

تم تحميل هذا الملف من موقع ملفات الكويت التعليمية



[com.kwedufiles.www//:https](https://www.kwedufiles.com)

\*للحصول على أوراق عمل لجميع الصفوف وجميع المواد اضغط هنا

\* للحصول على أوراق عمل لجميع مواد الصف الثاني عشر العلمي اضغط هنا

<https://kwedufiles.com/14>

\* للحصول على جميع أوراق الصف الثاني عشر العلمي في مادة رياضيات وجميع الفصول, اضغط هنا

<https://kwedufiles.com/14math>

\* للحصول على أوراق عمل لجميع مواد الصف الثاني عشر العلمي في مادة رياضيات الخاصة بـ الفصل الثاني اضغط هنا

<https://www.kwedufiles.com/14math2>

\* لتحميل كتب جميع المواد في جميع الفصول للـ الصف الثاني عشر العلمي اضغط هنا

<https://www.kwedufiles.com/grade14>

[bot\\_kwlinks/me.t//:https](https://t.me/bot_kwlinks)

للحصول على جميع روابط الصفوف على تلغرام وفيسبوك من قنوات وصفحات: اضغط هنا

الروابط التالية هي روابط الصف الثاني عشر العلمي على مواقع التواصل الاجتماعي

مجموعة الفيسبوك

صفحة الفيسبوك

مجموعة التلغرام

بوت التلغرام

قناة التلغرام

رياضيات على التلغرام

## ( 1 - 6 ) المساحات فى المستوى

### المساحات

دالة واحدة  $f(x)$

فترتين  $[a, b], [b, c]$

$$A = \left| \int_a^b f(x) dx \right| + \left| \int_b^c f(x) dx \right|$$

فترة واحدة  $[a, b]$

$$A = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

دالتين  $g(x), f(x)$

فترتين  $[a, b], [b, c]$

$$A = \left| \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \right| + \left| \int_b^c (f(x) - g(x)) dx \right|$$

فترة واحدة  $[a, b]$

$$A = \left| \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \right|$$

في حالة الأسئلة الموضوعية اذا علمت فترة التكامل  $[a, b]$  يمكن حساب المساحة على الحاسبة مباشرة

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

$$A = \int_a^b |f(x)| dx$$

كن طموحا لكي تصل الي اهدافك

أولاً: مساحة منطقة محددة بمنحنى الدالة  $f$  ومحور السينات في الفترة  $[a, b]$

علمنا من دراستنا السابقة أنه إذا كانت  $f$  دالة متصلة على  $[a, b]$  فإن مساحة المنطقة  $A$  المحددة بمنحنى الدالة  $f$  ومحور السينات والمستقيمين  $x = a$  ,  $x = b$

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

إذا كانت:

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

فإن

$$f(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

إذا كانت:

$$A = - \int_a^b f(x) dx$$

فإن

**دالة واحدة  $f(x)$**

**مثال (2)**

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة  $f$  :  $f(x) = x^2 - 3x$  ومحور السينات.

كن إيجابياً ولا تنتظر خلفك

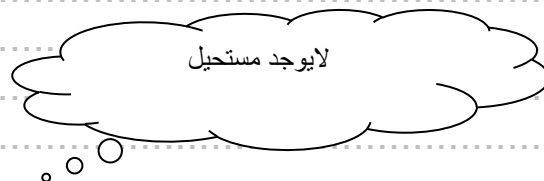
2 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة  $f : f(x) = x^2 + 5x + 4$  ومحور السينات.

هل تريد النجاح والتفوق ؟؟

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة  $f$  :  $f(x) = x^2 + 4 - 4x$   
ومحور السينات والمستقيمين  $x = 2$  ,  $x = 5$

اذهب وقيل يدي والديك واشكرهم  
او ادعى لهما بالمغفرة والرحمة

1 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة  $f(x) = x^2 + 4 - 4x$  ومحور السينات والمستقيمين  $x = -1$  ,  $x = 4$ .



