تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج الكويتية

almanahj.com/kw

موقع المناهج الكويتية

الملف بنك الأسئلة والمراجعات الشاملة

المزيد من الملفات بحسب الصف الثاني عشر والمادة رياضيات في الفصل الأول

الرياضيات

الصف الثاني عشر علمي

اختبارات السنوات السابقة

الأسئلة المقالية

الفصل الدراسي الأول

العام الدراسي

٢٠٢٥ / ٢٠٢٦م

الوحدة الأولي: النهايات والاتصال

نهاية دالة كسرية

نفس فكرة كتاب الطالب :
حاول أن تحل رقم (7) (p 21)

أوجد :

$$\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{x^3-2x+7}}{x-5}$$

الحل

منهج كامل 2023/2024

$$= \frac{\sqrt[3]{\lim_{x\to -1}(x^3-2x+7)}}{\lim_{x\to -1}(x-5)}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{(-1)^3-2(-1)+7}}{-6} = \frac{2}{-6} = \frac{-1}{3}$$

المقام $\neq 0$

$\lim_{x\to -1}(x-5)$

$= -1-5 = -6 \neq 0$

* الفكرة : توزيع النهاية على كلاً من البسط والمقام
ولا تنسى شرط المقام $\neq 0$

نهايات إلغاء العامل الصفري

نهايات تحل بالتحليل (فرق بين مربعين)

أوجد :

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)^2-9}{x^2-2x}$$

فرق بين مربعين

نفس فكرة كتاب الطالب :
حاول أن تحل رقم 8 (p 23)

الحل

عند التعويض عن x بـ 2 نجد أن $\frac{0}{0}$ صيغة غير معينة

$$=\lim_{x\to 2}\frac{((x+1)-3)((x+1)+3)}{x^2-2x}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+4)}{x(x-2)} \quad ; x\neq 2$$

لها عامل مشترك

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+4}{x}$$

$$=\frac{\lim_{x\to 2}(x+4)}{\lim_{x\to 2}x}$$

المقام $\neq 0$

$\lim_{x\to 2} x = 2 \neq 0$

$$=\frac{2+4}{2}=3$$

2018/2019

نهايات تحل بالتحليل (فرق بين مكعبين)

كراسة التمارين رقم 13 (p 10)

أوجد : فرق بين مكعبين

$$\lim_{x\to 0}\frac{(3+x)^3-27}{x}$$

الحل

2014/2015

بالتعويض عن x بـ 0 نجد أولاً ومباشرةً نحصل على $\frac{0}{0}$ صيغة غير معينة

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{((3+x)-3)\left((3+x)^2+3(3+x)+9\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\left((3+x)^2+3(3+x)+9\right)}{x} \quad ; x\neq 0$$

$$= \lim_{x\to 0}\left((3+x)^2+3(3+x)+9\right)$$

قاعدة القوة

$$= \lim_{x\to 0}(3+x)^2 + \lim_{x\to 0}3(3+x) + \lim_{x\to 0}9$$

$$= \left(\lim_{x\to 0}(3+x)\right)^2 + 3\lim_{x\to 0}(3+x) + \lim_{x\to 0}9$$

$$= (3+0)^2 + 3(3+0)+9 = 27$$

نهاية دالة تحل بالمرافق

كتاب الطالب
مثال محلول رقم9(a)(p24)

أوجد :

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}$$

الحل

2021/2022

بالتعويض عن x بـ 2 نجد $\frac{0}{0}$ صيغة غير معينة.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}\times\frac{\sqrt{2x-3}+1}{\sqrt{2x-3}+1}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2x-3-1}{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)}$$

عامل مشترك

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)}{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)}\qquad ;\ x\neq 2$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2}{\sqrt{2x-3}+1}=\frac{\lim_{x\to 2}2}{\lim_{x\to 2}(\sqrt{2x-3}+1)}$$

$$=\frac{2}{2}=1$$

ماتت الجذر >0

$\lim_{x\to 2}(2x-3)=2(2)-3=1>0$

المقام $\neq 0$

$\lim_{x\to 2}(\sqrt{2x-3}+1)$

$=\lim_{x\to 2}\sqrt{2x-3}+\lim_{x\to 2}1$

$=\sqrt{\lim_{x\to 2}(2x-3)}+\lim_{x\to 2}1$

$=\sqrt{1}+1=2\neq 0$

نهاية دالة بالقسمة التركيبية

كتاب الطالب
حاول أن تحل رقم 10(b) (p 26)

أوجد :

$$\lim_{x\to 2}\frac{-x^5+x^3+x+22}{x-2}$$

الحل

2024/2025

بالتعويض عن x بـ 2 نحصل مباشرة على $\frac{0}{0}$ صيغة غير معينة .

	-1	0	1	0	1	22
2		-2	-4	-6	-12	-22
	-1	-2	-3	-6	-11	0
	x^4	x^3	x^2	x	عدد	

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(-x^4-2x^3-3x^2-6x-11)}{x-2} \quad ; \ x\neq 2$$

$$= \lim_{x\to 2}(-x^4-2x^3-3x^2-6x-11)$$

$$= -(2)^4-2(2)^3-3(2)^2-6(2)-11$$

$$= -67$$

كراسة التمارين رقم 17 (p 10)

أوجد :

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3 - 3x^2 - 7x + 6}{x + 2}$$

الحل

بالتعويض عن x بـ -2 مباشرة وعقاماً نحصل على $\frac{0}{0}$ صيغة غير معينة .

	1	-3	-7	6
-2		-2	10	-6
	1	-5	3	0
	x^2	x	عدد	

$$= \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)(x^2 - 5x + 3)}{x+2} \quad ; x \neq -2$$

$$= \lim_{x\to -2} (x^2 - 5x + 3)$$

$$= (-2)^2 - 5(-2) + 3 = 17$$

منهج كامل 2024/2025

نهاية دالة تتضمن ∞ − أو ∞

أوجد :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}}$$

كتاب الطالب
مثال محلول رقم 4 (p40)

العل

2019/2020

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$\because x\to\infty \Rightarrow |x| = x$

$; x\neq 0$

2023/2024

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$$=\frac{\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

2024/2025 دور ثان منهج كامل

$$=\frac{\lim_{x\to\infty}1-\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}}{\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$$=\frac{1-0}{1}=1$$

البسط ثابت والجذر > 0

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}-\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}$$

$$=1+0-0=1>0$$

المقام ≠ 0

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}$$

$$=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}$$

$$=\sqrt{\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}-\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}}$$

$$=\sqrt{1+0-0}=1\neq 0$$

نفس فكرة كتاب الطالب
مثال محلول رقم 4 (p40)

أوجد :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-5}{\sqrt{x^2-2x-3}}$$

الحل

2018/2019

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1-\frac{5}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1-\frac{5}{x}\right)}{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}}$$

$\because x\to\infty \quad \therefore |x| = x$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1-\frac{5}{x}\right)}{x\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{5}{x}\right)}{\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)}{\lim_{x\to\infty}\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty}1-\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x}}{\lim_{x\to\infty}\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}}$$

$$= \frac{1-0}{1} = 1$$

حالة المقدار > 0

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}1-\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}-\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}$$

$$= 1-0-0 = 1 > 0$$

الحالة $\neq 0$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to\infty}1-\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}-\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}}$$

$$= \sqrt{1-0-0} = 1 \neq 0$$

كراسة التمارين رقم 9 (p15)

أوجد :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+5}{\sqrt{x^2+2x+7}}$$

الحل

2024/2025

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1+\frac{5}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1+\frac{5}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}}$$

$\because x\to\infty \Rightarrow |x|=x$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}\left(1+\frac{5}{x}\right)}{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{5}{x}\right)}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}}$$

$$=\frac{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)}{\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}}$$

$$=\frac{\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x}}{\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}}$$

$$=\frac{1+0}{1}=1$$

ماتحت الجذر >0

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{7}{x^2}$$

$$=1+0+0=1>0$$

المقام $\neq 0$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}$$

$$=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}$$

$$=\sqrt{\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{7}{x^2}}$$

$$=\sqrt{1+0+0}=1\neq 0$$

كتاب الطالب
حاول أن تحل رقم 4(b) (p41)

أوجد :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2-x}}{x+1}$$

الحل

2017/2018

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(2-\frac{1}{x}\right)}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|\sqrt{2-\frac{1}{x}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$\because x\to\infty \Rightarrow |x|=x$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{2-\frac{1}{x}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2-\frac{1}{x}}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\frac{\lim_{x\to\infty}\sqrt{2-\frac{1}{x}}}{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)}}{\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$$

ما تحت الجذر >0

$$\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}2-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$$

$=2-0=2>0$

المقام $\neq 0$

$$\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$$

$=1+0=1\neq 0$

أوجد :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-3x}}{x-3}$$

نفس فكرة كتاب الطالب :
حاول أن تحل رقم 4(a) (p 41)

2015/2016

الحل

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2(1-\frac{3}{x})}}{x(1-\frac{3}{x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\frac{3}{x}}}{x(1-\frac{3}{x})}$$

$\because x\to\infty \Rightarrow |x|=x$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{1-\frac{3}{x}}}{x(1-\frac{3}{x})}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{3}{x}}}{(1-\frac{3}{x})}$$

$$=\frac{\lim_{x\to\infty}\sqrt{1-\frac{3}{x}}}{\lim_{x\to\infty}(1-\frac{3}{x})}$$

$$=\frac{\sqrt{\lim_{x\to\infty}(1-\frac{3}{x})}}{\lim_{x\to\infty}1-\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x}}$$

$$=\frac{\sqrt{1}}{1}=1$$

ما تحت الجذر >0

$$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{3}{x})$$

$$=\lim_{x\to\infty}1-\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x}$$

$=1-0=1>0$

المقام $\neq 0$

$$\lim_{x\to\infty}1-\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x}$$

$=1-0=1\neq 0$

أوجد :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{3x^2-5x+1}}{3x-5}$$

نفس فكرة كتاب الطالب :
حاول أن تحل رقم(4(b)(p 41

الحل

2016/2017

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}{x\left(3-\frac{5}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x\left(3-\frac{5}{x}\right)}$$

$x\to-\infty \Rightarrow |x|=-x$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x\left(3-\frac{5}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}}{\left(-3+\frac{5}{x}\right)}$$

$$=\frac{\lim_{x\to-\infty}\sqrt{3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}}{\lim_{x\to-\infty}\left(-3+\frac{5}{x}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{\lim_{x\to-\infty}\left(3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}{\lim_{x\to-\infty}(-3)+\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{x}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{-3}=\frac{-\sqrt{3}}{3}$$

ما تحت الجذر > 0

$$\lim_{x\to-\infty}\left(3-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}3-\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{x}+\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}$$

$$=3-0+0=3>0$$

المقام ≠ 0

$$\lim_{x\to-\infty}(-3)+\lim_{x\to-\infty}\frac{5}{x}$$

$$=-3+0=-3\neq0$$

نهاية دالة مثلثية تحل بالمرافق

كتاب الطالب
مثال محلول رقم(c)1(p43)

أوجد :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x}$$

الحل

2019/2020

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x} \times \frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1+\cos x)}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot (1+\cos x) \right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot \lim_{x\to 0} (1+\cos x)$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 \cdot \left(\lim_{x\to 0} 1 + \lim_{x\to 0} \cos x \right)$$

$$= \left(\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \right)^2 \left(\lim_{x\to 0} 1 + \lim_{x\to 0} \cos x \right)$$

$$= (1)^2 (1+1) = 2$$

كتاب الطالب
حاول أن تحل رقم(p43)1(b_3)

أوجد :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\,\sin x}{\cos x - 1}$$

الحل

2015/2016

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{\cos x - 1} \times \frac{\cos x + 1}{\cos x + 1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x \sin x\,(\cos x + 1)}{\cos^2 x - 1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x \sin x\,(\cos x + 1)}{-\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x\,(\cos x + 1)}{\sin x}$$

$$= -\lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\sin x} \cdot (\cos x + 1)\right)$$

$$= -\left[\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x\to 0} (\cos x + 1)\right]$$

$$= -\left[\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \left(\lim_{x\to 0} \cos x + \lim_{x\to 0} 1\right)\right]$$

$$= -[1\,(1+1)] = -2$$

أوجد :

كراسة التمارين رقم 9 (p17)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$$

الحل

2023/2024

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} \times \frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x\,(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x\,(1+\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0} (1+\cos x)$$

$$= \lim_{x\to 0} 1 + \lim_{x\to 0} \cos x$$

$$= 1+1 = 2$$

كراسة التمارين رقم 8 (p17)

أوجد :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$$

الحل

2014/2015

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\sin^2 x(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+\cos x)}$$

$$=\frac{\lim_{x\to 0} 1}{\lim_{x\to 0}(1+\cos x)}$$

$$=\frac{1}{2}$$

المقام $\neq 0$

$$\lim_{x\to 0}(1+\cos x)$$

$$=\lim_{x\to 0}1+\lim_{x\to 0}\cos x$$

$$=1+1=2\neq 0$$

نهاية دالة مثلثية تحل بتقسيم مقدار على حد

كتاب الطالب
حاول أن تحل رقم 3(b) (p45)

