حسام بيومي

الملف حلول مراجعة شاملة
موقع المناهج ⇦ ملفات الكويت التعليمية ⇦ الصف الثاني عشر العلمي ⇦ رياضيات ⇦ الفصل الأول

أوجد: $\lim_{x\to -2} \frac{x^2+3x+2}{x^2-4}$

الحل: بالتعويض المباشر عن $x=-2$ نحصل على $\frac{0}{0}$ (صيغة غير معينة)

نهاية المقام (شرط المقام)

$$\lim_{x\to -2}(x-2) = -2-2$$
$$= -4 \neq 0$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+3x+2}{x^2-4}$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+2)(x-2)} \quad ; \; x \neq -2$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{(x+1)}{(x-2)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to -2}(x+1)}{\lim_{x\to -2}(x-2)} = \frac{-2+1}{-4}$$

$$= \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$$

أوجد: $\lim_{x\to -7} \frac{(x+4)^2-9}{x^2+7x}$

الحل: بالتعويض المباشر عن $x=-7$ نحصل على $\frac{0}{0}$ (صيغة غير معينة)

بتحليل البسط فرق بين مربعين

$$\lim_{x\to -7} \frac{(x+4)^2-9}{x^2+7x}$$

$$= \lim_{x\to -7} \frac{(x+4+3)(x+4-3)}{x(x+7)}$$

$$= \lim_{x\to -7} \frac{(x+7)(x+1)}{x(x+7)}$$

$$= \lim_{x\to -7} \frac{(x+1)}{x}$$

$$= \frac{\lim_{x\to -7}(x+1)}{\lim_{x\to \_7} x} = \frac{-7+1}{-7}$$

$$= \frac{-6}{-7} = \frac{6}{7}$$

نهاية المقام (شرط المقام)

$$\lim_{x\to -7} x = -7 \neq 0$$

أوجد: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}$

الحل:

بالتعويض المباشر عن $x=2$ نحصل على $\frac{0}{0}$ (صيغة غير معينة)

بالضرب في مرافق البسط

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}\cdot\frac{\sqrt{x^2+5}+3}{\sqrt{x^2+5}+3}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5-9}{(x^2-2x)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x^2-2x)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)} \quad ;\ x\neq 2$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)}{x\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x+2)}{\lim\limits_{x\to 2}x\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}=\frac{2+2}{6}$$

$$=\frac{4}{6}$$

$$=\frac{2}{3}$$

نهاية ما تحت الجذر

$$\lim_{x\to 2}(x^2+5)=(2)^2+5$$

$$=9>0$$

نهاية الجذر

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{x^2+5}$$

$$=\sqrt{\lim_{x\to 2}(x^2+5)}$$

$$=\sqrt{9}=3$$

نهاية المقام

$$\lim_{x\to 2}x\left(\lim_{x\to 2}\sqrt{x^2+5}+\lim_{x\to 2}3\right)$$

$$=\ 3+3=6\ \neq 0$$

أوجد: $\lim_{x \to 9} \frac{x-9}{3-\sqrt{x}}$

الحل: بالتعويض المباشر عن $x=9$ نحصل على $\frac{0}{0}$ (صيغة غير معينة)

بالضرب في مرافق المقام

$$= \lim_{x \to 9} \frac{x-9}{3-\sqrt{x}} \cdot \frac{3+\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \to 9} \frac{(x-9)(3+\sqrt{x})}{9-x} \quad = \lim_{x \to 9} \frac{(x-9)(3+\sqrt{x})}{-(x-9)} \qquad ; \ x \neq 9$$

$$= \lim_{x \to 9} (-3-\sqrt{x})$$

$$= \lim_{x \to 9} (-3) - \lim_{x \to 9} (\sqrt{x})$$

$$= -3 - \sqrt{9}$$

$$= -3 - 3 \ = -6$$

أوجد: $\lim_{x \to 2} \frac{-x^5+x^3+x+22}{x-2}$

الحل: بالتعويض المباشر عن $x=2$ نحصل على $\frac{0}{0}$ (صيغة غير معينة)