لتكن  $f$  دالة متصلة على الفترة  $[a, b]$  ،  $c \in (a, b)$  حيث  $f(c) = 0$   
فإن مساحة المنطقة المستوية المحددة بمنحنى الدالة  $f$  ومحور السينات في الفترة  $[a, b]$  هي:

$$A = \left| \int_a^c f(x) dx \right| + \left| \int_c^b f(x) dx \right|$$

### مثال (3)

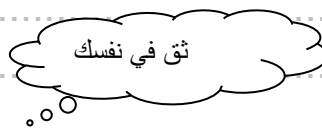
أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة  $f$  ومحور السينات في الفترة الميمنة.

**a**  $f(x) = x^3 - 4x$  ،  $\left[-1, \frac{3}{2}\right]$

تستطيع ان تفعلها مهما كانت

3 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة  $f$  ومحور السينات في الفترة المبيّنة.

a  $f(x) = x^3 - 9x$  ,  $[-2, 1]$





أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة  $f$  ومحور السينات في الفترة المبينة.

b  $f(x) = \sin x$  ,  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

هل اديت فروضك؟؟

3 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة  $f$  ومحور السينات في الفترة الميمنة.

b  $f(x) = \cos x$  ,  $[0, \pi]$

كن طموح وحقق اهدافك

## دالتين $f(x)$ , $g(x)$

ثانيًا: مساحة منطقة محددة بمنحني دالتين في الفترة  $[a, b]$

مساحة منطقة محددة بين منحنيين

إذا كانت كل من  $f, g$  متصلتين على الفترة  $[a, b]$ ، حيث

$$f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالتين  $f, g$  والمستقيمين  $x = a$ ,  $x = b$  هي:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

$$A = \left| \int_{-1}^2 (y_1 - y_2) dx \right| = \left| \int_{-1}^2 (y_2 - y_1) dx \right|$$

مثال (6)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحني القطع المكافئ  $y_1 = 2 - x^2$  والمستقيم  $y_2 = -x$

لا يأس مع الحياة ولا حياة مع اليأس

6 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالتين:  $y_1 = x^2 + 2$  ,  $y_2 = -2x + 5$

من لم يتعلم في صغره لم يتقدم في كبره

$$f(x) = x^2 + 1 \quad , \quad g(x) = -x^2 + 9$$

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحني:

نحن من نصنع مصائرنا

$$f(x) = -2x^2 + 2 \quad , \quad g(x) = x^2 - 1$$

7 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالتين:

انار الله  
دربك  
ووفقك  
لما يحب  
ويرضاه

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة  $f$  ومنحنى الدالة  $g$  حيث:

$$f(x) = x^3 - 1, \quad g(x) = x - 1$$

النجاح  
ملك من  
يدفع  
ثمنه

8 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة  $f$  ومنحنى الدالة  $g$  في كل مما يلي:

$$f(x) = 1 - x^3 , \quad g(x) = -4x + 1$$

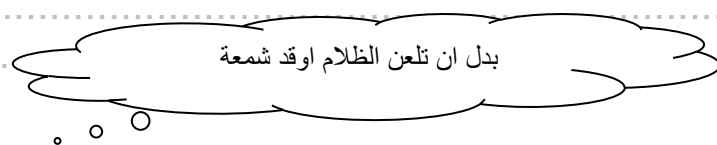
لا نحقق الاعمال بالامنيات وانما بالارادة نصنع المعجزات



أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين:  $f(x) = x^3 - x$  ,  $g(x) = 3 - 3x^2$

قد نتعثر احيانا  
وتسقط احيانا اخري  
انهض وواصل الطريق

9 أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين:  $g(x) = \frac{x}{2}$  ،  $f(x) = \sqrt{x}$  والمستقيمين  $x=0$  ،  $x=9$



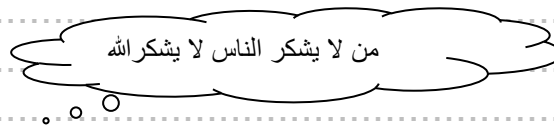
## دالتين $f$ ، $g$ غير متقاطعتين

مثال (5)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة  $f: f(x) = e^x$  ومنحنى الدالة  $g: g(x) = -1 - x^2$  والمستقيمين  $x = 0$  ،  $x = 3$  علماً بأن المنحنيين للدالتين  $f$  ،  $g$  غير متقاطعين.

