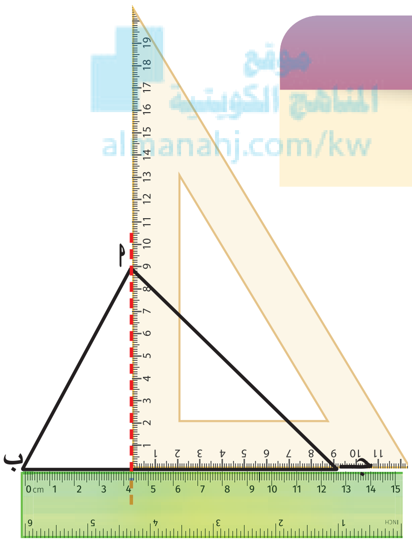
الأعمدة	Altitudes	الارتفاعات	Heights

اللوازم

أدوات هندسية .

اِرتفاع المثلّث هو طول العمود المرسوم من رأس المثلّث على قاعدته (أو امتدادها) .

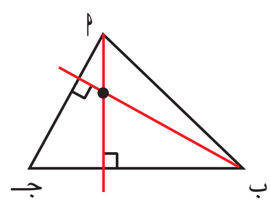
في المثلّث ﺃ ب جـ الموضَّح في الشكل المقابِل ، يمكن رسم العمود النازل من رأس المثلّث ﺃ على الضلع المقابِل له ب جـ باستخدام المثلّث القائم والمسطرة كما في الشكل .



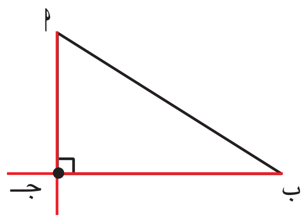
اِستكشِف

في المثلّثات التالية ، تمّ رسم العمودَين من الرأسَين ﺃ ، ب على الضلعَين المقابِلَين لهما (أو امتدادهما) كما في الشكل .
أُرسم العمود الثالث من الرأس جـ .

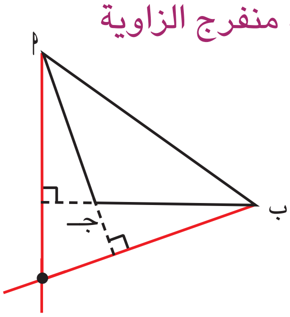
مثلّث حادّ الزوايا



مثلّث قائم الزاوية



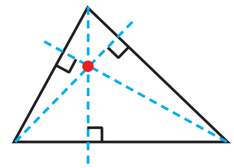
مثلّث منفرج الزاوية



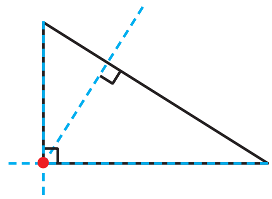
• **ماذا تلاحظ ؟** ....

نظرية : الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه تتقاطع في نقطة واحدة .

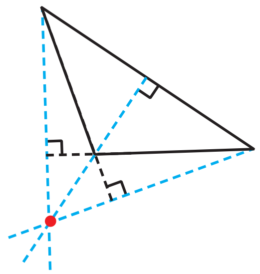
لاحِظ أنّ :



نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث الحادّ الزوايا على أضلاعه تقع داخل المثلّث .



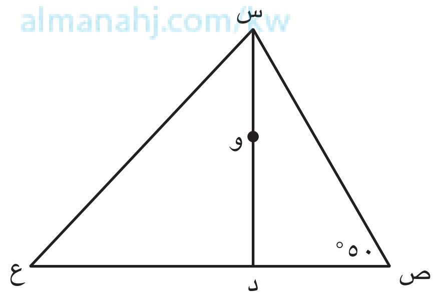
نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث القائم الزاوية على أضلاعه هي رأس الزاوية القائمة .



نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث المنفرج الزاوية على أضلاعه (أو امتدادها) تقع خارج المثلّث .

دورك الآن (١)

(أ) في المثلّث س ص ع : و نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه ، و ∈ $\overline{\text{س د}}$.



أكمِل ما يلي :

- ق (س د̂ ص) = ...

السبب ....

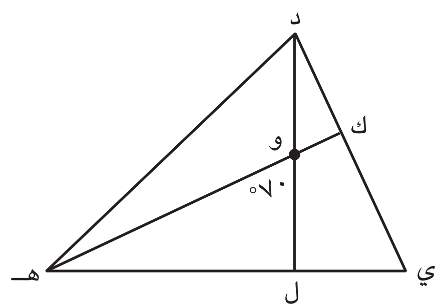
- ق (ص س̂ د) = ...

السبب ....

(ب) في المثلّث د هـ ي : و نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه ، $\overline{\text{هـ ك}}$ ∩ $\overline{\text{د ل}}$ = { و } . أكمِل ما يلي :

تذكَّر

مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠°



- ق (و هـ̂ ل) = ...

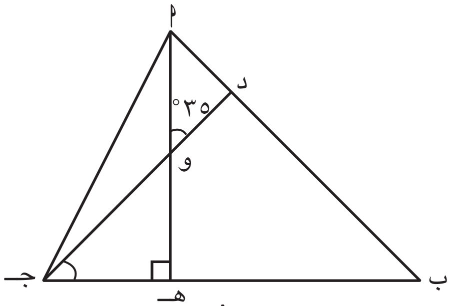
السبب ....

- ق (ي̂) = ...

السبب ....

مثال (١):

أ ب جـ مثلّث فيه : و نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه ، ق (د و̂ أ) = ٣٥° ،
إذا كان جـ د ∩ أ هـ = { و } ، أوجِد بالبرهان ق (و جـ̂ هـ) .



الحلّ :

المعطيات : و نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه ، ق (د و̂ أ) = ٣٥°

المطلوب : إيجاد ق (و جـ̂ هـ)

البرهان : ∵ و نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه (معطى)

∴ أ هـ ⊥ ب جـ

∴ Δ و هـ جـ قائم الزاوية في هـ ، ∴ ق (و هـ̂ جـ) = ٩٠°

∵ ق (هـ و̂ جـ) = ق (د و̂ أ) = ٣٥° بالتقابل بالرأس

∴ ق (و جـ̂ هـ) = ١٨٠° - (٩٠° + ٣٥°)

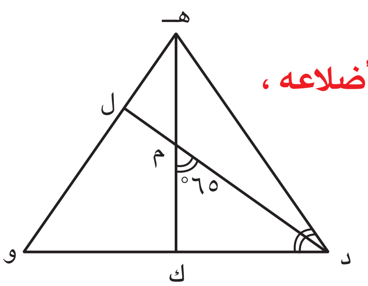
= ١٨٠° - ١٢٥° = ٥٥° (مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمثلّث = ١٨٠°)

مثال (٢):

Δ د هـ و فيه : م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه ،
هـ ك ∩ د ل = { م } ، ق (هـ د̂ و) = ق (د م̂ ك) = ٦٥° .

(١) أوجِد بالبرهان ق (و̂)

(٢) أثبِت أنّ المثلّث هـ د و متطابق الضلعَين



الحلّ :

المعطيات : م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه ، ق (هـ د̂ و) = ق (د م̂ ك) = ٦٥°

المطلوب : إيجاد : (١) ق (و̂) (٢) إثبات أنّ المثلّث هـ د و متطابق الضلعَين

البرهان : ∵ م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه (معطى)

∴ م ك ⊥ د و ، م ل ⊥ هـ و (نظرية)

∵ ق (ك م̂ د) = ٦٥° (معطى)

∴ ق (ك م̂ ل) = ١٨٠° - ٦٥° = ١١٥° (بالتجاور على خطّ مستقيم)

ك م ل و شكل رباعي فيه :

∵ ق (م ك̂ و) = ق (م ل̂ و) = ٩٠°

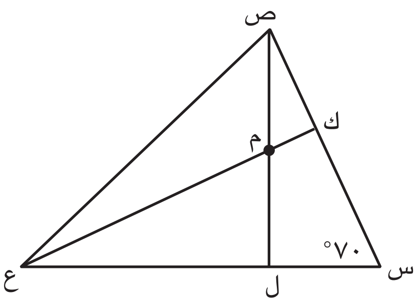
∴ ق (و̂) = ٣٦٠° - (٩٠° + ٩٠° + ١١٥°) = ٦٥° (مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠°)

∵ ق (هـ د̂ و) = ٦٥° (معطى)

∴ Δ هـ د و متطابق الضلعَين . (لتطابق زوايا القاعدة)

تمارين ذاتية :

١ في الشكل المقابِل ، المثلّث س ص ع فيه : ق ($\widehat{\text{س}}$) = ٧٠° ،
م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة
من رؤوس المثلّث على أضلاعه ،
$\overleftrightarrow{\text{ل ص}} \cap \overleftrightarrow{\text{ك ع}}$ = { م } ،
أوجِد بالبرهان : (١) ق (س $\widehat{\text{ص}}$ ل)
(٢) ق (ص $\widehat{\text{م}}$ ع)



....

....

....

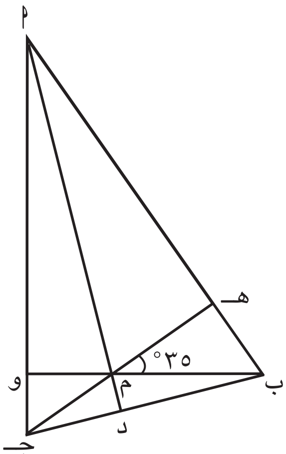
....

....

....

....

٢ في الشكل المقابِل ، أ ب جـ مثلّث فيه :
م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة
من رؤوس المثلّث على أضلاعه ، ق (هـ $\widehat{\text{م}}$ ب) = ٣٥° ،
أوجِد بالبرهان ق (ب $\widehat{\text{أ}}$ جـ) .



....

....

....

....

....

....

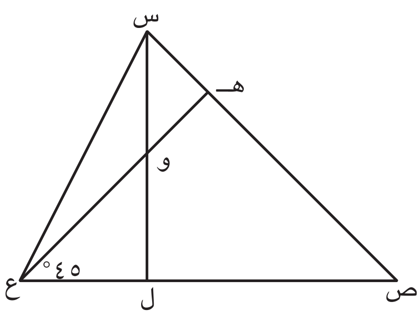
....

....

٣ في الشكل المقابِل ، س ص ع مثلّث فيه : ق (هـ $\hat{\text{ع}}$ ل) = ٤٥°

و نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوسه على أضلاعه ،

$\overline{\text{س ل}} \cap \overline{\text{هـ ع}} = \{ \text{و} \}$.



(١) أوجِد بالبرهان ق (هـ $\hat{\text{و}}$ س)

(٢) ما نوع المثلّث هـ و س بالنسبة إلى أضلاعه ؟

....

....

....

....

....

....

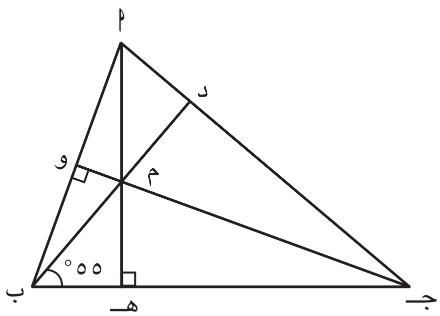
....

....

٤ أ ب جـ مثلّث فيه :

$\overline{\text{أ هـ}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ و}} \perp \overline{\text{أ ب}}$.

ق (م $\hat{\text{ب}}$ هـ) = ٥٥°



(١) أثبِت أنّ : $\overline{\text{ب د}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$.

(٢) أوجِد ق (م $\hat{\text{أ}}$ جـ) .

....

....

....

....

....

....

....

....

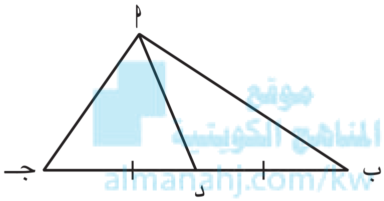
....

٧ - ٦ القطع المتوسّطة للمثلّث
Medians of a Triangle

سوف تتعلّم : توظيف نظرية القطع المتوسّطة للمثلّث لحلّ تمارين هندسية .

العبارات والمفردات :

القطع المتوسّطة للمثلّث	Median of a Triangle



في Δ أ ب جـ :
د منتصف ب جـ ،
أ د تُسمّى (قطعة متوسّطة للمثلّث أ ب جـ) .

القطعة المتوسّطة للمثلّث : هي القطعة المستقيمة التي تصل بين أيّ رأس في المثلّث ومنتصف الضلع المقابِل له .

اِستكشِف

اللوازم

أدوات هندسية .

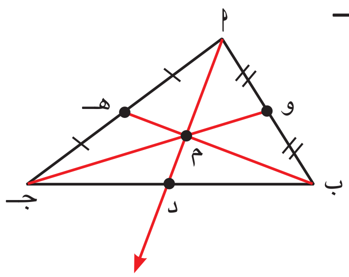
في Δ أ ب جـ : و منتصف أ ب ، هـ منتصف أ جـ ،

ب هـ ∩ جـ و = { م }

هل أ م ينصّف ب جـ ؟

للتحقّق من ذلك ، نتّبع ما يلي :

العمل : نرسم أ م يقطع ب جـ في د ، بحيث أ م = م س ، ثمّ صِل ب س ، س جـ



في Δ أ ب س : و م // ب س ؟ لماذا ؟

في Δ أ س جـ : م هـ // ....

هل الشكل ب س جـ م متوازي أضلاع ؟ وضِّح إجابتك .

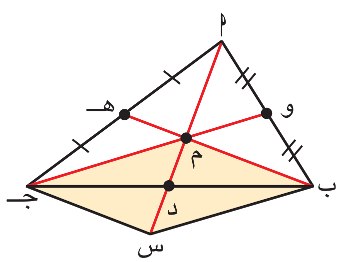
∵ قطرا متوازي الأضلاع ....

∴ ب د = ...

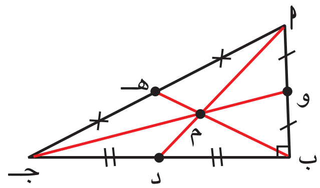
∴ أ د قطعة ....

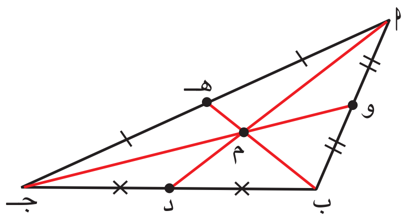
م د = ...

∴ م د = $\frac{1}{2}$ م س = $\frac{1}{2}$ .... (لأنّ .... = ... عملًا)



بالمثل في المثلّث القائم الزاوية والمثلّث المنفرج الزاوية .

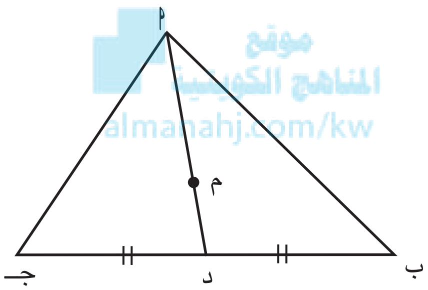




• **ماذا تلاحظ ؟** ....

نظرية :

القطع المتوسّطة للمثلّث تتقاطع في نقطة واحدة تُقسم كلّ منها بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس .



في Δ أ ب جـ :

$\overline{\text{أ د}}$ قطعة متوسّطة ،

م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث .

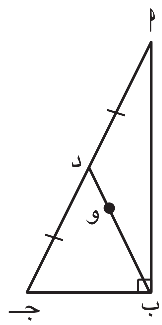
أكمِل :

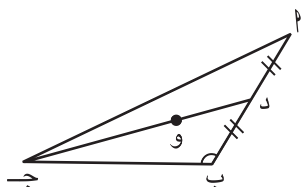
أ م = ... م د	م د = ... أ د	أ م = ... أ د
م د = ... أ م	أ د = ... م د	أ د = ... أ م

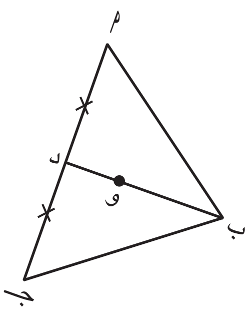
دورك الآن (١)

في كلّ من المثلّثات التالية : و نقطة تقاطع القطع المتوسّطة .

أكمِل (دون استخدام الأدوات الهندسية) .



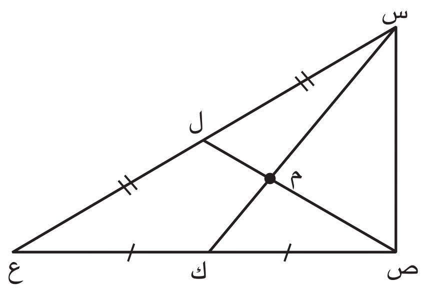




لتكن ب و = ٢ سم	**لتكن و د = ٤ سم**	**لتكن ب د = ٣٠ سم**
∴ و د = ... سم	∴ و جـ = ... سم	∴ ب و = ... سم
∴ ب د = ... سم	∴ د جـ = ... سم	∴ و د = ... سم

دورك الآن (٢)

في الشكل المقابِل س ص ع مثلّث :



∵ ل منتصف .... ∴ $\overline{\text{ص ل}}$ قطعة ....

∵ ك منتصف .... ∴ $\overline{\text{س ك}}$ قطعة ....

∵ $\overline{\text{ص ل}} \cap \overline{\text{س ك}}$ = {م}

∴ م هي نقطة ....

مثال (١):

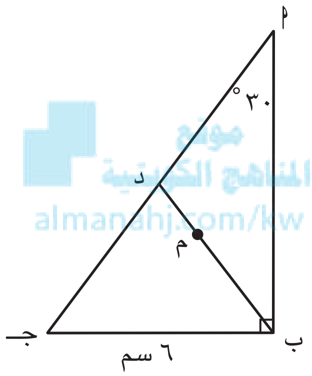
أ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب ،

ب جـ = ٦ سم ،

م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث أ ب جـ ، ق ($\hat{\text{أ}}$) = ٣٠°

أوجِد بالبرهان كلًّا من : (١) أ جـ (٢) ب د

(٣) ب م (٤) م د



الحلّ :

المعطَيات : أ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب ، م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة ،

ب جـ = ٦ سم ، ق ($\hat{\text{أ}}$) = ٣٠°

المطلوب : إيجاد كلّ من : (١) أ جـ (٢) ب د (٣) ب م (٤) م د

البرهان : Δ أ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب فيه :

∵ ق ($\hat{\text{أ}}$) = ٣٠°

∴ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ أ جـ (نتيجة)

∴ أ جـ = ٢ × ب جـ = ٢ × ٦ = ١٢ سم (مثلّث ثلاثيني ستّيني)

∵ د منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ ، ب زاوية قائمة

ب د = $\frac{١}{٢}$ أ جـ (نظرية)

= $\frac{١}{٢}$ × ١٢ = ٦ سم

∵ م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة (معطى)

∴ $\overline{\text{ب د}}$ قطعة متوسّطة

∴ ب م = $\frac{٢}{٣}$ × ب د = $\frac{٢}{٣}$ × ٦ = ٤ سم
∴ د م = $\frac{١}{٣}$ × ب د = $\frac{١}{٣}$ × ٦ = ٢ سم (نظرية)

مثال (٢):

ك هــ ل مثلّث فيه:

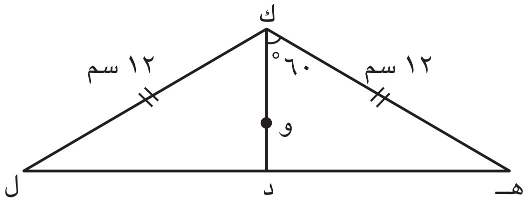
ك هــ = ك ل = ١٢ سم ، ق (هــ $\hat{ك}$ د) = ٦٠° ،

و نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث.

أوجِد بالبرهان كلًّا من: (١) ق ($\hat{هــ}$)

(٢) ك د

(٣) و د



الحلّ:

المعطَيات: ك هــ ل مثلّث فيه: ك هــ = ك ل = ١٢ سم ، ق (هــ $\hat{ك}$ د) = ٦٠°

المطلوب: إيجاد كلّ من: **(١)** ق ($\hat{هــ}$) **(٢)** ك د **(٣)** و د

البرهان: Δ ك هــ ل فيه:

∵ و نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث ك هــ ل (معطى)

∴ د منتصف $\overline{هــ ل}$

∵ ك هــ = ك ل (معطى)

∴ $\overline{ك د} \perp \overline{هــ ل}$ (من خواصّ المثلّث المتطابق الضلعَين)

∴ ق (ك $\hat{د}$ هــ) = ٩٠°

في Δ هــ ك د :

∵ ق (هــ $\hat{ك}$ د) = ٦٠°

∴ ق ($\hat{هــ}$) = ٩٠° − ٦٠° = ٣٠°

∴ Δ هــ ك د مثلّث ثلاثيني ستّيني

∴ ك د = $\frac{١}{٢}$ ك هــ (نتيجة)

= $\frac{١}{٢}$ × ١٢ = ٦ سم

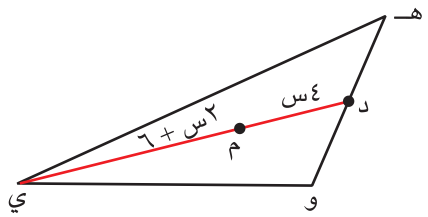
∴ و د = $\frac{١}{٣}$ × ك د

= $\frac{١}{٣}$ × ٦ = ٢ سم (نظرية)

الدرس السادس

مثال (٣) :

المثلّث هــ و ي فيه : م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث .
إذا كان د م = (٤ س) سم ، م ي = (٢ س + ٦) سم ،
أوجِد بالبرهان قيمة س .



الحلّ :

المعطَيات : المثلّث هــ و ي فيه : م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث ،
د م = (٤ س) سم ، م ي = (٢س + ٦) سم .

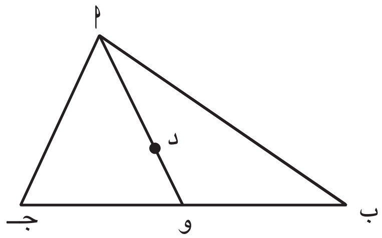
المطلوب : إيجاد قيمة س .

البرهان : ∵ م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث هــ و ي (معطى)
∴ د م = $\frac{١}{٢}$ × م ي (نظرية)
∴ ٤ س = $\frac{١}{٢}$ (٢ س + ٦) (حلّ المعادلة)
٤ س = س + ٣
٤ س ـ س = ٣
٣س = ٣
س = ١ (تحقَّق من إجابتك)

اِنتبِه
اِستخدِم خاصّية توزيع الضرب على الجمع لتسهيل العمليات الحسابية .
$\frac{١}{٢}$ (٢ س + ٦)

دورك الآن (٣)

في الشكل المقابِل : $\overline{\text{أ و}}$ قطعة متوسّطة للمثلّث أ ب جـ ،
إذا كان أ د = ٥س – ١ ، و د = ٢س ،
أوجِد بالبرهان طول $\overline{\text{أ و}}$.



المعطَيات : ....
....

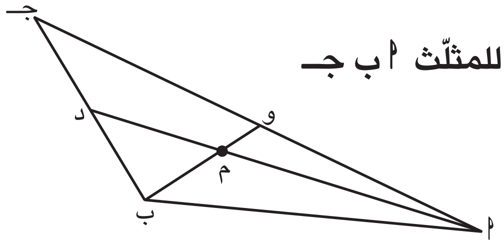
المطلوب : ....

البرهان : ∵ د نقطة تقاطع .... (معطى)
∴ $\overline{\text{أ و}}$ قطعة متوسّطة ،
∴ و د = $\frac{١}{٢}$ × .... (نظرية)
٢س = $\frac{١}{٢}$ × (..................................) (حلّ المعادلة)
٤س = ٥س – ١
٤س ـ .... = ـ١
ـ س = ... ∴ س = ...
وبالتالي ، أ و = ... = ... (تحقَّق من إجابتك)

اِنتبِه
اِضرب طرفَي المعادلة في ٢ لتسهيل العمليات الحسابية .
٢ × ٢س = $\cancel{٢}$ × $\frac{١}{\cancel{٢}}$ (٥س – ١)

تمارين ذاتية :

(١) في الشكل المقابِل :



$\overline{أد} \cap \overline{ب و}$ = { م } ، م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث أ ب جـ

إذا كان م ب = ٤ سم ، أ د = ٢٧ سم ،

أوجِد بالبرهان كلًّا من : (١) و م

(٢) أ م

(٣) م د

....

....

....

....

....

....

....

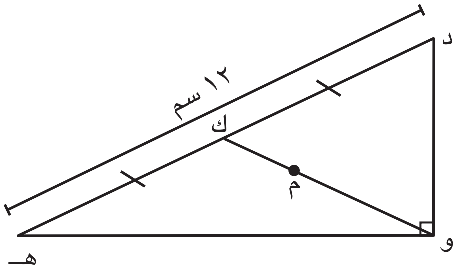
....

(٢) Δ هـ و د قائم الزاوية في و ، فيه :

م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث .

أوجِد بالبرهان كلًّا مما يلي : (١) و ك

(٢) م ك



....

....

....

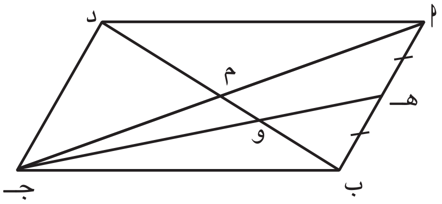
....

....

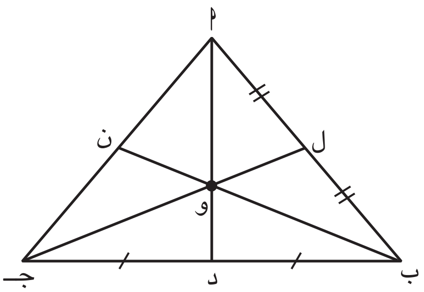
....

....

٣ أ ب جـ د متوازي أضلاع تقاطع قطراه في م ،
إذا كان ب د = ١٨ سم ، هـ منتصف أ ب
ب م ∩ جـ هـ = {و}
أوجِد بالبرهان : (١) م ب (٢) ب و

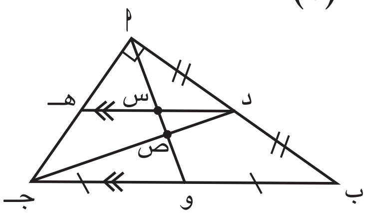


٤ المثلّث أ ب جـ فيه :
و نقطة تلاقي القطع المتوسّطة للمثلث ،
إذا كان أ و = (٨ س) وحدة طول ،
و د = (٥ س - ٣) وحدة طول ،
أوجِد بالبرهان قيمة س ، ثمّ تحقَّق من الحلّ .



مهارات تفكير عليا :

٥ لديك قائمتان ، اِختر من القائمة (٢) ما يناسب كلّ تمرين من القائمة (١) لتحصل على إجابة صحيحة .



في الشكل المقابِل : أ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في أ ،

د منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، و منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ،

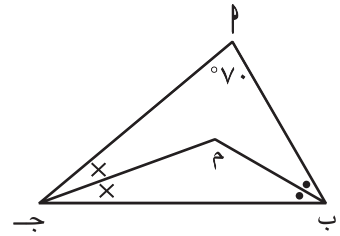
$\overline{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، د هـ = ٦ سم

القائمة (١)	القائمة (٢)
١ ص و =	أ ١ سم
٢ د س =	ب ٢ سم
٣ س ص =	ج ٣ سم
	د ٤ سم
	هـ ٦ سم

أوّلًا : البنود المقالية

١ في كلّ من المثلّثات التالية ، أكمِل دون استخدام الأدوات الهندسية :

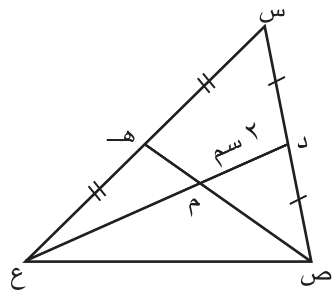
أ



ق (أ $\hat{ب}$ جـ) + ق (أ $\hat{جـ}$ ب) = ...

ق (ب $\hat{م}$ جـ) = ...

ب

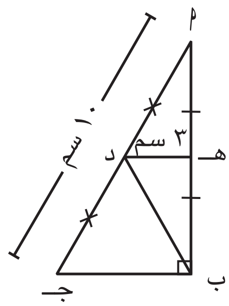


م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث س ص ع .

م ع = ...

د ع = ...

ج

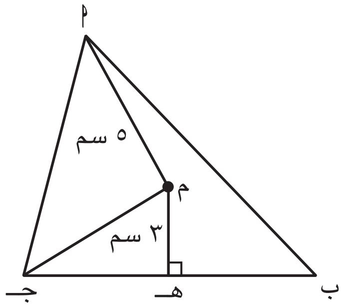


ب جـ = ...

ب د = ...

أ ب = ...

د



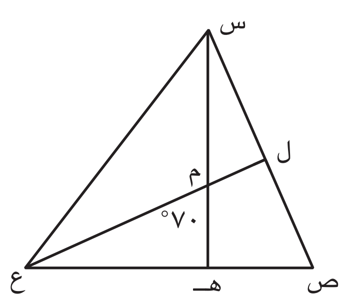
م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث أ ب جـ .

م جـ = ...

هـ جـ = ...

ب جـ = ...

هـ

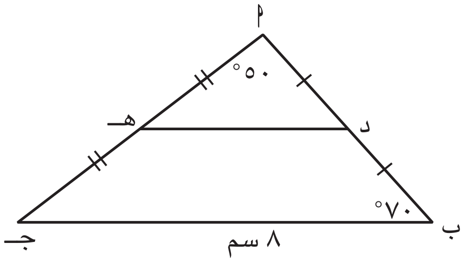


م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث س ص ع على أضلاعه .

ق (م $\hat{ع}$ هـ) = ...

ق (ل $\hat{ص}$ ع) = ...

٢ ‏ﺃ ب جـ مثلّث فيه: د منتصف $\overline{\text{ﺃ ب}}$ ،
هـ منتصف $\overline{\text{ﺃ جـ}}$ ، ق($\hat{\text{ﺃ}}$) = ٥٠° ،
ب جـ = ٨ سم ، ق($\hat{\text{ب}}$) = ٧٠° .
أوجِد بالبرهان: (١) د هـ (٢) ق(ﺃ $\hat{\text{د}}$ هـ)
(٣) ق(ﺃ $\hat{\text{هـ}}$ د)



....

....

....

....

....