باستخدام القسمة التركيبية

2	-1	0	1	0	1	22
	$\downarrow$	-2	-4	-6	-12	-22
	-1	-2	-3	-6	-11	0

$$\frac{-x^5+x^3+x+22}{x-2} = -x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 6x - 11$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{-x^5+x^3+x+22}{x-2} = \lim_{x \to 2} (-x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 6x - 11)$$

$$= -(2)^4 - 2(2)^3 - 3(2)^2 - 6(2) - 11$$

$$= -67$$

أوجد: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x-5}{\sqrt{x^2-9}}$

الحل:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-5}{\sqrt{x^2-9}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(3-\frac{5}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{9}{x^2}\right)}}$$

$$\sqrt{x^2}=|x|$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(3-\frac{5}{x}\right)}{|x|\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}$$

$$\because\ x\to-\infty$$

$$\therefore\ |x|=-x$$

$$=\frac{x\left(3-\frac{5}{x}\right)}{-x\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}-\frac{\left(3-\frac{5}{x}\right)}{\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}\ ;\ x\neq0$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{3-\frac{5}{x}}{\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}\right)$$

$$=-\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3-\frac{5}{x}}{\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}\right)$$

$$=-\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3-\frac{5}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}\quad=-\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}3-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{x}}{1}$$

$$=\frac{3-0}{1}$$

$$=-\frac{3}{1}\quad=-3$$

نهاية ما تحت الجذر

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{9}{x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}1-\lim_{x\to-\infty}\frac{9}{x^2}$$

$$=1-0=1>0$$

نهاية المقام

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}$$

$$=\sqrt{\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{9}{x^2}\right)}$$

$$=\sqrt{1}=1\neq0$$

إذا كانت: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{ax^2+bx+3}{2x+5} = 3$ أوجد قيمة كل من الثابتين a, b

الحل:

$\because 3 \neq 0$

يجب أن تكون درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام

$$ax^2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad a = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+bx+3}{2x+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{bx+3}{2x+5} = \frac{b}{2}$$

$$\frac{b}{2} = 3 \qquad \Longrightarrow \qquad b = 6$$

أوجد: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5\tan x - 3\sin x}{4x}$

الحل:

$$\lim_{x\to 0} \frac{5\tan x - 3\sin x}{4x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{5\tan x}{4x} - \frac{3\sin x}{4x}$$

$$= \lim_{x\to 0} 5.\frac{\tan x}{4x} - 3.\frac{\sin x}{4x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(5.\frac{\tan x}{4x} - 3.\frac{\sin x}{4x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(5.\frac{\tan x}{4x}\right) - \lim_{x\to 0} \left(3.\frac{\sin x}{4x}\right)$$

$$= 5\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{4x} - 3\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{4x}$$

$$= 5.\frac{1}{4} - 3.\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

أوجد: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$

الحل: بالضرب في مرافق المقام

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\sin^2 x\,(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x\,(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+\cos x)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}1}{\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)}\quad=\frac{1}{2}$$

نهاية المقام

$$\lim_{x\to 0}(1+\cos x)$$

$$=\lim_{x\to 0}1+\lim_{x\to 0}\cos x$$

$$=1+1=2\neq 0$$

ابحث اتصال الدالة f عند $x=-1$ حيث:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x+1|}{x+1}-2x & : x\neq -1\\ 2 & : x=-1\end{cases}$$

الحل:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x+1)}{x+1}-2x & : x>-1\\ \dfrac{-(x+1)}{x+1}-2x & : x<-1\\ 2 & : x=-1\end{cases}=\begin{cases}1-2x & : x>-1\\ -1-2x & : x<-1\\ 2 & : x=-1\end{cases}$$

$f(-1)=2$ (1)

النهاية من جهه اليمين

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}(1-2x)=1-2(-1)=3$$

النهاية من جهه اليسار

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}(-1-2x)=-1-2(-1)=1$$

$$\because \lim_{x\to -1^+} f(x)\neq \lim_{x\to -1^-} f(x)$$

$\therefore \lim\limits_{x\to -1} f(x)$ غير موجودة (2)