يقول اينشتاين : ليس الامر اني عبقرى ، كل  
ما هنالك اني اجاهد مع المشاكل لفترة اطول

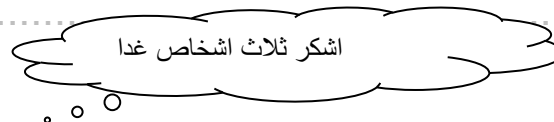
5 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة  $f(x) = x^2 + 1$  ومنحنى الدالة  $g(x) = -x^2 - 3$  والمستقيمين  $x = -1$  ,  $x = 1$  علماً بأن المنحنيين للدالتين  $f, g$  غير متقاطعين.



أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة  $f: f(x) = x^2 + 2$  ومنحني الدالة  $g: g(x) = \sqrt[3]{x}$  والمستقيمين  $x = 0$  ,  $x = 1$  علمًا بأن:  $f(x) > g(x)$  ,  $\forall x \in [0, 1]$

ان الاجابة الوحيدة علي الهزيمة علي الانتصار

- 4 أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة  $f(x) = x^2 + 3$  ومنحنى الدالة  $g(x) = x^2 + 1$  والمستقيمين  $x = -1$  ,  $x = 1$  علماً بأن:  $f(x) > g(x)$  ,  $\forall x \in [-1, 1]$



## ( 2 - 6 ) حجوم الاجسام الدورانية

### الحجوم

فترة واحدة  $[a, b]$

دالة واحدة  $f(x)$

$$A = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

فترة واحدة  $[a, b]$

دالتين  $g(x), f(x)$

$$A = \pi \int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2] dx$$

حيث  $f(x) \geq g(x) \geq 0$  و  $f(x) \leq g(x) \leq 0$

في حالة الأسئلة الموضوعية اذا علمت فترة التكامل  $[a, b]$  يمكن حساب الحجم على الحاسبة مباشرة

دالتين  $g(x), f(x)$

$$A = \pi \left| \int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2] dx \right|$$

دالة واحدة  $f(x)$

$$A = \pi \left| \int_a^b (f(x))^2 dx \right|$$

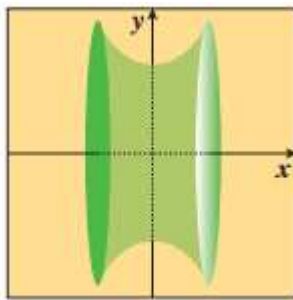
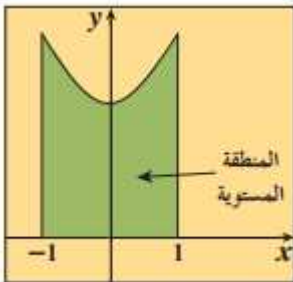
## دالة واحدة $f(x)$

إذا نتج مجسم من دوران منطقة محددة بمنحني دالة  $f$  ومحور السينات والمستقيمين  $x = a$  ,  $x = b$  حيث  $a < b$  دورة كاملة حول محور السينات فإن حجم هذا المجسم يساوي:

$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx$$

### مثال (1)

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحني الدالة  $f: f(x) = x^2 + 2$  ومحور السينات في الفترة  $[-1, 1]$ .

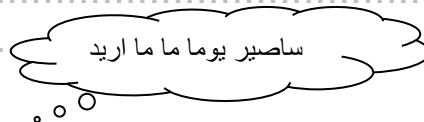


شكل توضيحي

ابتسم للحياة

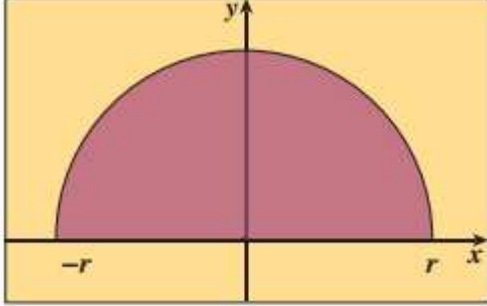


1 أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة  $f$ :  $f(x) = \sqrt{x-1}$  ومحور السينات في الفترة  $[1, 5]$ .

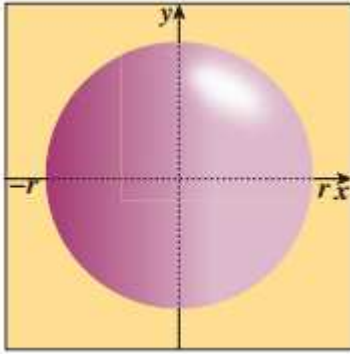


## مثال (2)

باستخدام التكامل المحدد أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بنصف الدائرة  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$



شكل توضيحي



احد اسرار النجاح في الصبر  
والمثابرة

2 باستخدام التكامل المحدد أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة  $f$  :  $r \neq 0$  ،  $f(x) = r$  في الفترة  $[0, h]$

في لفظ القصة شيء يقول لك قم

باستخدام التكامل المحدد استنتج الصيغة التي تعطى حجم مخروط دائري قائم ارتفاعه  $h$  (وحدة طول) وطول نصف قطر قاعدته  $r$  (وحدة طول) من دوران منطقة مستوية دورة كاملة حول محور السينات. (إرشاد: استخدم الدالة  $f(x) = \frac{r}{h}x$  في الفترة  $[0, h]$ )

تعود علي العادات الحسنة وهي سوف تصنعك

## دالتين $f(x)$ , $g(x)$

إذا نتج مجسم عن دوران منطقة محددة بمنحني الدالتين  $f$ ,  $g$  والمستقيمين  $x=a$ ,  $x=b$  دورة كاملة حول محور السينات، بحيث  $f, g$  لهما الإشارة نفسها في الفترة  $[a, b]$ ، فإن حجم هذا المجسم يعطى بالقاعدة:

$$V = \pi \int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2] dx$$

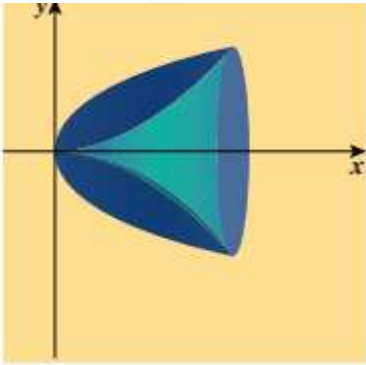
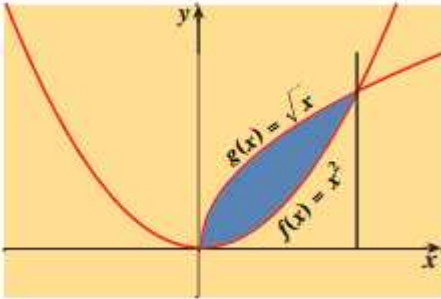
$$f(x) \leq g(x) \leq 0 \quad \text{أو} \quad f(x) \geq g(x) \geq 0$$

حيث:

مثال (3)

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المسطرة دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحني الدالتين