أوجد :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x + 3x\cos 4x}{5x}$$

الحل

2016/2017

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan 2x}{5x} + \frac{3x\cos 4x}{5x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{5x} + \lim_{x\to 0}\frac{3\cos 4x}{5}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{5x} + \frac{3}{5}\lim \cos 4x$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{3}{5}\times 1 = 1$$

بحث الاتصال عند نقطة

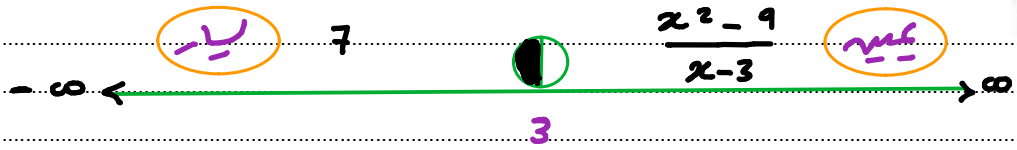
لتكن f :

كتاب الطالب
مثال محلول رقم 2 (p 50)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3} & : x>3\\ 7 & : x\le 3\end{cases}$$

ابحث اتصال الدالة f عند $x=3$

الحل



2021/2022

الصورة $f(3)=7$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} 7=7$

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2-9}{x-3}$

$=\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3}$; $x\neq 3$

$=\lim\limits_{x\to 3^+}(x+3)=3+3=6$

$\therefore \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

$\therefore \lim\limits_{x\to 3} f(x)$ غير موجودة

$\therefore f$ ليست متصلة عند $x=3$

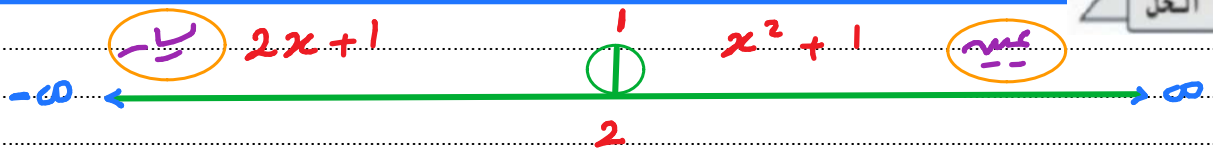
كتاب الطالب
حاول أن تحل رقم 2 (p 50)

لتكن f :

$$f(x)=\begin{cases}2x+1 & : x<2\\ 1 & : x=2\\ x^2+1 & : x>2\end{cases}$$

ابحث اتصال الدالة f عند $x=2$

الحل



الصورة $f(2)=1$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(2x+1)$

$= 2(2)+1 = 5$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(x^2+1)$

$= 2^2+1 = 5$

$\therefore \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = 5$

النهاية: $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$

∴ الصورة ≠ النهاية (والتعريف)

$\therefore f(2) \neq \lim_{x\to 2} f(x)$

∴ f ليست متصلة عند $x=2$

2024/2025 دور ثان منهج كامل

كراسة التمارين رقم 8 (p 19)

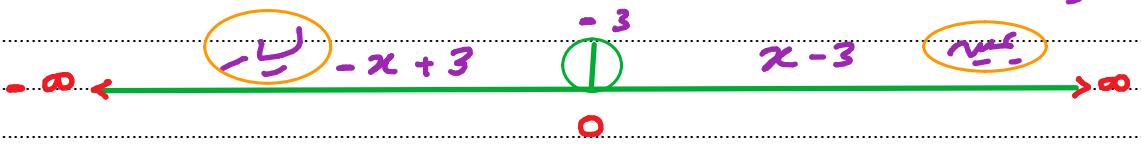
ابحث اتصال الدالة f عند $x = 0$ حيث:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x}{|x|} & : x \neq 0 \\ -3 & : x = 0 \end{cases}$$

الحل

2023/2024

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x}{x} = \dfrac{x(x-3)}{x} = x-3 & ; x>0 \\ \dfrac{x^2-3x}{-x} = \dfrac{x(x-3)}{-x} = -x+3 & ; x<0 \\ -3 & ; x=0 \end{cases}$$



2019/2020

من الصورة $f(0) = -3$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-x+3) = -(0)+3 = 3$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x-3) = 0-3 = -3$$

$$\therefore \lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} f(x) \text{ غير موجودة}$$

$\therefore f$ ليست متصلة عند $x = 0$

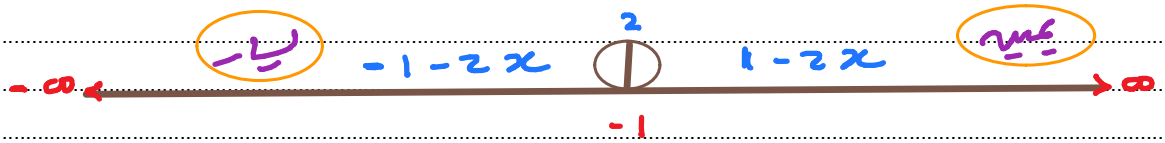
كتاب الطالب
حاول أن تحل رقم 3 (p51)

ابحث اتصال الدالة f عند $x=-1$ حيث:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x+1|}{x+1}-2x & : x\neq -1\\ 2 & : x=-1\end{cases}$$

العل

$\therefore f(x)=$
- $\frac{x+1}{x+1}-2x=1-2x$; $x>-1$
- $\frac{-(x+1)}{x+1}-2x=-1-2x$; $x<-1$
- 2 ; $x=-1$



2023/2024 منهج كامل

الصورة $f(-1)=2$

$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}(-1-2x)=-1-2(-1)=1$

$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}(1-2x)=1-2(-1)=3$

$\therefore \lim_{x\to -1^+} f(x)\neq \lim_{x\to -1^-} f(x)$

$\therefore \lim_{x\to -1} f(x)$ غير موجودة

$\therefore f$ ليست متصلة عند $x=-1$

بحث اتصال تركيب دالتين عند نقطة

كتاب الطالب
مثال محلول رقم 6 (p59)

لتكن $f(x) = x^2 + 5$, $g(x) = \sqrt{x}$

ابحث اتصال الدالة gof عند $x = -2$

الحل

2022/2023

① بحث اتصال الدالة f عند $x = -2$

∵ $f(x) = x^2 + 5$

∵ f كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$

∴ f متصلة عند $x = -2$

② الصورة :

$f(-2) = (-2)^2 + 5 = 9$

② بحث اتصال الدالة g عند $x = 9$

∵ $g(x) = \sqrt{x}$

∵ g متصلة لكل $x \in \mathbb{R}^+$

∴ g متصلة عند $x = 9$

من (1) و (2) و (3)

∴ $g \circ f$ متصلة عند $x = -2$

نفس فكرة كتاب الطالب
مثال محلول رقم 6 (p 59)

لتكن $f(x) = x^2 - 3x$ ، $g(x) = \sqrt{x}$

ابحث اتصال الدالة gof ① ② عند $x = -1$

الحل

① بحث اتصال الدالة f عند $x = -1$

∵ $f(x) = x^2 - 3x$

∵ f كثيرة حدود متصلة على R

∴ f متصلة عند $x = -1$

② الصورة :

$f(-1) = (-1)^2 - 3(-1) = 4$

③ بحث اتصال الدالة الثانية g عند $x = 4$

∵ $g(x) = \sqrt{x}$

∵ g متصلة لكل $x \in R^+$

∴ g متصلة عند $x = 4$

من (1) ، (2) ، (3)

∴ gof متصلة عند $x = -1$

2015/2016

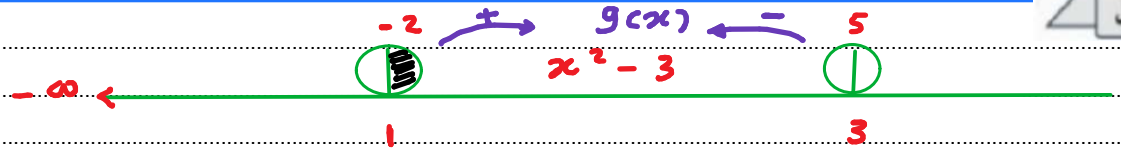
بحث اتصال دالة على فترة مغلقة

نفس فكرة كتاب الطالب
مثال محلول رقم 1 (p62)

ادرس اتصال الدالة f على $[1,3]$ حيث:

$$f(x)=\begin{cases}-2 & : x=1\\ x^2-3 & : 1<x<3\\ 5 & : x=3\end{cases}$$

الحل



١ بحث اتصال f على الفترة المفتوحة $(1,3)$ (بنظريات الاتصال)

ليكن: $g(x)=x^2-3$

∵ g كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$

∵ $(1,3)\subset\mathbb{R}$

∵ $f(x)=g(x)\quad \forall x\in(1,3)$

∴ f متصلة على $(1,3)$

2016/2017

٢ بحث اتصال f عند $x=3$ جهة اليمين

الصورة $f(3)=5$

$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}(x^2-3)$

$=3^2-3=6$

∵ $f(3)\neq\lim_{x\to 3^-} f(x)$

∴ f ليست متصلة عند $x=3$ جهة اليسار

٣ بحث اتصال f عند $x=1$ جهة اليمين

الصورة $f(1)=-2$

∵ $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x^2-3)$

$=1^2-3=-2$

∵ $f(1)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=-2$

∴ f متصلة عند $x=1$ جهة اليمين

(تغلق الفترة من اليمين)

تعريف

من (١) و (٢) و (٣)

∴ f متصلة على $[1,3)$

بحث اتصال دالة على مجالها

كتاب الطالب
مثال محلول رقم 3 (p63)

لتكن الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & : x\le -1 \\ \dfrac{4}{x+3} & : x>-1 \end{cases}$$

ادرس اتصال الدالة f على مجالها.

الحل

$x+3$ $h(x)$ | $\frac{4}{x+3}$ $g(x)$ | $-\infty$ ، -1 ، ∞

مجال $D_f = (-\infty,-1] \cup (-1,\infty) = \mathbb{R}$ (نظريتك)

2022/2023

① بحث اتصال f على الفترة $(-1,\infty)$ | ② بحث اتصال f على $(-\infty,-1]$

لفرض: $g(x)=\frac{4}{x+3}$ | لفرض: $h(x)=x+3$

∵ g : دالة نسبية متصلة على $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ | ∵ h : كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$

∵ $(-1,\infty) \subseteq \mathbb{R}\setminus\{-3\}$ | ∵ $(-\infty,-1] \subseteq \mathbb{R}$

∴ $f(x)=g(x)\ \forall\ x\in(-1,\infty)$ | ∴ $f(x)=g(x)\ \forall\ x\in(-\infty,-1]$

∴ f متصلة على $(-1,\infty)$ | ∴ f متصلة على $(-\infty,-1]$

2024/2025

③ بحث اتصال f عند $x=-1$ جهة اليمين

تعريف الصورة: $f(-1) = -1+3 = 2$

النهاية: $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{4}{x+3}$

$= \frac{\lim_{x\to -1^+} 4}{\lim_{x\to -1^+}(x+3)} = \frac{4}{2} = 2$

المقام $\neq 0$

$\lim_{x\to -1^+}(x+3) = -1+3 = 2 \neq 0$

∴ $f(-1) = \lim_{x\to -1^+} f(x)$

∴ f متصلة عند $x=-1$ جهة اليمين (تعليم الفترة)

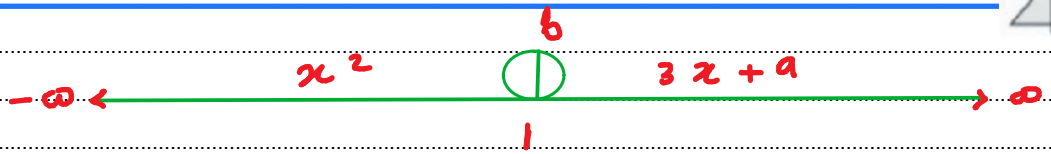
∴ f متصلة على $\mathbb{R}$ من (1) و (2) و (3)

أوجد قيمة a, b بحيث تكون الدالة f متصلة على مجالها حيث:

نفس فكرة كتاب الطالب
مثال محلول رقم 4 (p64)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & : x < 1 \\ 3x + a & : x > 1 \\ b & : x = 1 \end{cases}$$

الحل



∵ f متصلة على مجالها

$$\therefore f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$$

$$b = \lim_{x \to 1^+} (3x + a) = \lim_{x \to 1^-} x^2$$

$$b = 3(1) + a = 1^2$$

$$b = 3 + a = 1$$

$$\therefore b = 1$$

$$\therefore 3 + a = 1$$

$$a = 1 - 3 = -2$$

2014/2015

بحث اتصال دالة الجذر التربيعي على فترة مغلقة

كتاب الطالب
حاول أن تحل رقم 5 (p66)