من (1) و (2) نجد أن الدالة f غير متصلة عند $x=-1$

لتكن: $f(x) = 2x^2 - 3$, $g(x) = \sqrt{x+4}$

ابحث اتصال الدالة $g \circ f$ **عند** $x = -2$

الحل:

أولا ندرس اتصال الدالة f عند $x = -2$

الدالة f كثيرة حدود متصلة على R

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x = -2$

بالتعويض عن $x = -2$

$$f(-2) = 2(-2)^2 - 3 = 5$$

ثانيا ندرس اتصال الدالة g عند $x = 5$

بفرض أن $h(x) = x + 4$

(a) الدالة h متصلة عند $x = 5$

(b) $h(5) = 5 + 4 = 9 > 0$

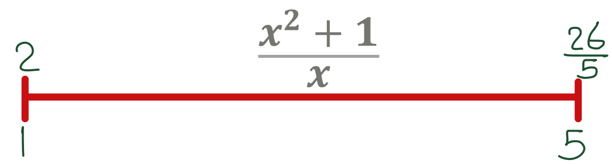
$\therefore$ الدالة g متصلة عند $x = 5$

من أولا وثانيا نجد أن الدالة $g \circ f$ متصلة عند $x = -2$

ادرس اتصال الدالة f على الفترة $[1,5]$ حيث:

$$f(x)=\begin{cases} 2 & : x=1 \\ \dfrac{x^2+1}{x} & : 1<x<5 \\ \dfrac{26}{5} & : x=5 \end{cases}$$

الحل:



بفرض أن $g(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$

الدالة g متصلة على $R-\{0\}$ (حدودية نسبية)

$\because f(x)=g(x)\ \forall x\in(1,5)$

$\therefore$ الدالة f متصلة على $(1,5)$ (1)

$f(1)=2$

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+1}{x}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to1^+}(x^2+1)}{\lim\limits_{x\to1^+} x}$$

$$=\frac{(1)^2+1}{1}=2$$

$\because f(1)=\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x=1$ من جهة اليمين. (2)

$f(5)=\dfrac{26}{5}$

$$\lim_{x\to5^-} f(x)=\lim_{x\to5^-}\frac{x^2+1}{x}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to5^-}(x^2+1)}{\lim\limits_{x\to5^-} x}$$

نهاية المقام

$\lim\limits_{x\to1^+} x=1\neq0$

$$=\frac{(5)^2+1}{5}=\frac{26}{5}$$

$\because f(5)=\lim\limits_{x\to5^-} f(x)$

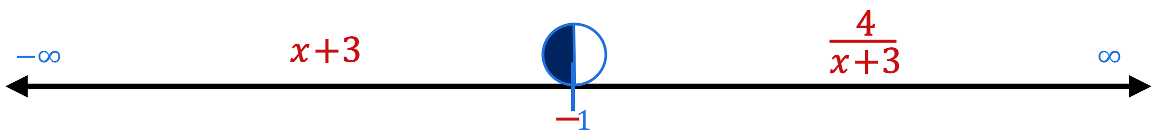
$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x=5$ من جهة اليسار. (3)

من $(1),(2),(3)$ نجد أن الدالة f متصلة على $[1,5]$

ادرس اتصال الدالة f على مجالها حيث:

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & : x\le -1 \\ \dfrac{4}{x+3} & : x>-1 \end{cases}$$

الحل:



$$D_f=(-\infty,-1]\cup(-1,\infty)=\mathbb{R}$$

بفرض أن:

$$h(x)=\frac{4}{x+3}$$

الدالة h متصلة على $\mathrm{R}-\{-3\}$

(حدودية نسبية)

$\because f(x)=h(x) \quad \forall x\in(-1,\infty)$

$\therefore$ الدالة f متصلة على $(-1,\infty)$ $\quad (2)$

$$g(x)=x+3$$

الدالة g متصلة على R

(كثيرة حدود)