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = \sqrt{x}$$



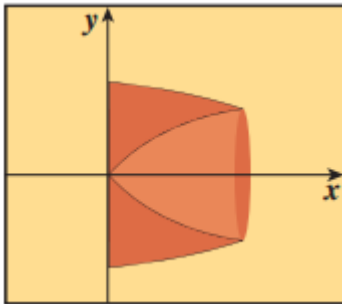
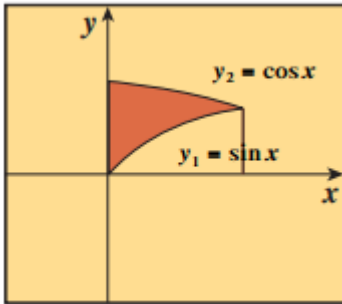
نتعلم من الفشل أكثر من النجاح

3 أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بين منحنى الدالتين

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + 1 \quad , \quad g(x) = \frac{x}{2} + 2$$

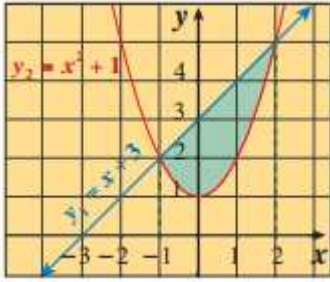
الجميع يفكر في تغيير العالم، لكن لا احد يفكر في تغيير نفسه

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحني الدالتين  $y_1 = \sin x$  ,  $y_2 = \cos x$  على الفترة  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ .



تستطيع ان تفعلها

4 أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحني الدالتين:  $y_1 = x + 3$  ,  $y_2 = x^2 + 1$



رايك في نفسك اهم من راي الاخرين فيك



أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات المحددة بكل من المستقيمات والمنحنيات التالية:

$$y = \sec x, y = \sqrt{2}, -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$$

$$y = \sqrt{x}, y = 0, x = 4$$

قمة النجاح ليست في عدم الفشل، بل في القيام بعد كل عثرة

## طول القوس

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

( 1 ) نوجد  $f'(x)$  نوجد المشتقة

( 2 ) نوجد  $(f'(x))^2$  تربيع

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad ( 3 ) \text{ تعويض بالقانون}$$

( 4 ) اختيار احدى طرق التكامل لإيجاد قيمة التكامل المحدد يمكن استخدام هذه الطريقة

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{n+1} (ax+b)^{n+1} + c$$

يمكن استخدام هذه الطريقة لحل معظم المسائل

### ( 3 - 6 ) طول القوس

قاعدة طول القوس

إذا كانت الدالة  $f'$  متصلة على  $[a, b]$  فإن طول القوس من منحنى  $y = f(x)$  في  $[a, b]$  هو:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

مثال (1)

أوجد طول القوس من منحنى الدالة  $f : f(x) = \sqrt{x^3}$  في الفترة  $[0, 4]$

لا يأس مع الحياة ولا حياة مع اليأس

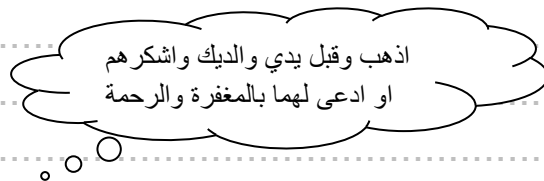
1 أوجد طول القوس من منحنى الدالة  $f$  :  $f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 1$  في الفترة  $[3, 8]$

الامال العظيمة تصنع الاشخاص العظماء

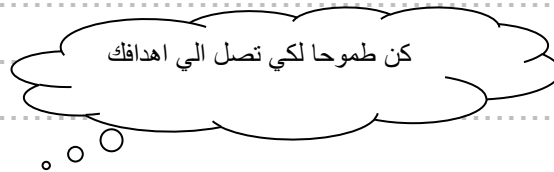
أوجد طول القوس من منحنى الدالة  $f$  :  $f(x) = \frac{1}{3}(3 + 2x)^{\frac{3}{2}}$  في الفترة  $[0, 6]$

بالسؤال يتعلم الانسان

2 أوجد طول القوس من منحنى الدالة  $f$  :  $f(x) = \frac{2}{9}(9 + 3x)^{\frac{3}{2}}$  في الفترة  $[2, 5]$

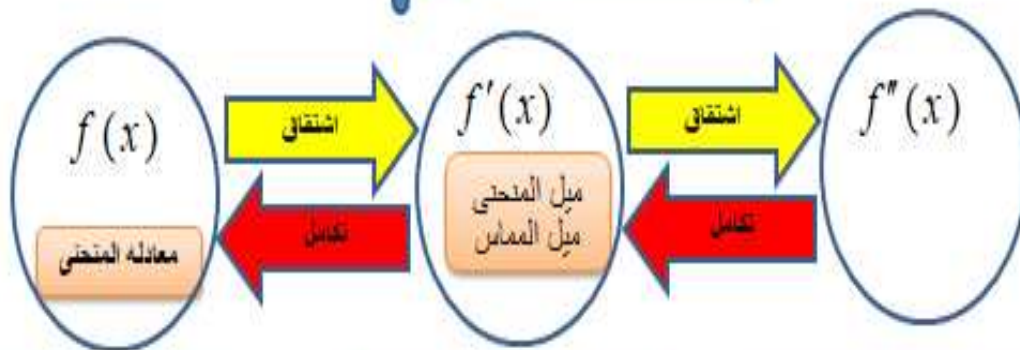


أوجد طول القوس من منحنى الدالة  $f: f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}$  في الفترة  $[1, 2]$ .



### ( 3 - 6 ) معادلة منحنى دالة

#### معادلة المنحنى



بمعلومية ميل العمودي ، يمر بالنقطة  
(a, b)

$$f'(x) = \frac{-1}{\text{ميل العمودي}}$$

خطوات الحل

تكامل مرة واحدة

$$f(x) = \int f'(x) dx$$

نستخدم لإيجاد الثابت  $f(a) = b$

بمعلومية  $f''(x)$  ،  
يمر بالنقطة (a, b) نقطة حرجة

خطوات الحل

تكامل مرتين

$$f'(x) = \int f''(x) dx$$

نستخدم لإيجاد الثابت  $f'(a) = 0$

$$f(x) = \int f'(x) dx$$

نستخدم لإيجاد الثابت  $f(a) = b$

بمعلومية  $f'(x)$  ، يمر بالنقطة  
(a, b)

خطوات الحل

تكامل مرة واحدة

$$f(x) = \int f'(x) dx$$

نستخدم لإيجاد الثابت  $f(a) = b$



### ( 3 - 6 ) معادلة منحنى دالة

مثال (3)

أوجد معادلة منحنى الدالة  $f$  الذي ميله عند أي نقطة  $P(x, y)$  يساوي:  $3x^2 - 4x + 1$  ويمر بالنقطة  $A(1, 2)$

كل عسير اذا استعنت بالله فهو يسير

4 أوجد معادلة منحنى الدالة  $f$  الذي ميله عند أي نقطة  $P(x, y)$  يساوي  $-8x^3 + 3x^2 - 2x + 4$  ويمر بالنقطة  $(-1, -5)$

تستطيع ان تفعلها مهما كانت

إذا كان ميل العمودي على منحنى الدالة  $f$  عند أي نقطة عليه  $(x, y)$  يساوي  $\sqrt{5 - 4x}$  فأوجد معادلة المنحنى عندما يمر بالنقطة  $A(-5, 3)$ .

لا تبحث عن الأخطاء بل ابحث عن الصواب

5 إذا كان ميل العمودي لمنحنى الدالة  $f$  عند أي نقطة عليه  $(x, y)$  هو  $2x - 1$  فأوجد معادلة المنحنى علماً بأنه يمر بالنقطة  $B(1, 0)$



لتكن:  $f''(x) = 6x - 6$  فأوجد معادلة الدالة  $f$  إذا كانت النقطة  $(15, -1)$  نقطة حرجة للدالة.

المنافسة الحقيقية بينك وبين نفسك

6 يمكن:  $f'(x) = 5x - 2$

فأوجد معادلة الدالة  $f$  إذا كانت النقطة  $P(2, -2)$  نقطة حرجة للدالة.

لا يوجد مستحيل

## ( 4 - 6 ) المعادلات التفاضلية

### تعريف (1)

المعادلات التفاضلية: هي معادلات تحتوي على دالة مجهولة وبعض مشتقاتها. نستخدم عادة  $y$  بدلاً من  $f(x)$ .

### تعريف (2)

رتبة المعادلة التفاضلية هي أعلى رتبة لمشتقة دالة موجودة في هذه المعادلة.

### تعريف (3)

درجة المعادلة التفاضلية: هي أكبر أس لأعلى المشتقات رتبة.

### تدريب:

أكمل الجدول التالي محدداً رتبة ودرجة كل معادلة من المعادلات التفاضلية فيه.

المعادلة التفاضلية	الرتبة	الدرجة
$y' = 5y$		
$y'^2 = \frac{4x}{y}$		
$y'' = 5y' + xy$		
$(y'')^2 = 1 + (y')^3$		
$y''' = (y')^2 + x^3$		

### مسألة (1)

أثبت أن الدالة:  $y = e^{2x}$  هي حل للمعادلة التفاضلية:  $y' - 2xy = 0$

### حاول أن تحل

1

أثبت أن الدالة:  $y = 2e^{3x} + 1$  هي حل للمعادلة:  $y' + 3 = 3y$

اننا نصنع مصائرنا، اننا نصبح ماتفعله

# المعادلات التفاضلية

$y'$  في الطرف الأيسر بمفردها

$y'$  دالة في  $x, y$

$$y' = f(x) \cdot h(y)$$

نرتب الخطوات

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot h(y)$$

ثم فصل المتغيرات

$$\frac{dy}{h(y)} = f(x) dx$$

بأخذ تكامل الطرفين

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int f(x) dx$$

نعمل الحل بالطريقة العادية

$y'$  دالة في  $y$

$$y' = ay + b$$

حل المعادلة:

$$y = k e^{ax} + \frac{b}{a}$$

$$a \neq 0$$

$$b \neq 0$$

$$y = k e^{ax}$$

$$a \neq 0$$

$$b = 0$$

$y'$  دالة في  $x$

$$y'' = f(x)$$

حل المعادلة:

$$y' = \int y'' dx$$

تكاملي مرتين

$$y' = f(x)$$

حل المعادلة:

$$y = \int y' dx$$

تكاملي مرتين

الطموح هو الوقود للوصول الى النجاح



### مثال (3)

حل المعادلة:  $y' = 3x^2 - 1$  ، التي تحقق  $y = 2$  عند  $x = 1$

### حاول أن تحل

3 حل المعادلة:  $y' = 8x^3 - 3x^2 + 4$  ، والتي تحقق  $y = 5$  عند  $x = 1$

حاول أن تصنع النجاح

مثال (7)

حل المعادلة:  $y'' = 3x^2 - 2x$

حاول أن تحل

7 حل المعادلة:  $y'' = -3x^2 + 6x$

مالم تبدأ اليوم لن يكتمل الغد

a حل المعادلة:  $2y' + y = 1$

b أوجد الحل الذي يحقق  $y = 2$  عند  $x = -1$

حاول أن تحل

6 حل المعادلة  $3y' - 2y = 4$ ، ثم أوجد الحل الذي يحقق  $y = 3$  عند  $x = 0$

الفشل ليس عند الخسارة الفشل عند الانسحاب

أوجد حلًا للمعادلة:  $y' = 4y$  إذا كان  $y = 2$  عند  $x = 0$

5 أوجد حلًا للمعادلة:  $y' = -2y$  إذا كان  $y = 3$  عند  $x = 0$

حاول أن تحل

إذا لم تجد طريق اصنع واحدا

a.  $y' - 2xy = 0$

حل المعادلة التفاضلية:

مثال (4)

الياس ليس من شيم الابطال

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$$

4 حل المعادلة التفاضلية:

حاول أن تفعل

كن طموحا لكي تصل الي اهدافك