لتكن f : $f(x)=\sqrt{x^2-7x+10}$

أوجد مجال الدالة f ثم ادرس اتصال الدالة f على $[-1,1]$

الحل

المجال D_f

نفرض: $g(x)=x^2-7x+10$

$\therefore f(x)=\sqrt{g(x)}$

$D_f=\{x: g(x)\geq 0\}$

$\therefore x^2-7x+10\geq 0$

(1) المعادلة المناظرة:

$x^2-7x+10=0$

$x=2$ or $x=5$

(2) بحث الإشارات:

(3) المجال:

$D_f=(-\infty,2]\cup[5,\infty)$

$=R/(2,5)$

الاتصال

$\because [-1,1]\subseteq D_f$

(1) g متصلة على $[-1,1]$

(2) $\because g(x)\geq 0\ \forall x\in[-1,1]$

من (1) و (2)

$\therefore f(x)=\sqrt{g(x)}$

متصلة على $[-1,1]$

2018/2019

لتكن $f: f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

ادرس اتصال الدالة f على $[-2, 2]$

نفس فكرة كتاب الطالب :
حاول أن تحل رقم 6 (p 66)

الحل

الاتصال	المجال D_f
$\because [-2, 2] \subseteq D_f$	نفرض : $g(x) = 4 - x^2$
(1) $\because g$ متصلة على $[-3, 3]$	$f(x) = \sqrt{g(x)}$
(2) $\because g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [-2, 2]$	$D_f = \{x : g(x) \geq 0\}$
من (1) و (2)	$\because 4 - x^2 \geq 0$
$\because f(x) = \sqrt{g(x)}$	(1) المعادلة المناظرة:
$\therefore f$ متصلة على $[-2, 2]$	$-x^2 = 0$
	$x = 2$ or $x = -2$
	(2) بحث الإشارات:
	$-\infty$ $\quad -$ $\quad -2$ $\quad +$ $\quad 2$ $\quad -$ $\quad \infty$
	(3) المجال:
	$D_f = [-2, 2]$

2017/2018

كتاب الطالب
مثال محلول رقم 6 (p66)

لتكن f : $f(x)=\sqrt{9-x^2}$. ادرس اتصال الدالة f على $[-3,3]$

الحل

الاتصال

$\because [-3,3] \subseteq D_f$

(1) g متصلة على $[-3,3]$

(2) $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [-3,3]$

من (1) و (2)

$\therefore f(x)=\sqrt{g(x)}$

متصلة على $[-3,3]$

المجال D_f

لغرض : $g(x)=9-x^2$

$\therefore f(x)=\sqrt{g(x)}$

$D_f=\{x : g(x)\geq 0\}$

$\therefore 9-x^2 \geq 0$

(1) المعادلة المناظرة:

$9-x^2=0$

$x=-3$ or $x=3$

(2) جدول الإشارات:

(3) المجال :

$D_f=[-3,3]$

منهج كامل 2024/2025

الوحدة الثانية: الاشتقاق

إيجاد مشتقة دالة

لتكن الدالة g :

نفس فكرة
كراسة التمارين رقم 7 (p35)

$$g(x)=\begin{cases}(x-2)^2 & : x\le 1\\ 3x-2 & : x>1\end{cases}$$

أوجد إن أمكن $g'(1)$

الحل

2014/2015

الصورة $g(1)=(1-2)^2=1$

$$\bar{g}(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$$ إن وجدت

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-2)^2-1}{x-1}$$ (فرق بين مربعين)

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{((x-2)-1)((x-2)+1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-3)(x-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}(x-3)$$

$$=1-3=-2$$

$$\bar{g}(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$$ إن وجدت

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{3x-2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{3x-3}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{3(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}3=3$$

$\therefore \bar{g}(1)\neq \bar{g}(1)$

$\therefore \bar{g}(1)$ غير موجودة .

لتكن الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x & : x\le -1 \\ x^2-x-2 & : x>-1 \end{cases}$$

أوجد إن أمكن $f'(-1)$

كتاب الطالب
حاول أن تحل رقم 9 (p89)

الحل

2023/2024

x^2+x | x^2-x-2

$-\infty$ ← −1 → ∞

الصورة $f(-1)=(-1)^2+(-1)=0$

$$f'_-(-1)=\lim_{x\to -1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$

ان وجدت

$$=\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2+x-0}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1^-}\frac{x(x+1)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1^-}x=-1$$

$$f'_+(-1)=\lim_{x\to -1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$$

ان وجدت

$$=\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2-x-2-0}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1^+}\frac{(x-2)(x+1)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to -1^+}(x-2)=-1-2=-3$$

$\therefore f'_+(-1)\neq f'_-(-1)$

$\therefore f'(-1)$ غير موجودة

كتاب الطالب
حاول أن تحل رقم 8(a) (p 99)

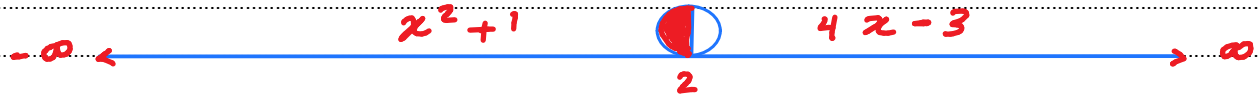
لتكن الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & : x \le 2 \\ 4x-3 & : x > 2 \end{cases}$$

دالة متصلة على مجالها أوجد إن أمكن $f'(x)$

الحل

2019/2020



$D_f = (-\infty, 2] \cup (2, \infty) = \mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases} 2x & ; x<2 \\ \text{تعيين} & ; x=2 \\ 4 & ; x>2 \end{cases}$$

$f(2) = 2^2+1 = 5$

$$f'_-(2) = \lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+1-5}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-4}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^-} (x+2) = 2+2 = 4$$

$$f'_+(2) = \lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{4x-3-5}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{4x-8}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{4(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} 4 = 4$$

$\therefore f'_+(2) = f'_-(2) = 4$

$\therefore f'(2) = 4$

$$\therefore f'(x)=\begin{cases} 2 & ; x<2 \\ 4 & ; x=2 \\ 4 & ; x>2 \end{cases} \Rightarrow \therefore f(x)=\begin{cases} 2x & ; x<2 \\ 4 & ; x\ge 2 \end{cases}$$

كتاب الطالب
حاول أن تحل رقم 8(b) (p 99)

لتكن الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & : x<1 \\ 2\sqrt{x} & : x\geq 1 \end{cases}$$

دالة متصلة على مجالها | أوجد إن أمكن $f'(x)$

2015/2016

الحل

x^2+1 | $2\sqrt{x}$; $-\infty$; ∞ ; 1

$D_f=(-\infty,1)\cup[1,\infty)=R$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & ; x<1 \\ \text{تثبت} & ; x=1 \\ 2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}} & ; x>1 \end{cases}$$

$f(1)=2\sqrt{1}=2$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+1-2}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}(x+1)$$

$=1+1=2$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{2\sqrt{x}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2(\sqrt{x}-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{2(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{2}{\sqrt{x}+1}$$

ماعت البسط >0

$\lim_{x\to 1^+} x=1>0$

المقام $\neq 0$

$\lim_{x\to 1^+}(\sqrt{x}+1)$

$=\lim_{x\to 1^+}\sqrt{x}+\lim_{x\to 1^+}1$

$=\sqrt{\lim_{x\to 1^+}x}+\lim_{x\to 1^+}1$

$=\sqrt{1}+1=2\neq 0$

$$=\frac{\lim_{x\to 1^+}2}{\lim_{x\to 1^+}(\sqrt{x}+1)}$$

$=\frac{2}{2}=1$

$\therefore f'_+(1)\neq f'_-(1)$

$\therefore f'(1)$ غير موجودة

$$\therefore f'(x)=\begin{cases} 2x & ; x<1 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & ; x>1 \end{cases}$$

معادلة المماس عند نقطة من دالة قسمة

أوجد معادلة المماس لمنحني الدالة f : $f(x)=\frac{5x-7}{x^2-2}$

عند النقطة $A(1,2)$ (x_1, y_1)

نفس فكرة كتاب الطالب
مثال محلول رقم 4 (p95)

2014/2015

العل

$$f'(x)=\frac{(x^2-2)(5)-(5x-7)(2x)}{(x^2-2)^2}$$

ميل المماس $= m = f'(1) = \frac{(1^2-2)(5)-(5\times1-7)(2\times1)}{(1^2-2)^2} = -1$

* معادلة المماس :

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-2=-1(x-1)$$

$$y-2=-x+1$$

$$y=-x+1+2$$

$$y=-x+3$$

أوجد معادلة المماس لمنحني الدالة f : $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2+2}$

عند النقطة $(1,\frac{2}{3})$ x_1 y_1

كتاب الطالب
مثال محلول رقم 4 (p 95)

الحل

2021/2022

$$f'(x)=\frac{(x^2+2)(3x^2)-(x^3+1)(2x)}{(x^2+2)^2}$$

ميل المماس $= m = f'(1) = \frac{(1^2+2)(3\times1^2)-(1^3+1)(2\times1)}{(1^2+2)^2} = \frac{5}{9}$

* معادلة المماس: $y-y_1=m(x-x_1)$

$$y-\frac{2}{3}=\frac{5}{9}(x-1)$$

2023/2024 منهج كامل

$$y-\frac{2}{3}=\frac{5}{9}x-\frac{5}{9}$$

$$y=\frac{5}{9}x-\frac{5}{9}+\frac{2}{3}$$

$$y=\frac{5}{9}x+\frac{1}{9}$$

أوجد معادلة المماس لمنحني الدالة : $y = \frac{8}{4+x^2}$

عند النقطة $(2,1)$ x_1 y_1

كراسة التمارين رقم 13 (p 38)

الحل

$\bar{y} = \frac{-8(2x)}{(4+x^2)^2}$

ميل المماس $= m = \bar{y}\Big|_{x=2} = \frac{-8 \times 2 \times 2}{(4+2^2)^2} = \frac{-1}{2}$

* معادلة المماس: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 1 = \frac{-1}{2}(x-2)$

$y - 1 = \frac{-1}{2}x + 1$

$y = \frac{-1}{2}x + 1 + 1$

$y = \frac{-1}{2}x + 2$

2022/2023

2024/2025 دور ثان منهج كامل

أوجد معادلة المماس لمنحني الدالة f: $f(x)=\frac{3x-4}{x+2}$

عند النقطة $x=0$ فكرة إيجاد النقطة (x,y)

الحل

2016/2017

بالتعويض عن $x=0$ ← $f(0)=\frac{3(0)-4}{0+2}=-2$

x_1 y_1

∴ النقطة هي $(0,-2)$

$f'(x)=\frac{(x+2)(3)-(3x-4)(1)}{(x+2)^2}$

ميل المماس $=m=f'(0)=\frac{(0+2)(3)-(3\times0-4)(1)}{(0+2)^2}=\frac{5}{2}$

* معادلة المماس: $y-y_1=m(x-x_1)$

$y-(-2)=\frac{5}{2}(x-0)$

$y+2=\frac{5}{2}x$

$y=\frac{5}{2}x-2$

أوجد معادلة المماس لمنحني الدالة $y = \frac{8}{4+x^2}$ عند النقطة $x = 2$

فكرة إيجاد النقطة (x,y)

الحل

2019/2020

بالتعويض عن $x = 2$ ←

$y = \frac{8}{4+2^2} = 1$

x_1, y_1

∴ النقطة هي $(2, 1)$

$y' = \frac{-8(2x)}{(4+x^2)^2}$

ميل المماس $= m = y'|_{x=2} = \frac{-8 \times 2 \times 2}{(4+2^2)^2} = \frac{-1}{2}$

معادلة المماس:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 1 = \frac{-1}{2}(x - 2)$

$y - 1 = \frac{-1}{2}x + 1$

$y = \frac{-1}{2}x + 1 + 1$

$y = \frac{-1}{2}x + 2$

معادلة العمودى (الناظم) عند نقطة من دالة قسمة

أوجد معادلة العمودي (الناظم) لمنحنى الدالة f حيث $f(x)=\frac{x-1}{x+2}$ عند النقطة $(1,0)$ x_1 y_1

الحل

$$f'(x)=\frac{(x+2)(1)-(x-1)(1)}{(x+2)^2}$$

ميل المماس $= m = f'(1) = \frac{(1+2)(1)-(1-1)(1)}{(1+2)^2} = \frac{1}{3}$

ميل العمود/الناظم $= \frac{-1}{m} = -3$

معادلة الناظم/العمود $y-y_1=\frac{-1}{m}(x-x_1)$

$$y-0=-3(x-1)$$

$$y=-3x+3$$

منهج كامل 2024/2025

كتاب الطالب

حاول أن تحل رقم 4 (p95)

مشتقات الدوال المثلثية

كتاب الطالب
حاول أن تحل رقم 1(b) (p101)

أوجد مشتقة الدالة g حيث $g(x) = \frac{x}{cosx}$

الحل

2024/2025

$$g'(x) = \frac{\cos x(1) - x(-\sin x)}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x + x\sin x}{\cos^2 x}$$

قاعدة السلسلة

لتكن: $y = u^2 + 4u - 3$, $u = 2x^3 + x$

أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل.