$\because f(x)=g(x) \quad \forall x\in(-\infty,-1]$

$\therefore$ الدالة f متصلة على $(-\infty,-1]$ $\quad (1)$

$$f(-1)=-1+3=2$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{4}{x+3}$$

$$=\frac{\lim_{x\to1^+} 4}{\lim_{x\to1^+}(x+3)}$$

$$=\frac{4}{-1+3}=2$$

$$\because f(-1)=\lim_{x\to1^+} f(x)=2$$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x=-1$ من جهة اليمين $\quad (3)$

من $(1),(2),(3)$ نجد أن الدالة f متصلة على مجالها R.

لتكن f : $f(x)=\sqrt{x^2-7x+10}$ أوجد D_f

ثم ادرس اتصال الدالة f على الفترة $[6,10]$

الحل:

نفرض $f(x)=\sqrt{g(x)}$

أولا نوجد مجال الدالة f

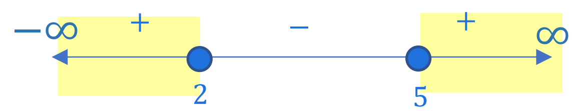
$$g(x)=x^2-7x+10$$

$$D_f=\{x: g(x)\geq 0\}$$

$$x^2-7x+10\geq 0$$

$$x^2-7x+10=0$$

$$x=5 \qquad x=2$$



$$D_f=(-\infty,2]\cup[5,\infty)$$

ثانيا ندرس اتصال الدالة f على الفترة $[6,10]$

$$g(x)=x^2-7x+10$$

(١) الدالة g كثيرة حدود متصلة على $[6,10]$

(٢) $g(x)\geq 0$ على $(-\infty,2]\cup[5,\infty)$

$\because$ $[6,10]\subset(-\infty,2]\cup[5,\infty)$

$\therefore$ $g(x)\geq 0$ على $[6,10]$

من أولا , ثانيا نجد أن:

الدالة f متصلة على $[6,10]$

لتكن f : $f(x) = \left|3x^2 + 4x - 1\right|$ ادرس اتصال الدالة f على R

الحل:

بفرض أن $g(x) = |x| \quad , \quad h(x) = 3x^2 + 4x - 1$

$$(g \circ h)(x) = g\big(h(x)\big) = g(3x^2 + 4x - 1)$$

$$= \left|3x^2 + 4x - 1\right| = f(x)$$

$\because$ الدالة h متصلة على R ، الدالة g متصلة على R

$\therefore$ الدالة f متصلة على R

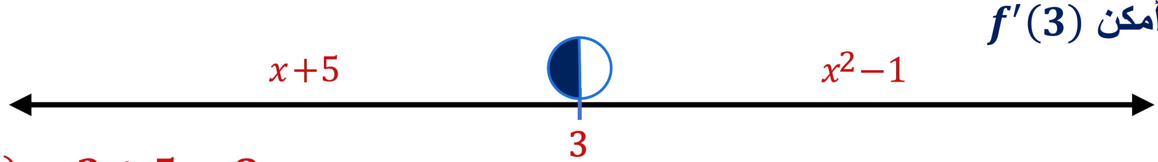
(لأن تركيب دالتين متصلتين على R هو دالة متصلة على R)

لتكن الدالة f:

$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & : x \le 3 \\ x^2 - 1 & : x > 3 \end{cases}$$

