أحمد جمال

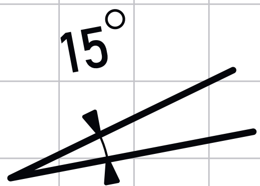
الملف حلول مذكرة فيثاغورث الأشكال الرباعية والمقادير الجبرية منهاج جديد

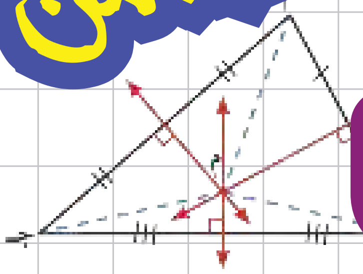
نيو أكاديمي

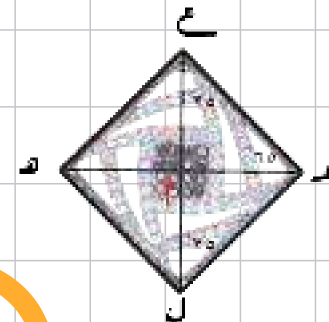
فيثاغورث في الرياضيات

الكتاب الأول

الصف الثامن



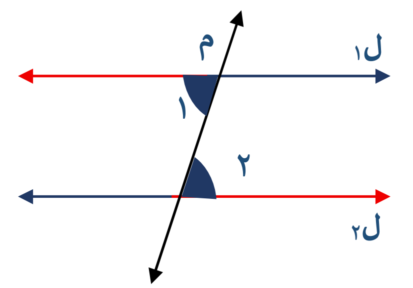
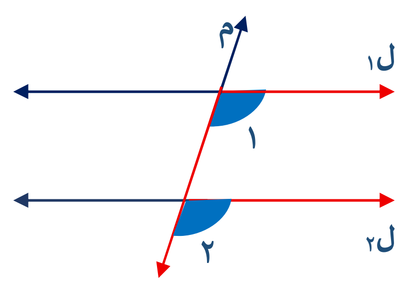
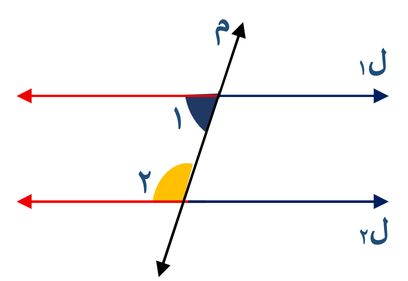




محلولة

الـــدرس الأول
الكـــشـف عن تـوازي مستقـيميـن

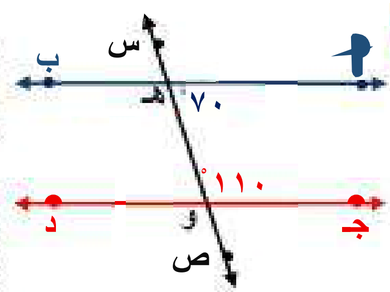
إذا قطع مستقيم مستقيمين في المستوي ، فإن المستقيمين يكونان متوازيين ، **إذا وفقط إذا** توفر أحد الشروط التالية:

١ زاويتان متبادلتان متطابقتان	٢ زاويتان متناظرتان متطابقتان	٣ زاويتان متحالفتان متكاملتان
		

لاحـظ أن
"لا يوازي" يرمز إلي بالرمز ∦

أي من الاشكال التالية يكون أب // جـ د وضح ذلك

١



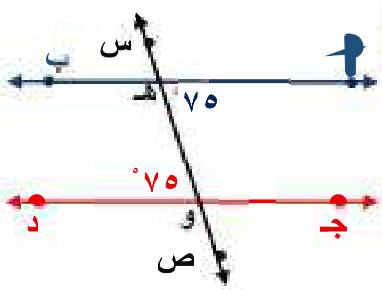
ق(أ هـ و) + ق(جـ و هـ)

= ٧٠° + ١١٠° = ١٨٠°

وهما زاويتان متحالفتان

∴ أب // جـ د

٢



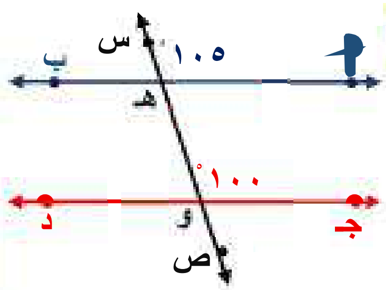
ق(أ هـ و) = ق(د و هـ)

= ٧٥°

وهما في وضع تبادل

∴ أب // جـ د

٣



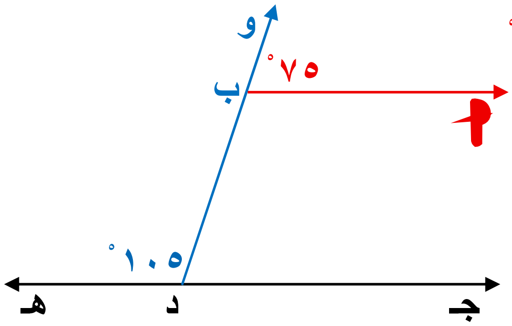
ق(أ هـ س) ≠ ق(جـ و هـ)

وهما في وضع تناظر

∴ أب ∦ جـ د

في الشكل أدناه : ق(∠أ ب و) = ٧٥° ، ق(∠ب د هـ) = ١٠٥°

أثبت أن: أب // هـ جـ



الحل

∵ ق(∠ب د هـ) = ١٠٥° (معطي)

∴ ق(∠جـ د ب) = ١٨٠° – ١٠٥° = ٧٥° (بالتجاور علي خط مستقيم واحد)

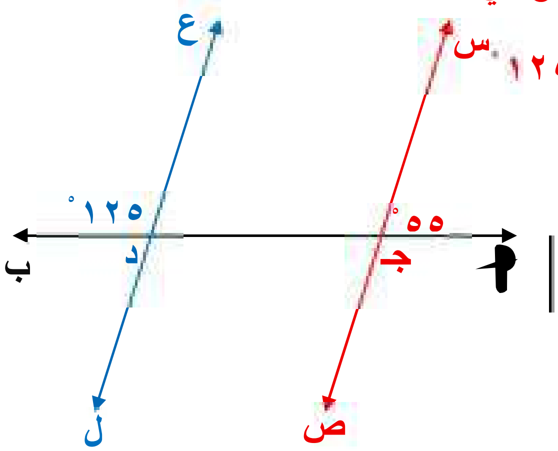
∴ ق(∠أ ب و) = ق(∠جـ د ب) = ٧٥° (وهما في وضع التناظر)

∴ أب // هـ جـ

في المقابل: أب قاطع للمستقيمين ، س ص ، ع ل في جـ ، د

علي الترتيب، ق(∠أ جـ س) = ٥٥° ، ق(∠ع د ب) = ١٢٥°

برهن أن: س ص // ع ل



الحل

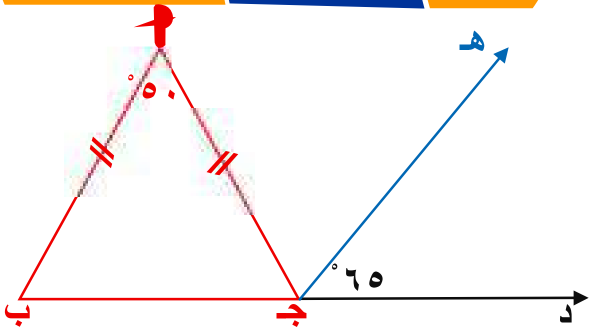
∵ ق(∠أ جـ س) = ٥٥° (معطي)

∴ ق(∠س جـ د) = ١٨٠° – ٥٥° = ١٢٥° (بالتجاور علي خط مستقيم واحد)

∵ ق(∠ع جـ د) = ١٢٥° (معطي)

∴ ق(∠س جـ د) = ق(∠ع د ب) = ١٢٥° (وهما في وضع التناظر)

∴ س ص // ع ل



في الشكل المقابل وحسب البيانات المحددة عليه:

أثبت أن: $\overline{جـ هـ} \parallel \overline{أ ب}$

الحل

∵ أ ب = أ جـ (معطي)

∴ △ أ ب جـ متطابق الضلعين

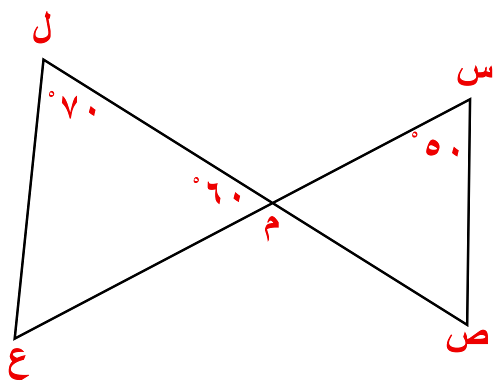
∴ ق(∠ أ ب جـ) = ق(∠ أ جـ ب) = $\frac{١٨٠° - ٥٠°}{٢}$ = $\frac{١٣٠°}{٢}$ = ٦٥°

(مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°)

∵ ق(∠ د جـ هـ) = ٦٥° (معطي)

∴ ق(∠ أ ب جـ) = ق(∠ د جـ هـ) = ٦٥° (وهما في وضع التناظر)

∴ $\overline{جـ هـ} \parallel \overline{ب أ}$



في الشكل المقابل ، إذا كان س ع ∩ ص ل = {م} وحسب البيانات

المحددة عليه ، أثبت أن: $\overline{س ص} \parallel \overline{ع ل}$

الحل

△ ع م ل فيه

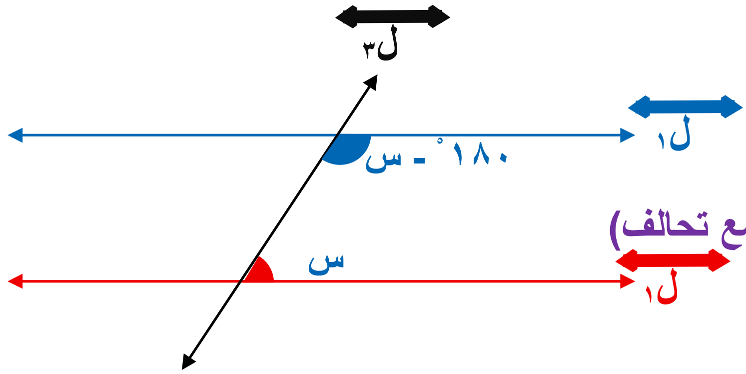
ق(∠ ع) = ١٨٠° – (٧٠° + ٦٠°) = ٥٠°

(مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°)

∴ ق(∠ س) = ق(∠ ع) = ٥٠° (وهما في وضع تبادل)

∴ $\overline{س ص} \parallel \overline{ع ل}$

يقول أحمد ل يوسف: $\overleftrightarrow{ل_1} \parallel \overleftrightarrow{ل_2}$. فهل توافقه الرأي؟ وضح ذلك



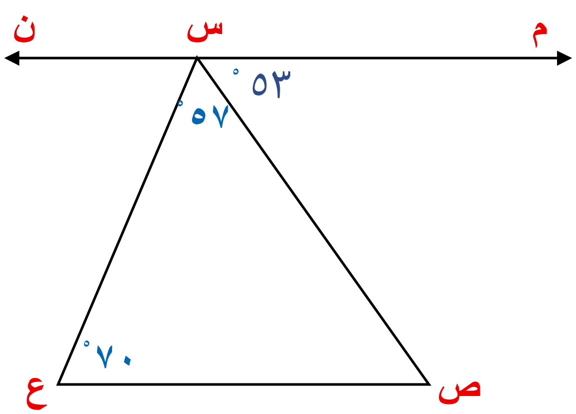
الحل

نعم،

١٨٠° – س + س = ١٨٠° (وهما في وضع تحالف)

∴ $\overleftrightarrow{ل_1} \parallel \overleftrightarrow{ل_2}$

في الشكل المقابل وحسب البيانات المحددة عليه،



أثبت أن: $\overleftrightarrow{م ن} \parallel \overline{ص ع}$

الحل

∵ ق(∠ص) = ١٨٠° – (٥٧° + ٧٠°)

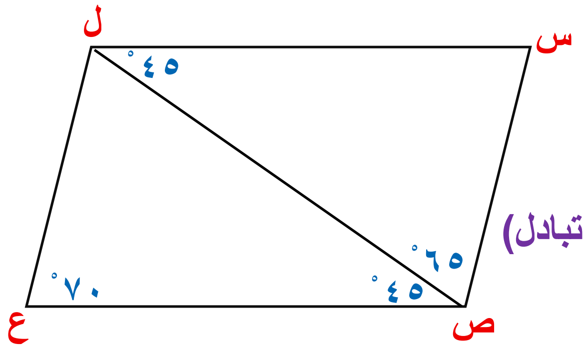
= ١٨٠° - ١٢٧° = ٥٣°

مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

∴ ق(∠م س ص) = ق(∠ص) = ٥٣° (وهما في وضع تبادل)

∴ $\overleftrightarrow{م ن} \parallel \overline{ص ع}$

في الشكل المقابل ، وحسب البيانات المدونة عليه ، برهن أن:



١ س ل // ص ع

الحل

∵ ق(س ل̂ ص) = ق(ع ص̂ ل)= ٤٥° (وهما في وضع تبادل)

∴ س ل // ص ع

٢ س ص // لَ ع

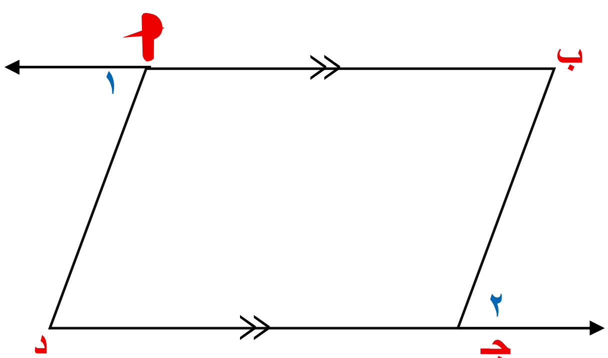
الحل

في △ ع ص ل

ق(ص ل̂ ع) = ١٨٠ – (٤٥° + ٧٠°) = ١٨٠° – ١١٥° = ٦٥° لان مجموع زوايا المثلث =١٨٠

∵ ق(ص ل̂ ع) = ق(س ص̂ ل) = ٦٥° (وهما في وضع تبادل)

∴ س ص // ل ع



في الشكل المقابل: ب أ // دجـ

ق(١) = ق(٢) ، برهن أن : ب جـ // أ د

الحل

∵ ب أ // د جـ

∴ ق(ب̂) = ق(٢̂) (بالتوازي والتبادل)

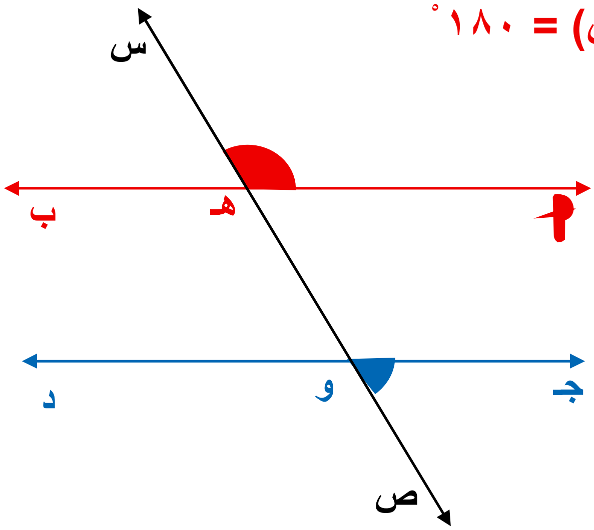
∵ ق(١̂) = ق(٢̂)

∴ ق(ب̂) = ق(١̂) (وهما في وضع تناظر)

∴ ب جـ // أ د

في الشكل المقابل: ق(∠ أ هـ س) + ق(∠ جـ و ص) = ١٨٠°

أثبت أن $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{جـ د}$



الحـــل

ق(∠ أ هـ س) + ق(∠ أ هـ و) = ١٨٠° ← ①

(بالتجاور على مستقيم واحد)

∵ ق(∠ أ هـ س) + ق(∠ جـ و ص) = ١٨٠° ← ②

(معطى)

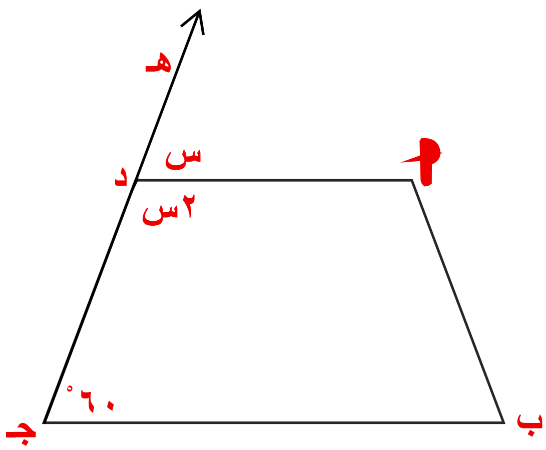
∴ ق(∠ أ هـ و) = ق(∠ جـ و ص)

(وهما في وضع تناظر)