كتاب الطالب
حاول أن تحل رقم 3 (p105)

الحل

2023/2024

$$\frac{dy}{du} = (2u+4) \quad * \quad \frac{du}{dx} = 6x^2+1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = (2u+4)(6x^2+1)$$

$$= 12ux^2 + 24x^2 + 2u + 4$$

$$= 12(2x^3+x)x^2 + 24x^2 + 2(2x^3+x) + 4$$

$$= 24x^4 + 12x^3 + 24x^2 + 4x^3 + 2x + 4$$

$$= 24x^4 + 16x^3 + 24x^2 + 2x + 4$$

أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة f حيث $f(x)=\sqrt{x^2+5}$ عند النقطة $(2,3)$ x_1, y_1

الحل

2024/2025

$$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+5}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$$

$$\text{ميل المماس}=m=f'(2)=\frac{2}{\sqrt{2^2+5}}=\frac{2}{3}$$

* معادلة المماس: $y-y_1=m(x-x_1)$

$$y-3=\frac{2}{3}(x-2)$$

$$y-3=\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}$$

$$y=\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}+3$$

$$y=\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$$

كراسة التمارين رقم 16 (p 43)

نفس فكرة كتاب الطالب :
حاول أن تحل رقم 1(b) (p 104)

إذا كانت: $g(x)=x^3$, $f(x)=2x+1$

(1) أوجد $(gof)'(x)$

(2) أوجد معادلة المماس للدالة $(gof)(x)$ عند النقطة $A(0,1)$

سؤال اضافي

الحل

$\bar{g}(x)=3x^2$

$\bar{f}(x)=2$

(1) $(g\circ f)'(x) = \bar{g}(f(x)).\bar{f}(x)$

$= \bar{g}(2x+1)(2)$

$= 3(2x+1)^2(2)$

$= 6(2x+1)^2$

(2) ميل المماس $= m = (g\circ f)'(0) = 6(2\times 0+1)^2 = 6$

معادلة المماس: $y-y_1 = m(x-x_1)$

$y-1 = 6(x-0)$

$y-1 = 6x$

$y = 6x+1$

2018/2019

إذا كانت: $f(x)=\frac{2x+1}{x}\ (x\neq 0)$, $g(x)=x^2+1$

أوجد: (1) باستخدام قاعدة السلسلة $(fog)'(x)$

(2) $(fog)'(1)$ سؤال اضافي

كتاب الطالب
مثال محلول رقم 2 (p104)

الحل

2021/2022

(1) $(fog)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$= f'(x^2+1)(2x)$

$= \frac{-1}{(x^2+1)^2}(2x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$

$g'(x) = 2x$

$f(x) = \frac{2x}{x} + \frac{1}{x}$

$= 2 + x^{-1}$

$f'(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$

(2) $(fog)'(1) = \frac{-2\times 1}{(1^2+1)^2} = \frac{-1}{2}$

الاشتقاق الضمني

أوجد $\frac{dy}{dx}$ أو y' حيث $y = x + x^2y^5$

الحل

2022/2023

بالاشتقاق الضمني

$$y' = 1 + x^2(5y^4y') + y^5(2x)$$

$$y' = 1 + 5x^2y^4y' + 2xy^5$$

2023/2024

$$y' - 5x^2y^4y' = 1 + 2xy^5$$

$$y'(1 - 5x^2y^4) = 1 + 2xy^5$$

$$\therefore y' = \frac{1 + 2xy^5}{1 - 5x^2y^4}$$

2024/2025

كتاب الطالب
مثال محلول رقم(b)4(p111)

الاشتقاق الضمني (ميل المماس)

للمنحني الذي معادلته : $x^2 - y^2 + yx - 1 = 0$

أوجد y' ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحني عند النقطة $(1,1)$

الحل

2021/2022

باستخدام الضمني :

$$2x - 2y\dot{y} + y(1) + x\dot{y} = 0$$

$$-2y\dot{y} + x\dot{y} = -2x - y$$

$$\dot{y}(-2y + x) = -2x - y$$

$$\dot{y} = \frac{-2x - y}{-2y + x}$$

$$\text{ميل المماس} = m = \dot{y}\Big|_{(1,1)} = \frac{-2(1) - 1}{-2(1) + 1} = 3$$

كتاب الطالب

حاول أن تحل رقم 5 (p112)

كتاب الطالب
مثال محلول رقم 7 (p113)

للمنحني الذي معادلته : $2\sqrt{y}+y=x$ أوجد :

(1) y'

(2) ميل المماس لهذ المنحني عند النقطة $(3,1)$

الحل

* بالاشتقاء الضمني

2017/2018

(1) $2 \times \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \bar{y} + \bar{y} = 1$

$\frac{\bar{y}}{\sqrt{y}} + \bar{y} = 1$

$\bar{y}\left(\frac{1}{\sqrt{y}}+1\right) = 1$

$\bar{y}\left(\frac{1+\sqrt{y}}{\sqrt{y}}\right) = 1$

$\bar{y} = \frac{\sqrt{y}}{1+\sqrt{y}}$

(2) ميل المماس $= m = \bar{y}\Big|_{(3,1)} = \frac{\sqrt{1}}{1+\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$

أوجد ميل المماس $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ للمنحني الذي معادلته: $2y = x^2 - \cos y$ عند النقطة $A(1,0)$ (x y)

نفس فكرة كتاب الطالب
مثال محلول رقم 6 (p113)

الحل

2015/2016

* باستخدام الضمني :

$$2\bar{y} = 2x - (-\sin y)\,\bar{y}$$

$$2\bar{y} = 2x + \sin y \cdot \bar{y}$$

$$2\bar{y} - \bar{y}\sin y = 2x$$

$$\bar{y}(2 - \sin y) = 2x$$

$$\bar{y} = \frac{2x}{2 - \sin y}$$

ميل المماس $= m = \bar{y}\Big|_{(1,0)} = \frac{2(1)}{2 - \sin 0} = 1$

(الاثباتات)

إذا كانت:

$$y = \frac{sinx}{sin\,x + cos\,x}$$

اثبت أن:

$$y' = (y\,.\,csc\,x)^2$$

سؤال اضافي

الحل

2018/2019

الطرف الأيمن $= y'$

$$= \frac{(sinx + cosx)\,cosx - sinx\,(cosx - sinx)}{(sinx + cosx)^2}$$

فيثاغورث (1)

$$= \frac{sinx \cdot cosx + cos^2x - sinx \cdot cosx + sin^2x}{(sinx + cosx)^2}$$

$$= \frac{1}{(sinx + cosx)^2}$$

الطرف الأيسر $= (y\,.\,cscx)^2 = \left(\frac{sinx}{sinx + cosx} \cdot \frac{1}{sinx}\right)^2$

$$= \left(\frac{1}{sinx + cosx}\right)^2$$

$$= \frac{1}{(sinx + cosx)^2}$$

∴ الطرفان متساويان

إذا كانت:

$$y = x \sin x$$

اثبت أن:

$$y'' + y - 2\cos x = 0$$

نفس فكرة كتاب الطالب :
حاول أن تحل رقم 8 (p 114)

الحل

2016/2017

$y' = x\cos x + \sin x \cdot (1)$

$y'' = x(-\sin x) + \cos x \cdot (1) + \cos x$

$= -x\sin x + 2\cos x$

الطرف الأيسر $= y'' + y - 2\cos x =$

$= -x\sin x + 2\cos x + x\sin x - 2\cos x$

$= 0$

∴ الطرفان متساويان.

الوحدة الثالثة (تطبيقات على الاشتقاق)

القيم القصوى

إذا كانت الدالة f متصلة على $[1,4]$: $f(x)=x+\frac{4}{x}$

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة في الفترة $[1,4]$

الحل

∵ f متصلة وقابلة للاشتقاق على $[1,4]$

∴ توجد قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة

الجدول :

	طرفية	حرجة	طرفية
x	1	2	4
$f(x)$	5	4	5

* للدالة f قيمة عظمى مطلقة = 5 عند $x=1$ ، $x=4$

* للدالة f قيمة صغرى مطلقة = 4 عند $x=2$

النقاط الطرفية

$f(1)=1+\frac{4}{1}=5$

$f(4)=4+\frac{4}{4}=5$

النقاط الحرجة

$f(x)=x+4x^{-1}$

$\bar{f}(x)=1-4x^{-2}=1-\frac{4}{x^2}$

$\bar{f}(x)=0$ نضع

$1-\frac{4}{x^2}=0$

$\therefore \frac{4}{x^2}=1$

$\therefore x^2=4$

$\therefore x=2 \in [1,4]$ or $x=-2 \notin [1,4]$

$\therefore f(2)=2+\frac{4}{2}=4$

∴ النقطة الحرجة : (2 , 4)

2015/2016

نظرية القيمة المتوسطة

بين أن الدالة $f : f(x) = x^2$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0, 2]$ (a, b)
ثم أوجد قيمة c التي تنبيء بها النظرية و فسر إجابتك .

الحل

(1) f كثيرة حدود متصلة على $[0,2]$

(2) f قابلة للاشتقاق على $(0,2)$

∴ شروط نظرية القيمة المتوسطة محققة .

∴ يوجد على الأقل $c \in (0,2)$

$f'(x) = 2x$	$f(0) = 0^2 = 0$	$(0,0)$
$f'(c) = 2c$	$f(2) = 2^2 = 4$	$(2,4)$

النقاط

$$\because f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$$

$$2c = \frac{4 - 0}{2} \Rightarrow 2c = 2 \Rightarrow c = 1 \in (0,2)$$

التفسير: يوجد مماس لمنحنى الدالة f عند $x = 1$
يوازي القاطع المار بالنقطتين $(0,0)$ و $(2,4)$

2024/2025

2024/2025 منهج كامل

بين أن الدالة f : $f(x) = x^3 - 3x + 2$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0,4]$ (a b)

ثم أوجد قيمة c التي تنبئ بها النظرية.

الحل

2015/2016

(1) ∵ f كثيرة حدود متصلة على $[0,4]$

(2) ∵ f قابلة للاشتقاق على $(0,4)$

∴ شروط نظرية القيمة المتوسطة تحققت

∴ يوجد على الأقل $c \in (0,4)$

$f'(x) = 3x^2 - 3$ | $f(0) = 0^3 - 3(0) + 2 = 2$ | $(0,2)$ النقاط

$f'(c) = 3c^2 - 3$ | $f(4) = 4^3 - 3(4) + 2 = 54$ | $(4,54)$

$$\because f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow f'(c) = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0}$$

$$3c^2 - 3 = \frac{54 - 2}{4} \Rightarrow 3c^2 - 3 = 13$$

$$3c^2 = 13 + 3 \Rightarrow 3c^2 = 16 \Rightarrow c^2 = \frac{16}{3}$$

$$c = \pm\sqrt{\frac{16}{3}} = \pm\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$c = \frac{4\sqrt{3}}{3} \in (0,4)$ or $c = -\frac{4\sqrt{3}}{3} \notin (0,4)$

التفسير: يوجد مماس لمنحنى الدالة f عند $x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

يوازي القاطع المار بالنقطتين $(0,2), (4,54)$

بين أن الدالة f : $f(x)=x+\frac{1}{x}$

تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $\left[\frac{1}{2},2\right]$ (a b)

ثم أوجد قيمة c التي تنبئ بها النظرية، فسر اجابتك

الحل

أولاً : بحث اتصال f على $[\frac{1}{2},2]$

نعرف

$h(x)=\frac{1}{x}$: صمودية نسبية متصلة على $R/\{0\}$

$\because [\frac{1}{2},2] \subseteq R/\{0\}$

$\therefore h$ متصلة على $[\frac{1}{2},2]$

$g(x)=x$: كثيرة حدود متصلة على R

$\therefore g$ متصلة على $[\frac{1}{2},2]$

دالة مجموع $f(x)=g(x)+h(x)$

$\therefore f$ متصلة على $[\frac{1}{2},2]$

(1) f متصلة على $[\frac{1}{2},2]$

(2) f قابلة للاشتقاق على $(\frac{1}{2},2)$

$\therefore$ شروط نظرية القيمة المتوسطة محققة.

$\therefore c \in (\frac{1}{2},2)$ يوجد على الأقل

النقطة $(\frac{1}{2},\frac{5}{2})$ | $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}+\frac{1}{\frac{1}{2}}=\frac{5}{2}$

$(2,\frac{5}{2})$ | $f(2)=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

$f(x)=x+x^{-1}$

$f'(x)=1-x^{-2}=1-\frac{1}{x^2}$

$f'(c)=1-\frac{1}{c^2}$

$\because f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow f'(c)=\frac{f(2)-f(\frac{1}{2})}{2-\frac{1}{2}}$

$1-\frac{1}{c^2}=\frac{\frac{5}{2}-\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}} \Rightarrow 1-\frac{1}{c^2}=0 \Rightarrow \frac{1}{c^2}=1$

$\therefore c^2=1$

$c=1 \in (\frac{1}{2},2)$ or $c=-1 \notin (\frac{1}{2},2)$

التفسير : يوجد مماس لمنحنى الدالة f عند $x=1$ يوازي المستقيم الواصل بين النقطتين $(\frac{1}{2},\frac{5}{2})$ و $(2,\frac{5}{2})$

2019/2020

إيجاد النقاط الحرجة، فترات التزايد والتناقص، القيم القصوى المحلية

لتكن الدالة f : $f(x) = x^3 - 12x - 5$

(1) النقاط الحرجة للدالة.