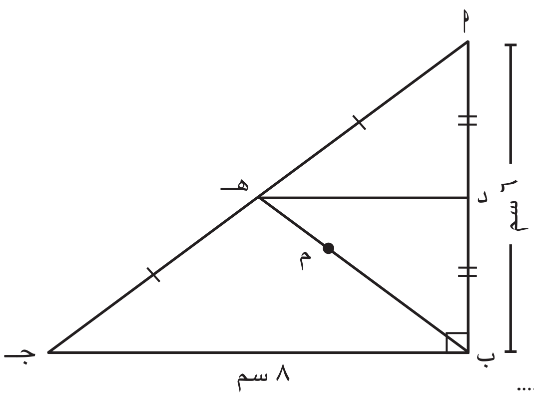
....

....

....

....

٣ ‏ﺃ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب فيه:
د منتصف $\overline{\text{ﺃ ب}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{ﺃ جـ}}$ ،
ﺃ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم
م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث ﺃ ب جـ .
أوجِد بالبرهان: (أ) د هـ (ب) ﺃ جـ
(ج) ب هـ (د) م هـ



....

....

....

....

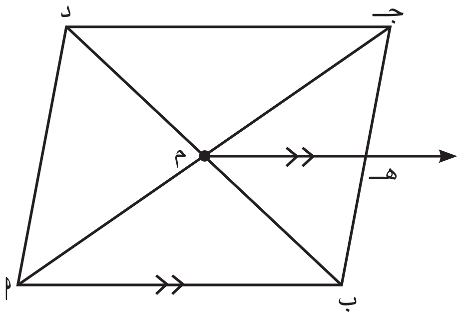
....

....

....

تقويم الوحدة التعليمية السابعة

٤ في الشكل المقابِل :



أ ب جـ د متوازي الأضلاع تقاطع قطراه في م

$\overrightarrow{\text{م هـ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ويقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ في هـ .

أثبِت أنّ : هـ منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$.

....

....

....

....

....

....

....

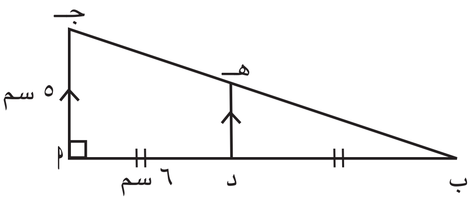
....

....

٥ في الشكل المقابِل ، أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ

د منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{أ جـ}}$ ،

د أ = ٦ سم ، أ جـ = ٥ سم .



(أ) أثبِت أنّ : ب هـ = هـ جـ .

(ب) أوجِد : طول $\overline{\text{هـ جـ}}$.

....

....

....

....

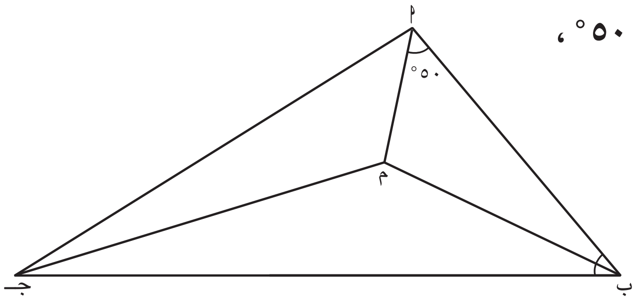
....

....

....

....

....



٦ أ ب جـ مثلّث فيه : ق (ب $\hat{أ}$ م) = ق (أ $\hat{ب}$ جـ) = ٥٠° ،
حيث م نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلة .
أوجِد بالبرهان ق (أ $\hat{جـ}$ م) .

....

....

....

....

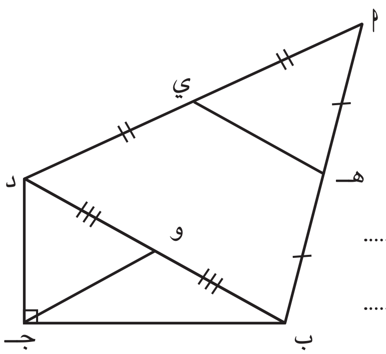
....

....

....

....

....



٧ في الشكل المقابِل : هـ ، ي ، و منتصفات $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ د}$ ، $\overline{ب د}$ على الترتيب ، ق ($\hat{جـ}$) = ٩٠° .
برهِن أنّ : هـ ي = و جـ .

....

....

....

....

....

....

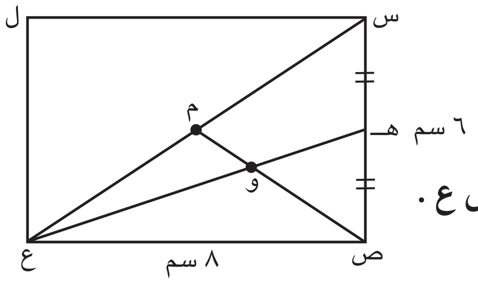
....

....

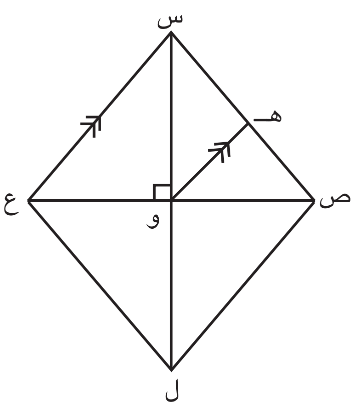
....

....

٨ س ص ع ل مستطيل ،
م نقطة تقاطع قطرَيه ، ص ع = ٨ سم ، س ص = ٦ سم
نصّفت س ص في هـ ، هـ ع ∩ ص م = { و } .
(١) برهِن أنّ : و نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث س ص ع .
(٢) أوجِد طول و م .

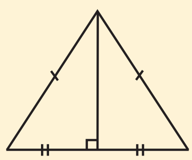


٩ عند تصميم إحدى النقوشات الفنّية .
قرّر المصمِّم رسم الشكل المقابِل كما هو موضَّح :
حيث س ص = س ع = ١٠ سم ، س ل ⊥ ص ع ،
رسم و هـ // س ع ، هـ ∈ ص س . أوجِد بالبرهان طول هـ و .



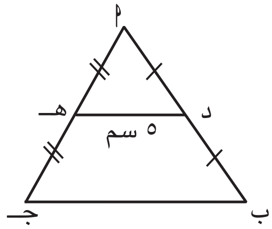
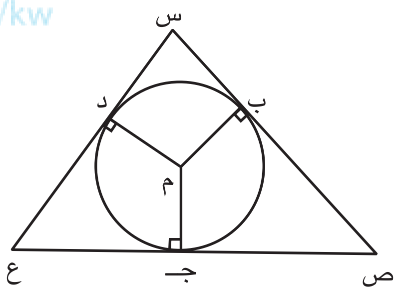
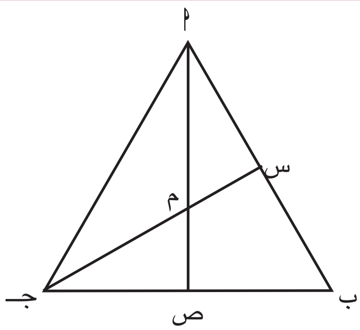
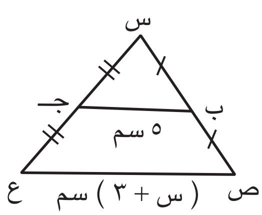
تذكَّر

في المثلّث المتطابق الضلعَين العمود المرسوم من رأس المثلّث على قاعدته ينصّفها .



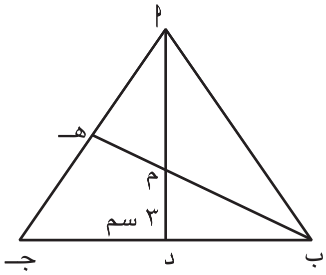
ثانيًا : البنود الموضوعية

في البنود (١ - ٦) ، ظلِّل **أ** إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلِّل **ب** إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ المثلّث أ ب جـ فيه : د منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ ، د هـ = ٥ سم ، فإنّ أ جـ = ١٠ سم .		أ	ب
٢ نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث المنفرج الزاوية تقع داخل المثلّث .		أ	ب
٣ نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث القائم الزاوية على أضلاعه هي رأس الزاوية القائمة .		أ	ب
٤ في الشكل المقابِل : دائرة مركزها م فإنّ م هي نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث س ص ع .		أ	ب
٥ إذا كان Δ أ ب جـ متطابق الأضلاع ، م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوسه على أضلاعه ، $\overline{\text{جـ س}} \cap \overline{\text{أ ص}}$ = { م } ، فإنّ ق (أ $\hat{\text{م}}$ جـ) = ١٢٠°		أ	ب
٦ في الشكل المقابِل : س = ٧		أ	ب

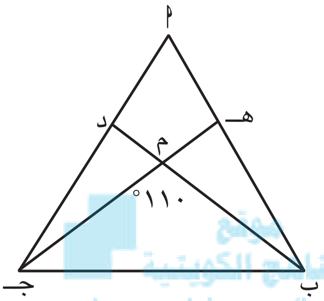
في البنود (٧ - ١٩) أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلّل الإجابة الصحيحة .

٧ ﺃ ب جـ مثلّث فيه م نقطة تقاطع متوسّطات المثلّث ،
م د = ٣ سم ، فإنّ ﺃ د =



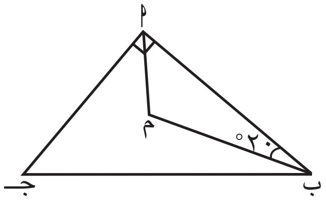
أ ٦ سم ب ٩ سم ج ١,٥ سم د ٥ سم

٨ ﺃ ب جـ مثلّث فيه م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة
من رؤوس المثلّث على أضلاعه ، ق (ب م̂ جـ) = ١١٠° ،
فإنّ ق (ﺃ̂) =



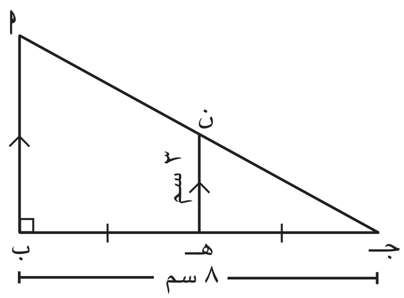
أ ٧٠° ب ١١٠° ج ٣٥° د ٦٠°

٩ ﺃ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ﺃ،
م نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلة للمثلّث ،
ق (ﺃ ب̂ م) = ٢٠° ، فإنّ ق (جـ̂) =



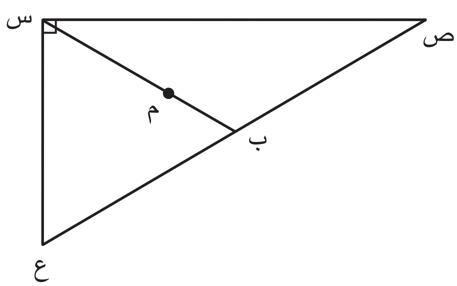
أ ٣٠° ب ٤٠° ج ٥٠° د ٦٠°

١٠ ﺃ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب ،
هـ منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{هـ ن}}$ // $\overline{\text{ب ﺃ}}$.
فإنّ : ﺃ جـ =



أ ٨ سم ب ١٠ سم ج ٣ سم د ٦ سم

١١ س ص ع مثلّث قائم الزاوية في س .
طول وتره = ٢٤ سم ، م نقطة تقاطع القطع
المتوسّطة للمثلّث س ص ع ،
فإنّ : م ب =

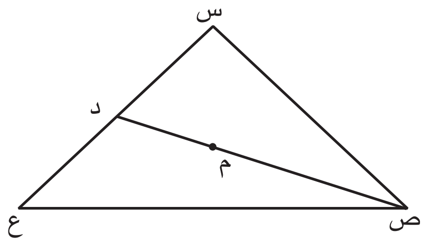


أ ٤ سم ب ٣ سم ج ٦ سم د ١٢ سم

١٢ **عدد القطع المتوسّطة للمثلّث المنفرج الزاوية يساوي :**

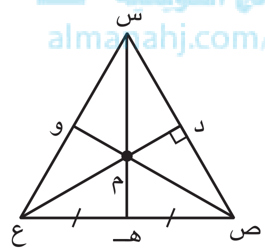
أ صفر   ب ١   ج ٢   د ٣

١٣ **إذا كان ص د قطعة متوسّطة في المثلّث س ص ع ،**
م نقطة تلاقي القطع المتوسّطة ، فإنّ م د =



أ $\frac{1}{2}$ ص م   ب ٢ ص م   ج $\frac{1}{2}$ ص د   د ٢ ص د

١٤ **س ص ع مثلّث متطابق الأضلاع ، س هـ ∩ ص و ∩ ع د = { م } ،**
فإنّ م هي نقطة تقاطع :



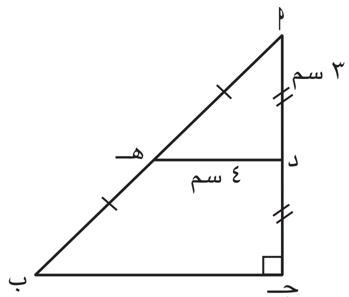
أ منصِّفات زوايا المثلّث فقط .

ب منصِّفات زوايا المثلّث والأعمدة المرسومة من رؤوسه على أضلاعه فقط .

ج منصِّفات زوايا المثلّث والأعمدة المرسومة من رؤوسه على أضلاعه و القطع المتوسّطة للمثلّث ومحاور أضلاعه .

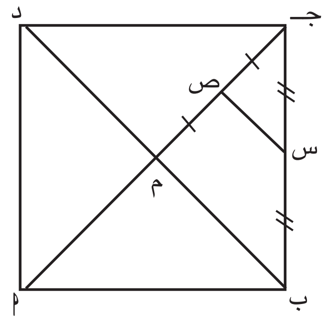
د منصِّفات زوايا المثلّث ومحاور أضلاعه فقط .