∴ $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{جـ د}$

في الشكل المقابل وحسب البيانات المدونة عليه ،

أثبت أن أ ب جـ د شبة منحرف



الحـــل

س + ٢س = ١٨٠°

٣س = ١٨٠°

س = ٦٠°

∴ ق(∠ أ د هـ) = ق(∠ جـ) (وهما في وضع تناظر)

∴ $\overline{أد}$ // $\overline{ب جـ}$

∴ أ ب جـ د شبة منحرف فيه ضلعان متقابلا متوازيان

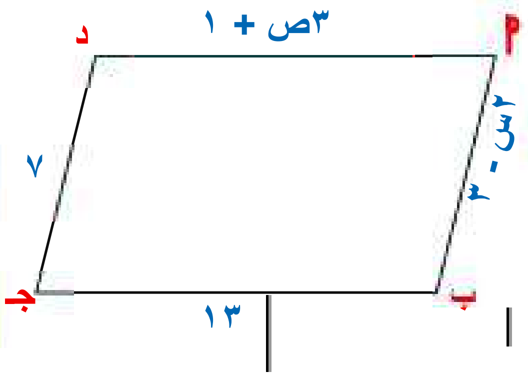
تــذكــر

شبة المنحرف هو شكل رباعي فيه ضلعان فقط متقابلان متوازيان

الــدرس الثاني

متوازي الأضلاع – رسم متوازي الاضلاع

في الشكل المقابل أب جـ د متوازي أضلاع ، وبحسب البيانات المدونة علي الرسم ، وجد البرهان قيمة كل من س ، ص:



الحــل

أب جـ د متوازي أضلاع (معطي)

كل ضلعين متقابلين متطابقان (من خواص متوازي الأضلاع)

أب = د جـ

٢س – ٣ = ٧

٢س – ٣ + ٣ = ٧ + ٣

$\frac{\cancel{٢}\text{س}}{\cancel{٢}} = \frac{\cancel{١٠}^{٥}}{\cancel{٢}_{١}}$

س = ٥

أد = ب جـ

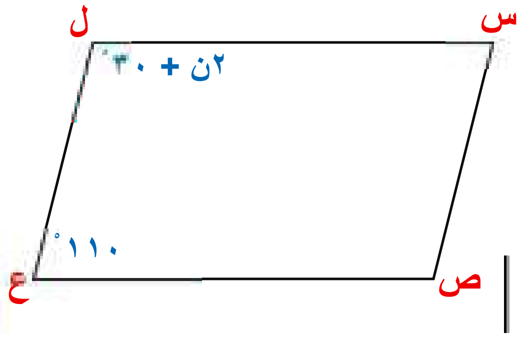
٣ص + ١ = ١٣

٣ص + ١ – ١ = ١٣ - ١

$\frac{\cancel{٣}^{١}\text{ص}}{\cancel{٣}_{١}} = \frac{\cancel{١٢}^{٤}}{\cancel{٣}_{١}}$

ص = ٤ (تحقق من صحة الحل)

في الشكل المقابل، س ص ع ل متوازي أضلاع ،
وبحسب البيانات المدونة علي الرسم ، أكمل ما يلي
لإيجاد قيمة ن.



الحــل

س ص ع ل متوازي أضلاع

ق(∠ل) + ق(∠ع) = ١٨٠° (من خواص متوازي الأضلاع كل زاويتين متتاليتين متكاملتان)

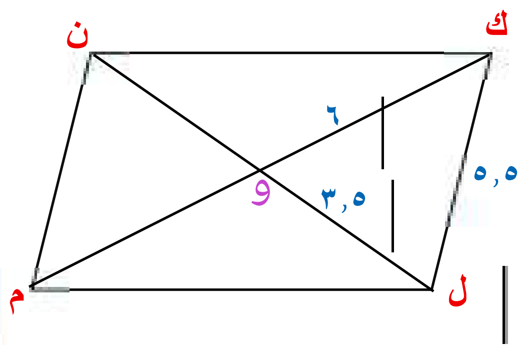
٢ن + ٣٠° + ١١٠° = ١٨٠°

٢ن = ١٨٠° − ١٤٠°

$ن = \frac{٤٠^\circ}{٢}$

ن = ٢٠°

ك ل م ن متوازي أضلاع تقاطع قطريه في و ،
ك ل = ٥,٥ وحدة طول ، ك و = ٦ وحدات طول ،
ل و= ٣,٥ وحدات طول أوجد محيط △ م و ن



الحــل

ك ل م ن متوازي أضلاع (معطي)

و م = و ك = ٦ وحدات طول (من خواص متوازي الأضلاع القطران ينصف كل منهما الآخر)

و ن = و ل = ٣,٥ وحدات طول

م ن = ك ل = ٥,٥ وحدة طول (من خواص متوازي الأضلاع كل ضلعين متقابلين متطابقان)

محيط △ م و ن = و م + و ن + م ن

= ٦ + ٣,٥ + ٥,٥ = ١٥ وحدة طول

ارسم متوازي الأضلاع أ ب جـ د الذي فيه أ ب = ٣سم ، ب جـ = ٥سم ، ق(أ) = ١٠٠°

الحل

ارسم رسماً تخطيطاً للشكل موضحاً عليه المعطيات

∵ أ ب جـ د متوازي أضلاع

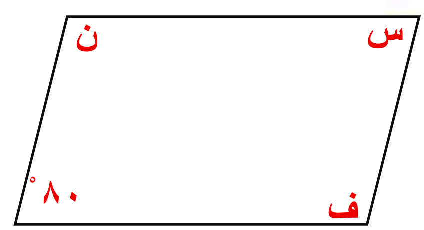
∴ ق(أ) + ق(ب) = ١٨٠° (من خواص متوازي الأضلاع كل زاويتين متتاليتين متكاملتان)

ق(ب) = ١٨٠° – ١٠٠°

∴ ق(ب) = ٨٠°

استخدم الأدوات الهندسية لرسم متوازي الاضلاع أ ب جـ د

أوجد قيمة كل من س ، ف ، ن في متوازيات الأضلاع التالية مع ذكر السبب:



س = ٨٠°

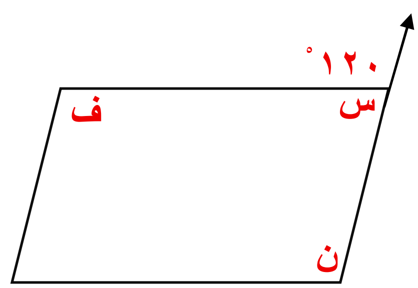
كل زاويتان متقابلتان متطابقتان

ن = ١٨٠° – ٨٠° = ١٠٠°

زاويتان متتاليتان مجموعهما = ١٨٠°

ق = ١٠٠°

كل زاويتان متقابلتان متطابقتان



س = ١٨٠° – ١٢٠° = ٦٠°

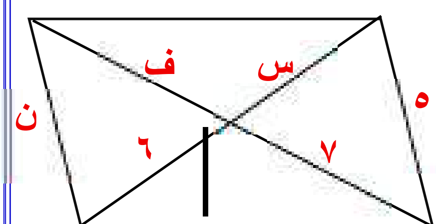
التجاور علي مستقيم واحد

ف = ١٢٠°

التوازي والتبادل

ن = ١٢٠°

زاويتان متقابلتان



س = ٦

القطران ينصف كلاً منهما الآخر

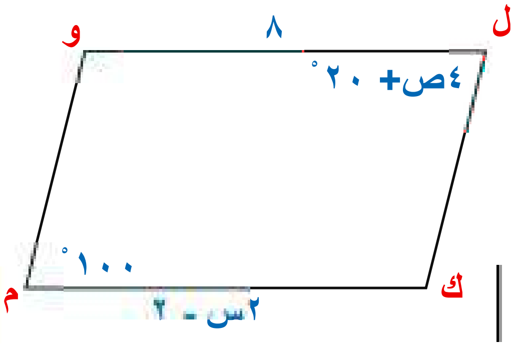
ف = ٧

القطران ينصف كلاً منهما الآخر

ن = ٥

ضلعان متقابلان

في الشكل المقابل ل ك م و متوازي الاضلاع ، وبحسب البيانات المدونة علي الرسم ، أوجد البرهان قيمة كل من س ، ص.



الحـل

٢س – ٢ = ٨

٢س = ٨ + ٢

٢س = ١٠

س = ٥

٤ص + ٢٠° = ١٠٠°

٤ص = ١٠٠° – ٢٠°

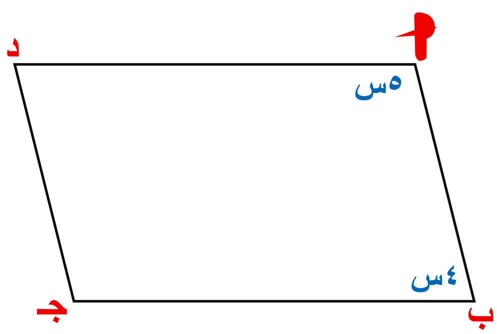
٤ص = ٨٠°

ص = ٢٠°

في الشكل المقابل ، أ ب جـ د متوازي أضلاع ،

ق(∠أ) = ٥س ، ق(∠ب) = ٤س

أوجد البرهان ق(∠أ) ، ق(∠ب) بالدرجات



الحـل

∵ أ ب جـ د متوازي أضلاع

∴ ق(∠أ) + ق(∠ب) = ١٨٠° (كل زاويتان متتاليتان مجموعهما = ١٨٠°)

٥س + ٤س = ١٨٠°

٩س = ١٨٠°

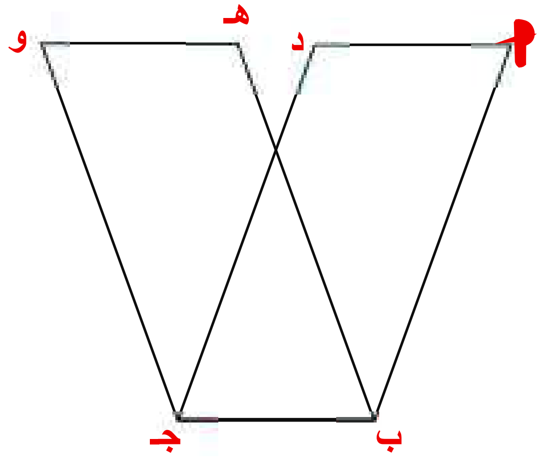
س = ٢٠°

∴ ق(∠أ) = ٥ × ٢٠° = ١٠٠°

∴ ق(∠ب) = ٤ × ٢٠° = ٨٠°

في الشكل المقابل ، أ ب جـ د ، هـ ب جـ و متوازيا أضلاع ،

أثبت أن أ د = هـ و



الحــل

∵ أ ب جـ د ، هـ ب جـ و متوازيا أضلاع

∴ أ د = ب جـ

هـ و = ب جـ

أ د = هـ و (من خواص التساوي)

ارسم متوازي الأضلاع س ص ع ل الذي فيه س ص = ٥,٥ سم ، ص ع = ٦,٥ سم ،
ق(س ل̂ ع) = ٤٥°

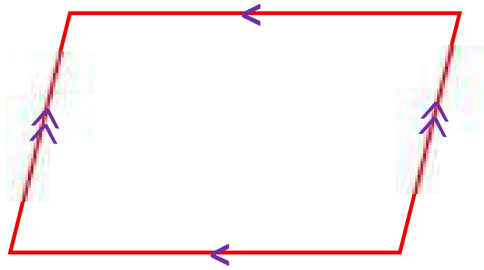
ارسم متوازي الأضلاع ل م ن و الذي فيه ل م = ٣,٥ سم ، م ن = ٥ سم
، ق(م ل̂ و) = ١٢٠°

الكشف عن متوازي الأضلاع

يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا توفرت فيه أحد الشروط التالية:

(١)

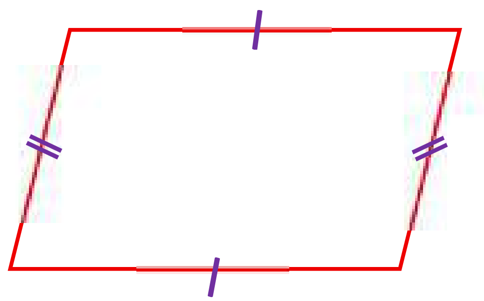
كل ضلعين متقابلين **متوازيين**



---

(٢)

كل ضلعين متقابلين **متطابقين**



---

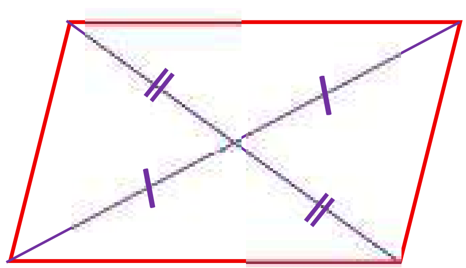
(٣)

كل زاويتين متقابلتين **متطابقتين**

---

(٤)

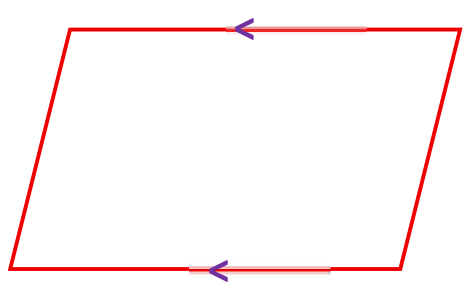
القطران **ينصف كل منهما الآخر**



---

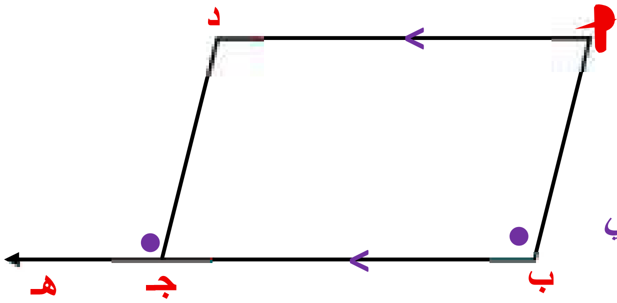
(٥)

ضلعان متقابلان **متطابقان ومتوازيان**



تمارين علي حالات الكشف عن متوازي الأضلاع

أثبت أن : الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع



الحــل

$\overline{أد} \parallel \overline{ب جـ}$ ⟵ (١) معطي

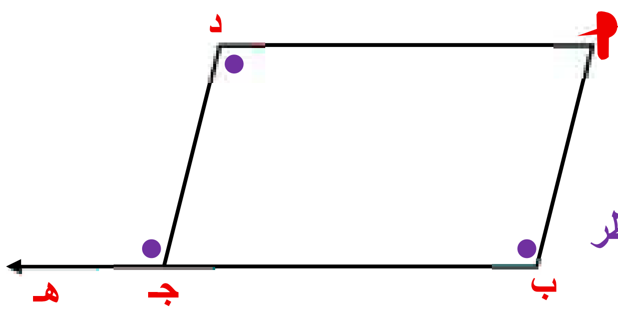
∵ ق (∠ب) = ق (∠د جـ هـ) معطي وهما في وضع تناظر

∴ $\overline{أب} \parallel \overline{د جـ}$ ⟵ (٢)

∴ من (١) ، (٢) نستنتج أن :

الشكل الرباعي أ ب جـ د هو متوازي أضلاع لأن كل ضلعين متقابلين متوازيين

أثبت أن : الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع



الحــل

∵ ق (∠ب) = ق (∠د جـ هـ) معطي وهما في وضع تناظر

$\overline{أب} \parallel \overline{د جـ}$ ⟵ (١)

∵ ق (∠د) = ق (∠د جـ هـ) وهما في وضع تبادل

∴ $\overline{أد} \parallel \overline{ب جـ}$ ⟵ (٢)

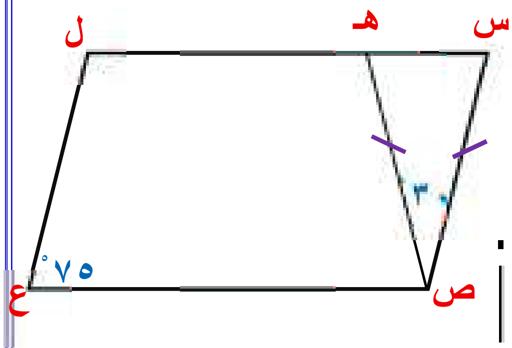
∴ من (١) ، (٢) نستنتج أن :

الشكل الرباعي أ ب جـ د هو متوازي أضلاع لأن كل ضلعين متقابلين متوازيين

في الشكل المقابل $\overline{\text{س ل}} \parallel \overline{\text{ص ع}}$ ، ص س = ص هـ ،

ق($\hat{\text{ع}}$) = ٧٥° ، ق(س $\hat{\text{ص}}$ هـ) = ٣٠° ، برهن أن

الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع



الحـل

$\overline{\text{س ل}} \parallel \overline{\text{ص ع}}$ (١)

ق($\hat{\text{ل}}$) = ١٨٠° – ٧٥° = ١٠٥° تحالف وتوازي

س ص = هـ ص

∴ Δ س ص هـ متطابق الضلعين

∴ ق($\hat{\text{س}}$) = ق(س $\hat{\text{هـ}}$ ص) = $\frac{\text{١٨٠° - ٣٠°}}{\text{٢}}$ = $\frac{\text{١٥٠°}}{\text{٢}}$ = ٧٥°

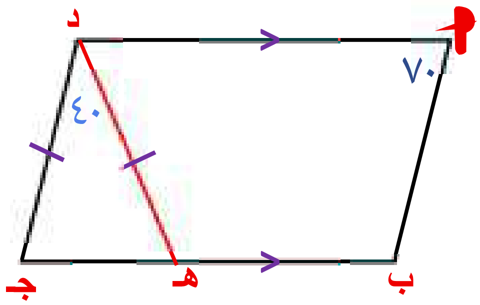
لأن مجموع زوايا المثلث = ١٨٠°

∴ ق($\hat{\text{س}}$) + ق($\hat{\text{ل}}$) = ٧٥° + ١٠٥° = ١٨٠° وهما في وضع تحالف

∴ $\overline{\text{س ص}} \parallel \overline{\text{ل ع}}$ (٢)

∴ من (١) ، (٢) نستنتج أن :

الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع لأن فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين



في الشكل المقابل $\overline{أد} \parallel \overline{ب جـ}$ ، ص س = ص هـ ،

ق(أ) = ٧٠° ، ق(هـ د جـ) = ٤٠° ، برهن أن الشكل

الرباعي أ ب جـ د متوازي أضلاع

الحل

$\overline{أد} \parallel \overline{ب جـ}$ ← (١)

ق(ب) = ١٨٠° − ٧٠° = ١١٠° تحالف وتوازي

د هـ = د جـ

∴ Δ د هـ جـ متطابق الضلعين

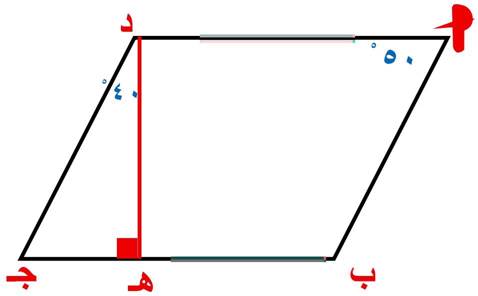
∴ ق(جـ) = ق(د هـ جـ) = $\frac{١٨٠° - ٤٠°}{٢}$ = $\frac{١٤٠°}{٢}$ = ٧٠° لأن مجموع زوايا المثلث = ١٨٠°

∴ ق(جـ) + ق(ب) = ١١٠° + ٧٠° = ١٨٠° وهما في وضع تحالف

∴ $\overline{أب} \parallel \overline{د جـ}$ ← (٢)

∴ من (١) ، (٢) نستنتج أن :

الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع لأن فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين



إذا كان أ ب جـ د شكل رباعي فيه : أد // ب جـ ،

د هـ ⊥ ب جـ ، ق(∠أ) = ٥٠° ، ق(∠هـ د جـ) = ٤٠° ،

فبرهن أن الشكل الرباعي أ ب جـ د متوازي أضلاع

الحل

أد // ب جـ ← (١)

ق(∠ب) = ١٨٠° − ٥٠° = ١٣٠° تحالف وتوازي

∴ Δ د هـ جـ قائم مجموع زواياه = ١٨٠°

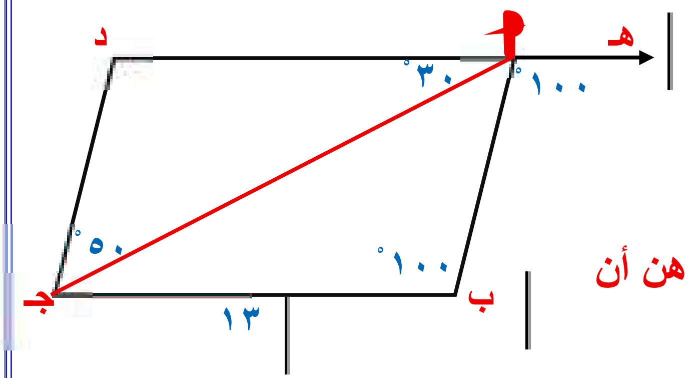
∴ ق(∠جـ) = ١٨٠° − (٤٠° + ٩٠°) = ١٨٠° − ١٣٠° = ٥٠°

∴ ق(∠ب) + ق(∠جـ) = ١٣٠° + ٥٠° = ١٨٠° وهما في وضع تحالف

∴ أب // د جـ ← (٢)

∴ من (١) ، (٢) نستنتج أن :

أ ب جـ د متوازي ضلاع لأن كل ضلعين متقابلين متوازيين



أ ب جـ د شكل رباعي فيه

ق (∠هـ أ ب) = ق(∠ب) = ١٠٠° ،

ق(∠د أ جـ) = ٣٠° ، ق (∠أ جـ د) = ٥٠° برهن أن

الشكل الرباعي أ ب جـ د متوازي أضلاع

الحل

∵ ق (∠هـ أ ب) = ق(∠ب) = ١٠٠° وهما في وضع تبادل

∴ $\overline{\text{أ هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ (١)

في Δ أ جـ د ، ق(∠د) = ١٨٠° - (٣٠° + ٥٠°)

= ١٨٠° – ٨٠° = ١٠٠° لأن مجموع زوايا المثلث = ١٨٠°

∵ ق (∠هـ أ ب) = ق(∠د) وهما في وضع تناظر

∴ $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{د جـ}}$ (٢)

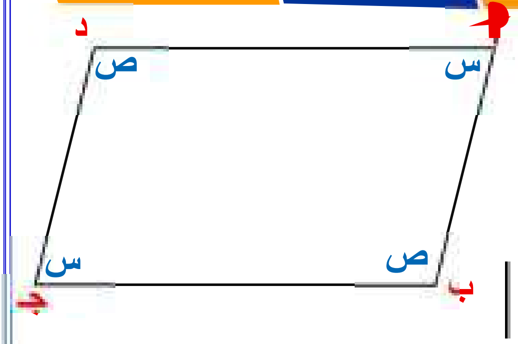
من (١) ، (٢) نستنتج أن :

الشكل الرباعي أ ب جـ د متوازي أضلاع لأن فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين

في الشكل المقابل أ ب جـ د شكل رباعي فيه:

ق(أ) = ق(جـ) = س ، ق(ب) = ق(د) = ص

هل المعطيات كافية لأن يكون الشكل الرباعي أ ب جـ د متوازي أضلاع؟



الحل

س + ص + س + ص = ٣٦٠ْ

تذكر

مجموع قياسات زوايا الشكل لرباعي = ٣٦٠ْ

∵ ٢س + ٢ص = ٣٦٠ بالقسمة على ٢

∴ س + ص = ١٨٠ْ

ق(أ) + ق(ب) = ١٨٠ْ ← ① وهما في وضع تحالف

∴ أد // ب جـ ← ①

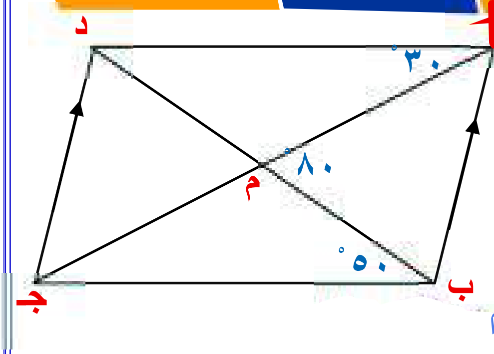
وكذلك ق(أ) + ق(د) = ١٨٠ْ ← ② وهما في وضع تحالف

∴ أب // د جـ ← ②

∴ من (١) ، (٢) نستنتج أن :

الشكل الرباعي أ ب جـ د هو متوازي أضلاع

وعلي ذلك نقول : نعم ، المعطيات كافية لإثبات أن الشكل الرباعي أ ب جـ د متوازي أضلاع



في الشكل المقابل أجـ ∩ ب د = {م} ،

أثبت أن أ ب جـ د متوازي أضلاع

الحـل

ق(ب م جـ) = ١٨٠° − ٨٠° = ١٠٠° بالتجاور على خط مستقيم

في Δ ب م جـ :

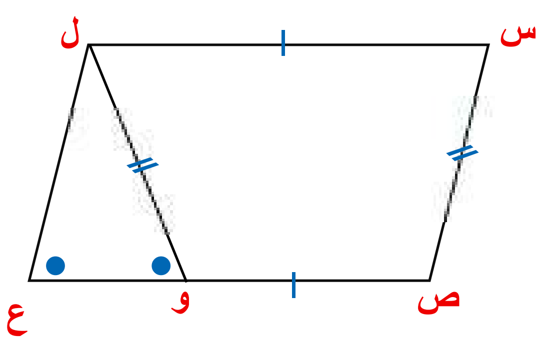
ق(ب جـ م) = ١٨٠° − (٥٠° + ١٠٠°) = ٣٠° (مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°)

∵ ق(د أ جـ) = ق(ب جـ م) = ٣٠° وهما في وضع تبادل

∴ أد // ب جـ (١)

∵ أب // د جـ (٢) معطي

∴ الشكل أ ب جـ د هو متوازي أضلاع فيه كل ضلعان متقابلان متوازيان



أثبت أن الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع

الحـل

∵ س ل = ص ع (١) معطي

في Δ ل و ع :

∵ ق(ل و ع) = ق(ع)

∴ ل و = ل ع

∵ ل و = س ص

∴ ل ع = س ص (٢) من خواص المساواة

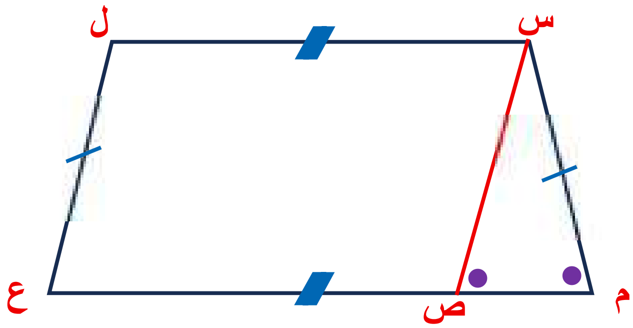
∴ من (١) ، (٢) نستنتج أن : الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع

لأن كل ضلعان متقابلان متطابقان

إذا كان : س ل = ص ع ، س م = ل ع ،

م̂ ≅ س ص̂ م برهن أن :

الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع



الحـل

- س ل = ص ع ← معطي (١)

∆ س ص م فيه:

- ق(س ص̂ م) = ق(م̂)

- ∆ س ص م متطابق الضلعين

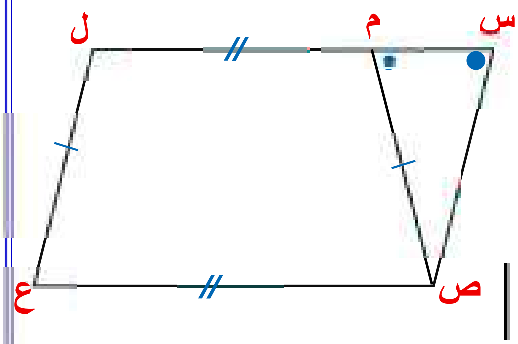
س م = س ص

س م = ل ع

- س ص = ل ع خاصية المساواة ← (٢)

- من (١) ، (٢) نستنتج أن :

الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع لأن كل ضلعين متقابلين متطابقين



إذا كان س ل = ص ع ، م ص = ل ع ،

ق(∠س) = ق(∠س م ص) ،

برهن أن الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي الأضلاع

الحل

تذكر

لأي مثلث إذا كان فيه زاويتان متطابقتين ، فإن المثلث متطابق الضلعين

س ل = ص ع (معطى) (١)

في Δ س م ص :

∵ ق(∠س) = ق(∠س م ص) (معطى)

∴ س ص = م ص من خواص المثلث المتطابق الضلعين

∵ م ص = ل ع (معطى)

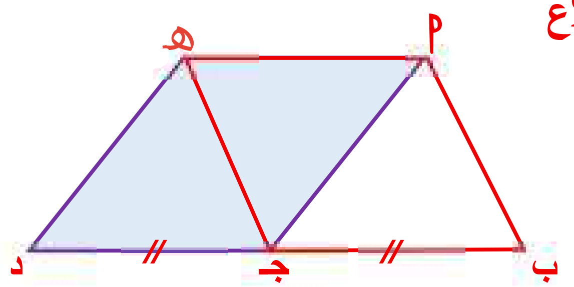
∴ س ص = ل ع من خواص المساواة (٢)

∴ من (١) ، (٢) نستنتج أن :

الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع لأن فيه كل ضلعين متقابلين متطابقين

إذا كان ا ب جـ هـ متوازي أضلاع ، ب جـ = جـ د ، ب ، جـ ، د علي استقامة واحدة ،

فبرهن أن الشكل الرباعي ا جـ د هـ متوازي أضلاع



الحـــل

ا ب جـ هـ متوازي أضلاع

∴ ا هـ // ب جـ لأن كل ضلعين متقابلين متوازيين

ب ، جـ ، د علي استقامة واحدة

∴ ا هـ // جـ د ← (١)

ا ب جـ هـ متوازي أضلاع

ا هـ = ب جـ لأن كل ضلعين متقابلين متطابقين

ب جـ = جـ د (معطي)

∴ ا هـ = جـ د من خواص المساواة

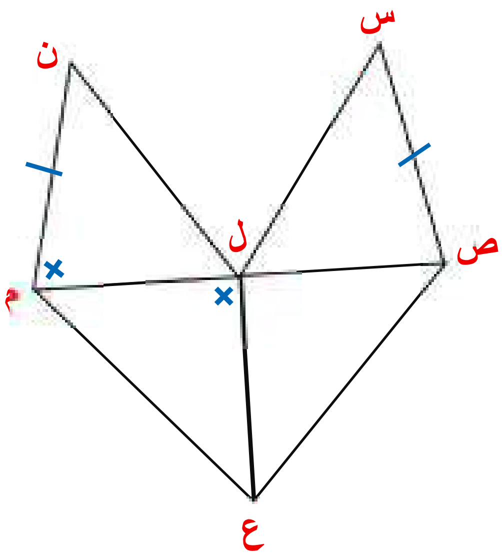
∴ من (١) ، (٢) نستنتج أن :

الشكل الرباعي ا جـ د هـ متوازي أضلاع لأن فيه ضلعين متقابلين متوازيين ومتطابقين

في الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع ، س ص = ن م،

ق (∠ ن م ل) = ق (∠ م ل ع) ،

أثبت أن ل ع م ن متوازي أضلاع

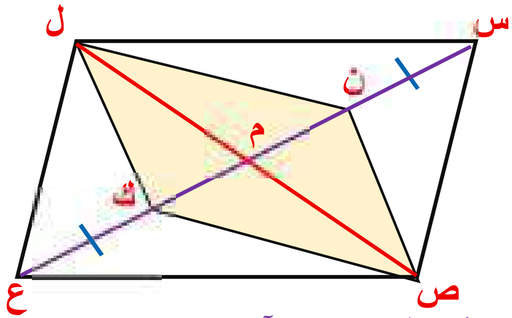


الحـل

- س ص ع ل متوازي
- س ص = ل ع
- س ص = ن م
- ل ع = ن م (١) من خواص المساواة
- ق (∠ ن م ل) = ق (∠ م ل ع) وهما في وضع تبادل
- $\overline{\text{ل ع}}$ // $\overline{\text{ن م}}$ (٢)
- من (١) ، (٢) نستنتج أن :

الشكل الرباعي ل ع م ن متوازي أضلاع فيه ضلعان متقابلان متطابقان ومتوازيان

إذا كان ن ص ك ل متوازي أضلاع تقاطع قطرية في م ، س ن = ك ع ، فأثبت أن الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع



الحـل

الشكل ن ص ك ل متوازي أضلاع (معطي)القطران ينصف كل منهما الآخر

م ص = م ك (من خواص متوازي أضلاع)

أيضاً م ن = م ك (من خواص متوازي أضلاع)

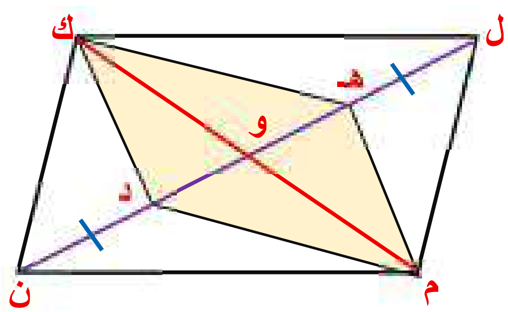
س ن = ع ك (معطي)

م ن + ن س = م ك + ك ع   م س = م ع (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن :

الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع لأن فيه القطران ينصف كل منهما الآخر

إذا كان ل م ن ك متوازي أضلاع تقاطع قطريه في و ، ل هـ = ن د ، برهن أن الشكل الرباعي هـ م د ك متوازي أضلاع



الحـل

الشكل ل م ن ك متوازي أضلاع القطران ينصف كل منهما الآخر

م و = وك (١) (من خواص متوازي أضلاع)

ل و = و ن (من خواص متوازي أضلاع)

ل هـ = ن د (معطي)

ل و – ل هـ = ون - دن   و هـ = ود (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن :

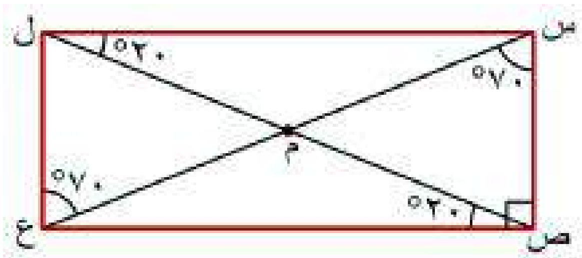
هـ م د ك متوازي أضلاع (القطران ينصف كل منهما الآخر)

٥ ــ ٤ الكشف عن المستطيل

يكون متوازي الأضلاع مستطيلًا إذا توفر فيه أحد الشروط التالية:

1. إحدى زواياه قائمة
2. قطراه متطابقان

مثال(١): في الشكل المقابل،
ومن البيانات الموضحة على الرسم،
أثبت أن س ص ع ل مستطيل.



الحـــــــل

البرهان:

∵ ق(س لَ ص) = ق(ع صَ ل) = ٢٠° معطى (وهما في وضع تبادل)

∴ $\overline{\text{س ل}}$ // $\overline{\text{ص ع}}$ (١)

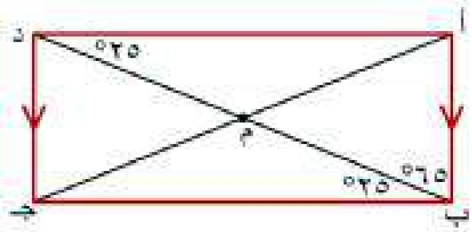
∵ ق(ص سَ ع) = ق(ل عَ س) = ٧٠° معطى (وهما في وضع تبادل)

∴ $\overline{\text{ل س}}$ // $\overline{\text{ع ص}}$ (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أن س ص ع ل متوازي أضلاع لأن فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان

∵ ق(س صَ ع) = ٩٠° معطى

∴ الشكل س ص ع ل مستطيل لأنه متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة



مثال(٢): أ ب جـ د شكل رباعي فيه: $\overline{أب}$ // $\overline{دجـ}$ ،
ق(أ دَ ب) = ق(د بَ جـ) = ٢٥° ، ق(أ بَ د) = ٦٥°
أثبت أن الشكل الرباعي أ ب جـ د مستطيل.

الحــــــــل

البرهان: في الشكل الرباعي أ ب جـ د

∵ $\overline{أب}$ // $\overline{دجـ}$ معطى (١)

ق(أ دَ ب) = ق(د بَ جـ) = ٢٥° وهما في وضع تبادل

∴ $\overline{أد}$ // $\overline{بجـ}$ (٢)

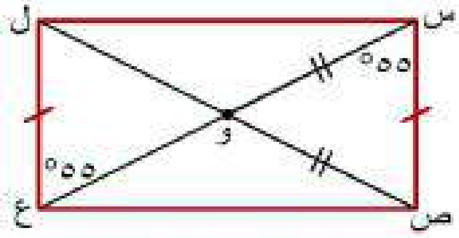
من (١) ، (٢) ينتج أن الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع (٣)

لأن فيه كل ضلعان متقابلان متوازيان

∵ ق(أ بَ د) + ق(د بَ جـ) = ٦٥° + ٢٥° = ٩٠° (٤)

من (٣) ، (٤) نستنتج أن:

الشكل أ ب جـ د مستطيل لأنه متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة



مثال(٣): س ص ع ل شكل رباعي تقاطع قطريه في النقطة و
س ص = ل ع ، س و = ص و
ق(ص سَ و) = ق(ل عَ و) = ٥٥°
أثبت أن س ص ع ل مستطيل.

الحــــــــل

البرهان:

∵ $\overline{سص}$ ≅ $\overline{لع}$ معطى (١)

ق(ص سَ و) = ق(ل عَ و) = ٥٥° (وهما في وضع تبادل)

∴ $\overline{سص}$ // $\overline{لع}$ (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أن:

الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع لأن فيه ضلعين متقابلين متطابقان ومتوازيان (٣)

∵ ص و = و ل ، س و = و ع (قطرا متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر)

∵ س و = ص و

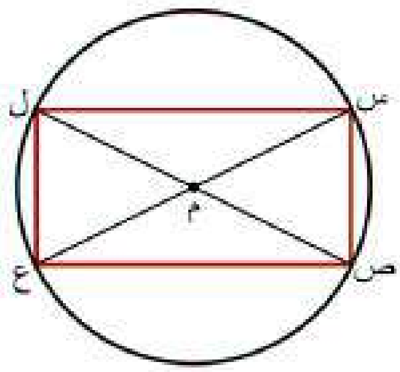
∴ س ع = ص ل (٤) (من خواص المساواة)

من (٣) ، (٤) نستنتج أن:

س ص ع مستطيل لأنه متوازي أضلاع قطراه متطابقان

مثال(٤): في الشكل المقابل، دائرة مركزها م

أثبت أن الشكل س ص ع ل مستطيل.



الحـــــــل

البرهان:

∵ م مركز الدائرة

∵ س م = م ع (أنصاف أقطار) (١)

ص م = م ل (أنصاف أقطار) (٢)

∴ القطران ينصف كل منهما الآخر

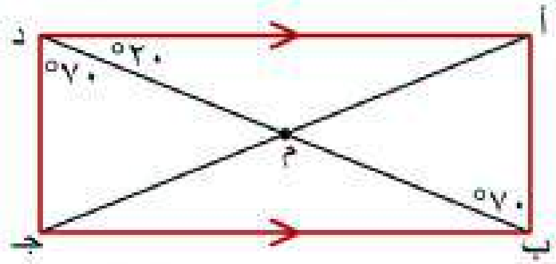
∴ الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع لأن فيه القطران ينصف كلاً منهما الآخر

∵ س ع = ص ل (أقطار الدائرة متطابقة)

∴ س ص ع ل مستطيل لأنه متوازي أضلاع فيه القطران متطابقان

مثال(٥): أ ب جـ د شكل رباعي فيه: أ د // ب جـ ، ق(أ ب̂ د) = ق(ب د̂ جـ) = ٧٠° ، ق(أ د̂ ب) = ٢٠°

أثبت أن الشكل الرباعي أ ب جـ د مستطيل.



الحـــــــل

البرهان:

∵ أ د // ب جـ (١) معطى

∵ ق(أ ب̂ د) = ق(ب د̂ جـ) = ٧٠° وهما في وضع تبادل

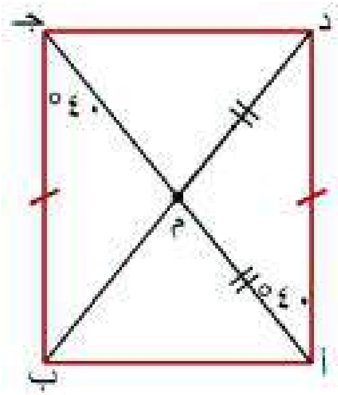
∴ أ ب // د جـ (٢)

∴ الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع * كل ضلعين متقابلين متوازيين

∵ ق(أ د̂ ب) + ق(جـ د̂ ب) = ٢٠° + ٧٠° = ٩٠°

∴ ق(أ د̂ جـ) = ٩٠°

∴ الشكل أ ب جـ د مستطيل لأنه متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة



مثال(٦): أ ب جـ د شكل رباعي يتقاطع قطراه في م

أ د = ب جـ ، م د = م أ ، ق(د أ̂ جـ) = ق(ب جـ أ) = ٤٠°

أثبت أن الشكل أ ب جـ د مستطيل ، ثم أوجد ق(ب أ̂ جـ)

الحـــــــل

البرهان:

∵ ق(د أ̂ جـ) = ق(ب جـ أ) = ٤٠° وهما في وضع تبادل

∴ أ د // ب جـ (١)

∵ أ د = ب جـ (٢) معطى

∴ الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع * ضلعان متقابلان متوازيان ومتطابقان

∴ د م = م ب ، أ م = م جـ (القطران ينصف كل منهما الآخر)

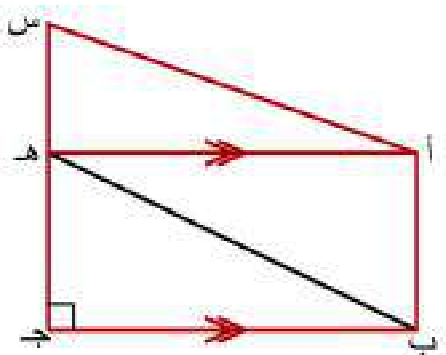
∵ م د = م أ

∴ أ جـ = ب د *

∴ الشكل أ ب جـ د مستطيل لأنه متوازي أضلاع فيه القطران متطابقان

∵ ق(أ̂) قائمة =٩٠°

∴ ق(ب أ̂ جـ) = ٩٠° ــ ٤٠° = ٥٠°



مثال(٧): أ ب هـ س متوازي أضلاع ، ق(جـ)= ٩٠°

أ هـ // ب جـ ، س ، هـ ، جـ على استقامة واحدة

أثبت أن أ ب جـ هـ مستطيل

الحـــــــل

البرهان:

∵ أ ب هـ س متوازي أضلاع

∴ أ ب // س هـ

∵ س ، هـ ، جـ على استقامة واحدة

∴ أ ب // هـ جـ (١)

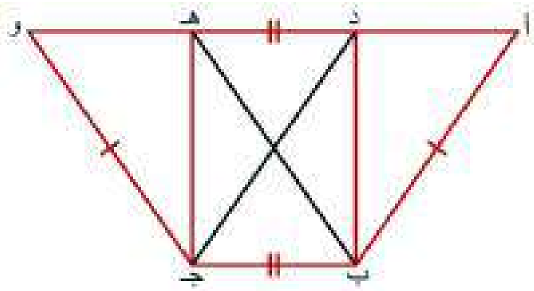
∵ أ هـ // ب جـ (٢) معطى

∴ الشكل أ ب جـ هـ متوازي أضلاع * كل ضلعين متقابلين متوازيين

∵ ق(جـ) = ٩٠°

∴ الشكل أ ب جـ هـ مستطيل لأنه متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة

مثال(٨): أ ب جـ د ، هـ ب جـ و متوازيا أضلاع.



د ، هـ ينتميان إلى أ و ،

أ ب = و جـ ، ب جـ = د هـ

أثبت أن الشكل د ب جـ هـ مستطيل.

الحـــــــــل

البرهان:

∵ أ ب جـ د متوازي أضلاع

∵ أ د // ب جـ

∵ د ، هـ ينتميان إلى أ و

∴ د هـ // ب جـ (١)

∵ د هـ = ب جـ (٢) معطى ∴ الشكل ب د هـ جـ متوازي أضلاع

∵ أ ب جـ د متوازي أضلاع ∴ أ ب = د جـ
∵ هـ ب جـ و متوازي أضلاع ∴ و جـ = هـ ب
من خواص المتوازي

∵ أ ب = و جـ

∴ د جـ = ب هـ من خواص المساواة

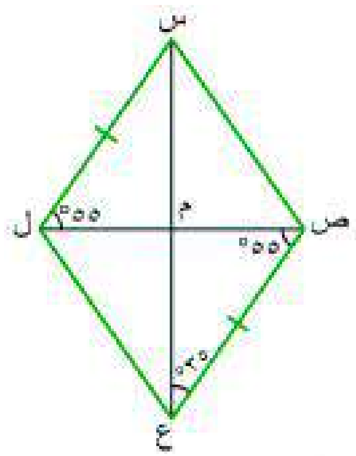
∴ الشكل د ب جـ هـ مستطيل لأنه متوازي أضلاع فيه القطران متطابقان

٥ ـ ٥ الكشف عن المعين

يكون متوازي الأضلاع معينًا إذا توفر فيه أحد الشروط التاليين:

① إذا تطابق ضلعان متجاوران فيه.

② إذا تعامد قطراه.



مثال(١): في الشكل المقابل:

ق(س لَ ص) = ق(ع صَ ل) = ٥٥° ،

ق(ص عَ س) = ٣٥° ، س ل = ص ع

أثبت أن الشكل الرباعي س ص ع ل معين.

الحـــــــل

البرهان:

∵ س ل = ص ع (١) معطى

∵ ق(س لَ ص) = ق(ع صَ ل) = ٥٥° وهما في وضع تبادل

∴ س ل // ص ع (٢)

∴ من (١) ، (٢)

الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع لأن فيه ضلعين متقابلين متوازيان ومتطابقان (٣)

في △ ص م ع فيه:

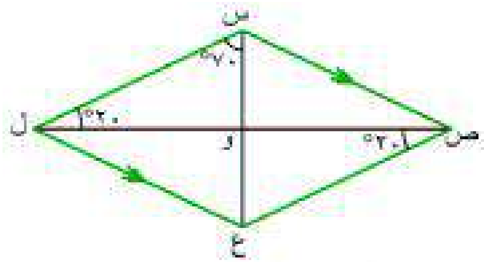
∵ ق(ع صَ م) = ٥٥° (معطى) ، ∵ ق(ص عَ م) = ٣٥° (معطى)

∴ ق(ص مَ ع)=١٨٠° ـ (٣٥°+٥٥°)=٩٠° (مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة يساوي ١٨٠°)

∴ س ع ⊥ ل ص (٤)

∴ من (٣) ، (٤) ∴ الشكل س ص ع ل معين لأنه متوازي أضلاع قطراه متعامدان.

مثال(٢): في الشكل المقابل، ومن البيانات الموضحة على الرسم، أثبت أن س ص ع ل معين.



الحل

البرهان:

س ص // ع ل (معطى) (١)

∵ ق(س ل̂ ص) = ق(ع ص̂ ل) (معطى) وهما في وضع تبادل

∴ س ل // ص ع (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أن:

س ص ع ل متوازي أضلاع لأن فيه كل ضلعان متقابلان متوازيان (٣)

في △ س و ل:

ق(س و̂ ل)=١٨٠° − (٧٠°+٢٠°)=٩٠° (مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة يساوي ١٨٠°)

∴ س ع ⊥ ص ل (القطران متعامدان) (٤)

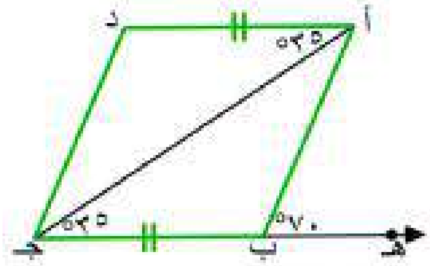
من (٣) ، (٤) ∴ الشكل س ص ع ل معين لأنه متوازي أضلاع فيه القطران متعامدان.

مثال(٣): في الشكل المقابل: أ ب جـ د شكل رباعي فيه:

أ د = ب جـ ، ق(جـ أ̂ د) = ق(ب جـ̂ أ) = ٣٥° ،

ق(أ ب̂ هـ) = ٧٠°

أثبت أن الشكل الرباعي أ ب جـ د معين.



الحل

البرهان:

∵ ق(جـ أ̂ د) = ق(ب جـ̂ أ) = ٣٥° (معطى) (وهما في وضع تبادل)

∴ أ د // ب جـ (١)

∵ أ د = ب جـ (معطى) (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أن:

الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع لأن فيه ضلعين متقابلين متطابقان ومتوازيان (٣)

ق(أ ب̂ جـ) = ١٨٠° − ٧٠° = ١١٠° تجاور على خط مستقيم

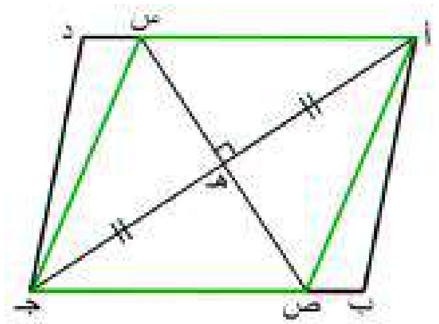
∴ ق(جـ أ̂ ب) = ١٨٠° − (١١٠° + ٣٥°) = ١٨٠° − ١٤٥° = ٣٥°

لأن مجموع زوايا المثلث = ١٨٠°

∴ ق(ب أ̂ جـ) = ق(ب جـ̂ أ) = ٣٥°

∴ ب أ = ب جـ (من خواص المثلث المتطابق الضلعين) (٤)

من (٣)،(٤) ∴ الشكل أ ب جـ د معين لأنه متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متطابقان.



مثال(٤): أ ب جـ د متوازي أضلاع ، $\overline{\text{س ص}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$ ،
هـ منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ ، س $\in$ $\overline{\text{أ د}}$ ، ص $\in$ $\overline{\text{ب جـ}}$
أثبت أن: الشكل أ ص جـ س معين.

الحـــــــل

البرهان:

$\triangle$ أ هـ س ، $\triangle$ جـ هـ ص فيهما:

أ هـ = جـ هـ (معطى)

ق (أ $\hat{\text{هـ}}$ س) = ق (جـ $\hat{\text{هـ}}$ ص) (بالتقابل بالرأس)

ق (س $\hat{\text{أ}}$ هـ) = ق (ص $\hat{\text{جـ}}$ هـ) (بالتبادل والتوازي)

$\therefore$ $\triangle$ أ هـ س $\cong$ $\triangle$ جـ هـ ص بحالة (ز.ض.ز)

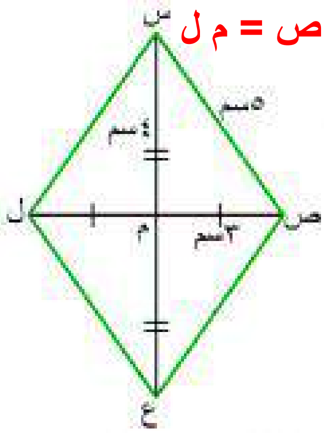
وينتج من التطابق أن: س هـ = هـ ص (١)

، أ هـ = هـ جـ (معطى) (٢)

من (١) ، (٢) $\therefore$ الشكل أ ص جـ س متوازي أضلاع لأن القطران ينصف كلاً نهما الآخر.

$\because$ $\overline{\text{س ص}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$ القطران متعامدان

$\therefore$ أ ص جـ س معين لأنه متوازي أضلاع قطراه متعامدان.



مثال(٥): س ص ع ل شكل رباعي فيه م نقطة تقاطع القطرين، م ص = م ل
، م س = م ع ، س ص = ٥سم ، ص م = ٣سم ، س م = ٤سم.
أثبت أن الشكل س ص ع ل معين.

الحـــــــل

البرهان:

$\because$ م ص = م ل (١) معطى

م س = م ع (٢) معطى

من (١) ، (٢) الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع (٣) القطران ينصف كلاً منهما الآخر

في $\triangle$ س ص م : $(\text{س ص})^2 = ٥^2 = ٢٥$

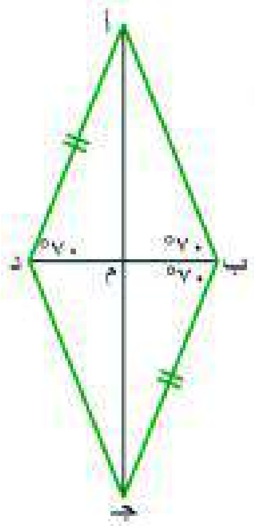
ص م^2 + م س^2 = $٣^2 + ٤^2 = ٢٥$

س ص^2 = ص م^2 + م س^2 $\therefore$ ق(ص $\hat{\text{م}}$ س) = ٩٠°

$\therefore$ $\overline{\text{س ع}} \perp \overline{\text{ص ل}}$ (٤)

من (٣) ، (٤) الشكل س ص ع ل معين (لأنه متوازي أضلاع القطران فيه متعامدان)

مثال(٦): في الشكل أمامك ، أثبت أن أ ب جـ د معين.



الحـــــــــل

البرهان:

∵ ق(أ د̂ ب) = ق(جـ ب̂ د) = ٧٠° وهما في وضع تبادل

∴ أ د // ب جـ (١)

∵ أ د = ب جـ معطى (٢)

∴ الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع (٣)

في △ أ ب د ∵ ق(أ ب̂ د) = ق(أ د̂ ب) = ٧٠°

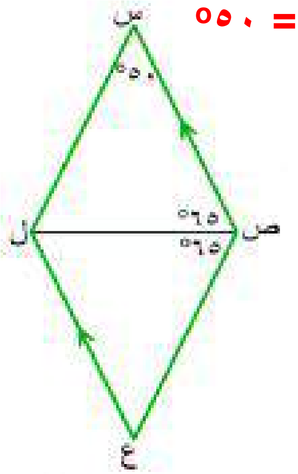
∴ أ ب = أ د (٤) مثلث متطابق الضلعين

من (٣) ، (٤) الشكل أ ب جـ د معين لأنه متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متطابقان

مثال(٧): س ص ع ل شكل رباعي فيه س ص // ع ل ، ق(س̂) = ٥٠°

ق(س ص̂ ل) = ق(ع ص̂ ل) = ٦٥°

أثبت أن الشكل س ص ع ل معين.



الحـــــــــل

البرهان:

في س ص ل ق(س ل̂ ص) = ١٨٠° – [٦٥° + ٥٠°]

= ١٨٠° – ١١٥° = ٦٥°

∵ ق(س ل̂ ص) = ق(ع ص̂ ل) = ٦٥° وهما في وضع تبادل

∴ س ل // ص ع (١)

∵ ص س // ل ع معطى (٢)

من (١) ، (٢) الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع (٣) كل ضلعان متقابلان متوازيان

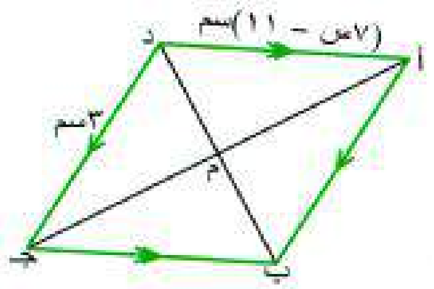
∵ ق(س ص̂ ل) = ق(س ل̂ ص) = ٦٥° ∴ س ص = س ل (٤)

من (٣)،(٤) الشكل س ص ع ل معين (لأنه متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متطابقان)

مثال(٨): اختر الإجابة الصحيحة:

في الشكل المقابل: قيمة س التي تجعل متوازي الأضلاع أ ب جـ د ، معيناً هي:

(أ) ١٤ (ب) ٢ (ج) ١١ (د) ٣



الحـــــــــل

٧س – ١١ = ٣

٧س = ٣ + ١١

٧س = ١٤

س = ٢

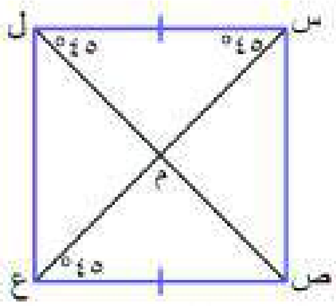
٥ ـ ٦ الكشف عن المربع

يكون متوازي الأضلاع مربعًا إذا توفر فيه أحد الشروط التالية:

- القطران متطابقان **و**متعامدان.
- القطران متطابقان **و**ضلعان متجاوران متطابقان.
- إحدى زواياه قائمة **و**ضلعان متجاوران متطابقان.
- إحدى زواياه قائمة **و**القطران متعامدان.

ملاحظة: لإثبات أن الشكل الرباعي مربع، يجب أن يكون:
متوازي أضلاع **و**يحقق أحد شرطي المستطيل **و**أحد شرطي المعين.

مثال(١): س ص ع ل شكل رباعي فيه: س ل = ص ع ،
ق(∠ل س ع) = ق(∠س ل ص) = ق(∠س ع ص) = ٤٥°
أثبت أن س ص ع ل مربع.



الحـــــــل

البرهان:

س ل = ص ع معطى (١)

∵ ق(∠ل س ع) = ق(∠س ع ص) وهما في وضع تبادل

∴ س ل // ص ع (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أن:

الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع لأن فيه ضلعين متقابلين متطابقان ومتوازيان. (٣)

في △ س م ل : ق(∠س م ل)=١٨٠°ـ (٤٥° + ٤٥°)

=١٨٠°ـ٩٠° = ٩٠° مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة=١٨٠°

∴ س ع ⊥ ص ل ∴ القطران متعامدان (٤)

∵ ق(∠ل س م) = ق(∠س ل م) معطى

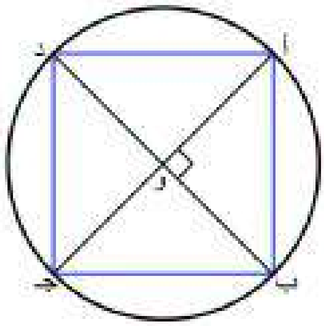
∴ س م = ل م من خواص المثلث المتطابق الضلعين

∴ { س م = م ع ، ل م = م ص } من خواص متوازي الأضلاع

∴ س ع = ص ل من خواص المساواة

∴ القطران متطابقان (٥)

من (٣) ، (٤) ، (٥) س ص ع ل مربع لأنه متوازي أضلاع تعامد وتطابق قطراه.



مثال(٢): في الشكل المقابل:

$\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{ب د}}$ ، قطران في دائرة مركزها و ، $\overline{\text{أ جـ}} \perp \overline{\text{ب د}}$

أثبت أن أ ب جـ د مربع.

الحـــــــل

البرهان:

∵ و مركز الدائرة

∴ أ و = و جـ ، ب و = و د   أنصاف أقطار في الدائرة و

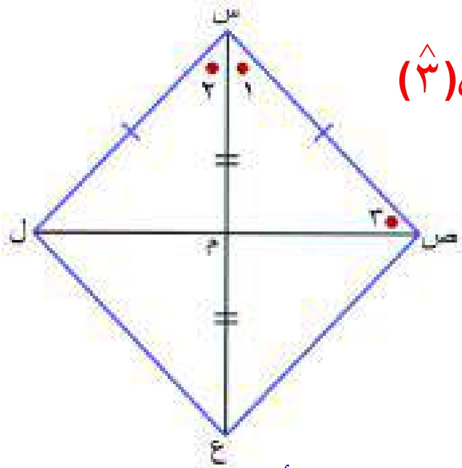
∴ أ ب جـ د متوازي أضلاع لأنه شكل رباعي فيه القطران ينصف كل منهما الآخر (١)

∵ $\overline{\text{أ جـ}} \cong \overline{\text{ب د}}$ أقطار الدائرة الواحدة متطابقة (٢)

∵ $\overline{\text{أ جـ}} \perp \overline{\text{ب د}}$ (معطى)

∴ القطران متعامدان (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) ∴ أ ب جـ د مربع لأنه متوازي أضلاع تطابق وتعامد قطراه.



مثال(٣): س ص ع ل شكل رباعي فيه:

س ص = س ل ، س م = ع م ، ق($\hat{١}$) = ق($\hat{٢}$) = ق($\hat{٣}$)

أثبت أن س ص ع ل مربع.

الحـــــــل

البرهان: المثلثان س م ص ، س م ل فيهما:

$\overline{\text{س م}}$ (ضلع مشترك)

$\overline{\text{س ص}} \cong \overline{\text{س ل}}$ (معطى)

ق($\hat{١}$) = ق($\hat{٢}$)   (معطى)

∴ س م ص ، س م ل متطابقان (ض . ز . ض) ومن التطابق ينتج أن:

م ص = م ل   (١)

∵ م س = م ع   (٢) معطى

من (١) ، (٢) ∴ الشكل س ص ع ل متوازي الأضلاع لأن القطرين ينصف كل منهما الآخر(٣)

∵ ق($\hat{١}$) = ق($\hat{٣}$)   (معطى)

∴ ص م = س م   (من خواص المثلث المتطابق الضلعين)

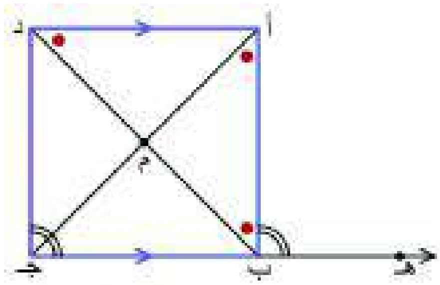
∴ ص ل = س ع   (من خواص المساواة)

∴ القطران متطابقان   (٤)

∵ س ص = س ل   (٥) (معطى)

∴ فيه ضلعان متجاوران متطابقان.

من (٣) ، (٤) ، (٥) ∴ الشكل س ص ع ل مربع لأنه متوازي أضلاع قطراه متطابقان وفيه ضلعان متجاوران متطابقان.



مثال(٤): أ ب جـ د شكل رباعي فيه:

$\overline{\text{أ د}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ق(ب $\hat{\text{أ}}$ جـ) = ق(أ $\widehat{\text{ب}}$ د) = ق(أ $\hat{\text{د}}$ ب)

ق(أ $\widehat{\text{ب}}$ هـ) = ق(د $\widehat{\text{جـ}}$ ب)

أثبت أن أ ب جـ د مربع.

الحـــــــــل

البرهان:

∵ $\overline{\text{أ د}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ معطى (١)

∵ ق(أ $\widehat{\text{ب}}$ هـ) = ق(د $\widehat{\text{جـ}}$ ب) (معطى) وهما في وضع تناظر

∴ $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{د جـ}}$ (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أن: أ ب جـ د متوازي أضلاع لأن فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان(٣)

في △ أ م ب :

∵ ق(ب $\hat{\text{أ}}$ م) = ق(أ $\widehat{\text{ب}}$ م) (معطى)

∴ أ م = م ب (من خواص المثلث المتطابق الضلعين)

∵ أ م = م جـ
ب م = م د
(من خواص متوازي الأضلاع القطران ينصف كل منهما الآخر)

∴ أ جـ = ب د (من خواص المساواة)

∴ القطران متطابقان (٤)

في △ أ ب د :

∵ ق(أ $\widehat{\text{ب}}$ د) = ق(أ $\hat{\text{د}}$ ب) (معطى)

∴ أ ب = أ د (من خواص المثلث المتطابق الضلعين)

∴ فيه ضلعان متجاوران متطابقان (٥)

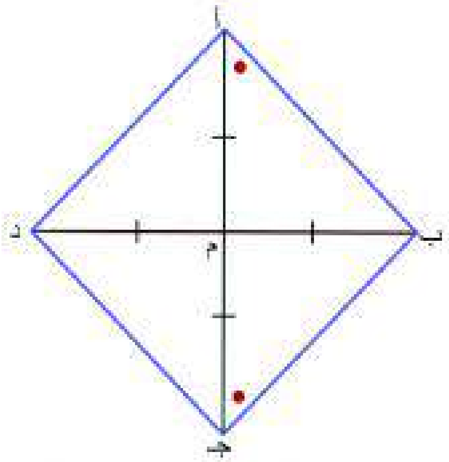
∴ من (٣) ، (٤) ، (٥) نستنتج لأن: أ ب جـ د مربع لأن قطريه متطابقان

وفيه ضلعان متجاوران متطابقان

مثال(٥): أ ب جـ د مستطيل فيه:

ق(ب أ جـ) = ق(ب جـ أ)

أثبت أن الشكل أ ب جـ د مربع.



الحـــــــل

البرهان:

∵ أ ب جـ د مستطيل   (١) معطى

في △ أ ب جـ :

∵ ق(ب أ جـ) = ق(ب جـ أ)

∴ أ ب = ب جـ   (٢)

∵ أ م = م جـ = ب م = م د

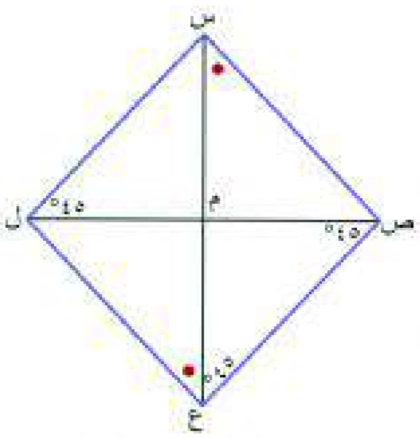
∴ القطران متطابقان   (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣)

الشكل أ ب جـ د مربع لأنه مستطيل فيه ضلعان متجاوران متطابقان

مثال(٦): باستخدام المعطيات في الرسم

أثبت أن الشكل س ص ع ل مربع.



الحـــــــل

البرهان:

∵ ق(س ل ص) = ق(ع ص ل) = ٤٥°

وهما في وضع تبادل

∴ س ل // ص ع   (١)

∴ ق(ص س ع) = ق(ل ع س) وهما في وضع تبادل

∴ س ص // ل ع   (٢)

من (١) ، (٢) الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع (٣) كل ضلعان متقابلان متوازيان

في △ ص م ع :

ق(ص م ع) = ١٨٠° – (٤٥° + ٤٥°)

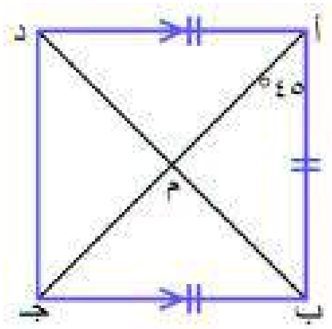
= ١٨٠° – ٩٠° = ٩٠°   ∴ ص ل ⊥ س ع

القطران متعامدان   (٤)

ص م = م ع   مثلث متطابق الضلعان

∴ س ع = ص ل   القطران متطابقان   (٥)

من (٣)،(٤)،(٥) الشكل س ص ع ل مربع لأنه متوازي أضلاع قطراه متعامدان ومتطابقان.



مثال(٧): مستعيناً بالمعطيات على الرسم

أثبت أن الشكل أ ب جـ د مربع.

الحـــــــــل

البرهان:

∵ $\overline{\text{أ د}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ (١) معطى

أ د = $\overline{\text{ب جـ}}$ (٢) معطى

من (١) ، (٢) الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع (٣) ضلعان متقابلان متوازيان ومتطابقان.

∵ أ ب = أ د ∴ الشكل أ ب جـ د معين

فيه ضلعان متجاوران متطابقان (٤)

△ أ ب م ، △ أ د م فيهما

أ ب = أ د معطى

ب م = م د (من خواص متوازي الأضلاع)

أ م مشترك

∴ △ أ ب م ≅ △ أ د م وينتج أن ق(ب أ̂ م) = ق(د أ̂ م)= ٤٥°

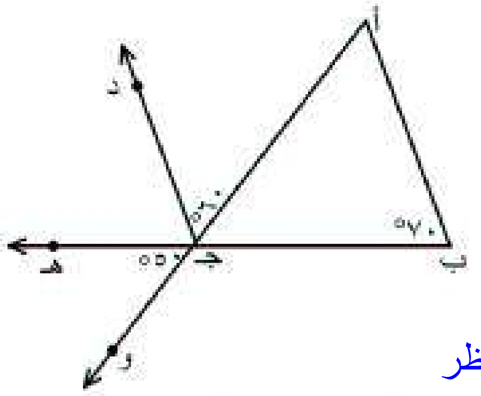
∴ ق(أ̂) = ٩٠° (٥)

من (٣) ، (٤) ، (٥) الشكل أ ب جـ د مربع

لأنه متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة وفيه ضلعان متجاوران متطابقان.

مراجعة الوحدة

مثال(١): في الشكل المقابل: أثبت أن أ ب // جـ د



الحــــــــل

البرهان:

ق(د جـ هـ) = ١٨٠° – [٦٠° + ٥٠°]

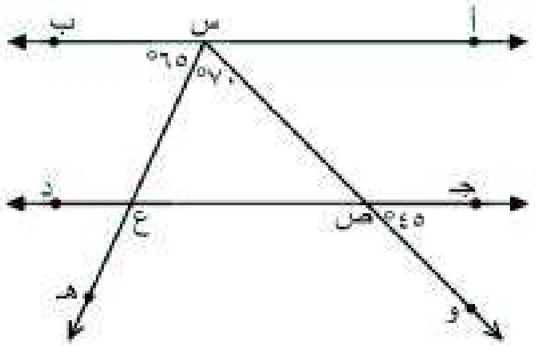
= ١٨٠° – ١١٠° = ٧٠°

بالتجاور على مستقيم واحد

∵ ق(ب) = ق(د جـ هـ) = ٧٠°   وهما في وضع تناظر

∴ أ ب // جـ د

مثال(٢): في الشكل المقابل وحسب البيانات المدونة ، أثبت أن أ ب // جـ د



الحــــــــل

البرهان:

ق(أ س ص) = ١٨٠° – [٧٠° + ٦٥°]

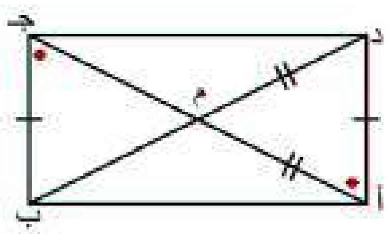
= ١٨٠° – ١٣٥° = ٤٥°

∵ ق(أ س ص) = ق(جـ ص و) = ٤٥°   وهما في وضع تناظر

∴ أ ب // جـ د

مثال(٣): في الشكل المقابل: أثبت أن الشكل أ ب جـ د مستطيل

الحــــــــل



البرهان:

∵ ق(د أ جـ) = ق(ب جـ أ)   وهما في وضع تبادل

∴ أ د // ب جـ   (١)

∴ أ د = ب جـ   (٢) معطى

من (١) ، (٢) الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع (٣) ضلعان متقابلان متوازيين ومتطابقين

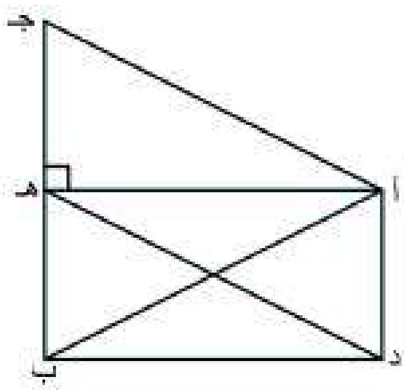
∵ د م = م ب ، أ م = م جـ   من خواص متوازي الأضلاع

∵ أ م = م د   ∴ أ جـ = ب د

∴ القطران متطابقان   (٤)

من (٣) ، (٤) الشكل أ ب جـ د مستطيل لأنه متوازي أضلاع فيه القطران متطابقان.

مثال(٤): في الشكل أ ب جـ مثلث متطابق الضلعين ،
فيه أ ب = أ جـ ، أ د هـ جـ متوازي أضلاع ، أ هـ ⊥ ب جـ
أثبت أن الشكل أ د ب هـ مستطيل.



الحـــــــــل

البرهان:

∵ أ د هـ جـ متوازي أضلاع

∴ أ د // جـ هـ

∵ ب ∈ ب جـ   ∴ أ د // ب هـ   (١)

في △ أ ب جـ متطابق الضلعين   أ هـ ⊥ ب جـ

∴ ب هـ = هـ جـ

∵ أ د = جـ هـ   من خواص متوازي الأضلاع

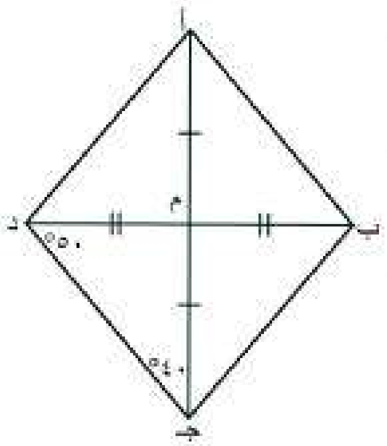
∴ أ د = ب هـ   (٢)

من (١) ، (٢) الشكل أ د ب هـ متوازي أضلاع (٣) ضلعان متقابلان متوازيين ومتطابقين

∵ ق(ب هـ أ) = ١٨٠° – ٩٠° = ٩٠° بالتجاور على مستقيم واحد   (٤)

من (٣) ، (٤) الشكل أ د ب هـ مستطيل لأنه متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة

مثال(٥): في الشكل المقابل:
أثبت أن الشكل أ ب جـ د معين.



الحـــــــــل

البرهان:

∵ أ م = م جـ   (١) معطى

ب م = م د   (٢) معطى

من (١) ، (٢) الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع (٣) لأن فيه القطران ينصف كلاً منهما الآخر

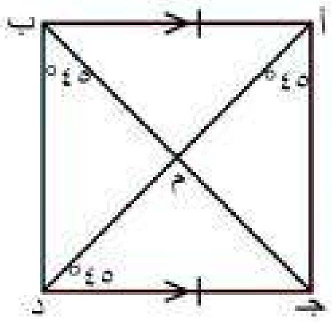
في △ م جـ د :   ق(جـ م د) = ١٨٠° – (٤٠° + ٥٠°) = ٩٠°

∴ ب د ⊥ أ جـ

القطران متعامدان   (٤)

من (٣) ، (٤) الشكل أ ب جـ د معين لأنه متوازي أضلاع فيه القطران متعامدان.

مثال(٦): في الشكل المقابل، أثبت أن الشكل أ ب جـ د مربع.



الحـــــــــل

البرهان:

∵ $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{جـ د}}$ (١) معطى

أ ب = جـ د (٢) معطى

من (١) ، (٢) الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع (٣) لأن فيه ضلعين متقابلين متوازيين ومتطابقين.

△ أ جـ د : ∵ ق(جـ أ د) = ق(جـ د أ) = ٤٥°

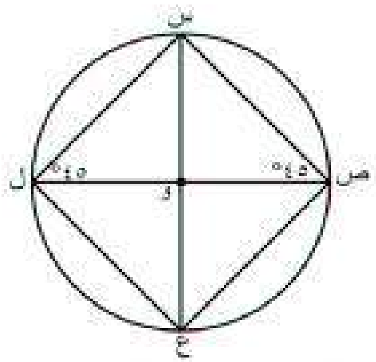
∴ أ جـ = جـ د متطابق الضلعين (٤)

ق(أ جـ د) = ١٨٠° – (٤٥° + ٤٥°) = ٩٠° (٥)

من (٣) ، (٤) ، (٥) الشكل أ ب جـ د مربع

لأنه متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متطابقان وإحدى زواياه قائمة.

مثال(٧): في الشكل المقابل: و مركز الدائرة
أثبت أن الشكل س ص ع ل مربع.



الحـــــــــل

البرهان:

∵ ص و = و ل أنصاف أقطار (١)

س و = و ع أنصاف أقطار (٢)

من (١) ، (٢) الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع (٣) لأن القطران ينصف كلاً منهما الآخر.

∵ ص ل = س ع أقطار في الدائرة

∴ القطران متطابقان (٤)

في △ س ص ل :

ق(ص س ل) = ١٨٠° – (٤٥° + ٤٥°) = ٩٠° (٥)

س ص = س ل ضلعان متجاوران

من (٣) ، (٤) ، (٥) الشكل س ص ع ل مربع

لأنه متوازي أضلاع فيه القطران متطابقان وإحدى زواياه قائمة وفيه ضلعان متجاوران متطابقان.

قوانين الأسس

لكلّ $أ$ عدد نسبى غير صفرى , م , ن عدادان صحيحان , ويكون :

(١) $أ^م \times أ^ن = أ^{م+ن}$

(٢) $\frac{أ^م}{أ^ن} = أ^{م-ن}$

بسّط كلًا ممّا يلي باستخدام قوانين الأسس .(المقام أينما وجد ≠ صفر)

(أ) $ع^٥ \times ع^٣ = ع^{٥+٣} = ع^٨$

(ب) $س \times س^٣ \times س^٦ = س^{١+٣+٦} = س^{١٠}$

(ج) $\left(\frac{١}{٧}\right)^٢ \times \left(\frac{١}{٧}\right)^٣ = \left(\frac{١}{٧}\right)^{٢+٣} = \left(\frac{١}{٧}\right)^٥$

(د) $\frac{٢^٤}{٢^٢} = ٢^{٤-٢} = ٢^٢$

(هـ) $\frac{س^٧}{س^٢} = س^{٧-٢} = س^٥$

(و) $\frac{س^٥}{س^{-٣}} = س^{٥-(-٣)} = س^{٥+٣} = س^٨$

بسّط كلًا ممّا يلي باستخدام قوانين الأسس .(المقام أينما وجد ≠ صفر)

(أ) $٥^٣ \times ٥^٤ = ٥^{٣+٤} = ٥^٧$

(ب) $س^٤ \times س^٩ = س^{٤+٩} = س^{١٣}$

(ج) $ع^٢ \times ع \times ع^٥ = ع^{٢+١+٥} = ع^٨$

(د) $\left(\frac{١}{٢}\right)^٢ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^٤ = \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢+٤} = \left(\frac{١}{٢}\right)^٦$

(هـ) $\frac{٣^٦}{٣^٢} = ٣^{٦-٢} = ٣^٤$

(و) $\frac{ص^٥}{ص^٤} = ص^{٥-٤} = ص$

(ز) $\frac{ك^٧}{ك^{-٢}} = ك^{٧-(-٢)} = ك^{٧+٢} = ك^٩$

لكلّ أ عدد نسبي غير صفرى , م عدد صحيح, ويكون :

١) $أ^{صفر} = ١$ ٢) $أ^{-م} = \frac{١}{أ^{م}}$

بسَّط كلًا ممّا يلي باستخدام قوانين الأسس .(المقام أينما وجد ≠ صفر)

أ) $٢^{-٣} = \frac{١}{٢^{٣}}$

ب) $\frac{ص^{٤}}{ص^{٤}} = ص^{٤-٤} = ص^{٠} = ١$

ج) $٧^{-٣} \times ٧ = ٧^{-٣+١} = ٧^{-٢} = \frac{١}{٧^{٢}}$

د) $\frac{٩^{-٣}}{٩^{-٢}} = ٩^{-٣-(-٢)} = ٩^{-٣+٢} = ٩^{-١} = \frac{١}{٩}$

هـ) $س^{٥} \times س^{-٤} = س^{٥+(-٤)} = س^{١} = س$

و) $\frac{س^{٤}}{س^{٧}} = س^{٤-٧} = س^{٤+(-٧)} = س^{-٣} = \frac{١}{س^{٣}}$

بسَّط كلًا ممّا يلي باستخدام قوانين الأسس .(المقام أينما وجد ≠ صفر)

أ) $٤^{-٢} = \frac{١}{٤^{٢}} = \frac{١}{١٦}$

ب) $٥^{-٣} \times ٥^{٣} = ٥^{-٣+٣} = ٥^{٠} = ١$

ج) $٣^{-٢} \times ٣ = ٣^{-٢+١} = ٣^{-١} = \frac{١}{٣}$

د) $\frac{هـ^{-٩}}{هـ^{-٢}} = هـ^{-٩-(-٢)} = هـ^{-٩+٢} = هـ^{-٧} = \frac{١}{هـ^{٧}}$

لكلّ أ , ب عددان نسبيان غير صفريَّين , م عدد صحيح, ويكون :

(أ × ب)^م = أ^م × ب^م

بسَّط كلًا ممّا يلي باستخدام قوانين الأسس .(المقام أينما وجد ≠ صفر)

أ) $(٣س)^{٤} = ٣^{٤}س^{٤}$

ب) $(٢س ص)^{٥} = ٢^{٥}س^{٥}ص^{٥}$

ج) $\frac{(٤×س)^{٦}}{س^{-٢}} = \frac{٤^{٦}×س^{٦}}{س^{-٢}} = ٤^{٦} × س^{٦-(-٢)} = ٤^{٦}س^{٨}$

د) $\left(\frac{س}{ص}\right)^{٧} = \frac{س^{٧}}{ص^{٧}}$

هـ) $\left(\frac{٢}{٥}\right)^{-٢} = \left(\frac{٥}{٢}\right)^{٢} = \frac{٥^{٢}}{٢^{٢}}$

و) $\frac{(٤×س^{٢})^{٣}}{(٢س)^{٣}} = \left(\frac{٤س^{٢}}{٢س}\right)^{٣}$

$= (٢س)^{٣} = ٢^{٣}س^{٣}$

بسَّط كلًا ممّا يلي باستخدام قوانين الأسس .(المقام أينما وجد ≠ صفر)

أ) $(٣ب)^{٤} = ٣^{٤}ب^{٤}$

ب) $(٣ع ص)^{٢} = ٣^{٢}ع^{٢}ص^{٢}$

ج) $\frac{(٢×ص)^{٥}}{ص^{-٣}} = \frac{٢^{٥} × ص^{٥}}{ص^{-٣}} = ٢^{٥} × ص^{٥-(-٣)}$

$= ٢^{٥} × ص^{٥-(-٣)} = ٢^{٥}ص^{٨}$

د) $\left(\frac{٥}{ك}\right)^{٣} = \frac{٥^{٣}}{ك^{٣}}$

هـ) $\frac{٣^{٤}}{٩^{٤}} = \frac{٣^{٤}}{٣^{٦}} = ٣^{٤-٦} = ٣^{-٢} = \frac{١}{٩}$

و) $\frac{(٢ص^{٤})^{٢}}{(٨ص)^{٢}} = \frac{٢^{٢}ص^{٨}}{٨^{٢}ص^{٢}} = \frac{٢^{٢}ص^{٨}}{٢^{٦}ص^{٤}}$

$= ٢^{٢-٦} ص^{٨-٢} = ٢^{-٤}ص^{٦} = \frac{ص^{٦}}{٢^{٤}}$

لكلّ أ , ب عددان نسبيان غير صفريَّين , م , ن عددان صحيحان, يكون :

$$(\text{أ}^{\text{م}})^{\text{ن}} = \text{أ}^{\text{م ن}}$$

بسَّط كلًا ممّا يلي باستخدام قوانين الأسس .(المقام أينما وجد ≠ صفر)

أ) $(\text{س}^{٣})^{٤} = \text{س}^{٣\times٤} = \text{س}^{١٢}$

ب) $(٥^{-٣})^{-١} = ٥^{-٣\times(-١)} = ٥^{٣}$

ج) $(٤^{٢})^{-٣} = ٤^{٢\times(-٣)} = ٤^{-٦} = \dfrac{١}{٤^{٦}}$

د) $(\text{س}^{٢}\,\text{ص}^{٣})^{٤} = \text{س}^{٢\times٤} \times \text{ص}^{٣\times٤}$

$= \text{س}^{٨}\,\text{ص}^{١٢}$

ه) $٧^{٦} \times (٧^{-٢})^{٣} = ٧^{٦} \times ٧^{-٦} = ٧^{٦+(-٦)} = ٧^{٠} = ١$

و) $\dfrac{(٥\text{س}^{-٢})^{-٣}}{٦^{-٢}\,\text{س}^{-٣}} = \dfrac{(٥)^{-٣}\times(\text{س}^{-٢})^{-٣}}{٦^{-٢}\,\text{س}^{-٣}} = \dfrac{٥^{-٣}\,\text{س}^{٦}}{٦^{-٢}\,\text{س}^{-٣}} = \dfrac{٦^{٢}\,\text{س}^{٦-(-٣)}}{٥^{٣}} = \dfrac{٦^{٢}\,\text{س}^{٩}}{٥^{٣}}$

بسّط كلًا ممّا يلي باستخدام قوانين الأسس .(المقام أينما وجد ≠ صفر)

أ) $(ل^{٢})^{٥} = ل^{٢×٥} = ل^{١٠}$

ب) $(٦^{-٢})^{-١} = ٦^{-٢×-١} = ٦^{٢}$

ج) $(٣^{٢})^{-٥} = ٣^{٢×-٥} = ٣^{-١٠} = \frac{١}{٣^{١٠}}$

د) $(ك^{٣} ص^{٢})^{٥} = ك^{٣×٥} ص^{٢×٥} = ك^{١٥} ص^{١٠}$

هـ) $٦^{١٢} × (٦^{-٣})^{٤} = ٦^{١٢} × ٦^{-١٢} = ٦^{١٢-١٢} = ٦^{٠} = ١$

و) $\frac{(٣س^{-٣})^{-٢}}{٦^{-٢} س^{-٢}} = \frac{٣^{-٢} س^{-٣×-٢}}{٦^{-٢} س^{-٢}} = \frac{٣^{-٢} س^{٦}}{(٣×٢)^{-٢} س^{-٢}} = \frac{٣^{-٢} س^{٦-(-٢)}}{٣^{-٢} × ٢^{-٢}} = ٢^{٢} س^{٦+٢} = ٢^{٢} س^{٨}$

(١) أوجد ناتج ما يلي :

أ) $\frac{٨^{٣}}{٢^{٣}} = \frac{٨^{٣}}{٨} = ٨^{٣-١} = ٨^{٢} = ٨ × ٨ = ٦٤$

ب) $٣^{-٣} = \frac{١}{٣^{٣}} = \frac{١}{٢٧}$

ج) $\left(\frac{٤}{٧}\right)^{٥} × \left(\frac{٤}{١٤}\right)^{-٥} = \frac{٤^{٥}}{٧^{٥}} × \frac{٤^{-٥}}{٧^{-٥} × ٢^{-٥}} = \frac{٤^{٥-٥}}{٧^{٥-٥} × ٢^{-٥}} = \frac{٤^{٠} × ٢^{٥}}{٧^{٠}} = ٢^{٥}$

د) $\left(\frac{١٢}{٢٣}\right)^{٠} = ١$

هـ) $٦ - (١,٢ - ٠,٢)^{٥} = ٦ - (١)^{٥} = ٦ - ١ = ٥$

(٢) بسِّط كلًّا ممّا يلي باستخدام قوانين الأسس .(المقام أينما وجد ≠ صفر)

أ) $ص \times ص^{٥} = ص^{١+٥} = ص^{٦}$

ب) $(٤^{٢})^{٣} \times ٤ = ٤^{٢\times٣} \times ٤^{١} = ٤^{٦} \times ٤^{١} = ٤^{٦+١} = ٤^{٧}$

ج) $(-٣)^{٣} \times (-٣)^{٥} = (-٣)^{٣+٥} = (-٣)^{٨}$

د) $س^{١١} \times س^{٩} = س^{١١+٩} = س^{٢٠}$

هـ) $ص^{٢} \times ص \times ص^{٣} = ص^{٢+١+٣} = ص^{٦}$

و) $(ك^{٢} هـ^{-٣}) \times (ك^{-٧} هـ^{-٤}) = ك^{٢}\times ك^{-٧}\times هـ^{-٣}\times هـ^{-٤} = ك^{٢-٧} هـ^{-٣-٤} = ك^{-٥} هـ^{-٧} = \frac{١}{ك^{٥}هـ^{٧}}$

ز) $(أ^{-٢} ب) \times (أ^{٣} ب^{٣}) \times (أ^{٢} ب) = أ^{-٢+٣+٢} \times ب^{١+٣+١} = أ^{٣} ب^{٥}$

ح) $(س^{٣} ص)^{-٢} \times (س^{٢})^{٥} = (س^{٣\times-٢} ص^{١\times-٢}) \times س^{٢\times٥}$

$= س^{-٦} ص^{-٢} \times س^{١٠} = س^{٤} ص^{-٢} = \frac{س^{٤}}{ص^{٢}}$

ط) $(ك^{٥})^{٢} \times ك و = ك^{٥\times٢} \times ك و = ك^{١٠} \times ك و = ك^{١٠+١} و = ك^{١١} و$

ي) $(-٣س)^{٢} = (-٣)^{٢} س^{٢} = ٩س^{٢}$

ك) $\frac{ب^{٢} جـ}{ب جـ^{٣}} = ب^{٢-١} جـ^{١-٣} = ب^{١} جـ^{-٢} = \frac{ب}{جـ^{٢}}$

ل) $\frac{-٨س^{٢}ص^{٢}}{٤س^{٣}ص} = \frac{-٨}{٤} \times س^{٢-٣} ص^{٢-١} = -٢س^{-١}ص^{١} = \frac{-٢ص}{س}$

يُنتج مصنع للحلوى ما يقارب ٦×١٠^{٤} قطعة من الحلوى يوميًّا يريد صاحب المصنع أن يوزّعها بالتساوى على $١٫٥ \times ١٠^{٣}$ صندوقًا صغيراً .
أوجد عدد قطع الحلوى فى كلّ صندوق .

$$\frac{٦\times١٠^{٤}}{١٫٥\times١٠^{٣}} = \frac{٦\times١٠}{١٥} \times ١٠^{-٣} = ٤\times ١٠^{١} = ٤٠$$

تبلغ سعة ذاكرة هاتف من الجيل الأول نحو $٢^{١٠}$ ميجابايت إذا تمّ تطوير سعة ذاكرة هاتف من الجيل الثالث بنحو $٧٫٦ \times ٢^{٣}$ مرّة من ذاكرة هاتف الجيل الأول .
فما هى سعة ذاكرة هاتف الجيل الثالث ؟

سعة ذاكرة هاتف الجيل الثالث = $٢^{١٠} \times ٧٫٦ \times ٢^{٣}$

$= ٧٫٦ \times ٢^{٣} \times ٢^{١٠}$

$= ٧٫٦ \times (٢^{٣} \times ٢^{١٠})$

$= ٧٫٦ \times ٢^{٣+١٠}$

$= ٧٫٦ \times ٢^{١٣}$ ميجابايت

كثيرات الحدود (الحدوديات)

حدِّد أيّ المقادير الجبرية التالية يمثّل حدودية وأيهما لا يمثّل ذلك مع ذكر السبب فى حالة لنفي :

١) $٣س^٤ - ٧س^٣ + س - ١$ حدودية

٢) $س^٢ - ١$ حدودية

٣) $س^{-٣}$ ليست حدودية (الأسّ عدد صحيح سالب)

٤) $٣س^٢ - س + ٥$ حدودية

٥) $\sqrt{س} - ٥س$ ليست حدودية (المتغيّر س تحت الجذر التربيعي)

٦) $٦^س + س^٢$ ليست حدودية (المتغيّر فى الأسّ)

٧) $س^٢ + \frac{٢}{س}$ ليست حدودية (الأسّ عدد صحيح سالب(المتغيّر فى المقام))

٨) $٥ س^٣ + ٢س^٢ - ٨س$ حدودية

٩) $٦س^٤ - \sqrt{س}$ ليست حدودية (المتغيّر س تحت الجذر)

١٠) $س^٣ - ٣س^٢ + س$ حدودية

١١) $\frac{٧}{س}$ ليست حدودية (المتغير فى المقام)

١٢) $٤ س^٢ - س ص + ص^٢ + ص - ٩$ حدودية

١٣) $٢^س + ٥$ ليست حدودية (المتغير فى الأسّ)

١٤) $٦ع^{-٢} - ٩ن$ ليست حدودية (الأسّ عدد صحيح سالب)

أنواع كثيرات الحدود :

كثيرة الحدود (الحدوديات)	تصنيف الحدودية (طبقًا لعدد الحدود)
-س , ٣س^{٤} , ٧ص , ٥	وحيدة الحدّ
م + ٢ , ٨س^{٢}-س , ل^{٢} -٣ل	ثنائية الحدّ (حدّانية)
٣ + س + ٧س^{٢} , س^{٥} -٦س^{٢} + ٢س^{٣}	ثلاثية الحدّ (حدودية ثلاثية)

أكمل الجدول التالى :

كثيرة الحدود	تصنيف الحدودية (طبقًا لعدد الحدود)	درجة الحدودية
(١) ٦	وحيدة الحد	الدرجة صفر
(٢) ٢س^{٢} + ٣	حِدانية	الدرجة الثانية
(٣) ص^{٣} + ٥ص -٧	حدودية ثلاثية	الدرجةالثالثة
(٤) م ن^{٣} + م^{٣} + ١	حدودية ثلاثية	الدرجة الرابعة
(٥) س ص ع -٢س ص^{٣} ع^{٤} + س-٩	حدودية رباعية	الدرجة الثامنة

أكتب كثيرات الحدود التالية بالصورة العامّة وحدِّد درجتها :

الحدودية	الصورة العامّة	درجة الحدودية	المعامل الرئيسى	الحدّ الثابت
(١) ٣س - ٤ + ٥س^{٢}	٥س^{٢} + ٣س -٤	الدرجة الثانية	٥	٤-
(٢) ع^{٣} -٠,٢ ع + ع^{٤}	ع^{٤} + ع^{٣} - ٠,٢ ع	الدرجة الرابعة	١	٠
(٣) س^{٤} + ٧س -١ - س^{٣}	س^{٤}-س^{٣}+٧س-١	الدرجة الرابعة	١	١-
(٤) ٣م^{٢} -٨م + م^{٥} + ١٠	م^{٥}+٣م^{٢}-٨م+١٠	الدرجة الخامسة	١	١٠
(٥) -٣ ,٠ + ٠,٢ ص + ٦ص^{٢}	٦ص^{٢}+٠,٢ ص - ٠,٣	الدرجة الثانية	٦	-٣, ٠
(٦) ٢س^{٢} -٥ س^{٣} + $\frac{١}{٤}$ س	-٥س^{٣}+٢س^{٢}+ $\frac{١}{٤}$ س	الدرجة الثالثة	-٥	٠

أوجد قيمة كثيرة الحدود التالية عندما س = ٥ , ص = -٣

$\frac{١}{٥}$ س^{٢} -٢ص^{٢} + ١٨

= $\frac{١}{٥}$ × (٥)^{٢} -٢ × (-٣)^{٢} + ١٨

= $\frac{١}{٥}$ × ٢٥ - ٢ × ٩ +١٨

= ٥ - ١٨ + ١٨ = ٥

أختر الإجابة الصحيحة :

أىّ المقادير الآتية يكون الناتج ١٤ عندما س = ٧ , ص = ٧ , ن = ٣ ؟

أ س × (ص + ن)

ب س × ص × ن

ج ن × ص - س

د (ص + ن) ÷ س

ظلّل (أ) إذا كانت العبارة الصحيحة , وظلّل (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة

$س^{٥} - \frac{٣}{س} + ٧$	كثيرة الحدود	أ	ب
$\sqrt{س} - ص^{س} + \frac{٢}{٥} س$	ليست كثيرة الحدود	أ	ب
$- \frac{٤}{١٠} س ص^{٣}$, $-٠,٤ ص^{٣} س$	حدّان جبريان متساويان	أ	ب
$-س^{٢} - \frac{٢}{٥} ص^{٣}س + س ص^{٢}$	حدودية من الدرجة الرابعة	أ	ب

ضع علامة √ أسفل الوصف المناسب للحدود المتشابهة فى الجدول التالى :

(١) ٣س , -٥س , ١٢س	√	
(٢) $٤ص^{٢}$, $ص^{٢}$	√	
(٣) $٧س^{٢}ص$, $٧س ص^{٢}$		√
(٤) ٢ل م , ٥ م ل	√	
(٥) $٠,٣ ا^{٤} ب^{٢}$, $\frac{١}{٢} ا^{٣} ب^{٣}$		√

ضَع الحدوديات التالية فى الصورة العامّة , ثم حدِّد درجة الحدودية :

أ) ٩س^{٢} -٧س^{٣} + ٢س -٣

-٧س^{٣} + ٩س^{٢} + ٢س -٣

الدرجة الثالثة

ب) ٤+ ٧ع^{٤} - ٧ع^{٥} + ع^{٣}

-٧ع^{٥} + ٧ع^{٤} + ع^{٣} + ٤

الدرجة الخامسة

ج) -٣ ل^{٣} + ٢ ل^{٦} + ٨

٢ل^{٦} -٣ل^{٣} + ٨

الدرجة السادسة

د) ٥ ك - ٣ ك^{٣} + $\frac{٣}{٢}$ك^{٢} + $\frac{١}{٢}$

-٣ك^{٣} + $\frac{٣}{٢}$ك^{٢} + ٥ك + $\frac{١}{٢}$

الدرجة الثالثة

إذا كانت أ + ٣ب = ٥ , جـ = ٤ فما قيمة أ + ٣ (ب + جـ) ؟

أ + ٣(ب + جـ) = أ + ٣ب + ٣جـ

(أ + ٣ب) + ٣جـ = ٥ + ٣ × ٤

= ٥ + ١٢ = ١٧

أوجد قيمة كلّ من كثيرات الحدود التالية :

أ $-٤س^{٣} + \frac{١}{٢}س + ٥ + ٢س^{٢}$, عندما س = ٢

$$-٤ \times ٢^{٣} + \frac{١}{٢} \times ٢ + ٥ + ٢ \times ٢^{٢} = -٤ \times ٨ + ١ + ٥ + ٨$$

$$= -٣٢ + ١ + ٥ + ٨ = -١٨$$

ب $-س\,ص^{٢} + \frac{٣}{٤}ص^{٢}س^{٢} -٩$, عندما س = ٤ , ص = ١

$$-٤ \times ١^{٢} + \frac{٣}{٤} \times ١^{٢} \times ٤^{٢} - ٩ = -٤ + \frac{٣}{\cancel{٤}_{١}} \times \cancel{١٦}^{٤} -٩$$

$$= -٤ + ١٢ - ٩ = -١$$

جمع كثيرات الحدود وطرحها

أوجد ناتج جمع كثيرات الحدود الآتية :

٣س^{٢} + ٤س - ٦ مع -٤س^{٢} + ٢س -١

الطريقة الرأسية :

٣ س^{٢} + ٤ س - ٦

\+ -٤ س^{٢} + ٢ س - ١

\- س^{٢} + ٦ س - ٧

أوجد ناتج ما يلي :

٧س^{٣} - ٢س^{٢} + ٥ - (س^{٣} - ٤س^{٢} - ٧)

٧ س^{٣} - ٢ س^{٢} + ٥

\+ - س^{٣} + ٤ س^{٢} + ٧

---

٦ س^{٣} + ٢ س^{٢} + ١٢

أجمع الحدوديات الآتية :

(١) ٢س^{٣} + ٥س - ٢ ، -٣س^{٣} + ١٠ - ٢س

٢ س^{٣} + ٥ س - ٢

+ -٣ س^{٣} - ٢ س + ١٠

-١ س^{٣} + ٣ س + ٨

(٢) س^{٣} + ٣س^{٤} - ٧س ، -س^{٢} - ٩س^{٤} ، ٥س + ٢س^{٢} - ٨س^{٣}

٣ س^{٤} + س^{٣} - ٧ س

-٩ س^{٤} - س^{٢}

+ - ٨ س^{٣} + ٢ س^{٢} + ٥ س

- ٦ س^{٤} - ٧ س^{٣} + س^{٢} - ٢ س

(٣) ٨س^{٥} - ٥س^{٣} + ٢س^{٢} + ١ ، -٢س^{٤} + ٣س^{٢} + س ، -س^{٣} + ٣

٨ س^{٥} - ٥ س^{٣} + ٢ س^{٢} + ١

+ - ٢ س^{٤} + ٣ س^{٢} + س

- س^{٣} + ٣

---

٨ س^{٥} -٢ س^{٤} -٦ س^{٣} + ٥ س^{٢} + س + ٤

إجمع كلًّا من كثيرات الحدود الآتية :

(١) ٥س^{٣} + ٣س^{٤} + ٤س^{٢} ، -س^{٤} + ٤س^{٣} + ٤

٣س^{٤} + ٥س^{٣} + ٤س^{٢}

\+ -١س^{٤} + ٤س^{٣} + ٤

٢س^{٤} + ٩س^{٣} + ٤س^{٢} + ٤

(٢) -س^{٣} + ٢س^{٢} - ٤ ، ٥س^{٢} -٨س^{٣} -٣ ، س^{٢} + ٩

-س^{٣} + ٢س^{٢} - ٤

-٨س^{٣} + ٥س^{٢} - ٣

\+ س^{٢} + ٩

-٩س^{٣} + ٨س^{٢} + ٢

(٣) ٣س -٢س^{٤} + $\frac{١}{٢}$س^{٥} ، ٢س^{٤} + ٧س^{٣} -س^{٢} ، ٤س^{٢} - $\frac{١}{٦}$

$\frac{١}{٢}$س^{٥} -٢س^{٤} + ٣س

٢س^{٤} + ٧س^{٣} - س^{٢}

\+ ٤س^{٢} - $\frac{١}{٦}$

$\frac{١}{٢}$س^{٥} + ٧س^{٣} + ٣س^{٢} + ٣س - $\frac{١}{٦}$

أوجد ناتج ما يلي :

(١) ٢س^{٢} -٢س + ٧ - (٢س - س^{٢} + ١)

٢ س^{٢} - ٢ س + ٧

\+ س^{٢} - ٢ س - ١

٣ س^{٣} - ٤ س + ٦

(٢) ٦س^{٣} - ٢س^{٢} + ٤ - (٨س^{٣} -٤س^{٢} - ٢٠)

٦ س^{٣} - ٢ س^{٢} + ٤

\+ -٨ س^{٣} + ٤ س^{٢} + ٢٠

\- ٢ س^{٣} + ٢ س^{٢} + ٢٤

أنواع كثيرات الحدود :

	كثيرة الحدود	المعكوس الجمعى
١	٣س	- ٣س
٢	٢س^{٥} - ٤	-(٢س^{٥} - ٤) = -٢ س^{٥} + ٤
٣	٤س^{٢} -٧س -٣	-(٤س^{٢} - ٧س -٣) = -٤س^{٢} +٧س+٣
٤	-٩ + ١١س^{٥} - ٨س^{٣}	-(-٩ + ١١س^{٥} - ٨س^{٣}) = ٩ - ١١س^{٥} + ٨س^{٣}

أطرح ١٠ص^{٣} + ٧ص^{٢} -١ من (٤ص^{٢} - ص^{٣} + ص)

- ص^{٣} + ٤ ص^{٢} + ص

\+ -١٠ ص^{٣} - ٧ ص^{٢} + ١

-١١ ص^{٣} - ٣ ص^{٢} + ص + ١

من (٤س -٨ + س^{٤} -٤س^{٢}) إطرح (٦س + ٧س^{٤} + ٤س^{٢} + ٥)

س^{٤} - ٤س^{٢} + ٤س - ٨ - (٧س^{٤} + ٤س^{٢} + ٦س + ٥)

س^{٤} - ٤ س^{٢} + ٤ س - ٨

+ -٧ س^{٤} - ٤ س^{٢} - ٦ س - ٥

-٦ س^{٤} - ٨ س^{٢} - ٢ س - ١٣

إطرح (٥س^{٢} + ٦س^{٤} - ١) من (٤س^{٤} -١٤س^{٢} + س)

٤ س^{٤} - ١٤ س^{٢} + س

+ -٦ س^{٤} - ٥ س^{٢} + ١

-٢ س^{٤} - ١٩ س^{٢} + س + ١

من (٢س -٩ + س^{٣} - ٤س^{٢}) إطرح (٥س + ٨س^{٣} + ٤س^{٢} + ١)

س^{٣} - ٤ س^{٢} + ٢ س - ٩ - (٨ س^{٣} + ٤ س^{٢} + ٥ س + ١)

س^{٣} - ٤ س^{٢} + ٢ س - ٩

+ -٨ س^{٣} - ٤ س^{٢} - ٥ س -١

-٧ س^{٣} - ٨ س^{٢} - ٣ س - ١٠

ضرب كثيرات الحدود

أوجد ناتج ما يلي :

١) ٦ س^{٢} × ٤ س^{٣} = ٢٤س^{٥}

٢) -٣ س^{٥} × ٢ س = -٦ س^{٦}

٣) ٤ س × (٢ س^{٢} + ٣ س^{٤}) = ٨ س^{٣} + ١٢ س^{٥}

٤) س^{٢} × (٥ س^{٣} - ٧ س - ١) = ٥ س^{٥} - ٧ س^{٣} - س^{٢}

٥) ٢ س^{٢} × (٨ س^{٣} + ٥ س^{٤})

= ١٦ س^{٥} + ١٠ س^{٦}

٦) ٣ س × (٢ س^{٢} - س + ٤)

= ٦ س^{٣} - ٣ س^{٢} + ١٢ س

٥) (س + ٦) (س + ٢)

= س^{٢} + ٢ س + ٦ س + ١٢

= س^{٢} + ٨ س + ١٢

أوجد ناتج ما يلي :

١) (س + ٦) (س + ٢)

= س^٢^ + ٢ س + ٦ س + ١٢

= س^٢^ + ٨ س + ١٢

٢) (س + ٣) (س - ٣)

(س + ٣) (س - ٣)

= س^٢^ - ٣ س + ٣ س - ٩

= س^٢^ - ٩

٣) (س - ٤) (٢س^٢^ - ٥ س + ٣)

الطريقة الأفقية :

= ٢ س^٣^ - ٥ س^٢^ + ٣ س - ٨ س^٢^ + ٢٠ س - ١٢

= ٢ س^٣^ - ١٣ س^٢^ + ٢٣ س - ١٢

أوجد مربّع (س + ٥)

(س + ٥)^{٢}

= س^{٢} + ١٠ س + ٢٥

أوجد ناتج كلّ ما يلي :

أ ٣ س × ٤ س^{٣}

= ٣ × ٤ × س × س^{٣}

= ١٢ س^{٤}

ب $\frac{١}{٣}$ ص×($\frac{٢}{٣}$ ص^{٢} - ٩ص + $\frac{٣}{٢}$)

$\frac{١}{٣}$ ص×$\frac{٢}{٣}$ ص^{٢} + $\frac{١}{٣}$ ص× -٩ص

+ $\frac{١}{٣}$ ص × $\frac{٣}{٢}$

= $\frac{٢}{٩}$ ص^{٣} - ٣ص^{٢} + $\frac{١}{٢}$ ص

ج (٣س^{٣} + س - ٤) × (-٢س)

-٢س × ٣س^{٣} + س × -٢س - ٤ × -٢س

-٦س^{٤} - ٢س^{٢} + ٨س

د (س - ص) (س + ص)

= س^{٢} + س ص - ص س - ص^{٢}

= س^{٢} - ص^{٢}

ه (س + ٢) (س - ٧)

= س^{٢} - ٧س + ٢س - ١٤

= س^{٢} - ٥س - ١٤

و (٣س + ٢ص)^{٢}

(٣س)^{٢} + ٢ × ٣س × ٢ص + (٢ص)^{٢}

٩س^{٢} + ١٢س ص + ٤ص^{٢}

ز (ع^{٢} - ١) (٢ع^{٣} - ٣ع^{٢} + ١)

ع^{٢} × ٢ع^{٣} - ع^{٢} × ٣ع^{٢} + ١ × ع^{٢} -١

× ٢ع^{٣} - ١ × -٣ع^{٢} -١ × ١

٢ع^{٥} - ٣ع^{٤} + ع^{٢} - ٢ع^{٣} +٣ع^{٢} -١

= ٢ع^{٥} - ٣ع^{٤} - ٢ع^{٣} + ٤ع^{٢} -١

ح (ص^{٢} - ٢ص -٥) (٢ص -١)

= ص^{٢} × ٢ص + ص^{٢} × -١ -٢ص × ٢ص

-٢ص × -١ -٥ × ٢ص -٥ × -١

= ٢ص^{٣} -ص^{٢} -٤ص^{٢} + ٢ص - ١٠ص +٥

= ٢ص^{٣} - ٥ص^{٢} - ٨ص + ٥

مربع الحدّانية

(س + ص)^{٢} = س^{٢} + ٢س ص + ص^{٢}

= مربّع الحد الأوّل ± ٢× الحدّ الأوّل × الحدّ الثاني + مربّع الحد الثاني

أوجد ناتج ما يلي :

١ (س - ٦)^{٢}

(س -٦)^{٢} = (س)^{٢} - ٢ × س × ٦ + (٦)^{٢}

= س^{٢} - ١٢س + ٣٦

٢ (م^{٢} + ٤ ل)^{٢}

(م^{٢} + ٤ ل)^{٢} = (م^{٢})^{٢} + ٢ × م^{٢} × ٤ ل + (٤ ل)^{٢}

= م^{٤} + ٨ م^{٢} ل + ١٦ ل^{٢}

٢ (ص - ٤)^{٢}

= ص^{٢} - ٢ × ٤ × ص + ٤^{٢}

= ص^{٢} - ٨ ص + ١٦

أوجد مربّع كلّ حدّانية في ما يلي :

أ س - ٣

(س - ٣)^{٢} = س^{٢} + ٢ س × -٣ + ٣^{٢}

= س^{٢} - ٦ س + ٩

ب ٢ ص + ٣س^{٢}

(٣س^{٢} + ٢ص)^{٢} = (٣س^{٢})^{٢} + ٢ × ٣س^{٢} × ٢ص + (٢ص)^{٢}

= ٩س^{٤} + ١٢س^{٢}ص + ٤ص^{٢}

ج (٣هـ - ٢م)^{٢}

= (٣هـ)^{٢} + ٢ × ٣هـ × -٢م + (٢م)^{٢}

= ٩هـ^{٢} -١٢هـ م + ٤م^{٢}

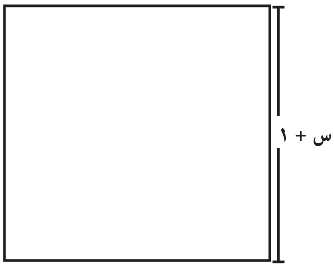
د (٩ - ك)^{٢}

= ٩^{٢} + ٢ × ٩ × -ك + ك^{٢}

= ٨١ - ١٨ك + ك^{٢}

فى البنود (١ - ٢ - ٣) إختر الإجابة الصحيحة :

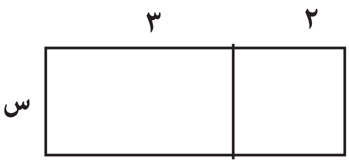
١ مساحة المربّع المقابل بالوحدات المربّعة هى :



أ) ٢س + ٢　　　ب) س^{٢} + ٢س + ١

ج) س^{٢} + ٢س + ١　　　د) س^{٢} + ١

٢ المقدار الجبرى الذى يمثّل مساحة الشكل أدناه بالوحدات المربّعة هو :



أ) ٢ + ٣س　　　ب) ٢س + ٣

ج) ٥ + س　　　د) ٥س

٣ المقدار ٥ (س - ص) - (٥س - ٥ص) يساوى :

أ) ١٠س - ١٠ص　　　ب) ٥س -٥ص -٥س + ٥ص

ج) ١٠س　　　د) -١٠ص

فى البنود (١ - ٢) إختر الإجابة الصحيحة :

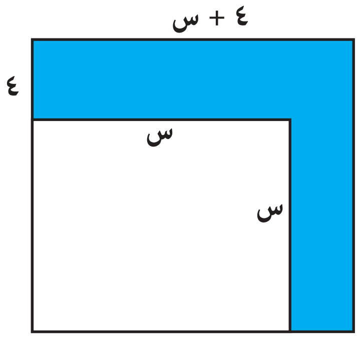
١ إذا كانت أ^{٢} = ١٦، ب^{٢} = ٩ ، فإذا أكبر قيمة للمقدار (أ - ب)^{٢} =

أ) ١ ب) ٢٥

ج) ٤٩ د) ٧

٢ فى الشكل المقابِل ، مربّع طول ضلعه س وحدة طول ، تمّت زيادة طول كلّ ضلع من أضلاعه بمقدار ٤ وحدات كما هو موضَّح فى الشكل .

أوجد مساحة المنطقة المظلَّلة بدلالة س .



(س + ٤)^{٢} - س^{٢}

= س^{٢} + ٨س + ١٦ - س^{٢} = ٨س + ١٦

قسمة كثيرة حدود على حدّ جبرى

أوجد ناتج كلّ ما يلي :

أ

$$\frac{\text{٤ س}^{\text{٥}}\text{ ص}^{\text{٣}}}{\text{٢ ص}^{\text{٣}}\text{ س}^{\text{٢}}} = \text{٢ س}^{\text{٣}}$$

ب

$$\frac{\text{١٢ س}^{\text{٢}}\text{ص}^{\text{٣}} + \text{٦ س ص}}{\text{٣س ص}}$$

$$= \frac{\text{١٢ س}^{\text{٢}}\text{ص}^{\text{٣}}}{\text{٣س ص}} + \frac{\text{٦ س ص}}{\text{٣س ص}}$$

$$= \text{٤ س ص}^{\text{٢}} + \text{٢}$$

ج

$$\frac{\text{٣ م}^{\text{٢}}\text{ ل}^{\text{٦}}}{\text{٢٧ م}^{\text{٨}}\text{ل}} = \frac{\text{١}}{\text{٩}}\ \text{م}^{\text{٢-٨}}\text{ ل}^{\text{٦-١}}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٩}}\ \text{م}^{\text{-٦}}\text{ل}^{\text{٥}} = \frac{\text{ل}^{\text{٥}}}{\text{٩م}^{\text{٦}}}$$

د

$$\frac{\text{٢٠ م ن}^{\text{٣}} - \text{٤ م ن}}{\text{٤ م ن}}$$

$$= \frac{\text{٢٠ م ن}^{\text{٣}}}{\text{٤ م ن}} - \frac{\text{٤ م ن}}{\text{٤ م ن}}$$

$$= \text{٥ ن}^{\text{٢}} - \text{١}$$

إقسم ($\text{٨س}^{\text{٣}} + \text{٢س}^{\text{٢}} - \text{١٢س}$) على ٢س

$$\frac{\text{٨س}^{\text{٣}} + \text{٢س}^{\text{٢}} - \text{١٢س}}{\text{٢س}} = \frac{\text{٨س}^{\text{٣}}}{\text{٢س}} + \frac{\text{٢س}^{\text{٢}}}{\text{٢س}} - \frac{\text{١٢س}}{\text{٢س}}$$

$$= \text{٤س}^{\text{٢}} + \text{س} - \text{٦}$$

إقسم ($٧س^{٥} - ٩س^{٣} + ٢س^{٢}$) على $س^{٢}$

$$= \frac{٧س^{٥}}{س^{٢}} - \frac{٩س^{٣}}{س^{٢}} + \frac{٢س^{٢}}{س^{٢}}$$

$$= ٧س^{٣} - ٩س + ٢$$

بسَّط كلًّا ممّا يلي : (حيث المقام لا يساوى صفرًا أينما وُجد).

أ $\frac{١}{س} = س^{٢}$

ب $\frac{١٠س^{٤}}{٥س^{٢}} = ٢س$

ج $\frac{-٣ص^{٣}}{٣ص^{٣}} = -١$

د $\frac{٢٨ص^{٥}}{٧ص^{٢}} = ٤ص^{٣}$

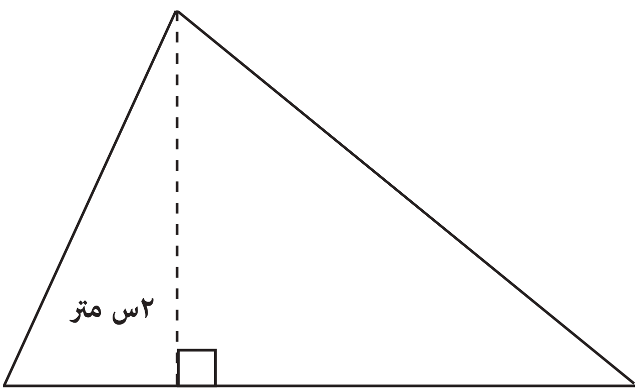
فى الشكل المقابِل مساحة المنطقة المثلّثة هى ($٤س^{٢} + ٢س$) مترًا مربّعًا , إذا كان ارتفاع هذا المثلّث ٢س مترًا , فأوجِد طول قاعدته .

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ القاعدة × الأرتفاع

$$س^{٢} + ٢س = \frac{١}{٢} \times ق \times ٢س$$

$$ق = \frac{٤س^{٢} + ٢س}{س} = \frac{٤س^{٢}}{س} + \frac{٢س}{٢س}$$

$$= ٤س + ١$$



إقسم $٨س^{٢}ص^{٤} + ١٦س^{٤}ص^{٥} - ٣٦ص^{٤}$ على $٢س^{٢}ص^{٣}$

$$\frac{٨س^{٢}ص^{٤} + ١٦س^{٤}ص^{٥} - ٣٦ص^{٤}}{٢س^{٢}ص^{٣}} = \frac{٨س^{٢}ص^{٤}}{٢س^{٢}ص^{٣}} + \frac{١٦س^{٤}ص^{٥}}{٢س^{٢}ص^{٣}} - \frac{٣٦ص^{٤}}{٢س^{٢}ص^{٣}}$$

$$= ٤ص + ٨س^{٢}ص^{٢} - \frac{١٨ص}{س^{٢}}$$

إقسم $٩هـ^{٣}و^{٥} - ٢٧\ هـ^{٢}و^{٤} + ٥٤\ هـ^{٤}و^{٢}$ على $٣\ هـ^{٣}و^{٥}$

$$\frac{٩هـ^{٣}و^{٥} - ٢٧هـ^{٢}و^{٤} + ٥٤هـ^{٤}و^{٢}}{٣\ هـ^{٣}و^{٥}} = \frac{٩هـ^{٣}و^{٥}}{٣هـ^{٣}و^{٥}} - \frac{٢٧هـ^{٢}و^{٤}}{٣هـ^{٣}و^{٥}} + \frac{٥٤\ هـ^{٤}و^{٢}}{٣هـ^{٣}و^{٥}}$$

$$= ٣ - \frac{٩}{هـ\ و} + \frac{١٨هـ}{و^{٣}}$$

أوجد ناتج ما يلي فى أبسط صورة :(حيث س $\neq$ صفرًا)

$$\frac{٥س^{٣}ص^{٤} + ٣س^{٦}ص^{٧} - ١٥س}{١٥س} = \frac{٥س^{٣}ص^{٤}}{١٥س} + \frac{٣س^{٦}ص^{٧}}{١٥س} - \frac{١٥س}{١٥س}$$

$$= \frac{١}{٣}س^{٢}ص^{٤} + \frac{١}{٥}س^{٥}ص^{٧} - ١$$

مساحة المنطقة المستطيلة فى الشكل المرسوم هي
(٩س^{٢} + ٣س) مترًا مربّعًا , إذا كان عرض هذا المستطيل هو ٣س مترًا,
فأوجد طول هذا المستطيل

الطول = المساحة ÷ العرض

$$= \frac{\text{٩س}^{٢} + \text{٣س}}{\text{٣س}} = \frac{\text{٩س}^{٢}}{\text{٣س}} + \frac{\text{٣س}}{\text{٣س}}$$

= ٣س + ١