(2) الفترات التي تكون الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها.

(3) القيم القصوى المحلية.

الحل

(1) ∵ f كثيرة حدود متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 12$

نضع $f'(x) = 0$

$3x^2 - 12 = 0$

$x = 2$ or $x = -2$

$f(2) = -21$ $f(-2) = 11$

* النقاط الحرجة: $(2, -21)$ و $(-2, 11)$

(2)

	$-\infty$		-2		2		∞
الفترات		$(-\infty, -2)$		$(-2, 2)$		$(2, \infty)$	
اشارة f'		+		−		+	
سلوك f		↗	11 عظمى	↘	−21 صغرى	↗	

* f متزايدة على $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

* f متناقصة على $(-2, 2)$

(3) للدالة f قيمة عظمى محلية = 11 عند $x = -2$

للدالة f قيمة صغرى محلية = −21 عند $x = 2$

2019/2020

2024/2025 دور ثان منهج كامل

لتكن الدالة f : $f(x) = x^3 - 12x - 4$

(1) النقاط الحرجة للدالة .

(2) الفترات التي تكون الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها .

(3) القيم القصوى المحلية .

الحل

(1) f : لأنها حدود متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 12$

لنضع $f'(x) = 0$

$3x^2 - 12 = 0$

$x = -2$ or $x = 2$

$f(-2) = 12$ $f(2) = -20$

* النقاط الحرجة : $(-2, 12)$, $(2, -20)$

(2)

	$-\infty$		-2		2		∞
الفترات	$(-\infty, -2)$		$(-2, 2)$		$(2, \infty)$		
إشارة f'	+		−		+		
سلوك f	↗		↘		↗		
		12 عظمى		−20 صغرى			

* f متزايدة على $(-\infty, -2)$, $(2, \infty)$

* f متناقصة على $(-2, 2)$

(3) للدالة f قيمة عظمى محلية = 12 عند $x = -2$

للدالة f قيمة صغرى محلية = −20 عند $x = 2$

2022/2023

لتكن الدالة f : $f(x) = x^3 - 27x + 2$

أوجد :

(1) النقاط الحرجة للدالة .

(2) الفترات التي تكون الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها .

(3) القيم القصوى المحلية .

الحل

(1) ∵ f كثيرة حدود متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 27$

نضع $f'(x) = 0$

$3x^2 - 27 = 0$

$x = -3$ or $x = 3$

$f(-3) = 56$ $\quad$ $f(3) = -52$

∴ النقاط الحرجة : $(-3, 56)$, $(3, -52)$

(2)

	$-\infty$		-3		3		∞
الفترات	$(-\infty, -3)$		$(-3, 3)$		$(3, \infty)$		
إشارة f'	+		−		+		
سلوك f	↗		↘		↗		
		56 عظمى		-52 صغرى			

* f متزايدة على $(-\infty, -3)$, $(3, \infty)$

* f متناقصة على $(-3, 3)$

(3) للدالة f قيمة عظمى محلية = 56 عند $x = -3$

للدالة f قيمة صغرى محلية = -52 عند $x = 3$

منهج كامل 2023/2024

إيجاد نقطة الانعطاف وفترات التقعر (لاعلي ولاسفل)

أوجد فترات التقعر ونقطة الانعطاف لمنحني الدالة f :

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$$

الحل

2022/2023

f كثيرة حدود متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ∴

$$f'(x) = 6x^2 + 6x$$

$$f''(x) = 12x + 6$$

نضع $f''(x) = 0$

$$12x + 6 = 0 \Rightarrow 12x = -6 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$f(-\frac{1}{2}) = 2(-\frac{1}{2})^3 + 3(-\frac{1}{2})^2 - 1 = -\frac{1}{2}$$

∴ نقطة الانعطاف : $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

2024/2025

	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	∞
الفترات	$(-\infty, -\frac{1}{2})$		$(-\frac{1}{2}, \infty)$
إشارة f''	−		+
التقعر	∩		∪

* منحنى f مقعر لأعلى على $(-\frac{1}{2}, \infty)$

* منحنى f مقعر لأسفل على $(-\infty, -\frac{1}{2})$

دراسة تغير دالة (الرسم البياني)

لتكن الدالة f : $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

أوجد :

(1) النقاط الحرجة للدالة .

(2) الفترات التي تكون الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها .

(3) فترات التقعر ونقطة الانعطاف.

(4) ارسم بيان الدالة .

الحل

(1) : f كثيرة حدود متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$f'(x) = 0$ نضع ←

$3x^2 - 12x + 9 = 0$

$x = 1$ or $x = 3$

$f(1) = 0$ $f(3) = -4$

النقاط الحرجة : $(1,0)$, $(3,-4)$

(2)

	$-\infty$		1		3		∞
الفترات		$(-\infty,1)$		$(1,3)$		$(3,\infty)$	
اشارة f'		+	0	−	−4	+	
سلوك f	$-\infty$	↗		↘		↗	∞

f متزايدة على $(-\infty,1)$, $(3,\infty)$ * f متناقصة على $(1,3)$

(3)

$f''(x) = 6x - 12$

$f''(x) = 0$ نضع ←

$6x - 12 = 0 \Rightarrow 6x = 12 \Rightarrow x = 2$

$f(2) = -2$

نقطة الانعطاف : $(2,-2)$

	$-\infty$		2		∞
الفترات		$(-\infty,2)$		$(2,\infty)$	
اشارة f''		−	0	+	
التقعر		∩		∪	

* منحنى f مقعر لأعلى على $(2,\infty)$

منحنى f مقعر لأسفل على $(-\infty,2)$

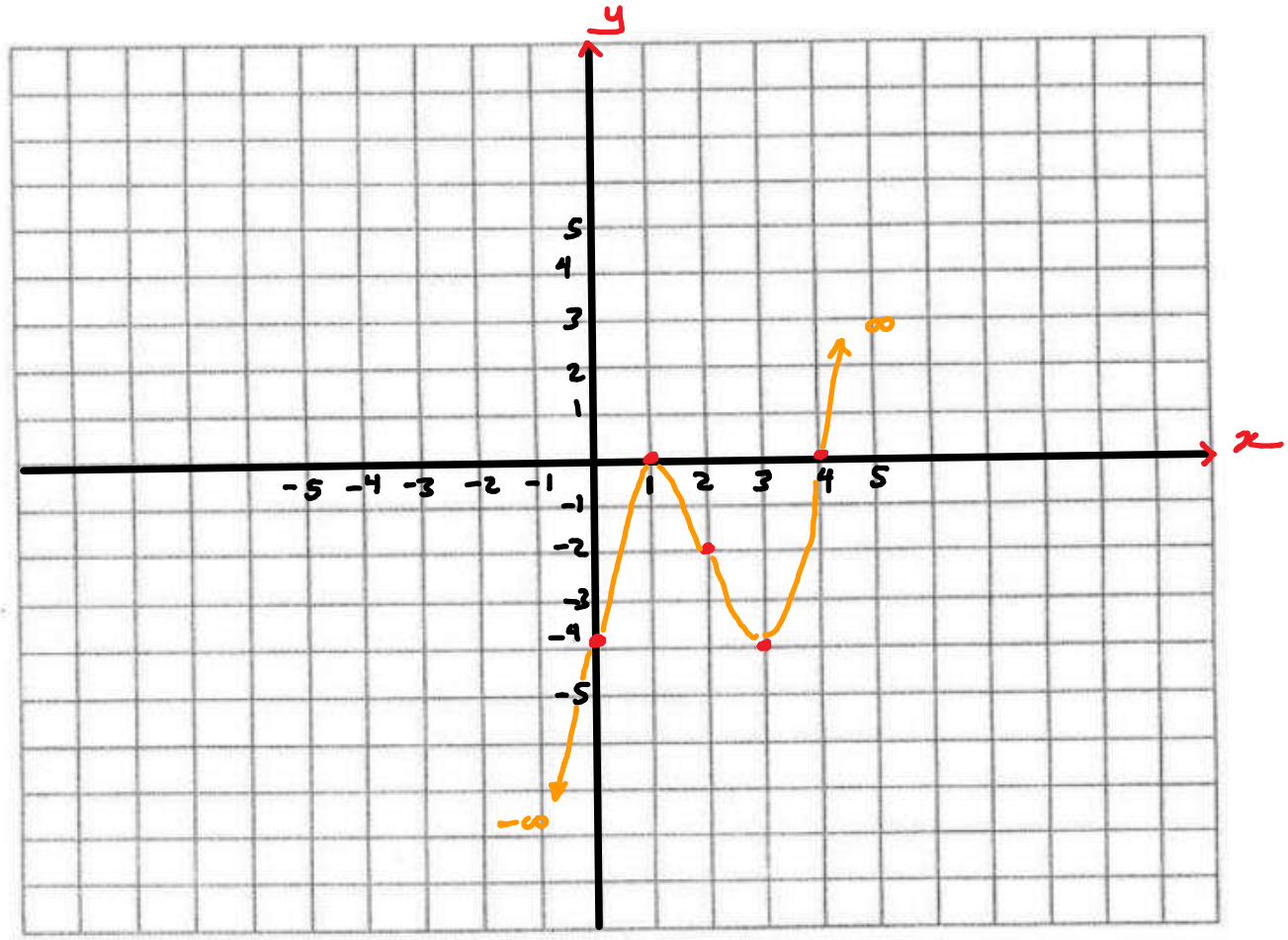
2023/2024

(٤) النهايات عند الحدود المفتوحة

$$\lim_{x \to \infty} x^3 = \infty \qquad \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

mode 7 1

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	-4	0	-2	-4	0
	أصغرية	حرجة	انعطاف	حرجة	أصغرية



ادرس تغير الدالة f : $f(x)=x^3-3x$ وارسم بيانها .

العل

2014/2015

f كثيرة حدود متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

* النهايات عند الحدود المفتوحة

$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

$\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$

المشتقة الثانية

$f'(x) = 6x$ ←

نقطع $f'(x)=0$

$6x=0$

$x=0$

$f(0)=0$

نقطة الانقلاب $(0,0)$

$-\infty$		0		∞
الفترات	$(-\infty,0)$		$(0,\infty)$	
إشارة f'	$-$		$+$	
التقعر	$\cap$		$\cup$	

* منحنى f مقعر لأعلى على $(0,\infty)$

* منحنى f مقعر لأسفل على $(-\infty,0)$

المشتقة الأولى

$f'(x) = 3x^2-3$ (1)

نقطع $f'(x)=0$

$3x^2-3=0$

$x=1$ or $x=-1$

$f(1)=-2$ $\quad f(-1)=2$

النقاط الحرجة : $(-1,2)$, $(1,-2)$

(2)

$-\infty$		-1		1		∞
الفترات	$(-\infty,-1)$		$(-1,1)$		$(1,\infty)$	
إشارة f'	$+$		$-$		$+$	
سلوك f	$-\infty$ ↗	2	↘	-2	↗ ∞	