١٥ **في الشكل المقابِل : إذا كانت د ، هـ منتصفَي أ جـ ،**
أ ب على الترتيب ، فإنّ أ ب =



أ ٥ سم   ب ١٠ سم   ج ٢٥ سم   د ١٢ سم

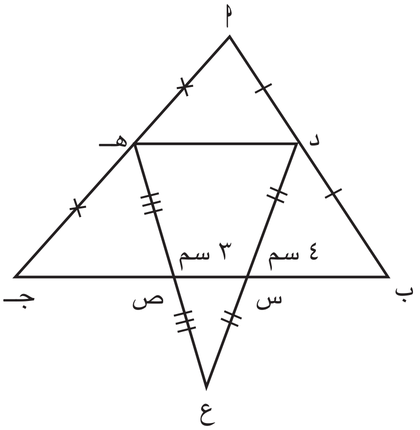
١٦ **في الشكل المقابِل : أ ب جـ د مربّع فيه**
س ، ص منتصفا ب جـ ، جـ م على الترتيب
حيث أ جـ = ١٢ سم ، فإنّ س ص يساوي :



أ ١٢ سم   ب ٦ سم   ج ٣ سم   د ٤ سم

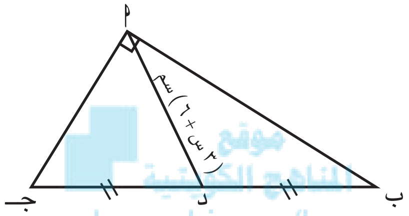
١٧ في الشكل المقابِل ، وحسب المعطَيات الموضَّحة حيث
ب س = ٤ سم ، س ص = ٣ سم ، فإنّ طول $\overline{\text{ص جـ}}$ يساوي :

أ ٣ سم ب ٤ سم ج ٥ سم د ٦ سم



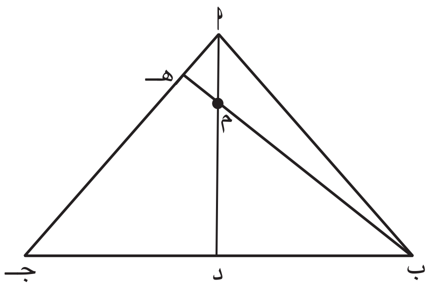
١٨ في الشكل المقابِل : المثلّث ٲ ب جـ قائم الزاوية في ٲ ،
د منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ حيث ٲ د = (٣ س + ٦) سم ،
ب جـ = (١٠ س) سم ، فإنّ طول $\overline{\text{ٲ د}}$ يساوي

أ ٣٠ سم ب ١٥ سم ج ١٠ سم د ٢٠ سم



١٩ في الشكل المقابِل : إذا كانت م نقطة تقاطع الأعمدة
المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه ،
فإنّ ق (هـ $\hat{\text{ب}}$ جـ) =

أ ق (ب $\hat{\text{ٲ}}$ د) ب ق (هـ $\hat{\text{جـ}}$ د)
ج ق (جـ $\hat{\text{ٲ}}$ د) د ق (د $\hat{\text{م}}$ هـ)



الوحدة التعليمية
الثامنة

النسبة المئوية – الهندسة والقياس

« الجمال في هندسة أبراج الكويت »

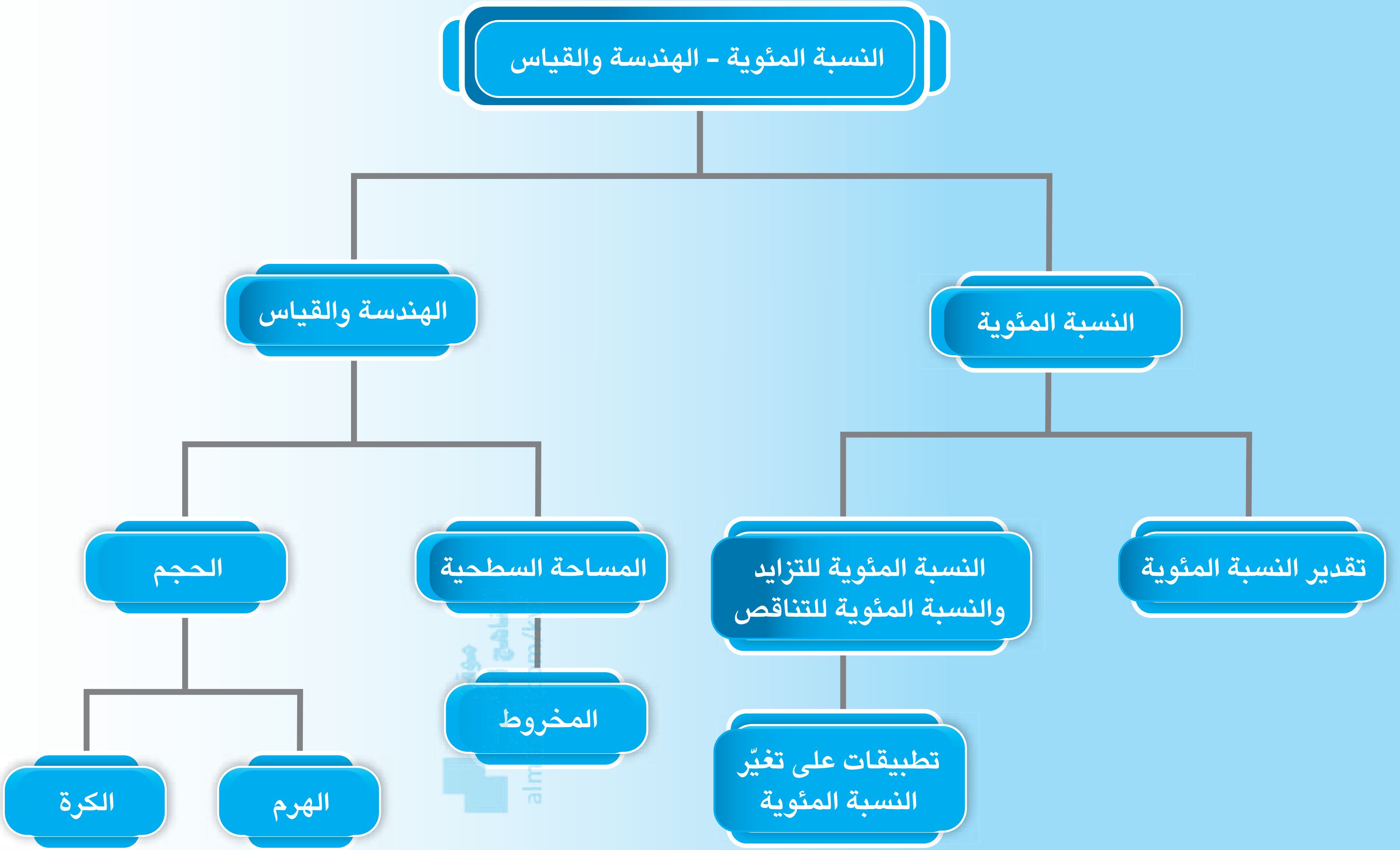
تحتوي أبراج الكويت على كرة ضخمة تُستخدم كخزّان للماء ، ويعتمد تصميمها بالكامل على حسابات المساحة السطحية والحجم .

فكلّما تغيّر طول نصف قطر الكرة ولو قليلًا ، تغيّر الحجم والمساحة السطحية بشكل كبير .

ولهذا السبب ، يحرص المهندسون عند تصميم المعالم على اختيار النسب بدقّة ، لأنّ زيادة بسيطة في الأبعاد قد تسبّب زيادة كبيرة في الحجم والمساحة السطحية وبالتالي زيادة التكلفة .

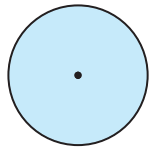
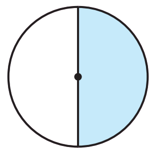
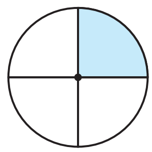
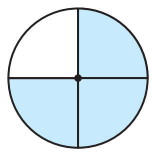
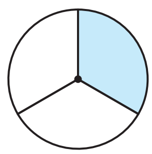
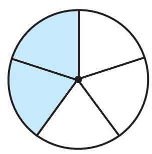
المجال	معايير المنهج	مؤشّر الأداء
العدّ والجبر	تحديد علاقات التناسب في المسائل الرياضية .	التذكّر - التعرّف - الفهم - التمثيل - التعاون - العمل الجَماعي - الوسائط - حلّ المشكلات - الاستكشاف والتقصّي - النمذجة - العلاقات - الاستدلال - الاستنتاج - التقويم
الهندسة والقياس	تطبيق الأساليب والأدوات والصيغ الملائِمة لتحديد قياسات .	التذكّر - التعرّف - الفهم - الوسائط - الاستكشاف والتقصّي - النمذجة - المقارنة والتمييز - الاستنتاج - حلّ المشكلات - التحليل والتركيب - القوانين - التقويم - الاستدلال - العلاقات
	فهم خواصّ القياس للأشياء والوحدات والأنظمة وعمليات القياس .	

مخطّط تنظيمي للوحدة التعليمية الثامنة



هل أنت مستعدّ ؟

١ أكمِل الجدول التالي :

الشكل	الصورة الكسرية	الصورة العشرية	النسبة المئوية
			٪١٠٠
	$\frac{١}{٢}$		
			٪٢٥
		٠,٧٥	
		$٠,\overline{٣}$	$٣٣\frac{١}{٣}$٪
	$\frac{٢}{٥}$		

٢ حُلّ التناسب لكلّ ممّا يليّ :

أ $\frac{٥}{٨} = \frac{س}{١٦}$

....

....

....

ب $\frac{٢٥}{س} = \frac{١٢٥}{٤٠}$

....

....

....

٣ حُلّ المعادلات التالية في ح :

أ) ٤٠ س = ٣٦٠

ب) س × $\frac{\text{٢٨}}{\text{١٠٠}}$ = ٧

ج) ١ + س = $\frac{\text{٩}}{\text{٥}}$

د) ١ − س = −٧

هـ) ٢٠ = ١٦ × (١ + س)

و) ٣ = ٥ × (١ − س)

٤ أوجِد قيمة كلّ ممّا يلي :

أ) ٣٠٪ من ٧٠

ب) ١٥٪ من ١٨٠

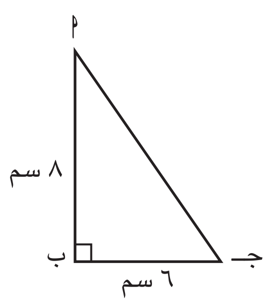
٥ أوجِد ناتِج كلّ ممّا يلي :

أ) ٤,٢ × ١٠,٥ = ...

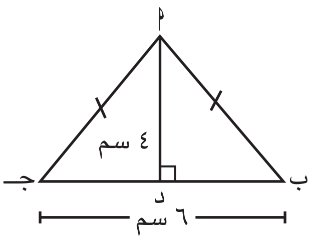
ب) ٣,١٤ × ١٠ = ...

ج) ١٤ × ٣,٥ = ...

٦ في الشكل المقابِل : أوجِد طول $\overline{\text{أجـ}}$.



٧ في الشكل المقابِل ، أوجِد كلًّا ممّا يلي :



أ طول $\overline{\text{د ب}}$ = ...

....

ب طول $\overline{\text{ٕا ب}}$ = ...

....

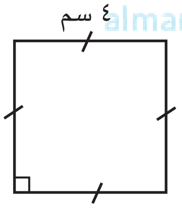
ج محيط Δ ٕا ب جـ = ...

....

د مساحة Δ ٕا ب جـ = ...

....

٨ في الشكل المقابِل ، أوجِد مساحة المنطقة المربّعة .



....

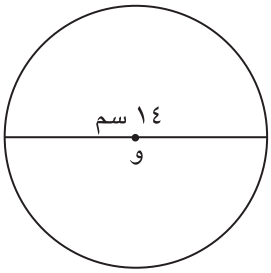
....

....

....

٩ في الشكل المقابِل ، أوجِد مساحة المنطقة الدائرية .

(اِعتبِر $\pi = \frac{٢٢}{٧}$)



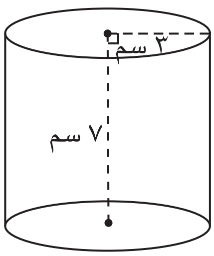
....

....

....

....

١٠ أوجِد حجم الأسطوانة الدائرية القائمة (اِعتبِر $\pi = \frac{٢٢}{٧}$) .



حجم الأسطوانة = ...

....

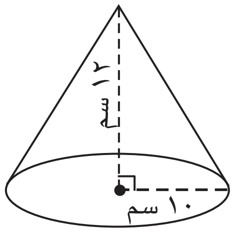
....

....

....

هل أنت مستعدّ ؟

١١ أوجِد حجم المخروط الدائري القائم الذي طول نصف قطر قاعدته ١٠ سم وارتفاعه ١٢ سم (اِعتبِر π = ٣,١٤) .



حجم المخروط = ...

....

....

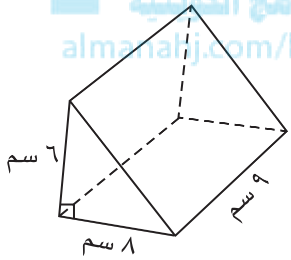
....

....

....

....

١٢ في الشكل المقابِل ، أوجِد حجم المنشور القائم :



حجم المنشور = ...

....

....

....

....

....

....

هل أنت مستعدّ ؟

٨ - ١ تقدير النسبة المئوية

Estimate Percent

سوف تتعلّم : تقدير النسبة المئوية .

العبارات والمفردات :

النسبة المئوية Percent
تقدير Estimate

حُلّ وناقِش

أراد سالم دفع فاتورة العشاء في أحد المطاعم وقيمتها ٩ دنانير . وكان هذا المطعم يعتمد بدل الخدمة ١٠٪ من قيمة الفاتورة ، أو ١٩٪ بدل الخدمة المتميّزة .

RESTAURANT Kuwait	
HUMMUS	2.000
FALAFEL	2.500
GRILLED CHICKEN	3.500
ICED TEA	1.000
SUBTOTAL	9.000
SERVICE CHARGE	0.900
TOTAL	9.900
Thank you !	

١ **قدِّر قيمة ما يدفعه سالم في حالة بدل الخدمة ١٠٪**

نلاحظ أنّ ٩ دنانير ≈ ١٠ دنانير

بدل الخدمة ≈ ١٠٪ × ١٠

≈ $\frac{\dots\dots}{\dots\dots}$ × ١٠ ≈ .... دينار

قيمة ما يدفعه سالم ≈ .... + ...

≈ .... دينار

٢ **قدِّر ما يدفعه سالم في حالة بدل الخدمة المتميّزة ١٩٪**

نلاحظ أنّ ١٩٪ ≈ ٢٠٪

بدل الخدمة ≈ .... × ١٠

≈ $\frac{\dots\dots}{\dots\dots}$ × ١٠ ≈ .... دينار

قيمة ما يدفعه سالم ≈ .... + ...

≈ .... دينار

٣ **ما القيمة الفعلية لبدل الخدمة في الفاتورة ؟** ....

٤ **ما نسبة بدل الخدمة لهذه الفاتورة ؟** ....

عند تقدير النسب المئوية نختار أعدادًا مناسِبة .

معلومة مفيدة :

بدل الخدمة يُعطى مقابِل الخدمة التي تقدّمها المطاعم .

وهو النسبة المئوية المحدَّدة لبدل الخدمة × قيمة الفاتورة .

اِنتبِه

عند التقدير ، اِستخدِم الرمز ≈ ويُقرأ « يساوي تقريبًا »

مثال (١):

(أ) قدِّر ٢٤٪ من ٦٢

الحلّ :

٢٤٪ ≈ ٢٥٪ ، ٦٢ ≈ ٦٠ (قدِّر)

٢٥٪ من ٦٠

= ٢٥٪ × ٦٠

$= \frac{\cancel{٢٥}^{١}}{\cancel{١٠٠}_{٤}} \times ٦٠ = \frac{١}{\cancel{٤}_{١}} \times \cancel{٦٠}^{١٥} = ١٥$

∴ ٢٤٪ من ٦٢ ≈ ١٥

(ب) قدِّر ٥٣,٥٪ من ٩٩

الحلّ :

٥٣,٥٪ ≈ ٥٤ ، ٩٩ ≈ ١٠٠ (قدِّر)

٥٤٪ من ١٠٠

= ٥٤٪ × ١٠٠

$= \frac{٥٤}{\cancel{١٠٠}_{١}} \times \cancel{١٠٠}^{١} = ٥٤$

∴ ٥٣,٥٪ من ٩٩ ≈ ٥٤

أعطِ تقديرًا آخر

دورك الآن (١)

قدِّر ٣٢٪ من ٨٩

....

....

....

....

مثال (٢):

إذا كانت مبيعات شركة ما في أحد الأعوام ٣٠٠ ٠٠٠ دينار ، ثمّ انخفضت بنسبة ١٩٪ في العام الذي يليه ، فقدِّر قيمة الانخفاض .

الحلّ :

١٩٪ ≈ ٢٠٪ (قدِّر)

قيمة الانخفاض ≈ ٢٠٪ من ٣٠٠ ٠٠٠

$≈ \frac{٢٠}{\cancel{١٠٠}_{١}} \times \cancel{٣٠٠\ ٠٠٠}^{٣٠٠٠}$

≈ ٦٠ ٠٠٠

تُقدَّر قيمة الانخفاض بـ ٦٠ ٠٠٠ دينار تقريبًا .