أوجد إن أمكن $f'(3)$

الحل:



$$f(3) = 3 + 5 = 8$$

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$ إن وجدت

$$f'(3) = \lim_{x\to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$$

$$f'_-(3) = \lim_{x\to 3^-} \frac{x + 5 - 8}{x - 3}$$

$$= \lim_{x\to 3^-} \frac{x - 3}{x - 3} \qquad :x \neq 3$$

$$= \lim_{x\to 3^-} 1 = 1$$

$$f'_+(3) = \lim_{x\to 3^+} \frac{x^2 - 1 - 8}{x - 3}$$

$$= \lim_{x\to 3^+} \frac{x_2 - 9}{x - 3}$$

$$= \lim_{x\to 3^+} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} \qquad :x \neq 3$$

$$= \lim_{x\to 3^+} (x + 3) = 3 + 3 = 6$$

$$\because f'_+(3) \neq f'_-(3)$$

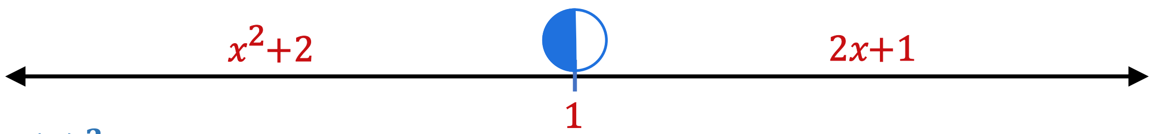
$\therefore f'(3)$ غير موجودة

لتكن الدالة f : $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & : x \le 1 \\ 2x+1 & : x>1 \end{cases}$

دالة متصلة على مجالها أوجد $f'(x)$ إن أمكن.

الحل: $D_f=(-\infty,1]\cup(1,\infty)=R$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & : x<1 \\ \text{تبحث} & : x=1 \\ 2 & : x>1 \end{cases}$$



$$f(1)=(1)^2+2=3$$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

إن وجدت

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{2x+1-3}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}2=2$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+2-3}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}(x+1)=1+1=2$$

$$\because f'_+(1)=f'_-(1)=2$$

$$\therefore f'(1)=2$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & : x<1 \\ 2 & : x=1 \\ 2 & : x>1 \end{cases}=\begin{cases} 2x & : x<1 \\ 2 & : x\ge 1 \end{cases}$$

أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم على منحنى الدالة f حيث $f(x)=\frac{x-1}{x+2}$ عند النقطة $(1,0)$

الحل:

$$(x-1)' = (1)$$
$$(x+2)' = (1)$$

$$f'(x)=\frac{(1)(x+2)-(x-1)(1)}{(x+2)^2}$$

$$m=\frac{(1)(1+2)-(1-1)(1)}{(1+2)^2}=\frac{1}{3}$$

معادلة المماس

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-0=\frac{1}{3}(x-1)$$
$$y=\frac{1}{3}(x-1)$$
$$y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$$

معادلة الناظم

$$y-y_1=\frac{-1}{m}(x-x_1)$$
$$y-0=\frac{-1}{\frac{1}{3}}(x-1)$$
$$y=-3(x-1)$$
$$y=-3x+3$$

أوجد مشتقة الدالة $y=\frac{\cos x}{1-\sin x}$

$$y'=\frac{(-\sin x)(1-\sin x)-(\cos x)(-\cos x)}{(1-\sin x)^2}$$

$$y'=\frac{-\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x}{(1-\sin x)^2}$$

$$y'=\frac{-\sin x+1}{(1-\sin x)^2}$$

$$y'=\frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2}$$

$$y'=\frac{1}{1-\sin x}$$

إذا كان: $g(x) = x^{13}$, $f(x) = -2x^3 + 4$

فأوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(f \circ g)'(x)$, $(g \circ f)'(0)$

الحل:

$$(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big).g'(x) = f'(x^{13}).g'(x)$$