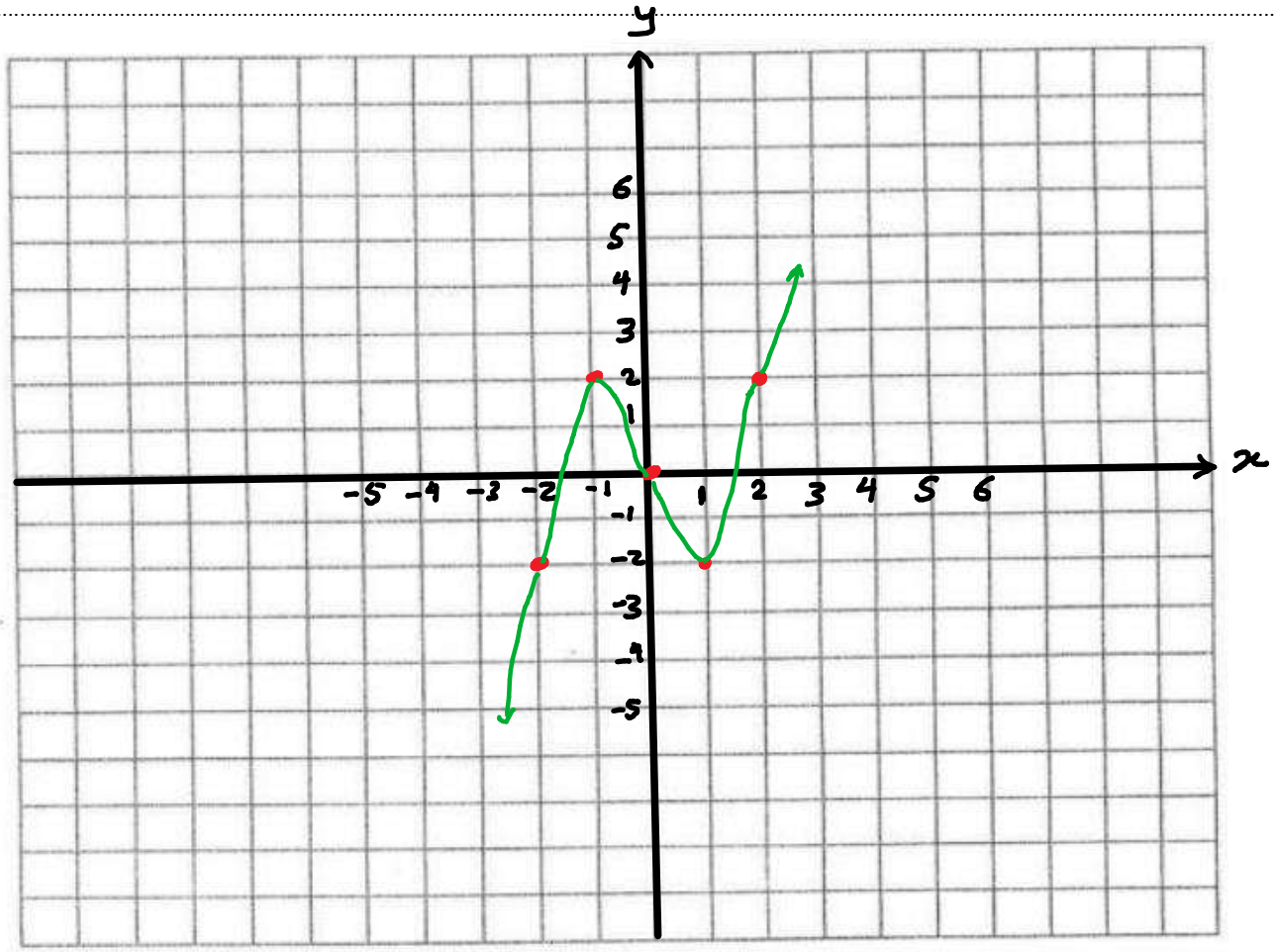
* f تزايدية على $(-\infty,-1)$, $(1,\infty)$

* f متناقصة على $(-1,1)$

(3) الدالة f لها قيمة عظمى محلية $=2$ عند $x=-1$

الدالة f لها قيمة صغرى محلية $=-2$ عند $x=1$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-2	2	0	-2	2
	فردية	متزايدة	انقطاع	متناقصة	زوجية



ادرس تغير الدالة f : $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$ وارسم بيانها .

الحل

2015/2016

∴ f كثيرة حدود متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

النهايات عند الحدود المفتوحة :

$\lim_{x \to -\infty} 2x^3 = -\infty$

$\lim_{x \to \infty} 2x^3 = \infty$

المشتقة الثانية

$f'(x) = 6x^2 - 6$ (1) $\Rightarrow$ $f''(x) = 12x$

$f''(x) = 0$ نضع

$12x = 0$ $\div 12$

$x = 0$

$f(0) = 1$

نقطة الانعطاف: $(0,1)$

x	$-\infty$		0		∞
الفترات	$(-\infty, 0)$		$(0, \infty)$		
إشارة f''	$-$		$+$		
التقعر	$\cap$		$\cup$		

* منحنى f مقعر لأعلى على $(0, \infty)$

* منحنى f مقعر لأسفل على $(-\infty, 0)$

المشتقة الأولى

$f'(x) = 6x^2 - 6$ (1)

$f'(x) = 0$ نضع

$6x^2 - 6 = 0$

$x = 1$ or $x = -1$

$f(1) = -3$ $f(-1) = 5$

النقاط الحرجة : $(-1, 5)$ و $(1, -3)$

(2)

x	$-\infty$		-1		1		∞
الفترات	$(-\infty, -1)$		$(-1, 1)$		$(1, \infty)$		
إشارة f'	$+$		$-$		$+$		
سلوك f	$-\infty$ ↗		↘		↗ ∞		
			5		-3		

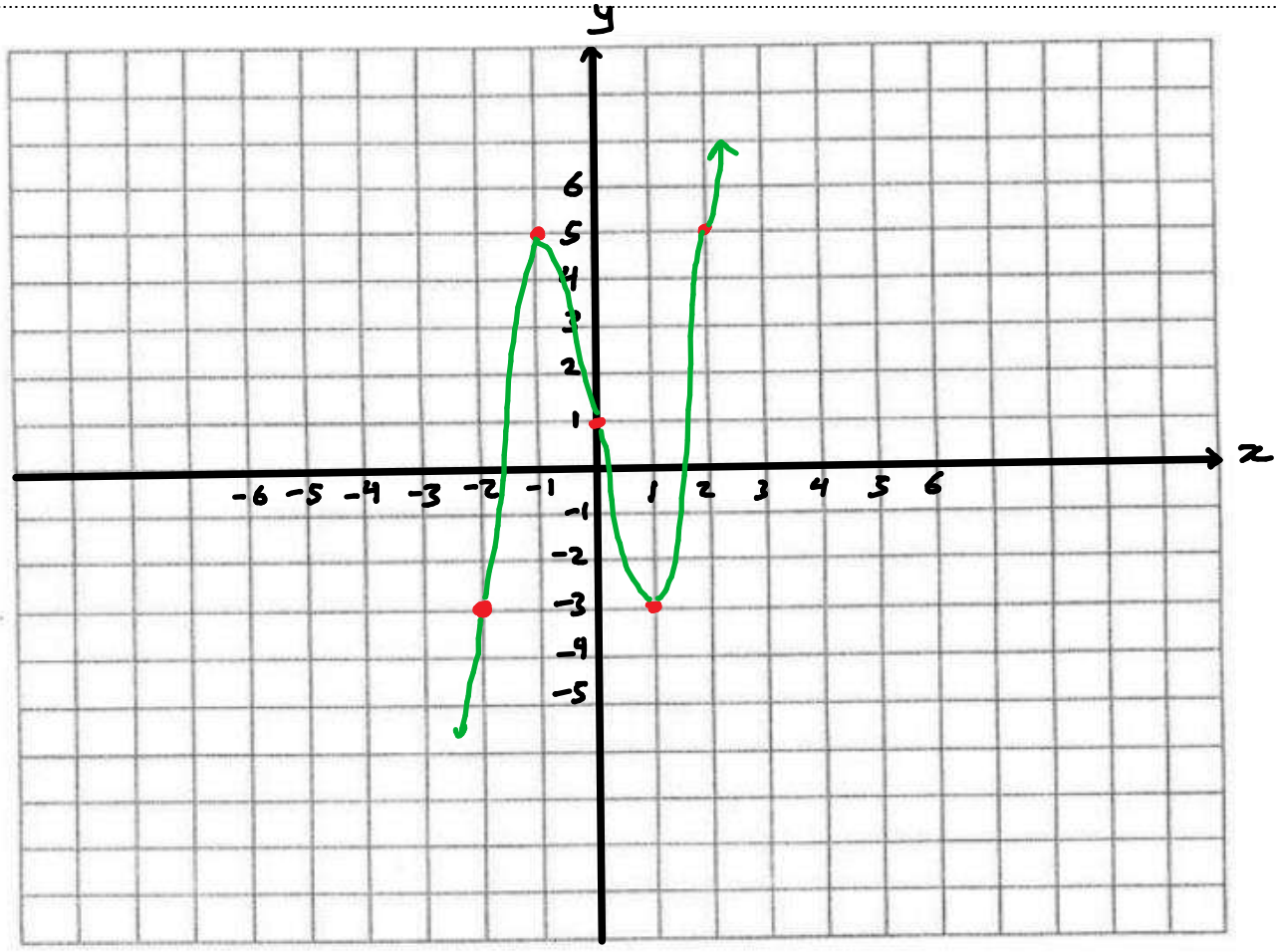
* f متزايدة على $(-\infty, -1)$ و $(1, \infty)$

* f متناقصة على $(-1, 1)$

عند $x = -1$ للدالة f قيمة عظمى محلية $= 5$

عند $x = 1$ للدالة f قيمة صغرى محلية $= -3$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-3	5	1	-3	5
	أضافية	حرجة	انقطاف	حرجة	أضافية



ادرس تغير الدالة f : $f(x)=2x^3+3x^2-1$ وارسم بيانها .

الحل

2018/2019

.. f كثيرة حدود متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

النهايات عند الحدود المفتوحة :

$\lim_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$

$\lim_{x\to\infty} 2x^3 = \infty$

المشتقة الأولى

(1) $f'(x)=6x^2+6x$

نضع $f'(x)=0$

$6x^2+6x=0$

$x=0$ or $x=-1$

$f(0)=-1$ $f(-1)=0$

النقاط الحرجة : $(0,-1)$ و $(-1,0)$

(2)

	$-\infty$		-1		0		∞
الفترات	$(-\infty,-1)$		$(-1,0)$		$(0,\infty)$		
إشارة f'	+		−		+		
سلوك f	$-\infty$	↗		↘		↗	∞

* f متزايدة على $(-\infty,-1)$ و $(0,\infty)$

* f متناقصة على $(-1,0)$

(3) للدالة f قيمة عظمى محلية $=0$ عند $x=-1$

للدالة f قيمة صغرى محلية $=-1$ عند $x=0$

المشتقة الثانية

$\Rightarrow f''(x)=12x+6$

نضع $f''(x)=0$

$12x+6=0$

$12x=-6$

$x=-\frac{1}{2}$

$f(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{2}$

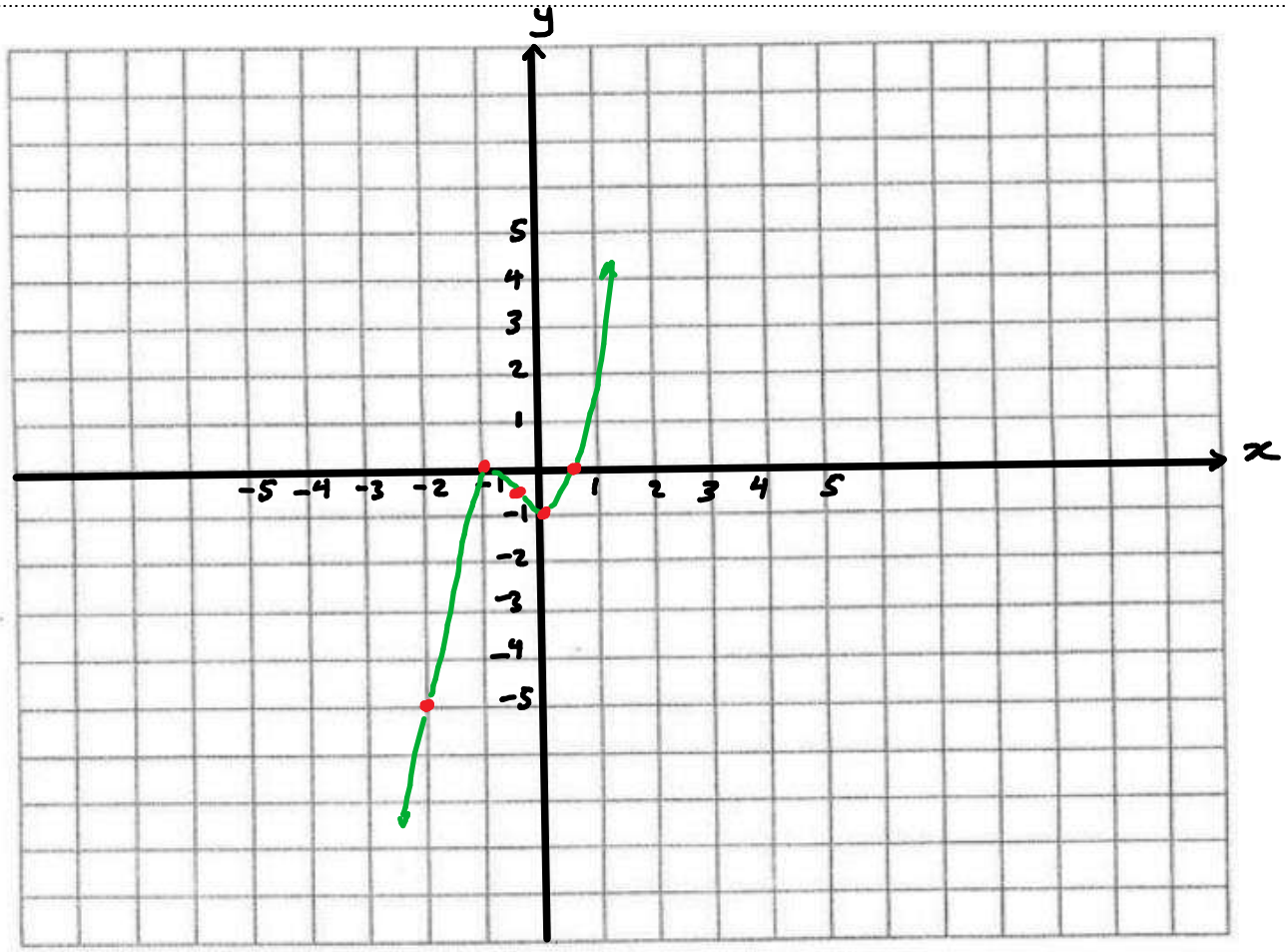
نقطة الانطباف : $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$

	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		∞
الفترات	$(-\infty,-\frac{1}{2})$		$(-\frac{1}{2},\infty)$		
إشارة f''	−		+		
التقعر	∩		∪		

* منحنى f مقعر لأعلى على $(-\frac{1}{2},\infty)$

* منحنى f مقعر لأسفل على $(-\infty,-\frac{1}{2})$

x	-2	-1	-0.5	0	0.5
$f(x)$	-5	0	-0.5	-1	0
	أضاعفية	حرجة	انعطاف	حرجة	أضاعفية



ادرس تغير الدالة f : $f(x)=1-x^3$ وارسم بيانها.

الحل

2017/2018

f كثيرة حدود متصلة ومتابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

النهايات عند الحدود المفتوحة

$\lim_{x\to-\infty}(-x^3)=\infty$

$\lim_{x\to\infty}(-x^3)=-\infty$

المشتقة الثانية

$f'(x)=-3x^2$ (1)

$\Rightarrow f''(x)=-6x$

نضع $f''(x)=0$

$-6x=0$

$x=0$

$f(0)=1$

نقطة الانطلاف : $(0,1)$

x	$-\infty$		0		∞
الفترات	$(-\infty,0)$		$(0,\infty)$		
إشارة f''	+		−		
التقعر	∪		∩		

* منحنى f مقعر لأعلى على $(-\infty,0)$

* منحنى f مقعر لأسفل على $(0,\infty)$

المشتقة الأولى

$f'(x)=-3x^2$ (1)

نضع $f'(x)=0$

$-3x^2=0$

$x=0$

$f(0)=1$

النقطة الحرجة : $(0,1)$

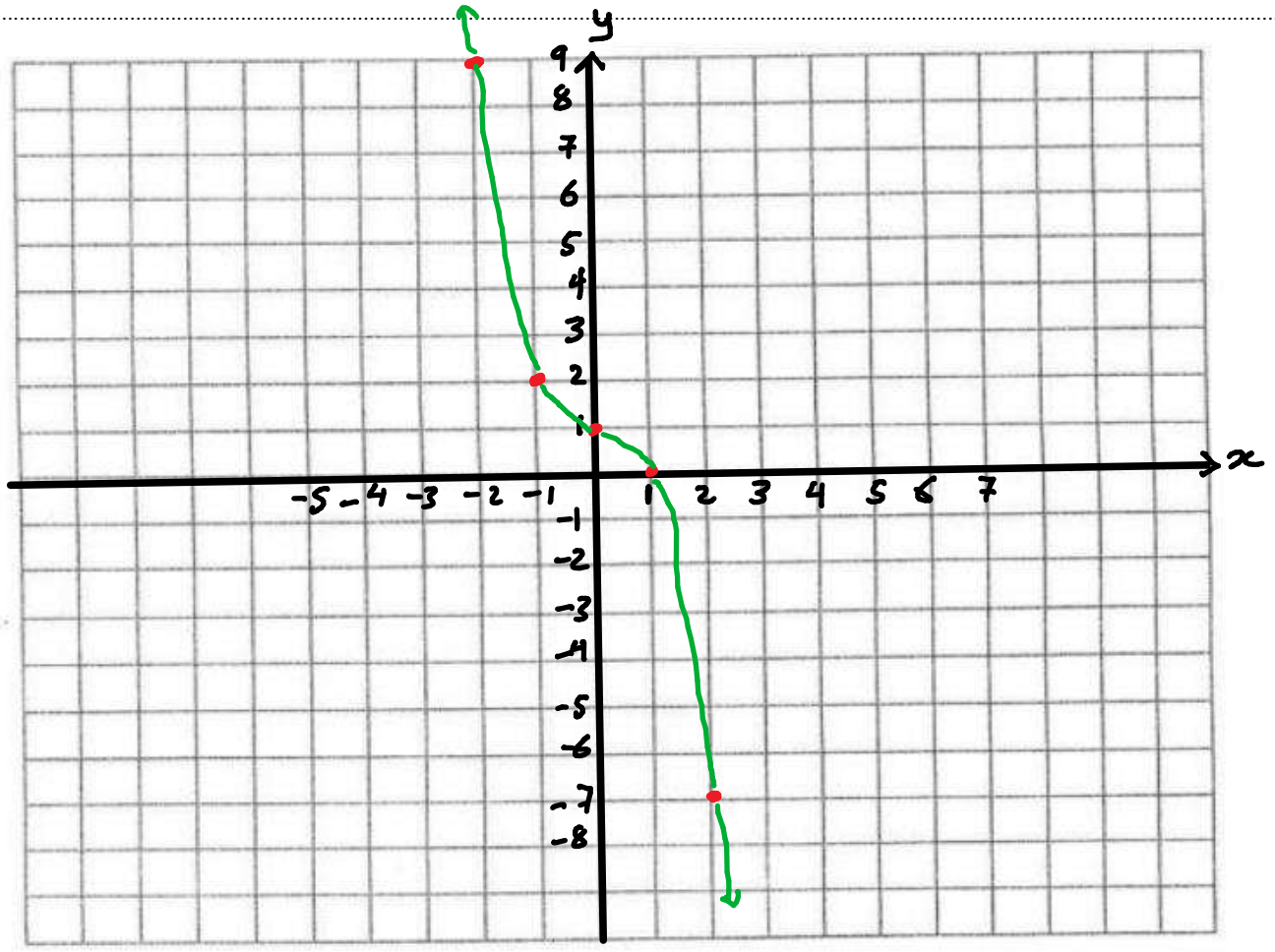
x	$-\infty$		0		∞ (2)
الفترات	$(-\infty,0)$		$(0,\infty)$		
إشارة f'	−		−		
سلوك f	∞ ↘		↘ $-\infty$		

* f متناقصة على $(-\infty,0)$ و $(0,\infty)$

(3) لا توجد قيمة عظمى محلية.

لا توجد قيمة صغرى محلية.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	9	2	1	0	-7
	أ ضاعفية	أ ضاعفية	نقطة تحطاف	أضاعفية	أضاعفية



تطبيقات على القيم القصوى

أوجد عددين موجبين مجموعهما 20 وناتج ضربهما أكبر ما يمكن.

الحل

الفرض

نفرض العددين x و y

$x + y = 20$

$y = 20 - x$

$0 < x < 20$

$x \in (0, 20)$

ضربهما

$f(x) = x \cdot y = x(20 - x)$

$= 20x - x^2$

$f'(x) = 20 - 2x$

$f'(x) = 0$ نضع

$20 - 2x = 0$

$2x = 20$

$x = 10 \in (0, 20)$

النقطة الحرجة : $(10, f(10))$

2017/2018

اختبار المشتقة الثانية

$f''(x) = -2$

$f''(10) = -2 < 0$

$\therefore$ توجد قيمة عظمى محلية عند $x = 10$

العدد الأول $x = 10$

العدد الثاني $y = 20 - 10 = 10$

$\therefore$ العددان 10 ، 10

عددان موجبان مجموعهما 100 ومجموع مربعيهما أصغر ما يمكن، ما العددان؟

الحل

الفرض

نفرض العددين x و y

$x+y=100$

$y=100-x$

$0<x<100$

$x\in(0,100)$

$f(x)=x^2+y^2$

$=x^2+(100-x)^2$

$f'(x)=2x+2(100-x)^1(-1)$

$=2x-200+2x$

$=4x-200$

نضع $f'(x)=0$

$4x-200=0$

$4x=200 \quad \div 4$

$x=50\in(0,100)$

النقطة الحرجة: $(50, f(50))$

اختبار المشتقة الثانية

$f''(x)=4$

$f''(50)=4>0$

$\therefore$ توجد قيمة صغرى مطلقة عند $x=50$

العدد الأول $x=50$

العدد الثاني $y=100-50=50$

$\therefore$ العددان $50, 50$

2023/2024

أثبت أن من بين المستطيلات التي محيطها 8 cm واحدا منها يعطي أكبر مساحة ويكون مربعا؟

الحل

2018/2019

الفرض

بفرض الأبعاد: x و y

$2(x+y) = 8$

$x+y = 4$

$y = 4-x$

$0 < x < 4$

$x \in (0,4)$

$f(x) = x.y = x(4-x)$

$= 4x - x^2$

$f'(x) = 4 - 2x$

نضع $f'(x) = 0$

$4 - 2x = 0$

$2x = 4$ $\div 2$

$x = 2 \in (0,4)$

∴ النقطة الحرجة: $(2, f(2))$

اختبار المشتقة الثانية

$f''(x) = -2$

$f''(2) = -2 < 0$

∴ توجد قيمة عظمى مطلقة عند $x=2$

البعد الأول $x = 2$

البعد الثاني $y = 4 - 2 = 2$

$\therefore x = y = 2$

∴ يصبح المستطيل مربعاً.

تعطي الدالة $V(h)=2\pi(-h^3+36h)$ حجم أسطوانة بدلالة ارتفاعها h أوجد الارتفاع $h(cm)$ للحصول علي أكبر حجم للأسطوانة ثم أوجد هذا الحجم.

الحل

2014/2015

$V(h)=2\pi(-h^3+36h)$

$V(h)=-2\pi h^3+72\pi h$

$V'(h)=-6\pi h^2+72\pi$

$V'(h)=0$ نضع

$-6\pi h^2+72\pi=0$

$-6\pi h^2=-72\pi$ $\div -6\pi$

$h^2=12$

$h=\pm\sqrt{12}=\pm 2\sqrt{3}$

$h=2\sqrt{3}$ مقبول or $h=-2\sqrt{3}$ مرفوض

$V''(h)=-12\pi h$ أختبار المشتقة الثانية

$V''(2\sqrt{3})=-12\pi(2\sqrt{3})=-24\pi\sqrt{3}<0$

∴ توجد قيمة عظمى مطلقة عند $h=2\sqrt{3}$

∴ أكبر حجم للأسطوانة عند $h=2\sqrt{3}$

$V(2\sqrt{3})=2\pi(-(2\sqrt{3})^3+36(2\sqrt{3}))\simeq 522.4\ cm^3$

الوحدة الرابعة: الاحصاء

4-1 التقدير

إيجاد فترة الثقة إذا كانت σ معلومة وحجم العينة $(n \leq 30$ أو $n > 30)$

أجريت دراسة لعينة من الإناث حول معدل النبض لديهن فإذا كان حجم عينة $n = 40$ الاناث والانحراف المعياري لمجتمع الاناث $\sigma = 12.5$ والمتوسط الحسابي للعينة $\bar{x} = 76.3$ استخدم مستوى ثقة 95% لإيجاد:

(1) هامش الخطأ

(2) فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ

الحل

$n = 40$
$\sigma = 12.5$
$\bar{x} = 76.3$
$E = ?$
فترة الثقة $= ?$

(1) $\because \sigma$ معلومة ، $n \geq 30$

$\because$ مستوى الثقة 95% $\longleftarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \times \frac{12.5}{\sqrt{40}} \approx 3.874$$

(2) فترة الثقة: $(\bar{x} - E, \bar{x} + E)$

$= (76.3 - 3.879, 76.3 + 3.874)$

$= (72.426, 80.174)$

2018/2019

إيجاد فترة الثقة إذا كانت σ غير معلومة وحجم العينة $(n > 30)$

عينة عشوائية حجمها 36 فإذا كان المتوسط الحسابي للعينة 60 وتباينها 16 باستخدام مستوي ثقة 95%

(1) أوجد هامش الخطأ

(2) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ

(3) فسر فترة الثقة.

الحل

$n = 36$
$\bar{x} = 60$
$s^2 = 16$
$s = \sqrt{16} = 4$
$E = ?$

1) $\because n \geq 30$ ، σ غير معلومة

مستوى الثقة 95% $\leftarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{s}{\sqrt{n}} = 1.96 \times \frac{4}{\sqrt{36}} \approx 1.307$

2) فترة الثقة : $(\bar{x} - E , \bar{x} + E)$

$= (60 - 1.307 , 60 + 1.307)$

$= (58.693 , 61.307)$

3) عند اختيار 100 عينة عشوائية ذات الحجم نفسه $n = 36$ وحساب حدود فترة الثقة فأننا نتوقع أن 95 فترة تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي للمجتمع μ.