مثال (٣) :

تلقّى محرِّر في صحيفة محلّية رسائل من ٤٠ شخصًا ، إذا كان هذا العدد يمثّل ٨٪ من العدد الكلّي لقرّاء الصحيفة في مدينة ما ، فقدِّر عدد القرّاء لهذه الصحيفة .

الحلّ :

نفرض أنّ العدد الكلّي للقرّاء هو س .

٨٪ ≈ ١٠٪ (قدِّر)

∴ ١٠٪ من س ≈ ٤٠

١٠٪ × س ≈ ٤٠

$\frac{١٠}{١٠٠}$ × س ≈ ٤٠

$\frac{\cancel{١٠٠}^{١}}{\cancel{١٠}_{١}}$ × $\frac{\cancel{١٠}^{١}}{\cancel{١٠٠}_{١}}$ × س ≈ $\frac{١٠٠}{\cancel{١٠}_{١}}$ × $\cancel{٤٠}^{٤}$

س ≈ ٤٠٠

يُقدَّر عدد قرّاء الصحيفة بــ ٤٠٠ شخص تقريبًا .

تذكَّر

- ١٠٪ من س تكافئ ١٠٪ × س
- ١٠٪ = $\frac{١٠}{١٠٠}$

دورك الآن (٢)

اِشترى خالد معدّات للصيد بسعر ٢٠ دينارًا ، ودفع ١١٪ من سعرها كضريبة مبيعات . قدِّر ما دفعه خالد .

١١٪ ≈ .... (قدِّر)

قيمة الضريبة ≈ .... × ٢٠

≈ $\frac{..................}{..................}$ × ٢٠ ≈ .... **دينار**

ما دفعه خالد ≈ ٢٠ + ... ≈ .... **دينار**

عبِّر عن فهمك

تمتلك الكادي حاسوبًا قيمته ٢٥٠ دينارًا ، وهي تأمل أن تبيعه بحيث يكون سعر البيع على الأقلّ ٤٩٪ من قيمته الأصلية . إذا باعت الكادي حاسوبها بمبلغ ٩٠ دينارًا ، فهل حقّقت ما كانت تصبو إليه ؟ فسِّر إجابتك مستخدِمًا مفهوم التقدير .

تمارين ذاتية :

١ قدِّر ٢٩٪ من ٤٢٠٠

٢ قدِّر ٣٨٪ من ١٢٠

٣ جهاز كهربائي ثمنه ٦٢٠ دينارًا ، وكان عليه خصم ٢٢٪ . قدِّر ثمنه بعد الخصم .

٤ أعلن أحد المحلّات التجارية عن خصم ١١٪ على إحدى السلع . قدِّر قيمة الخصم إذا كان سعر السلعة ٤٩٩ دينارًا .

٥ أفاد استطلاع للرأي بأنّ ٢٧٪ من متعلّمي مدرسة حكومية يمارسون هواية كرة السلّة وعددهم ١١٠ متعلّمين . قدِّر عدد متعلّمي هذه المدرسة .

٨ ـ ٢ النسبة المئوية للتزايد والنسبة المئوية للتناقص

Percentage Increase and Percentage Decrease

سوف تتعلّم : حلّ مسائل تتضمّن نسبًا مئوية تزايدية ونسبًا مئوية تناقصية .

العبارات والمفردات :

النسبة المئوية للتزايد Percentage Increase النسبة المئوية للتناقص Percentage Decrease

حُلّ وناقِش

اِشترى صاحب معرض أثاث خزانة ثياب بمبلغ ١١٠ دنانير ، ثمّ باعها بنسبة ربح ٤٠٪ ، كما باع خزانة ثياب تصميمها قديم كانت في المعرض بنسبة خصم ٢٠٪ عن سعرها الأصلي وهو ١٢٠ دينارًا.
ما سعر بيع خزانة الثياب في الحالتَين ؟

• **خزانة سعرها ١١٠ دنانير ؛ نسبة الربح ٤٠٪**

أوجِد ما يلي :

١ مقدار الزيادة :

مقدار الزيادة = ١١٠ × ٤٠٪

= ....

= ....

٢ القيمة النهائية للبيع (سعر البيع) :

القيمة النهائية = القيمة الأصلية + مقدار الزيادة

= .... + ...

= ....

٣ النسبة المئوية بعد الزيادة :

النسبة المئوية بعد الزيادة = ١٠٠٪ + ٤٠٪

= ....

٤ ما قيمة ١٤٠٪ من ١١٠ دنانير ؟

....

• **خزانة سعرها ١٢٠ دينارًا ؛ نسبة الخصم ٢٠٪**

أوجِد ما يلي :

١ مقدار النقصان :

مقدار النقصان = ١٢٠ × ٢٠٪

= ....

= ....

٢ القيمة النهائية للبيع (سعر البيع) :

القيمة النهائية = القيمة الأصلية – مقدار النقصان

= .... – ....

= ....

٣ النسبة المئوية بعد النقصان :

النسبة المئوية بعد النقصان = ١٠٠٪ – ٢٠٪

= ....

٤ ما قيمة ٨٠٪ من ١٢٠ دينارًا ؟

....

تذكَّر

• القيمة النهائية
= القيمة الأصلية + مقدار الزيادة
• أو القيمة النهائية
= القيمة الأصلية – مقدار النقصان .
• التغيّر إمّا بالزيادة أو بالنقصان .

ماذا تلاحظ ؟

يمكن حلّ المسائل التي تتضمّن **نسبًا مئوية تزايدية** باستخدام المعادلة التالية :

القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ + النسبة المئوية للتزايد) .

كذلك ، يمكن حلّ المسائل التي تتضمّن **نسبًا مئوية تناقصية** باستخدام المعادلة التالية :

القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ - النسبة المئوية للتناقص) .

مثال (١) :

أوجِد القيمة النهائية إذا كانت القيمة الأصلية ٤٠ والنسبة المئوية للتزايد ٣٠٪ .

الحلّ :

القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ + النسبة المئوية للتزايد)

= ٤٠ × (١٠٠٪ + ٣٠٪)

= ٤٠ × ١٣٠٪

$= \cancel{٤٠}^{٤} \times \frac{\cancel{١٣٠}^{١٣}}{\cancel{١٠٠}_{١}} = ٥٢$

دورك الآن (١)

أوجِد القيمة النهائية إذا كانت القيمة الأصلية ٢٥٠ والنسبة المئوية للتناقص ٨٠٪ .

....

....

....

مثال (٢) :

تناقصت قيمة إيرادات إحدى شركات الاتّصالات المدرَجة في سوق الأوراق المالية بنسبة ١٠٪ حيث بلغت ٣٦ ٠٠٠ دينار (إيرادات يوم واحد) .

أوجِد القيمة الأصلية للإيرادات ومقدار النقص .

الحلّ :

القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ - النسبة المئوية للتناقص)

٣٦ ٠٠٠ = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ - ١٠٪)

٣٦ ٠٠٠ = القيمة الأصلية × ٩٠٪

$\cancel{٣٦\,٠٠٠}^{٤٠٠} \times \frac{١٠٠}{\cancel{٩٠}_{١}} = \text{القيمة الأصلية} \times \frac{\cancel{٩٠}^{١}}{\cancel{١٠٠}_{١}} \times \frac{\cancel{١٠٠}^{١}}{\cancel{٩٠}_{١}}$

∴ القيمة الأصلية = ٤٠٠ × ١٠٠ = ٤٠ ٠٠٠ دينار

مقدار النقص = ٤٠ ٠٠٠ - ٣٦ ٠٠٠ = ٤ ٠٠٠ دينار

دورك الآن (٢)

أوجِد القيمة الأصلية ومقدار الزيادة إذا كانت القيمة النهائية تساوي ٣٢٠ والنسبة المئوية للتزايد تساوي ٦٠٪ .

القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ + ...)

....

....

....

....

....

عبِّر عن فهمك

اِشترت ريم من إحدى الدول مشترَيات بقيمة ١ ٨٠٠ دينار ، وعند عودتها في المطار ، اِتّجهت ريم إلى قاعة (Tax Free) . حيث استرجعت ١٠٪ من قيمة مشترَياتها.
في رأيك ، كم قيمة مشترَيات ريم بعد استرجاع ١٠٪ منها ؟

معلومة مفيدة :

بعض الدول تعفي الزائرين من الضريبة حيث يمكنهم استرجاع نسبة معيَّنة من قيمة مشترَياتهم عند مغادرة البلد وتُسمّى Tax Free Shopping .

مثال (٣) :

زادت إحدى الجامعات الخاصّة المتميّزة عدد قبول المتعلّمين إلى ٦ ٣٠٠ متعلّم ، إذا كان العدد الأصلي للقبول كلّ سنة ٤ ٥٠٠ متعلّم ، فأوجِد النسبة المئوية للتزايد .

الحلّ :

القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ + النسبة المئوية للتزايد)

٦ ٣٠٠ = ٤ ٥٠٠ × (١ + س)

$١ + س = \frac{\cancel{٦ ٣٠٠}\ ^{٧}}{\cancel{٤ ٥٠٠}\ _{٥}}$

$١ + س = \frac{٧}{٥}$

$س = \frac{٧}{٥} - ١ = \frac{٧}{٥} - \frac{٥}{٥} = \frac{٢}{٥}$

∴ النسبة المئوية للتزايد $= \frac{٢ \times ٢٠}{٥ \times ٢٠} = \frac{٤٠}{١٠٠} = ٤٠٪$

تذكَّر

١٠٠٪ = ١

اِنتبِه

$١ = \frac{٥}{٥}$

دورك الآن (٣)

أوجِد النسبة المئوية للتناقص إذا كانت القيمة النهائية ٢٠٠ والقيمة الأصلية ٥٠٠ .

تمارين ذاتية :

١ أوجِد التكلفة الإجمالية لسلعة كان سعرها ٣٠٠ دينار ، ثمّ زادت بنسبة ٢٠٪ .

٢ أوجِد القيمة الأصلية إذا كانت : القيمة النهائية تساوي ٥٠٠ ،
والنسبة المئوية للتناقص تساوي ٧٥٪ .

٣ تزايدت إيرادات إحدى المؤسّسات التجارية في أحد الشهور بنسبة ٣٠٪ عن الشهر السابق حيث بلغت ١٣ ٠٠٠ دينار ، اُحسب إيرادات الشهر السابق .

٤ يعمل خالد كمحاسب في متجر ويحصل على خصم ٣٠٪ على مشترَياته منه .
إذا كان سعر البيع لإحدى السلع ٩٠ دينارًا ، فكم سيدفع خالد بعد الخصم ؟

....

....

....

....

....

....

....

٥ اِشترت منى أجهزة كهربائية بقيمة ٢ ٤٠٠ دينار ، حيث حصلت على خصم ٢٠٪ .
أوجِد السعر الأصلي للأجهزة ، ثمّ أوجِد مقدار الخصم .

....

....

....

....

....

....

....

٦ أوجِد النسبة المئوية للتزايد إذا كانت القيمة النهائية ٢١٠ دنانير والقيمة الأصلية ١٤٠ دينارًا .

....

....

....

....

....

....

....

مهارات تفكير عليا :

٧ باع عبد الرحمن لأحمد درّاجة هوائية بسعر ٢٤ دينارًا وخوذة بسعر ٦ دنانير . تمثّل التكلفة الإجمالية التي دفعها أحمد ١٢٠٪ ممّا أنفقه عبد الرحمن في الأصل لشراء الدرّاجة والخوذة . فكم دفع عبد الرحمن في الأصل ؟ وما الربح الذي حقّقه ببيعه الدرّاجة والخوذة ؟

الدرس الثاني

٨ - ٣ تطبيقات على تغيّر النسبة المئوية
Application of Percent Change

سوف تتعلّم : اِستخدام النسبة المئوية للتزايد والتناقص وتطبيقها .

حُلّ وناقِش

أعلن بنك الكويت المركزي في إحدى السنوات أنّ قيمة الاحتياطي النقدي كان في بداية السنة المالية ١٠ مليارات دينار .
فأوجِد قيمة الاحتياطي الجديد في كلّ من الحالات التالية :

١ اِرتفاع بنسبة ١٠٪ ، ثمّ انخفاض بنسبة ١٠٪ .

القيمة النهائية للاحتياطي النقدي بعد ارتفاع ١٠٪

= القيمة الأصلية × (١٠٠٪ + النسبة المئوية للتزايد)

= .... × (١٠٠٪ + ١٠٪)

= .... × ١١٠٪

= .... × $\frac{\text{..........}}{\text{..........}}$ = ... مليار دينار

القيمة النهائية للاحتياطي النقدي بعد انخفاض ١٠٪

= القيمة الأصلية × (١٠٠٪ - النسبة المئوية للتناقص)

= .... × (١٠٠٪ - ١٠٪)

= .... × ٩٠٪

= .... × $\frac{\text{..........}}{\text{..........}}$ = ... مليار دينار

ماذا تلاحظ ؟

هل عادت قيمة الاحتياطي النقدي إلى قيمته السابقة ؟

٢ اِنخفاض بنسبة ١٠٪ ، ثمّ ارتفاع بنسبة ١٠٪ .

....

....

....

....

....

• **قارِن بين القيمة النهائية في كلّ من ١ ، ٢** ....

تذكّر

تغيّر النسبة المئوية إمّا بالزيادة أو بالنقصان .

معلومة مفيدة :

بنك الكويت المركزي هو الجهة المسؤولة عن المحافظة على استقرار الدينار الكويتي وقيمته الشرائية ، وهو يقوم بذلك عبر التحكّم في السياسة النقدية ، كما يُعدّ من أوائل البنوك المركزية الخليجية التي استخدمت نظام الرقابة المصرفية المبنية على المخاطر ، وهو نظام حديث يساعد على كشف المشكلات قبل حدوثها ويُسمّى النظام المالي .

مثال (٢):

رفعت إحدى شركات الاتّصال أسعار أجهزتها بنسبة ٢٠٪ ، ثمّ منحت هذه الشركة موظّفيها خصمًا يبلغ ١٠٪ . فكم ستدفع إحدى الموظّفات ثمن جهاز كان سعره ٣٠٠ دينار قبل الزيادة ؟

الحلّ :

ثمن الجهاز بعد الزيادة = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ + النسبة المئوية للتزايد)

= ٣٠٠ × (١٠٠٪ + ٢٠٪)

= ٣٠٠ × ١٢٠٪

= $\cancel{٣٠٠}^{٣} \times \frac{١٢٠}{\cancel{١٠٠}_{١}}$ = ٣٦٠ دينارًا

اِنتبه

ميِّز بين القيمة الأصلية في الحالتَين .

القيمة النهائية لثمن الجهاز = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ – النسبة المئوية للتناقص)

= ٣٦٠ × (١٠٠٪ – ١٠٪)

= ٣٦٠ × ٩٠٪

= $\cancel{٣٦٠}^{٣٦} \times \frac{\cancel{٩٠}^{٩}}{\cancel{١٠٠}_{\cancel{١٠}_{١}}}$ = ٣٢٤ دينارًا

عبِّر عن فهمك (١)

هل يمكن حلّ « **مثال** (١) » بطريقة أخرى ؟ وضِّح إجابتك .

دورك الآن (١)

يريد ثامر شراء جهاز للمشي (Treadmill) سعره الأصلي ٣٠٠ دينار ، وخلال فترة الخصومات كانت نسبة الخصم على الجهاز ٣٠٪ ، وضريبة مبيعات نسبتها ١٠٪ ، كم سيدفع ثامر لشراء الجهاز ؟

....

....

....

دورك الآن (٢)

يهوى جاسم رياضة الغوص في البحر ، إذا كان استئجار لوازم الغطس في اليوم الواحد يكلّف ١٥ دينارًا يُضاف إليها نظير الخدمة ، فأوجِد تكلفة الاستئجار في حالة خصم ٢٠٪ بعد إضافة ٥ دنانير نظير الخدمة .

تكلفة الاستئجار بعد إضافة نظير الخدمة = ... + ... = ... **دينار .**

تكلفة الاستئجار بعد الخصم = ... = ...

= ....

مثال (٢) :

اِنخفضت مبيعات شركة موادّ بناء بنسبة ٢٠٪ فأصبحت ٤٠٠٠ دينار .

(أ) أوجِد القيمة الأصلية للمبيعات قبل الانخفاض .

(ب) ما النسبة المئوية للتزايد التي تُعيد المبيعات إلى قيمتها الأصلية قبل الانخفاض ؟

الحلّ :

(أ) القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ – النسبة المئوية للتناقص)

٤٠٠٠ = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ – ٢٠٪)

٤٠٠٠ = القيمة الأصلية × ٨٠ ٪

$٤٠٠٠ \times \frac{١٠٠}{٨٠} = \text{القيمة الأصلية} \times \frac{\cancel{٨٠}^{١}}{\cancel{١٠٠}_{١}} \times \frac{\cancel{١٠٠}^{١}}{\cancel{٨٠}_{١}}$

∴ القيمة الأصلية = $\overset{٥٠}{\cancel{٤٠٠٠}} \times \frac{١٠٠}{\cancel{٨٠}_{١}}$ = ٥٠٠٠ دينار

(ب) القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ + النسبة المئوية للتزايد)

٥٠٠٠ = ٤٠٠٠ × (١٠٠٪ + س)

٥٠٠٠ = ٤٠٠٠ × (١ + س)

$١ + س = \frac{٥٠٠٠}{٤٠٠٠}$

$١ + س = \frac{٥}{٤}$

$س = \frac{٥}{٤} - ١ = \frac{١}{٤} \times ١٠٠٪ = ٢٥٪$

∴ النسبة المئوية للتزايد = ٢٥٪

لاحِظ أنّ

تناقص ٢٠٪

القيمة الأصلية ← → القيمة النهائية

تزايد ٢٥٪

دورك الآن (٣)

إذا زادت نفقات شركة للطيران بنسبة ١٠٠٪ عن الشهر السابق لتصل إلى ٨٠٠٠ دينار .

(أ) أوجِد نفقات الشركة قبل الزيادة .

.... = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ + ...)

.... = القيمة الأصلية × ....

القيمة الأصلية = ... = ...

∴ نفقات الشركة قبل الزيادة هي .... دينار .

(ب) ما النسبة المئوية للتناقص التي تجعل نفقات الشركة تعود إلى مستواها في الشهر الماضي ؟

....

....

عبِّر عن فهمك (٢)

إذا انخفض سعر سهم ٥٠٪ عن سعره في العام الماضي ، في رأيك ، ما النسبة المئوية للزيادة التي تُعيده إلى سعره الأصلي ؟ وضِّح إجابتك .

تمارين ذاتية :

١ **تداول أحمد في سوق الكويت للأوراق المالية حيث اشترى أسهمًا بمبلغ ٤٠ ٠٠٠ دينار وكانت أسعار الأسهم تتأرجح بين هبوط وارتفاع . أوجِد سعر بيع أسهم أحمد عند ارتفاع الأسهم ٢٥٪ ، ثمّ انخفاض ١٠٪ ؟**

....

....

....

....

....

٢ **يعمل ناصر وسيطًا عقاريًّا في شركة عقارات في الكويت ، إذا طلبت منه الشركة بيع عقار (منزل) سعره الأصلي ٣٠٠ ٠٠٠ دينار بنسبة زيادة ٣٠٪ عن سعره الأصلي ، حيث يتقاضى ناصر ٥٪ من سعر البيع ، فما هو المبلغ الذي تحصل عليه الشركة من بيع العقار ؟**

....

....

....

....

....

٣ **بلغ سعر التذكرة الواحدة لحضور أمسية شعرية ٣٠ دينارًا ، ويُضاف إليها نظير الخدمة . أوجِد سعر التذكرة في كلّ من الحالات التالية :**

أ) خصم ٢٠٪ ، ثمّ إضافة ١٠٪ نظير الخدمة . ...

....

ب) خصم ٢٠٪ بعد إضافة ١٠ دنانير نظير الخدمة . ...

....

٤ إذا انخفضت نفقات فهد الشهرية ٦٠٪ عن الشهر السابق ، والتي كانت ٥٠٠ دينار ، أوجِد ما يلي :

أ) نفقات فهد بعد الانخفاض .

ب) النسبة المئوية للتزايد التي تجعل نفقات فهد تعود إلى مستواها في الشهر السابق .

مهارات تفكير عليا :

اِختر الإجابة الصحيحة .

٥ إذا ارتفع سعر جرام الذهب بنسبة ٢٥٪ ، ثمّ انخفض بنسبة ٢٠٪ ، فإنّ السعر النهائي يكون :

أ) أقلّ بمقدار ٥٪ من السعر الأصلي .

ب) أكثر بمقدار ٥٪ من السعر الأصلي .

ج) السعر الأصلي نفسه .

د) ليس أيًّا ممّا سبق .

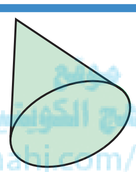
٨ ـ ٤ المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم
Surface Area of a Right Circular Cone

سوف تتعلّم : إيجاد المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم .

العبارات والمفردات :

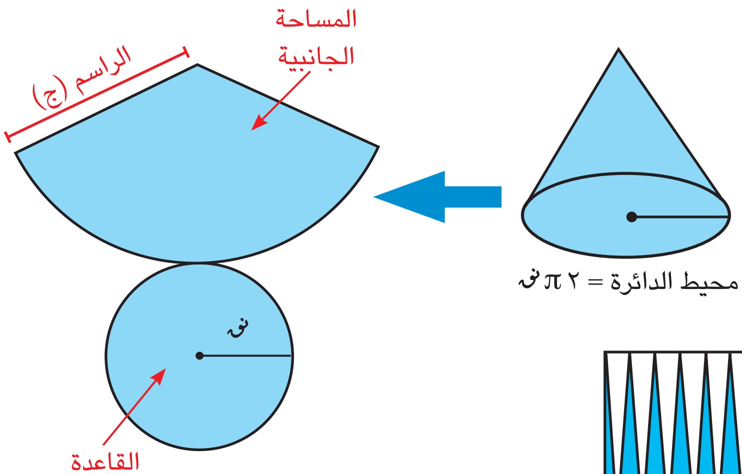
مخروط دائري قائم	Right Circular Cone	مساحة سطحية	Surface Area
راسم	Slant Height	مساحة جانبية	Lateral Area

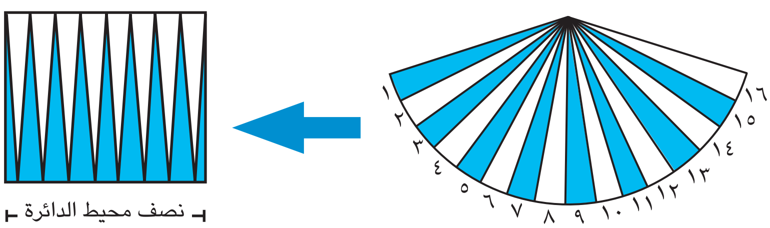
المخروط الدائري القائم : مجسَّم قاعدته دائرية الشكل وله رأس واحد ، وارتفاعه هو طول العمود المرسوم من رأسه على قاعدته عند مركزها .



اِستكشِف

عند فكّ شبكة المخروط ، نحصل على منطقتَين كما هو موضَّح في الشكل المقابِل .
ولقد تعلّمت سابقًا أنّ مساحة الدائرة = π نق^٢
فما هي المساحة الجانبية للمخروط ؟
لو قمنا بتقسيم المنطقة إلى أجزاء متطابقة ، ثمّ أعدنا ترتيبها كما هو موضَّح في الشكل التالي :





نلاحظ أنّ كلّما زاد عدد الأجزاء المتطابقة ، اِقترب الشكل من مستطيل عرضه هو الراسم .

إذًا ، المساحة الجانبية للمخروط الدائري القائم
= مساحة المنطقة المستطيلة
= الطول × العرض
= $\frac{١}{٢}$ × محيط الدائرة × طول الراسم
= $\frac{١}{٢}$ × ٢ π نق × ج (حيث ج هو طول الراسم)
= π نق × ج

لاحِظ أنّ

الراسم : هو القطعة المستقيمة الواصلة من رأس المخروط إلى أيّ نقطة على الدائرة .

ومنه المساحة السطحية للمخروط الدائري

= المساحة الجانبية + مساحة الدائرة

= π نق × ج + π نق^{٢}

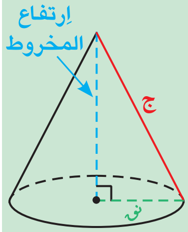
= π نق (ج + نق)

المساحة الجانبية للمخروط الدائري القائم = π نق × ج (حيث ج هو طول الراسم)

المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

= π نق × ج + π نق^{٢}

= π نق (ج + نق)

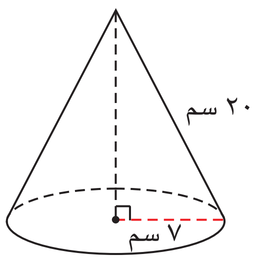


ملاحظة :

لاحِظ أنّ : في المخروط الدائري القائم أيّ راسم فيه هو وتر لمثلّث قائم الزاوية وضلعي القائمة هما نصف قطر قاعدة المخروط وارتفاعه .

مثال (١):

في الشكل المقابِل ، مخروط دائري قائم (اِعتبِر $\pi = \frac{٢٢}{٧}$) .



أوجِد :

أ) مساحته الجانبية .

ب) مساحته السطحية .

الحلّ :

أ) المساحة الجانبية = π نق × ج

= $\frac{٢٢}{\cancel{٧}_{١}} \times \cancel{٧}^{١} \times ٢٠$

= ٤٤٠ سم^{٢}

ب) المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

= ٤٤٠ + π نق^{٢}

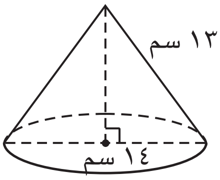
= ٤٤٠ + $\frac{٢٢}{\cancel{٧}_{١}} \times \cancel{٧}^{١} \times ٧$

= ٤٤٠ + ١٥٤

= ٥٩٤ سم^{٢}

دورك الآن (١)

أوجِد المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم في الشكل المقابِل (اِعتبِر π = $\frac{٢٢}{٧}$) .



نق = ...

المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم = π نق (ج + نق)

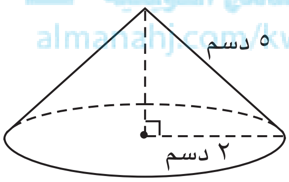
= ....

= ....

= ....

دورك الآن (٢)

أوجِد المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم في الشكل المقابِل (اِعتبِر π = ٣,١٤) .



....

....

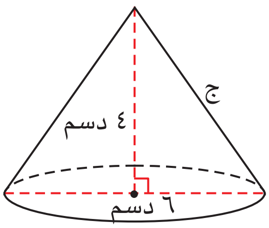
....

....

عبِّر عن فهمك

يقول أحمد إنّ كلّ المخاريط التي محيط قاعدتها يساوي ٨ π سم تكون مساحتها السطحية متساوية . هل أحمد على صواب ؟ فسِّر إجابتك .

مثال (٢) :



مخروط دائري قائم طول قطر قاعدته ٦ دسم وارتفاعه ٤ دسم .

أوجِد ما يلي :

(أ) طول الراسم (ج) :

∵ نق = ٣ دسم

∴ ج^{٢} = (٣)^{٢} + (٤)^{٢} نظرية فيثاغورث

ج^{٢} = ٩ + ١٦ = ٢٥

ج = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ دسم

(ب) المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم : (بدلالة π)

المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم

= π نق (ج + نق)

= π × ٣ × (٥ + ٣)

= π × ٣ × ٨

= ٢٤ π دسم^{٢}

مثال (٣) :

إِشترت فتون مثلَّجًا على شكل مخروط طول قطر قاعدته ٤ سم وطول راسمه ١٠ سم . أُحسب المساحة السطحية للمخروط .
(اِعتبِر π = ٣,١٤)

الحلّ :

المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم

= π نق (ج + نق)

= ٣,١٤ × ٢ × (١٠ + ٢)

= ٣,١٤ × ٢ × ١٢

= ٣,١٤ × ٢٤

= ٧٥,٣٦ سم^{٢}

دورك الآن (٣)

أرادت شركة ورقيات تصنيع قبّعات للأطفال على شكل مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته ٧ سم وطول الراسم ٣٠ سم . أُحسب المساحة السطحية للقبّعة .
(اِعتبِر π = $\frac{٢٢}{٧}$)

....

....

....

اِنتبِه

القبّعة على شكل مخروط بدون قاعدة .

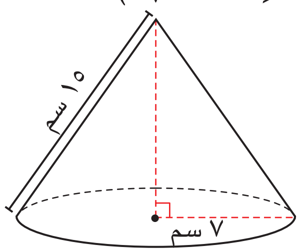
تمارين ذاتية :

١ أوجِد المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم في الشكل المقابِل . (اِعتبِر π = $\frac{٢٢}{٧}$)

....

....

....

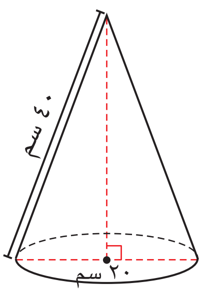


٢ أوجِد المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم في الشكل المقابِل .
(اِعتبِر π = ٣,١٤)

....

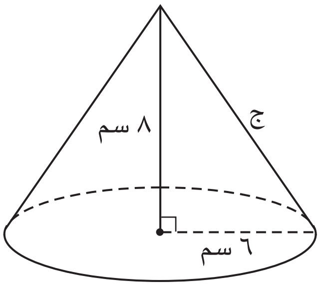
....

....



٣ مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته ٦ سم وارتفاعه ٨ سم ، أوجِد ما يلي :

أ) طول الراسم (ج) :



....

....

....

....

ب) المساحة السطحية للمخروط : (بدلالة π)

....

....

....

....

٤ أوجِد المساحة السطحية لمخروط دائري قائم ، طول نصف قطر قاعدته ٧ سم وطول الراسم ٩ سم . (اِعتبِر $\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

....

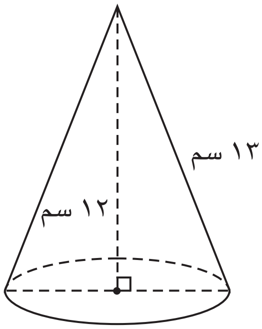
....

....

....

مهارات تفكير عليا :

٥ في الشكل المقابِل ، المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم مقرَّبة إلى أقرب عدد كلّي هي :
(اِعتبِر $\pi = ٣,١٤$) .