$g(x) = x^{13}$

$g'(x) = 13x^{12}$

$f(x) = -2x^3 + 4$

$f'(x) = -6x^2$

$f'(x^{13}) = -6(x^{13})^2 = -6x^{26}$

$$(f \circ g)'(x) = (-6x^{26})(13x^{12}) = -78x^{38}$$

$f(0) = 4$

$$(g \circ f)'(0) = g'\big(f(0)\big).f'(0) = g'(4).f'(0)$$

$f(x) = -2x^3 + 4$

$f'(x) = -6x^2$

$f'(0) = -6 \times (0)^2 = 0$

$g(x) = x^{13}$

$g'(x) = 13x^2$

$g'(4) = 13 \times (4)^2$

$$(g \circ f)'(0) = 13 \times (4)^2 \times (0) = 0$$

لتكن $u = 2x^3 + x \quad , \quad y = u^2 + 4u - 3$

أوجد $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$u = 2x^3 + x$

$\frac{du}{dx} = 6x^2 + 1$

$y = u^2 + 4u - 3$

$\frac{dy}{du} = 2u + 4$

$$\frac{dy}{dx} = (2u + 4)(6x^2 + 1) = (2(2x^3 + x) + 4)(6x^2 + 1)$$

$$= (4x^3 + 2x + 4)(6x^2 + 1)$$

$$= 24x^5 + 4x^3 + 12x^3 + 2x + 24x^2 + 4$$

$$= 24x^5 + 16x^3 + 24x^2 + 2x + 4$$

لتكن: $y = \sqrt[5]{(x^2 + 3x + 5)^3}$ أوجد y'

الحل:

$$y = (x^2 + 3x + 5)^{\frac{3}{5}}$$

$$y' = \frac{3}{5}(x^2 + 3x + 5)^{-\frac{2}{5}}(2x + 3)$$

$$y' = \frac{3}{5} \frac{(2x + 3)}{\sqrt[5]{(x^2 + 3x + 5)^2}}$$

أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $x^2 - y^2 + yx - 1 = 0$ عند $(1,1)$

الحل:

$$x^2 - y^2 + yx - 1 = 0$$

$$2x - 2yy' + (y + xy') - 0 = 0$$

$$2x - 2yy' + y + xy' = 0$$

$$-2yy' + xy' = -2x - y$$

$$(-2y + x)y' = -2x - y$$

$$y' = \frac{-2x - y}{-2y + x}$$

$$m = y'\Big|_{(1,1)} = \frac{-2(1) - (1)}{-2(1) + (1)} = 3$$

معادلة المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = 3(x - 1)$$

$$y - 1 = 3x - 3$$

$$y = 3x - 3 + 1$$

$$y = 3x - 2$$

إذا كانت: $y = \sqrt{1 - 2x}$

فأثبت أن: $yy'' + (y')^2 = 0$

الحل:

$$y = \sqrt{1 - 2x}$$

$$y^2 = 1 - 2x$$

$$2yy' = -2$$

$$yy' = -1$$

$$(y')(y') + (y)(y'') = 0$$

$$(y')^2 + yy'' = 0$$

أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة المتصلة f : $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ فى الفترة $[-2, 3]$

الحل: $\because$ الدالة f متصلة على $[-2, 3]$

$\therefore$ الدالة f لها قيمة عظمى مطلقة ولها قيمة صغرى مطلقة فى الفترة $[-2, 3]$

$f(-2) \approx 1.58$

$f(3) \approx 2.08$

$$f(x) = x^{-\frac{2}{3}} \longrightarrow f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{3}}{x^{\frac{1}{3}}}$$

لاحظ أن: $f'(x) \neq 0$ "لأن البسط لا يساوي الصفر"

$f'(x)$ غير موجودة "عندما يكون المقام يساوي صفرا"

المقام	البسط
$x^{\frac{1}{3}} = 0$	$\frac{2}{3} \neq 0$
$x = 0 \quad \in (-2, 3)$	

$\therefore (0, 0)$ نقطة حرجة $\qquad f(0) = 0$

x	-2	0	3
$f(x)$	1.58	0	2.08

من الجدول:

(2.08) هى القيمة العظمى المطلقة ،

(0) هى القيمة الصغرى المطلقة.

بين أن الدالة f : $f(x) = x^2 + 2x$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[-3, 1]$ ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية وفسر إجابتك.