2022/2023

أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها $n = 81$ ومتوسطها الحسابي $\bar{x} = 50$ هو وانحرافها المعياري $s = 9$ باستخدام مستوى ثقة 95%

(1) أوجد هامش الخطأ

(2) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ

(3) فسر فترة الثقة.

الحل

$n = 81$
$\bar{x} = 50$
$s = 9$
$E = ?$

(1) $\because \sigma$ غير معلومة $n \geq 30$

$\because$ مستوى الثقة 95% $\rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{s}{\sqrt{n}} = 1.96 \times \frac{9}{\sqrt{81}} = 1.96$$

(2) فترة الثقة: $(\bar{x} - E, \bar{x} + E)$

$= (50 - 1.96, 50 + 1.96)$

$= (48.04, 51.96)$

(3) عند اختيار 100 عينة عشوائية ذات الحجم نفسه $n = 81$ وحساب حدود فترة الثقة فإننا نتوقع أن 95 فترة تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي للمجتمع μ.

2015/2016

إيجاد فترة الثقة إذا كانت σ غير معلومة وحجم العينة $(n \leq 30)$

أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها $n = 25$ فإذا كان الانحراف المعياري للعينة (s) يساوي 10، ومتوسطها الحسابي $\bar{x}$ يساوي 15 استخدام مستوى ثقة 95% لإيجاد:

(1) أوجد هامش الخطأ

(2) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ

الحل

2017/2018

$n = 25$
$s = 10$
$\bar{x} = 15$
$E = ?$

(1) $\because \sigma$ غير معلومة $\because n < 30$

درجة الحرية $= n - 1 = 25 - 1 = 24$

$\because$ مستوى الثقة 95%

$\therefore 1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$

* من جدول t

$\therefore t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.064$

$$E = t_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{s}{\sqrt{n}} = 2.064 \times \frac{10}{\sqrt{25}} = 4.128$$

2023/2024

(2) فترة الثقة: $(\bar{x} - E \ , \ \bar{x} + E)$

$= (15 - 4.128 \ , \ 15 + 4.128)$

$= (10.872 \ , \ 19.128)$

4-2 اختبارات الفروض الاحصائية

اختبارات الفروض الإحصائية إذا كانت σ معلومة وحجم العينة $(n \leq 30$ أو $n > 30)$

يزعم مسؤول في متجر لبيع الأدوات الكهربائية، أن متوسط الأسعار هو 300 دينار. أعطت عينة من 49 آلة (دينارا) $\overline{x} = 280$ والانحراف المعياري معلوم (دينارا) $\sigma = 40$. تأكد من فرضية المسؤول عند مستوى المعنوية $\alpha = 5\%$

الحل

$\mu = 300$
$n = 49$
$\bar{x} = 280$
$\sigma = 40$

(1) صياغة الفروض الاحصائية :

$H_0 : \mu = 300$ فرض العدم مقابل $H_1 : \mu \neq 300$ الفرض البديل

(2) المقياس الاحصائي : σ معلومة $n > 30$

$$\therefore Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{280 - 300}{\frac{40}{\sqrt{49}}} = -3.5$$

(3) المعنوية :

$$\because \alpha = 5\% \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

(4) منطقة القبول : $(-1.96 \, , \, 1.96)$

(5) القرار الاحصائي :

$-3.5 \notin (-1.96 \, , \, 1.96)$

القرار : رفض فرض العدم

وقبول الفرض البديل .

كراسة التمارين

اختبارات الفروض الإحصائية إذا كانت σ غير معلومة وحجم العينة $(n > 30)$

إذا كانت $S = 1.79$, $\bar{x} = 37.2$, $n = 80$

اختبر الفرض بأن $\mu = 37$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

الحل

$S = 1.79$
$\bar{x} = 37.2$
$n = 80$
$\mu = 37$
$\alpha = 0.05$

1) صياغة الفروض الاحصائية:

$H_0: \mu = 37$ فرض العدم مقابل $H_1: \mu \neq 37$ الفرض البديل

2) المقياس الاحصائي: $\because n > 30$ ، σ غير معلومة

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{37.2 - 37}{\frac{1.79}{\sqrt{80}}} \approx 0.999$$

3) المعنوية:

$\because \alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

4) منطقة القبول: $(-1.96, 1.96)$

5) القرار الاحصائي:

$0.999 \in (-1.96, 1.96)$

القرار: نقبل فرض العدم H_0

ونرفض الفرض البديل H_1

2024/2025

أخذت عينة عشوائية من مجتمع قيد الدراسة حجمها $n = 150$ فوجد أن المتوسط الحسابي للعينة $\bar{x} = 30.3$ مع انحراف معياري $s = 6.5$ اختبر الفرض إذا كان المتوسط الحسابي للمجتمع هو $\mu = 30$ مقابل الفرض البديل $\mu \neq 30$ عند مستوى المعنوية $\alpha = 5\%$

العل

كراسة التمارين

$n = 150$
$\bar{x} = 30.3$
$S = 6.5$
$\mu = 30$
$\alpha = 5\%$

(1) صياغة الفروض الاحصائية:

$H_0: \mu = 30$ فرض العدم مقابل $H_1: \mu \neq 30$ الفرض البديل

(2) المقياس الاحصائي: σ غير معلومة $n > 30$

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{30.3 - 30}{\frac{6.5}{\sqrt{150}}} \simeq 0.57$$

(3) العينة:

$\alpha = 5\% \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

(4) منطقة القبول: $(-1.96, 1.96)$

(5) القرار الاحصائي: $\because 0.57 \in (-1.96, 1.96)$

القرار: مقبول فرض العدم.

ورفض الفرض البديل.

اختبارات الفروض الإحصائية إذا كانت σ غير معلومة وحجم العينة $(n \leq 30)$

يعتقد مدير شركة دراسات إحصائية ان متوسط الإنفاق الشهري علي الطعام في منازل مدينة معينة يساوي 290 دينارا كويتيا، فإذا أخذت عينة عشوائية مكونة من 10 منازل فتبين أن متوسطها الحسابي $\bar{x} = 283$ وانحرافها المعياري $s = 32$

فهل يمكن الاعتماد على هذه العينة لتأكيد ما افترضه المدير استخدم مستوى ثقة 95%

(علما بأن المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي)

الحل

2014/2015

$\mu = 290$
$n = 10$
$\bar{x} = 283$
$s = 32$

(1) صياغة الفروض الإحصائية:

$H_0: \mu = 290$ فرض العدم

$H_1: \mu \neq 290$ مقابل الفرض البديل

(2) المقياس الإحصائي: σ غير معلومة و $n < 30$

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{283 - 290}{\frac{32}{\sqrt{10}}} \approx -0.69$$

(3) المعنوية: مستوى الثقة 95%

درجة الحرية $= n - 1 = 10 - 1 = 9$

$1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Rightarrow t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.262$

(4) منطقة القبول: $(-2.262, 2.262)$

(5) القرار الإحصائي: $-0.69 \in (-2.262, 2.262)$

القرار: قبول فرض العدم

ورفض الفرض البديل.

يعتقد مدير شركة ان متوسط رواتب المستخدمين لديه يساوي 290 دينارا كويتيا، فإذا أخذت عينة عشوائية مكونة من 10 مستخدمين فتبين أن متوسطها الحسابي $\bar{x} = 283$ دينار وانحرافها المعياري $s = 32$ دينار.

فهل يمكن الاعتماد على هذه العينة لتأكيد ما افترضه المدير استخدم مستوى ثقة 95%

(علما بأن المجتمع يتبع التوزيع الطبيعي)

الحل

2016/2017

$\mu = 290$
$n = 10$
$\bar{x} = 283$
$s = 32$

(1) صياغة الفرض الاحصائية:

$H_0: \mu = 290$ مقابل $H_1: \mu \neq 290$

فرض العدم — الفرض البديل

(2) المقياس الاحصائي: $n \leq 30$ ، غير معلومة

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{283 - 290}{\frac{32}{\sqrt{10}}} \approx -0.69$$

(3) المعنوية: مستوى الثقة 95%

درجة الحرية $= n - 1 = 10 - 1 = 9$

$1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Rightarrow t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.262$

(4) منطقة القبول: $(-2.262, 2.262)$

(5) القرار الاحصائي $-0.69 \in (-2.262, 2.262)$

القرار: نقبل فرض العدم

ونرفض الفرض البديل.

إذا كانت: $n = 20\ ,\bar{x} = 40\ ,s = 7$

اختبر الفرض بأن $\mu = 35$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

الحل

2019/2020

$s = 7$
$\bar{x} = 40$
$n = 20$
$\mu = 35$
$\alpha = 0.05$

(1) صياغة الفرض الإحصائية:

$H_0: \mu = 35$ فرض العدم مقابل $H_1: \mu \neq 35$ الفرض البديل

(2) المقياس الإحصائي: $n \leq 30$ ، σ غير معلومة

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{40 - 35}{\frac{7}{\sqrt{20}}} \approx 3.19$$

(3) المعنوية:

درجة الحرية $= n - 1 = 20 - 1 = 19$

$\because \alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Rightarrow t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.093$

(4) منطقة القبول: $(-2.093, 2.093)$

(5) القرار الإحصائي: $\because 3.19 \notin (-2.093, 2.093)$

القرار: رفض فرض العدم

وقبول الفرض البديل.

قوانين الإحصاء

(القيمة الحرجة) $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$; $-Z_{\frac{\alpha}{2}} = -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

(الخطأ المعياري للمجتمع) $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(هامش الخطأ – توزيع طبيعي) $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

فترة الثقة للمتوسط الحسابي $(\bar{x} - E \ , \ \bar{x} + E)$

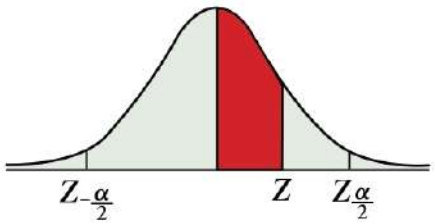
(التوزيع t) $t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{1-\frac{\alpha}{2}}$

(هامش الخطأ – توزيع t الانحراف المعياري σ غير معاوم) $E = t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$

(المقياس الإحصائي – توزيع طبيعي) $Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

(المقياس الإحصائي – توزيع طبيعي – الانحراف المعياري σ غير معلوم) $Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$

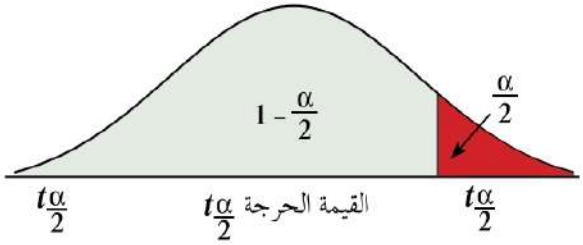
(المقياس الاحصائي – توزيع t – الانحراف المعياري σ غير معاوم) $t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$



جدول التوزيع الطبيعي المعياري (Z)

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.10 وأكثر	0.4999									

ملاحظة: استخدم **0.4999** عندما تزيد قيمة Z عن **3.09**



جدول التوزيع t

درجات الحرية $(n-1)$	$\frac{\alpha}{2}$ 0.005	0.01	0.025	0.05	0.10	0.25
1	63.657	31.821	12.706	6.314	3.078	1.000
2	9.925	6.965	4.303	2.920	1.886	0.816
3	5.841	4.541	3.182	2.353	1.638	0.765
4	4.604	3.747	2.776	2.132	1.533	0.741
5	4.032	3.365	2.571	2.015	1.476	0.727
6	3.707	3.143	2.447	1.943	1.440	0.718
7	3.500	2.998	2.365	1.895	1.415	0.711
8	3.355	2.896	2.306	1.860	1.397	0.706
9	3.250	2.821	2.262	1.833	1.383	0.703
10	3.169	2.764	2.228	1.812	1.372	0.700
11	3.106	2.718	2.201	1.796	1.363	0.697
12	3.054	2.681	2.179	1.782	1.356	0.696
13	3.012	2.650	2.160	1.771	1.350	0.694
14	2.977	2.625	2.145	1.761	1.345	0.692
15	2.947	2.602	2.132	1.753	1.341	0.691
16	2.921	2.584	2.120	1.746	1.337	0.690
17	2.898	2.567	2.110	1.740	1.333	0.689
18	2.878	2.552	2.101	1.734	1.330	0.688
19	2.861	2.540	2.093	1.729	1.328	0.688
20	2.845	2.528	2.086	1.725	1.325	0.687
21	2.831	2.518	2.080	1.721	1.323	0.686
22	2.819	2.508	2.074	1.717	1.321	0.686
23	2.807	2.500	2.069	1.714	1.320	0.685
24	2.797	2.492	2.064	1.711	1.318	0.685
25	2.787	2.485	2.060	1.708	1.316	0.684
26	2.779	2.479	2.056	1.706	1.315	0.684
27	2.771	2.473	2.052	1.703	1.314	0.684
28	2.763	2.467	2.048	1.701	1.313	0.683
29	2.756	2.462	2.045	1.699	1.311	0.683
30 وأكثر	2.575	2.327	1.960	1.645	1.282	0.675