أ) ٢٦٧ سم^٢

ب) ٢٨٣ سم^٢

ج) ٦٩١ سم^٢

د) ٧٢٢ سم^٢

٨ - ٥ حجم الهرم القائم

Volume of The Pyramid

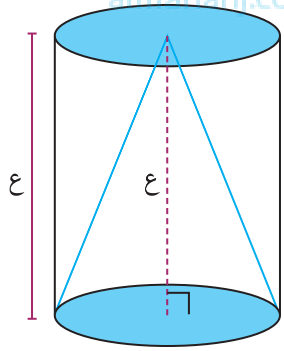
سوف تتعلّم : إيجاد حجم الهرم القائم .

العبارات والمفردات :

هرم قائم Right Pyramid حجم Volume

اِستكشِف

سبق وأن تعلّمت كيفية حساب حجم المخروط القائم من حساب حجم الأسطوانة الدائرية القائمة المشترَكة معه في القاعدة والارتفاع .



كما سبق وأن تعلّمت كيفية حساب حجم المنشور القائم

فهل تستطيع حساب حجم الهرم القائم بدلالة حجم المنشور القائم الذي له مساحة القاعدة نفسها والارتفاع نفسه كما فعلت سابقًا ؟

ليكن لدينا هرم قائم ومنشور قائم لهما الارتفاع نفسه والقاعدة نفسها.

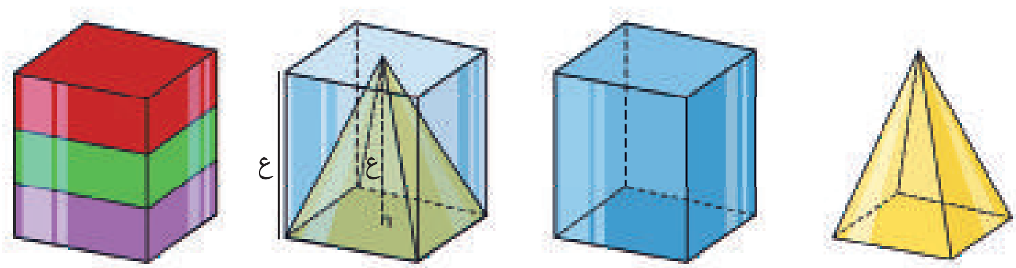
خطوات عمل التجربة :

١ اِملأ الهرم (بالرمل البنفسجي مثلاً) تمامًا حتّى الحافّة .

٢ اُسكب الرمل في المنشور .

٣ كرِّر هذه العملية واملأ الهرم حتّى الحافّة بلون آخر (الأخضر مثلاً) ، ثمّ اسكبه داخل المنشور .

٤ كرِّر العملية حتّى يمتلئ المنشور .



ماذا تلاحظ ؟

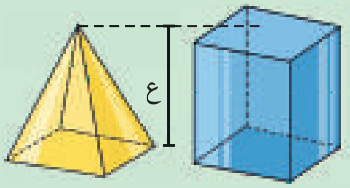
بعد ٣ مرّات من ملء الهرم وسكبه ، ستجد أنّ المنشور امتلأ تمامًا .

إذًا نلاحظ أنّ : حجم الهرم هو ثلث حجم المنشور المشترَك معه بالقاعدة والارتفاع .

حجم الهرم القائم = $\frac{١}{٣}$ × حجم المنشور القائم المشترَك معه في القاعدة والارتفاع

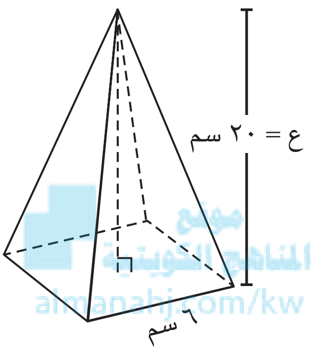
حجم الهرم القائم = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

ح = $\frac{١}{٣}$ × م × ع



مثال (٢):

أوجِد حجم الهرم القائم المنتظم الذي قاعدته على شكل مربّع طول ضلعه ٦ سم وارتفاعه ٢٠ سم .



الحلّ :

حجم الهرم المنتظم = $\frac{١}{٣}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ × $(٦)^٢$ × ٢٠

= $\frac{١}{\cancel{٣}_{١}}$ × $\cancel{٦}^{٢}$ × ٦ × ٢٠

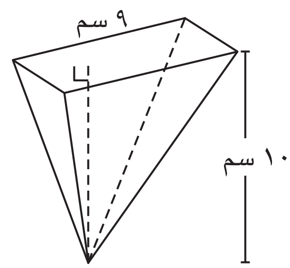
= ٢٤٠ $سم^٣$

∴ حجم الهرم = ٢٤٠ $سم^٣$

دورك الآن (٢)

أوجِد حجم الهرم في كلّ شكل ممّا يلي :

(أ) هرم رباعي قائم منتظم



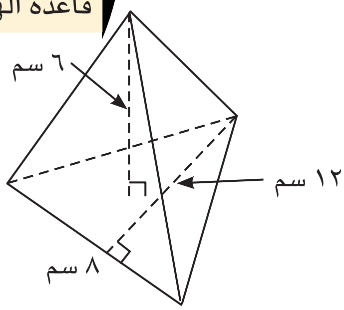
حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × م × ع

= $\frac{١}{٣}$ × (.......... × ....) × ....

= $\frac{١}{٣}$ × .... × ....

= .... $سم^٣$

(ب) هرم ثلاثي قائم



حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ × م × $ع_{الهرم}$

= $\frac{١}{٣}$ × ($\frac{١}{٢}$ × .... × $ع_{المثلث}$) × ....

= $\frac{١}{٣}$ × ($\frac{١}{٢}$ × .... × ....) × ....

= .... $سم^٣$

اِنتبِه

مَيِّز بين ارتفاع الهرم وارتفاع قاعدة الهرم (المثلّث)

عبِّر عن فهمك

أوجد كلّ من حمد ونوّاف حجم الهرم القائم الذي له الارتفاع والقاعدة نفسهما لمنشور قائم حجمه ٢٧ م^{٣} . فأيّهما على صواب ؟ فسِّر إجابتك .

مثال (٢) :

يقوم مصنع أثاث بصنع طبق تقديم على شكل هرم رباعي قائم منتظم ، حجم طبق التقديم ٤٠٠ سم^{٣} وارتفاعه ٢٠ سم .
أوجِد مساحة قاعدة الطبق .

الحلّ :

حجم الهرم المنتظم = $\frac{١}{٣}$ × م × ع

٤٠٠ = $\frac{١}{٣}$ × م × ٢٠

٣ × ٤٠٠ = $\cancel{٣}^{١}$ × $\frac{١}{\cancel{٣}_{١}}$ × م × ٢٠

$\frac{١}{\cancel{٢٠}_{١}}$ × $\cancel{١٢٠٠}^{٦٠}$ = $\frac{١}{\cancel{٢٠}_{١}}$ × $\cancel{٢٠}^{١}$ م

م = ٦٠

∴ مساحة قاعدة الطبق = ٦٠ سم^{٢}

دورك الآن (٢)

تصنع مها علبًا لتعبئة القرقيعان ، شكل العلبة هرم قائم منتظم ، إذا كان حجم العلبة ٤٤ سم^{٣} ، ومساحة قاعدتها ١٢ سم^{٢} ، فما ارتفاع هذه العلبة ؟

....

....

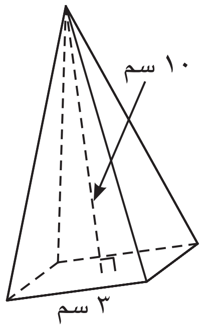
....

....

....

تمارين ذاتية :

١ هرم قائم منتظم قاعدته مربّعة الشكل طول ضلعها ٣ سم وارتفاع الهرم ١٠ سم . أوجِد حجم الهرم .

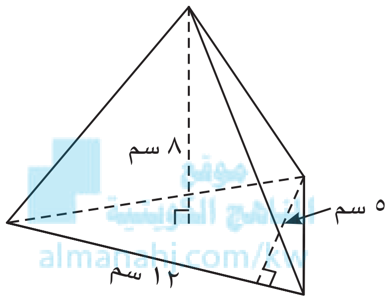


....

....

....

٢ هرم قائم قاعدته مثلّثة الشكل ، طولها ١٢ سم ، وارتفاعها ٥ سم ، وارتفاع الهرم ٨ سم . أوجِد حجم الهرم .



....

....

....

٣ هرم قائم منتظم مساحة قاعدته ١٥ م^{2} ، إذا كان حجمه ٥٥ م^{3} ، فما ارتفاع هذا الهرم ؟

....

....

....

٤ هرم رباعي قائم منتظم حجمه ٣٠٠ سم^{3} ، إذا كان ارتفاع الهرم ٩ سم ، فما طول ضلع قاعدة الهرم ؟

....

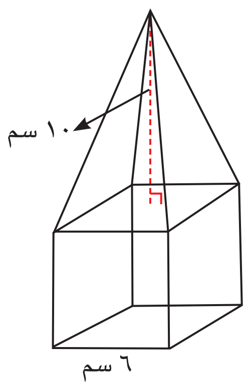
....

....

مهارات تفكير عليا :

اِختر الإجابة الصحيحة .

٥ هرم رباعي قائم منتظم قاعدته هي أحد أوجه مكعّب .
حسب البيانات المدوَّنة ، فإنّ حجم المجسَّم الموضَّح في الشكل المقابِل يساوي :



(أ) ٢١٦ سم^{3} (ب) ٣٣٦ سم^{3} (ج) ١٢٠ سم^{3} (د) ٩٦ سم^{3}

٨ - ٦ حجم الكرة
Volume of The Sphere

سوف تتعلّم : حساب حجم كرة .

العبارات والمفردات :

حجم Volume
كرة Sphere

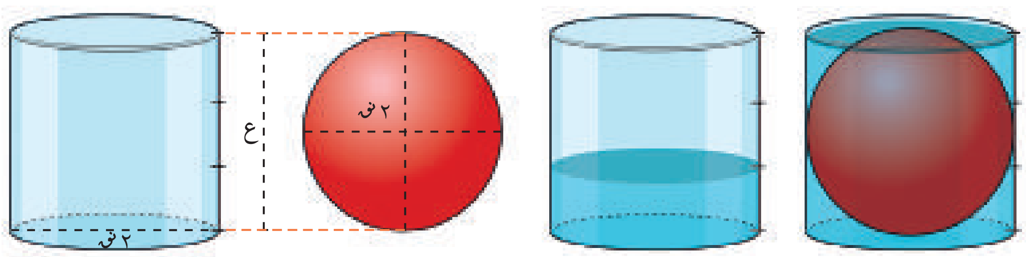
إِستكشِف

تعلم أنّ حجم الأسطوانة الدائرية القائمة هو : π نق^{٢} × ع

ليكن لدينا أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها يساوي طول قطر قاعدتها وموضَّح عليها تدريج من الخارج بحيث يُجزَّأ ارتفاعها إلى ثلاثة أقسام متطابقة .

قُم بسكب كمّية من الماء بحيث تملأ $\frac{١}{٣}$ حجم الأسطوانة .

ضَع كرة داخل الأسطوانة بشرط أن يكون قطر الكرة يساوي ارتفاع الأسطوانة ، وكذلك قطر الكرة يساوي قطر قاعدة الأسطوانة .



ماذا تلاحظ ؟

سوف يرتفع السائل حتّى يصل إلى ارتفاع الأسطوانة

إذًا حجم الكرة = ... حجم الأسطوانة

$= \frac{٢}{٣}$ (π نق^{٢} × ع)

$= \frac{٢}{٣}$ π نق^{٢} × ٢ نق ، حيث ع = ٢ نق

$= \frac{٤}{٣}$ π نق^{٣}

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ × π نق^{٣}

معلومة مفيدة :

أهم ما توصّل إليه العالم أرخميدس هو العلاقة بين حجم الكرة وحجم الأسطوانة المحيطة بها (الأسطوانة التي قطرها يساوي قطر الكرة ، وارتفاعها يساوي قطر الكرة أيضًا ، أي حجم الكرة يساوي ثلثَي $\left(\frac{٢}{٣}\right)$ حجم الأسطوانة المحيطة بها .

مثال (١):

أوجِد حجم كرة طول نصف قطرها ٦ سم . (بدلالة π)

الحلّ :

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣} \times \pi$ نق^{٣}

= $\frac{٤}{٣} \times \pi \times (٦)^{٣}$

= $\frac{٤}{\cancel{٣}_{١}} \times \pi \times \cancel{٦}^{٢} \times ٦ \times ٦$

= $٤ \times \pi \times ٧٢$

= $٢٨٨\ \pi$ سم^{٣}

دورك الآن (١)

أوجِد حجم كرة طول نصف قطرها ٣ سم . (بدلالة π)

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣} \times \pi$ نق^{٣}

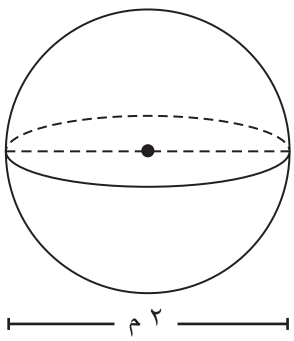
= $\frac{٤}{٣} \times \pi \times$ (..............)^{٣}

= $\frac{٤}{٣} \times \pi \times$ .... × .... × ....

= .... سم^{٣}

مثال (٢):

أوجِد حجم الكرة المرسومة . (اِعتبِر $\pi = \frac{٢٢}{٧}$)



الحلّ :

نق = ١ م

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣} \times \pi$ نق^{٣}

= $\frac{٤}{٣} \times \frac{٢٢}{٧} \times (١)^{٣}$

= $\frac{٤}{٣} \times \frac{٢٢}{٧} \times ١ \times ١ \times ١$

= $\frac{٤}{٣} \times \frac{٢٢}{٧}$

= $\frac{٨٨}{٢١}$

= $٤ \frac{٤}{٢١}$ م^{٣}

مثال (٣) :

وعاء على شكل نصف كرة طول قطرها ١٢ م .
أوجِد حجم الوعاء بدلالة π .

الحلّ :

نق $= \frac{١}{٢} \times ١٢ = ٦$ م

حجم الوعاء = حجم نصف الكرة $= \frac{١}{٢} \times \frac{٤}{٣} \times \pi$ نق^٣

$= \frac{١}{٢} \times \frac{٤}{٣} \times \pi \times (٦)^٣$

$= \frac{٤}{\cancel{٦}_١} \times \pi \times \cancel{٦}^١ \times ٦ \times ٦$

$= ٤ \times ٦ \times ٦ \times \pi$

$= ١٤٤ \, \pi$ م^٣

دورك الآن (٢)

أوجِد ثلاثة أرباع حجم كرة فولاذية طول قطرها ٢٠ سم . (اِعتبِر $\pi = ٣,١٤$)

نق = ... سم

حجم ثلاثة أرباع الكرة $= \frac{٣}{٤} \times \left(\frac{٤}{٣} \times \pi \text{ نق}^٣\right)$

= ....

= ....

= .... سم^٣

مثال (٤) :

لدى مريم مصباح مزخرف كروي الشكل حجمه $\frac{٢٥٦}{٣}\pi$ سم^٣ ، أوجِد طول قطر المصباح .

الحلّ :

حجم الكرة $= \frac{٤}{٣} \times \pi$ نق^٣

$\frac{٢٥٦}{٣}\pi = \frac{٤}{٣} \times \pi$ نق^٣

$\frac{\cancel{٢٥٦}^{٦٤}}{\cancel{٣}_١} \cancel{\pi}^١ \times \frac{\cancel{٣}^١}{\cancel{٤\pi}_١} = \frac{\cancel{٤\pi}^١}{\cancel{٣}_١} \times \frac{\cancel{٣}^١}{\cancel{٤\pi}_١} \times$ نق^٣

$٦٤ =$ نق^٣

$\therefore$ نق $= \sqrt[٣]{٦٤} = ٤$ سم

$\therefore$ طول قطر المصباح $= ٢ \times ٤ = ٨$ سم

تذكَّر

$\sqrt[٣]{٨} = ٢$

$\sqrt[٣]{٢٧} = ٣$

$\sqrt[٣]{٦٤} = ٤$

دورك الآن (٣)

كرة حجمها $\frac{٣٢}{٣}\pi$ م^{٣} . أوجِد طول نصف قطرها .

....

....

....

....

....

عبِّر عن فهمك

يقول محمّد إنّ حجم الكرة يساوي $\frac{٢}{٣}$ حجم أيّ أسطوانة .

في رأيك ، هل محمّد على صواب ؟ وضِّح إجابتك .

تمارين ذاتية :

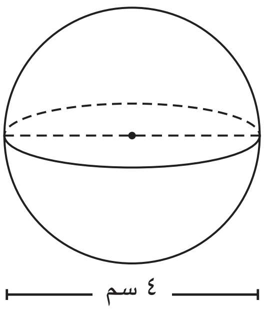
١ أوجِد حجم كرة طول نصف قطرها ٩ سم . (بدلالة π)

....

....

....

٢ من خلال الشكل المقابِل ، أوجِد حجم الكرة المرسومة . (بدلالة π)



....

....

....

٣ قبّة مسجد على شكل نصف كرة ، إذا كان طول قطر القبّة ١٢ م ، فاحسب حجم قبّة المسجد . (اِعتبِر $\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

....

....

....

٤ إذا كان حجم كرة ٣٦ π سم^٣ ، فاحسب طول قطرها .

....

....

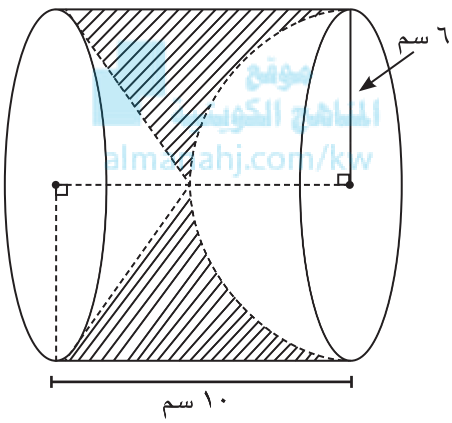
....

....

....

مهارات تفكير عليا :

اِختر الإجابة الصحيحة .



٥ مجسَّم أسطواني في داخله تجويفان أحدهما مخروطي الشكل والثاني نصف كرة .
بحسب المعطَيات على الرسم ، فإنّ حجم الجزء المتبقّي من المجسَّم (بدلالة π) =

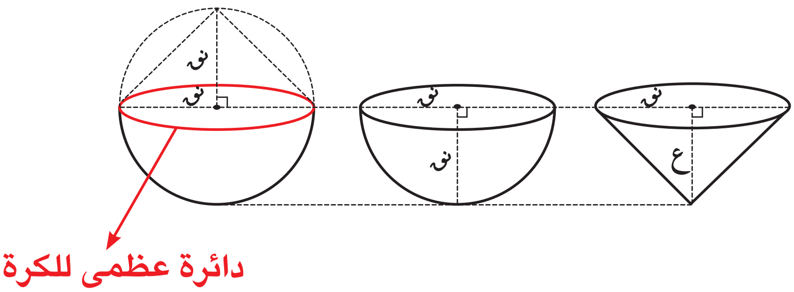
(أ) ٣٦٠ π سم^٣ (ب) ١٤٤ π سم^٣

(ج) ١٩٢ π سم^٣ (د) ١٦٨ π سم^٣

٦ لدى عمر قالبان أحدهما مخروطي الشكل والآخر كروي ، إذا كانت قاعدة المخروط هي دائرة عظمى للكرة ، وارتفاع المخروط هو نصف قطر الكرة .
فإنّ حجم الكرة يساوي :

(أ) ٤ × حجم المخروط (ب) ٢ × حجم المخروط

(ج) $\frac{١}{٤}$ × حجم المخروط (د) $\frac{١}{٢}$ × حجم المخروط



تذكَّر

- حجم الأسطوانة الدائرية القائمة = π نق^٢ ع
- حجم المخروط الدائري القائم = $\frac{١}{٣}$ π نق^٢ ع

تقويم الوحدة التعليمية الثامنة
Unit Eight Assessment

أوّلًا : البنود المقالية

١ قدِّر ما يلي :

أ ١٨٪ من ١٥٢

ب ٦٢٪ من ٦٢

ج ٥٣٪ من ٤٥٨

د ٣٤٪ من ٤٠٠

٢ تقدّم إحدى شركات التغذية لزبائنها عرضًا للاشتراك الشهري بخصم نسبته ١٥٪ .
كم سيدفع المشترِك إذا كان السعر الأصلي للاشتراك الشهري ٢٠٠ دينار ؟

٣ بلغ عدد زوّار المركز العلمي (قاعة الأحياء البحرية) يوم الأربعاء ٨٠ زائرًا ، وفي يوم الجمعة زاد عدد الزوّار إلى ٢٤٠ زائرًا . أوجِد النسبة المئوية للتزايد في عدد الزوّار يوم الجمعة .

٤ رفع أحد معارض السيّارات أسعاره بنسبة ٢٠٪ ، ثمّ منح هذا المعرض موظَّفيه خصمًا يبلغ ١٠٪ . فكم سيدفع أحد الموظَّفين في هذا المعرض ثمنًا لشراء سيّارة كان سعرها الأصلي ٨٠٠٠ دينار قبل الزيادة ؟

٥ قام أحد متاجر الأجهزة الإلكترونية بعمل تخفيضات على أجهزة التلفاز قدره ٣٠٪ من ثمنها الأصلي .
إذا كان ثمن جهاز تلفاز بمواصفات معيَّنة بعد التخفيض ٢٨٠ دينارًا ، فما هو ثمنه قبل التخفيض ؟

....

....

....

....

٦ قامت مالكة مشروع ، يُصنَّف من المشاريع الصغيرة ، بتخفيض سعر سلعة لديها إلى ٣٠٠ دينار بنسبة خصم ٤٠٪ . أوجِد ما يلي :

(أ) القيمة الأصلية للسلعة .

....

....

....

....

(ب) ما النسبة المئوية للتزايد التي تُعيد سعر السلعة إلى سعرها الأصلي ؟

....

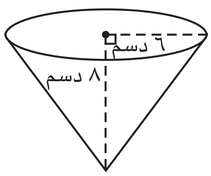
....

....

....

٧ أوجِد كلًّا ممّا يلي (بدلالة π) :

(أ) المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم .



....

....

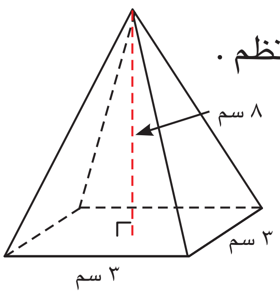
....

....

....

....

(ب) حجم الهرم القائم المنتظم .



....

....

....

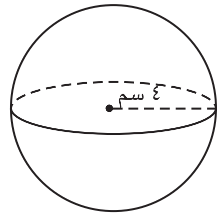
....

....

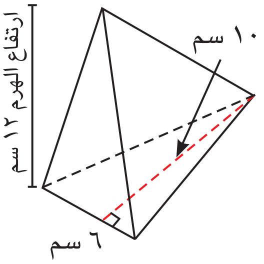
....

....

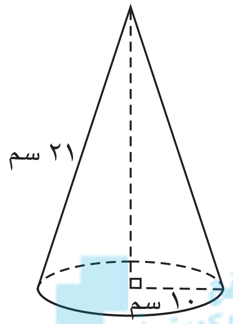
ج) حجم الكرة .



د) حجم الهرم القائم .



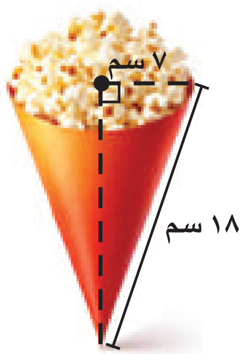
٨ أراد عثمان صنع قمع على شكل مخروط دائري قائم طول نصف قطره ١٠ سم ، وطول الراسم ٢١ سم ، اُحسب المساحة الجانبية للقمع . (اِعتبِر $\pi = \frac{٢٢}{٧}$)



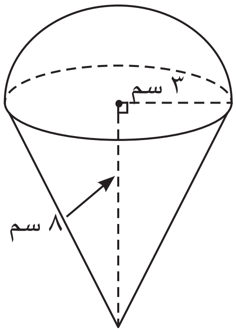
٩ ملأ راشد كرة شاطئية ملوَّنة بالماء ، إذا كان طول نصف قطر الكرة ١٢ سم .
أوجِد حجم الكرة (بدلالة π).

١٠ في بداية عصر التقدّم الفضائي ، صُنعت كبسولة كروية الشكل حجمها ٩٧٢ ٠٠٠ π م^{٣} .
أوجِد طول نصف قطر الكبسولة .

١١ أرادت ياسمين القيام بتوزيعات لزميلاتها . اِختارت شكل المخروط الموضَّح في الشكل المقابِل لتعبئته بالفشار . اُحسب المساحة الجانبية للمخروط .
(اِعتبِر $\pi = \frac{٢٢}{٧}$)



١٢ اِشترى نايف مثلَّجات لأصدقائه وكان أحد هذه المثلَّجات على شكل مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته ٣ سم وارتفاعه ٨ سم ، يعلوه نصف كرة (كما في الشكل) .
أُحسب حجم المجسَّم (بدلالة π) .



....

....

....

ثانيًا : البنود الموضوعية

في البنود (١-٦) ، ظلِّل أ إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلِّل ب إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ جهاز سعره الأصلي ٢٥٠ دينارًا وقد أصبح ثمنه خلال فترة الخصومات ١٥٠ دينارًا ، فإنّ النسبة المئوية للخصم هي ٢٥٪ .	أ	ب
٢ قلادة ذهبية سعرها ١٠٠٠ دينار بيعت بسعر ١٢٠٠ دينار ، فإنّ النسبة المئوية للتزايد ٢٠٪ .	أ	ب
٣ إذا انخفض سعر سلعة بنسبة ١٠٪ ثمّ ارتفع بنسبة ١٠٪ ، فإنّ سعر السلعة سيعود إلى سعرها الأصلي .	أ	ب
٤ حجم الكرة يساوي $\frac{٣}{٤}\pi$ نو^٣ .	أ	ب
٥ حجم الهرم القائم يساوي ثلث حاصل ضرب مساحة القاعدة في الارتفاع .	أ	ب
٦ هرم قائم قاعدته مربّعة طول ضلعها ٤ سم وارتفاعه ٦ سم ، فإنّ حجمه يساوي ٣٢ سم^٣ .	أ	ب

في البنود (٧-١٤) ، لكلّ بند أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلِّل الإجابة الصحيحة .

٧ إذا أنفق عبدالله ٣٠ دينارًا في الشهر على تعبئة بطاقات الاتّصال (شحن الرصيد) ، ثمّ أنفق ٤٠٪ زيادة ممّا أنفقه في الشهر السابق ، فإنّ مقدار المال الذي أنفقه في تعبئة بطاقات الاتّصال في الشهر الحالي يساوي :

أ ٣٥ دينارًا   ب ٤٢ دينارًا   ج ١٨ دينارًا   د ٧٠ دينارًا

٨ في أحد التنزيلات ، اِنخفضت الأسعار بنسبة ٣٥٪ . إذا كان سعر غسّالة بعد التنزيلات ٦٥ دينارًا ، فإنّ سعرها قبل التنزيلات يساوي :

أ ١٣٥ دينارًا   ب ٩٠ دينارًا   ج ١٠٠ دينار   د ٦٥ دينارًا

٩ إذا انخفض سعر سهم ٥٠٪ عن سعره في العام الماضي ، فإنّ النسبة المئوية للتزايد التي تُعيده إلى سعره الأصلي هي :

أ ١٠٠٪   ب ٥٠٪   ج ١٥٠٪   د ٢٠٠٪

١٠ كرة طول قطرها ٦ سم ، فإنّ ثلث حجمها بدلالة π يساوي :

أ ٣٦ π سم^3 ب ١٢ π سم^3 ج ٢٧ π سم^3 د ٩ π سم^3

١١ هرم قائم قاعدته مربّعة طول ضلعها ٦ سم وارتفاعه ٩ سم ، فإنّ حجمه يساوي :

أ ١٠٨ سم^3 ب ٣٢٤ سم^3 ج ٥٤ سم^3 د ٣٦٩ سم^3

١٢ إذا كان طول نصف قطر قاعدة مخروط دائري قائم ٥ سم وراسمه ١٣ سم ، فمساحته الجانبية بدلالة π تساوي :

أ ١٨ π سم^2 ب ٦٥ π سم^2 ج ٣٠ π سم^2 د ١٣ π سم^2

١٣ إذا كان حجم كرة ٢٨٨ π سم^3 ، فإنّ طول نصف قطرها يساوي :

أ ٣ سم   ب ٤ سم   ج ٦ سم   د ٨ سم

١٤ النسبة بين حجمَي كرتَين طول نصفا قطرَيهما ٢ سم ، ٦ سم على الترتيب تساوي :

أ ١ : ٢   ب ١ : ٣   ج ١ : ٩   د ١ : ٢٧

المشروع الرابع :
الرياضيات والحياة

يمكننا استخدام النسب المئوية التزايدية والتناقصية في حياتنا اليومية .

خطّة العمل :

قُم باختيار خمسة منتَجات ، وحدِّد سعرها الأصلي وسعرها في فترة التنزيلات .

خطوات تنفيذ المشروع :

- قُم باختيار خمسة منتَجات وحدِّد سعرها الأصلي .
- أُحسب سعر المنتَجات بعد خصم ٢٠٪ من السعر الأصلي .
- قُم بصنع جدول لعرض المنتَجات ، موضِّحًا سعرها الأصلي والسعر بعد التخفيض .

علاقات وتواصل :

يمكن للمجموعات تبادل المشروع للتأكّد من صحّة ودقّة تطبيق المشروع .

عرض العمل :

تعرض كلّ مجموعة عملها وتناقش خطوات تنفيذ العمل وتتأكّد من صحّة البيانات .

المراجع

- الرياضيات ، الصف التاسع ، الطبعة الأولى ٢٠٢٤ - ٢٠٢٥ م ، وزارة التربية ، قطاع البحوث التربوية والمناهج .
- الرياضيات ، الصف التاسع ، الطبعة التجريبية ٢٠٢٣ - ٢٠٢٤ م ، وزارة التربية ، قطاع البحوث التربوية والمناهج .

مصادر بعض الصور

- صفحة ٢١٨ : الصورة مزوَّدة من لجنة الرياضيات .
- صفحة ٢٢٢ : الصورة مزوَّدة من لجنة الرياضيات .
- صفحة ٢٢٦ : الصور مزوَّدة من لجنة الرياضيات .
- صفحة ٢٣٤ : الصورة مزوَّدة من لجنة الرياضيات .
- صفحة ٢٣٩ : الصورة مزوَّدة من لجنة الرياضيات .

9

الكتاب كاملاً

قيِّم مناهجنا