الحل:

- شروط النظرية:

الدالة f كثيرة حدود متصلة وقابلة للاشتقاق على R فهي متصلة على $[-3, 1]$ وقابلة للاشتقاق على $(-3, 1)$

∴ تحققت شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[-3, 1]$

- إيجاد c:

يوجد على الأقل $c \in (-3, 1)$ بحيث:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(-3)}{1 - (-3)}$$

$f(-3) = 3$ $(-3, 3)$

$f(1) = 3$ $(1, 3)$

$f'(x) = 2x + 2$

$f'(c) = 2c + 2$

$$2c + 2 = \frac{3 - 3}{4}$$

$$2c + 2 = 0$$

$$2c = -2$$

$$c = -1 \quad \in (-3, 1)$$

- التفسير:

يوجد مماس لمنحنى الدالة f عند $x = -1$ يوازي القاطع المار بالنقطتين $(-3, 3), (1, 3)$

لتكن الدالة f : $f(x) = x^3 - 12x - 5$

أوجد كلا مما يلي:

1. النقاط الحرجة للدالة.

2. الفترات التي تكون الدالة على f متزايدة أو متناقصة

3. القيم القصوى المحلية

الحل:

الدالة f كثيرة حدود متصلة وقابلة للاشتقاق على R

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 12 = 0$$

$x = 2$ $\qquad$ $x = -2$

$$f(2) = -21$$

$$f(-2) = 11$$

النقاط الحرجة هي

$(2, -21), (-2, 11)$

x	$-\infty$ $\quad$ -2	2	∞
الفترات	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
إشارة f'	$+$	$-$	$+$
سلوك الدالة	↗	↘	↗

الدالة متناقصة على الفترة $(-2, 2)$

الدالة متزايدة على الفترة

$(-\infty, -2)$ ، $(2, \infty)$

11 قيمة عظمى محلية $x = -2$

-21 قيمة صغرى محلية $x = 2$

أوجد فترات التقعر ونقطة الانعطاف لمنحنى الدالة f : $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$

الحل:

الدالة f كثيرة حدود متصلة وقابلة للاشتقاق على R

$$f'(x) = 6x^2 + 6x$$

$$f''(x) = 12x + 6$$

$$f''(x) = 0$$

$$12x + 6 = 0$$

$$12x = -6$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$ $\quad -\frac{1}{2} \quad$ ∞	
الفترات	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$
إشارة f''	$-$	$+$
التقعر	$\cap$	$\cup$

بيان الدالة f مقعر للأسفل على الفترة $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$

بيان الدالة f مقعر للأعلى على الفترة $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$

$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ نقطة انعطاف

ادرس تغير الدالة f : $f(x) = x^3 - 3x + 4$ وارسم بياناتها

الحل:

الدالة f كثيرة حدود متصلة وقابلة للاشتقاق على R

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^3) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(x^3) = \infty$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 3 = 0$$

$x = -1$ $\quad f(-1) = 6$

$x = 1$ $\quad f(1) = 2$

النقاط الحرجة $(1,2), (-1,6)$

x	$-\infty$ $\quad -1$		1 $\quad \infty$
الفترات	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
إشارة f'	$+$	$-$	$+$
سلوك الدالة	↗	↘	↗

الدالة متزايدة على الفترة $(-\infty,-1), (1,\infty)$

الدالة متناقصة على الفترة $(-1,1)$

6 قيمة عظمى محلية $x = -1$

2 قيمة صغرى محلية $x = 1$

$$f''(x) = 6x$$

$$f''(x) = 0$$

$$6x = 0$$

$x = 0$ $\quad f(0) = 4$

نقطة انعطاف $(0,4)$

بيان الدالة مقعر للأسفل على الفترة $(-\infty,0)$

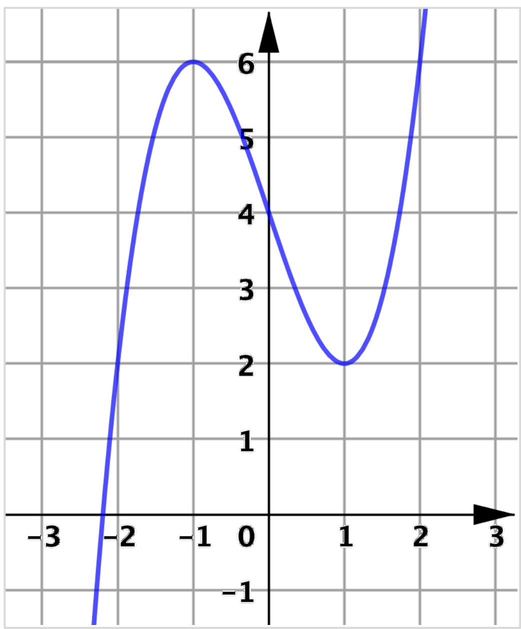
بيان الدالة مقعر لأعلى على الفترة $(0,\infty)$

x	$-\infty$	0	∞
الفترات	$(-\infty,0)$		$(0,\infty)$
إشارة f''	$-$		$+$
التقعر	$\cap$		$\cup$

نقاط إضافية :

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	2	6	4	2	6

بيان الدالة f :



أوجد عددين مجموعهما 14 وناتج ضربهما أكبر ما يمكن.

الحل:

بفرض أن العدد الأول $= x$

$\therefore$ العدد الثانى $= (14 - x)$

$$f(x) = x(14 - x)$$

$$f(x) = 14x - x^2$$

$$f'(x) = 14 - 2x$$

$$\boldsymbol{f'(x) = 0}$$

$$14 - 2x = 0$$

$$-2x = -14$$

$$x = 7$$

$$f(7) = 49$$

$\therefore (7\ ,\ 49)$ نقطة حرجة

x	$-\infty$	7	∞
إشارة f'	$+$		$-$
سلوك الدالة	$\nearrow$		$\searrow$

يكون ناتج الضرب أكبر ما يمكن عندما يكون

$$x = 7$$

$f(7)$ قيمة عظمى مطلقة عند $x = 7$

$\therefore$ العدد الأول 7

العدد الثانى $= 14 - 7 = 7$

أوجد فترة ثقة 95% للمتوسط الحسابى للمجتمع الإحصائى μ علما بأن العينة أخذت من مجتمع طبيعي. إذا كان لدينا $n = 13$, $S = 0.3$, $\bar{x} = 8.4$

الحل: $\bar{x} = 8.4$, $S = 0.3$, $n = 13$

σ غير معلومة , $n \le 30$ نستخدم توزيع t

إيجاد $t_{\frac{\alpha}{2}}$

$\therefore 1 - \alpha = 0.95$

$\alpha = 0.05$

$\frac{\alpha}{2} = 0.025$

درجات الحرية

$n - 1 = 13 - 1$

$= 12$

من جدول التوزيع t نجد: $t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.179$

هامش الخطأ

$$E = t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 2.179 \times \frac{0.3}{\sqrt{13}} = 0.1813$$

فترة الثقة

$$(\bar{x} - E, \bar{x} + E)$$

$$(8.4 - 0.1813, 8.4 + 0.1813) = (8.2187 \ , \ 8.5813)$$

متوسط العمر بالساعات لعينة من 100 مصباح كهربائى مصنعة فى أحد المصانع $\bar{x} = 1570$ بانحراف معيارى $S = 120$ يقول صاحب المصنع إن متوسط العمر بالساعات $\mu = 1600$ للمصابيح المصنعة في المصنع.
اختبر صحة الفرض $\mu = 1600$ مقابل الفرض $\mu \neq 1600$
وباختيار مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

الحل:

$$n = 100 \quad , \quad \bar{x} = 1570 \quad , \quad S = 120 \quad , \quad \mu = 1600$$

١. صياغة الفروض: $H_0: \mu = 1600$ مقابل $H_1: \mu \neq 1600$

٢. المقياس الإحصائي:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{1570 - 1600}{\frac{120}{\sqrt{100}}} = -2.5$$

٣. $\because$ مستوى الثقة 95%

$$\therefore Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

٤. منطقة القبول هي $(-1.96 , 1.96)$

٥. القرار الإحصائي:

$$\because -2.5 \notin (-1.96 , 1.96)$$

$\therefore$ نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل.