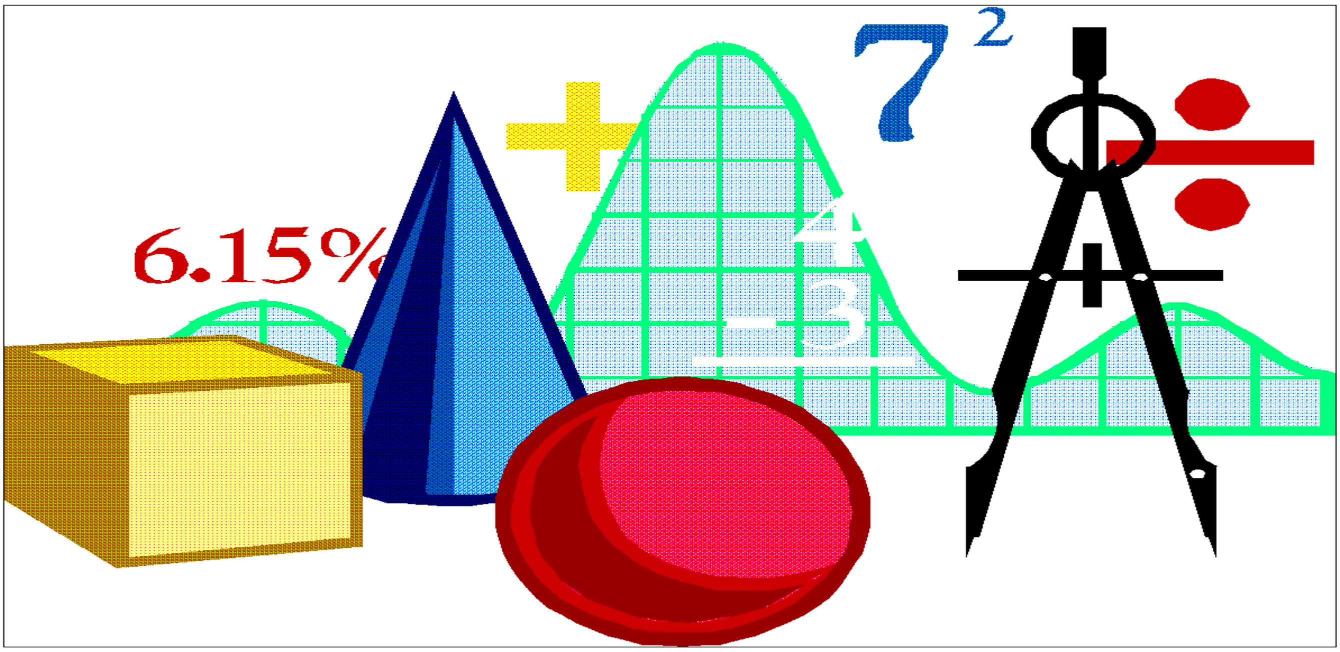
قسم الرياضيات
ثانوية المباركية



الصف الثاني عشر علمي
حل البنود الموضوعية
[الحل مع ذكر السبب]
الوحدة الخامسة

بند (1 – 5) التكامل غير المحدد

في التمارين (1–5)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $F(x)=x^{-3}$ هي مشتقة العكسية للدالة: $f(x)=-3x^{-4}$

(a) (b)

$$F'(x)=-3x^{-4}=f(x)$$

---

(2) $\int(-x^{-3}+x-1)dx=\frac{1}{2}x^{-2}+\frac{1}{2}x^{2}-x+C$

(a) (b)

$$\int(-x^{-3}+x-1)dx=-\frac{x^{-2}}{-2}+\frac{x^2}{2}-x+C=\frac{x^{-2}}{2}+\frac{x^2}{2}-x+C$$

---

(3) $\int\frac{1}{x^2}dx=\frac{1}{x}+C$

(a) (b)

$$\int\frac{1}{x^2}dx=\int x^{-2}dx=\frac{x^{-1}}{-1}+C=\frac{-1}{x}+C$$

---

(4) إذا كانت: $f'(x)=\frac{1}{x^2}+x$, $f(2)=1$ ، فإن $f(x)=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$

(a) (b)

يمكن التعويض بـ (x=2) اذا كان الناتج لايساوي 1 فالعبارة خطأ
واذا كان الناتج يساوي 1 فلابد من اجراء التكامل وإيجاد قيمة c

$$f(2)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2)^2+\frac{1}{2}=2\neq1$$

حل آخر باستخدام التكامل

$$f(x)=\int(\frac{1}{x^2}+x)\ dx=\int(x^{-2}+x)\ dx=\frac{x^{-1}}{-1}+\frac{x^2}{2}+C=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}x^2+C$$

$$f(2)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2)^2+C=1\Rightarrow\frac{3}{2}+C=1\Rightarrow C=\frac{-1}{2}$$

$$f(x)=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$$

---

(5) إذا كانت: $F(0) = 400$, $F(x) = \int (3x^2 - 12x + 15)\,dx$، فإن $F(x) = x^3 + 6x^2 + 15x + 400$ (b) (a)

$$F(0) = 0^3 + 6(0)^2 + 15(0) + 400 = 400$$

لابد أن نكمل الحل باستخدام التكامل

$$F(x) = \frac{3x^3}{3} - \frac{12x^2}{2} + 15x + C = x^3 - 6x^2 + 15x + C$$
$$F(0) = 400 \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 15x + C = 400 \Rightarrow C = 400$$
$$F(x) = x^3 - 6x^2 + 15x + 400$$

في التمارين (12–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\int \frac{4}{3}\sqrt[3]{t^2}\,dt =$

(a) $\frac{3t^{\frac{5}{3}}}{5} + C$ (b) $\frac{4t^{\frac{5}{3}}}{5} + C$

(c) $\frac{4}{3}\sqrt[3]{t^5} + C$ (d) $4\sqrt[3]{t^5} + C$

$$\int \frac{4}{3} t^{\frac{2}{3}}\,dx = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{5} t^{\frac{5}{3}} + C = \frac{4t^{\frac{5}{3}}}{5} + C$$

---

(7) $\int \left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx =$

(a) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{x}(x^{\frac{4}{3}} + 5) + C$ (b) $\frac{3}{5}x^{\frac{2}{3}}(x^{-\frac{2}{3}} + 5) + C$

(c) $\frac{5}{3}\sqrt[3]{x}(x^{\frac{4}{3}} + 5) + C$ (d) $\frac{5}{3}x^{\frac{4}{3}}(x^{\frac{2}{3}} + 5) + C$

$$\int (x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{-2}{3}})\,dx = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{1}x^{\frac{1}{3}} + C$$
$$= \frac{3}{5}x^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{4}{3}} + 5) + C = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x}(x^{\frac{4}{3}} + 5) + C$$

(8) إذا كان: $x=-1$, $y=-5$, $\frac{dy}{dx}=x^{-\frac{2}{3}}$ فإنّ y تساوي:

(a) $-\frac{x^2}{3}-\frac{14}{3}$

(b) $3x^{\frac{1}{3}}+2$

(c) $3x^{\frac{1}{3}}-2$

(d) $3x^{\frac{1}{3}}$

$$dy=x^{\frac{-2}{3}}dx \Rightarrow \int dy=\int x^{\frac{-2}{3}}\ dx \Rightarrow y=\frac{3}{1}x^{\frac{1}{3}}+C$$

$$y=3x^{\frac{1}{3}}+C \Rightarrow -5=3(-1)^{\frac{1}{3}}+C \Rightarrow C=-2 \Rightarrow y=3x^{\frac{1}{3}}-2$$

حل آخر

يمكن التعويض بـ (x = -1) في الإختيارات ونبحث متى يكون الناتج = -5

وإذا كان يوجد عدة اختيارات تحقق أن الناتج = -5 يمكن ان نشتقهم للحصول على $\frac{dy}{dx}$

$$a)-\frac{(-1)^2}{3}-\frac{14}{3}=-5 \Rightarrow (\frac{-x^2}{3}-\frac{14}{3})'=\frac{-2x}{3}\neq x^{\frac{-2}{3}}$$

$$c)3(-1)^{\frac{1}{3}}-2=-5 \Rightarrow (3x^{\frac{1}{3}}-2)'=3\cdot\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}=x^{\frac{-2}{3}}$$

---

(9) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x}}dx=$

(a) $\frac{3}{4}x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+C$

(b) $\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}+6x^{\frac{1}{2}}+C$

(c) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+6x^{\frac{1}{2}}+C$

(d) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{6}x^{\frac{1}{2}}+C$

$$\int \frac{2x+3}{x^{\frac{1}{2}}}\ dx=\int 2x^{\frac{1}{2}}+3x^{\frac{-1}{2}}\ dx=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{3x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+6x^{\frac{1}{2}}+C$$

---

(10) $\int \sqrt{x}(2+x^2)dx=$

(a) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+C$

(b) $\frac{3}{4}x^{\frac{3}{2}}+\frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}}+C$

(c) $\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}}+C$

(d) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}}+C$

$$\int x^{\frac{1}{2}}(2+x^2)\ dx=\int 2x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{5}{2}}\ dx=2\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+C=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+C$$

(11) $\int \frac{2+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}dx =$

a) $x^{\frac{1}{2}}+\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}+C$

b) $4x^{\frac{1}{2}}+\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}+C$

c) $x^{\frac{1}{2}}+\frac{7}{6}x^{\frac{7}{6}}+C$

d) $4x^{\frac{1}{2}}+\frac{7}{6}x^{\frac{7}{6}}+C$

$$\int \frac{2+x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}}\ dx=\int 2x^{\frac{-1}{2}}+x^{\frac{1}{6}}\ dx=2\cdot 2x^{\frac{1}{2}}+\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}+C=4x^{\frac{1}{2}}+\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}+C$$

(12) $\int \left(\frac{x^2-4x+4}{x-2}+2\right)^2 dx =$

a) x^2+C

b) $2x+C$

c) $\frac{x^2}{2}+2x+C$

d) $\frac{1}{3}x^3+C$

$$\int (\frac{(x-2)(x-2)}{x-2}+2)^2\ dx=\int (x-2+2)^2\ dx=\int x^2\ dx=\frac{1}{3}x^3+C$$

بند (2 – 5) التكامل بالتعويض

في التمارين (1–5)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int x(x^2-1)^{10}dx = \frac{1}{18}(x^2-1)^9 + C$ (a) **(b)**

بإشتقاق الطرف الأيمن

$$\frac{1}{18}\times 9(x^2-1)^8(2x) = x(x^2-1)^8$$

---

(2) $\int (x+1)\sqrt[3]{x^2+2x+3}\,dx = \frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^4} + C$ **(a)** (b)

بإشتقاق الطرف الأيمن

$$\left(\frac{3}{8}(x^2+2x+3)^{\frac{4}{3}} + C\right)' = \frac{3}{8}\cdot\frac{4}{3}(x^2+2x+3)^{\frac{1}{3}}(2x+2)$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+2x+3)^{\frac{1}{3}}2(x+1) = (x+1)\sqrt[3]{x^2+2x+3}$$

---

(3) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-2}} = 2\sqrt{3x-2} + C$ (a) **(b)**

بإشتقاق الطرف الأيمن

$$\left(2\sqrt{(3x-2)} + C\right)' = \left(2(3x-2)^{\frac{1}{2}} + C\right)' = 2\times\frac{1}{2}(3x-2)^{\frac{-1}{2}}\times 3 = \frac{3}{\sqrt{(3x-2)}}$$

---

(4) $\int (2x^2-1)(2x^3-3x+4)^5dx = \frac{1}{18}(2x^3-3x+4)^6 + C$ **(a)** (b)

$$(2x^3-3x+4)' = 6x^2-3$$

$$\left(\frac{1}{18}(2x^3-3x+4)^6 + C\right)' = \frac{1}{18}\times 6(2x^3-3x+4)^5(6x^2-3) =$$

$$\frac{1}{3}(2x^3-3x+4)^5(3)(2x^2-1) = (2x^2-1)(2x^3-3x+4)^5$$

---

(5) $\int x\sqrt[3]{x+2}\,dx = \frac{3}{7}(x+2)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{2}(x+2)^{\frac{4}{3}} + C$

a ⓑ b

$$u = x+2, du = dx$$
$$x = u-2$$

$$\int (u-2)(u)^{\frac{1}{3}}du = \int (u)^{\frac{4}{3}} - 2(u)^{\frac{1}{3}}du = \frac{u^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} - 2\frac{u^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3u^{\frac{7}{3}}}{7} - \frac{3u^{\frac{4}{3}}}{2} + C$$

$$\frac{3}{7}(x+2)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{2}(x+2)^{\frac{4}{3}} + C$$

في التمارين (6–12)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\int x(x^2+2)^7 dx =$

- ⓐ $\frac{1}{16}(x^2+2)^8 + C$
- ⓑ $\frac{1}{4}(x^2+2)^8 + C$
- ⓒ $\frac{1}{12}(x^2+2)^6 + C$
- ⓓ $\frac{1}{3}(x^2+2)^6 + C$

$$\int (x^2+2)^7(x)\ dx = \frac{1}{2}\int (x^2+2)^7(2x)\ dx = \frac{1}{2}\frac{(x^2+2)^8}{8} + C = \frac{1}{16}(x^2+2)^8 + C$$

---

(7) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}dx =$

- ⓐ $\frac{1}{3}(x-1)^{\frac{2}{3}} + C$
- ⓑ $\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C$
- ⓒ $\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{2}{3}} + C$
- ⓓ $\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}} + C$

$$\int \frac{x-1}{(x-1)^{\frac{1}{2}}}\ dx = \int (x-1)^{\frac{1}{2}}(1)\ dx = \frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C$$

---

(8) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}} =$

(a) $\frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{2}{3}}+C$ (b) $\frac{2}{3}(3x+1)^{\frac{2}{3}}+C$

(c) $2(3x+1)^{\frac{2}{3}}+C$ (d) $\frac{1}{2}(3x+1)^{\frac{2}{3}}+C$

$$\int \frac{1}{(3x+1)^{\frac{1}{3}}}\ dx = \frac{1}{3}\int (3x+1)^{\frac{-1}{3}}(3)\ dx = \frac{1}{3}\frac{(3x+1)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+C = \frac{1}{2}(3x+1)^{\frac{2}{3}}+C$$

(9) $\int \frac{(2+\sqrt{x})^{12}}{\sqrt{x}}dx =$

(a) $\frac{13}{2}(2+\sqrt{x})^{13}+C$ (b) $\frac{2}{13}(2+\sqrt{x})^{13}+C$

(c) $\frac{1}{26}(2+\sqrt{x})^{13}+C$ (d) $\frac{1}{22}(2+\sqrt{x})^{11}+C$

$$\int (2+\sqrt{x})^{12}\frac{1}{\sqrt{x}}\ dx = 2\int (2+\sqrt{x})^{12}\frac{1}{2\sqrt{x}}\ dx = 2\frac{(2+\sqrt{x})^{13}}{13}+C = \frac{2}{13}(2+\sqrt{x})^{13}+C$$

(10) $\int \frac{(x+1)}{\sqrt[3]{x^2+2x+3}}dx =$

(a) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^2}+C$ (b) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^2}+C$

(c) $3\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^2}+C$ (d) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^2+2x+3}+C$

$$(x^2+2x+3)' = 2x+2$$

$$\int (x^2+2x+3)^{\frac{-1}{3}}(x+1)\ dx = \frac{1}{2}\int (x^2+2x+3)^{\frac{-1}{3}}(2x+2)\ dx =$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{(x^2+2x+3)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+C = \frac{3}{4}(x^2+2x+3)^{\frac{2}{3}}+C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^2}+C$$

(11) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx =$

a) $\frac{3}{2}\sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1} + C$

b) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - \frac{1}{2}\sqrt{x+1} + C$

c) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1} + C$

d) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + 2\sqrt{x+1} + C$

$$u = x+1, du = dx$$
$$x = u-1$$
$$\int \frac{u-1}{\sqrt{u}}du = \int \frac{u-1}{u^{\frac{1}{2}}}du = \int u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{-1}{2}}du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} - 2u^{\frac{1}{2}} + C$$
$$\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - 2(x+1)^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1} + C$$

(12) إذا $F(x) = \int (x+1)(2x^2+4x-1)dx$ ، $F(-2) = \frac{9}{8}$، فإن: $F(x)$ تساوي:

a) $\frac{1}{8}(2x^2+4x-1)^2 + \frac{5}{4}$

b) $\frac{1}{8}(2x^2+4x-1)^2 + 1$

c) $\frac{1}{4}(2x^2+4x-1)^2 + 1$

d) $4(2x^2+4x-1)^2 - 1$

$$(2x^2+4x-1)' = 4x+4$$

$$\int (2x^2+4x-1)\ (x+1)\ dx = \frac{1}{4}\int (2x^2+4x-1)\ (4x+4)\ dx =$$
$$= \frac{1}{4} \times \frac{(2x^2+4x-1)^2}{2} + C = \frac{1}{8}(2x^2+4x-1)^2 + C$$
$$F(-2) = \frac{1}{8}(2(-2)^2 + 4(-2) - 1)^2 + C = \frac{1}{8} + C$$
$$\frac{1}{8} + C = \frac{9}{8} \Rightarrow C = \frac{9}{8} - \frac{1}{8} = 1$$

بند (3 – 5) تكامل الدوال المثلثية

في التمارين (1–5)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$ — a (مظللة) b

(2) $\int \csc^2 x\, dx = \cot x + C$ — a b (مظللة)

$$\int \csc^2 x\ dx = -\cot x + C$$

(3) $\left(F'(x) = \sec^2 x\ ,\ F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1\right) \Longrightarrow F(x) = \tan x + 2$ — a b (مظللة)

$$F(x) = \int \sec^2 x\ dx = \tan x + C$$

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\frac{\pi}{4} + C = 1 + C = -1 \Rightarrow C = -2$$

(4) $(F'(x) = \cos x + \sin x\ ,\ F(\pi) = 1) \Longrightarrow F(x) = \sin x - \cos x$ — a (مظللة) b

$$F(x) = \int (\cos x + \sin x)\ dx = \sin x - \cos x + C$$

$$F(\pi) = \sin\pi - \cos\pi + C = 0 - (-1) + C \Rightarrow 1 + C = 1 \Rightarrow C = 0$$

(5) $(F'(x) = \sec(x)\tan(x)\ ,\ F(0) = 4) \Longrightarrow F(x) = \sec x + 3$ — a (مظللة) b

$$F(x) = \int \sec(x)\cdot\tan(x)\ dx = \sec x + C$$

$$F(0) = \sec(0) + C \Rightarrow (1) + C = 4 \Rightarrow C = 3$$

في التمارين (6–12)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) الصورة العامة للمشتقة العكسية للدالة f حيث $f(x) = 8 + \csc x \cot x$ هي:

(a) $F(x) = 8x + \csc x + C$

(b) $F(x) = 8x - \cot x + C$

(c) (مظللة) $F(x) = 8x - \csc x + C$

(d) $F(x) = 8x + \cot x + C$

$$F(x) = \int (8 + \csc x \cot x)\ dx = 8x - \csc x + C$$

(7) $\int \csc(5x)\cot(5x)\,dx =$

a) $\frac{1}{5}\csc(5x)+C$

b) $\csc(5x)+C$

c) $\frac{1}{5}\cot(5x)+C$

d) $-\frac{1}{5}\csc(5x)+C$

$$\int \csc(5x)\cot(5x)\ dx = -\frac{1}{5}\csc(5x)+C$$

(8) $\int \sqrt[3]{\cot x}\,\csc^2 x\,dx =$

a) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(\cot x)^4}+C$

b) $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(\cot x)^4}+C$

c) $-\frac{3}{4}\sqrt[4]{(\cot x)^3}+C$

d) $3\sqrt[3]{(\cot x)^4}+C$

$$u = \cot x,\ du = -\csc^2 x dx$$

$$-\int (\cot x)^{\frac{1}{3}}(-\csc^2 x)\ dx = -\int (u)^{\frac{1}{3}}\ du = \frac{-u^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+C$$

$$= \frac{-3}{4}(\cot x)^{\frac{4}{3}}+C = \frac{-3}{4}\sqrt[3]{(\cot x)^4}+C$$

(9) إذاكانت $y(\theta=0)=-3$, $\frac{dy}{d\theta}=\sin\theta$ فإنّ y تساوي:

a) $-\cos\theta$

b) $2-\cos\theta$

c) $-2-\cos\theta$

d) $4-\cos\theta$

$$dy = \sin\theta\ d\theta$$

$$y = \int \sin\theta\ d\theta = -\cos\theta + C$$

$$-3 = -\cos 0 + C \Rightarrow -3 = -1 + C \Rightarrow C = -2$$

(10) $\int \sec^5 x \tan x \, dx =$

ⓐ $\frac{5}{3}\sec^5 x + C$ ⓑ $\frac{1}{5}\sec^6 x + C$

ⓒ $\frac{1}{5}\sec^5 x + C$ ⓓ $-\frac{5}{3}\sec^5 x + C$

$$u = \sec x, du = \sec x \tan x \, dx$$

$$\int \sec^4 x \cdot \sec x \tan x \, dx = \int u^4 \, du = \frac{u^5}{5} + C = \frac{1}{5}\sec^5 x + C$$

(11) $\int \frac{\csc^2 x}{\sqrt[3]{2+\cot x}} dx =$

ⓐ $\frac{3}{2}(2+\cot x)^{\frac{2}{3}} + C$ ⓑ $-\frac{3}{2}(2+\cot x)^{\frac{2}{3}} + C$

ⓒ $-2\sqrt{2+\cot x} + C$ ⓓ $\frac{4}{3}(2+\cot x)^{\frac{4}{3}} + C$

$$u = 2 + \cot x, du = -\csc^2 x \, dx$$

$$\int (2+\cot x)^{\frac{-1}{3}} \cdot \csc^2 x \, dx = -\int (2+\cot x)^{\frac{-1}{3}} \cdot (-\csc^2 x) \, dx =$$

$$-\int u^{\frac{-1}{3}} \, du = \frac{u^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{-3}{2}(2+\cot x)^{\frac{2}{3}} + C$$

(12) $\int \frac{\sin(4x)}{\cos^5(4x)} dx =$

ⓐ $-\frac{1}{16}\cos^{-4}(4x) + C$ ⓑ $\frac{1}{16}\cos^{-4}(4x) + C$

ⓒ $-\cos^{-4}(4x) + C$ ⓓ $\cos^{-4}(4x) + C$

$$u = \cos 4x, du = -4\sin 4x \, dx$$

$$\int (\cos 4x)^{-5} \cdot \sin 4x \, dx = \frac{1}{-4}\int (\cos 4x)^{-5} \cdot (-4\sin 4x) \, dx =$$

$$\frac{-1}{4}\int u^{-5} \, du = \frac{-1}{4}\frac{u^{-4}}{-4} + C = \frac{1}{16}\cos^{-4}(4x) + C$$

بند (4 – 5) الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية

في التمارين (1–6)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت: $y = 4^{x-2}$ فإن: $\frac{dy}{dx} = 4x$

a b

$$y = 4^{x-2} \cdot \ln 4 \cdot (x-2)' = 4^{x-2} \cdot \ln 4$$

(2) إذا كانت: $f(x) = e^{x^2}$ فإن: $f'(x) = 2xe^{2x}$

a b

$$f'(x) = e^{x^2} \cdot (x^2)' = e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2}$$

(3) إذا كانت: $g(x) = \ln(2x+2)$ فإن: $g'(x) = \frac{1}{2x+2}$

a b

$$g'(x) = \frac{(2x+2)'}{(2x+2)} = \frac{2}{2x+2} = \frac{1}{x+1}$$

(4) إذا كانت: $y = x\ln x - x$ فإن: $y' = \ln x$

a b

$$y' = (x)'\ln x + x(\ln x)' - (x)' = \ln x + x\frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$$

(5) $\int \frac{1}{2x} dx = \frac{\ln x}{2} + C$

a b

$$\int \frac{1}{2x}\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\ dx = \frac{1}{2}\ln|x| + C$$

(6) $\int \frac{1}{3x+1} dx = \ln(3x+1) + C$

a b

$$\int \frac{1}{3x+1}\ dx = \frac{1}{3}\int \frac{3}{3x+1}\ dx = \frac{1}{3}\ln|3x+1| + C$$

في التمارين (7–14)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) إذا كانت $y = e^{-5x}$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

a) e^{-5x}

b) $-e^{-5x}$

c) $-5e^{-5x}$

d) $5e^{-5x}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{-5x} \cdot (-5x)' = e^{-5x} \cdot -5 = -5e^{-5x}$$

(8) إذا كانت $y = x^2 e^x - x e^x$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

a) $e^x(x^2 + x - 1)$

b) $e^x(x^2 - x)$

c) $2x e^x - e^x$

d) $e^x(x^2 + 2x + 1)$

$$\frac{dy}{dx} = 2x\ e^x + x^2 e^x - (e^x + x\ e^x) = 2x\ e^x + x^2 e^x - e^x - x\ e^x$$

$$= x\ e^x + x^2 e^x - e^x = e^x(x + x^2 - 1)$$

(9) إذا كانت $y = (\ln x)^2$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

a) $\frac{\ln x}{x}$

b) $\frac{2\ln x}{x}$

c) $\frac{x\ln x}{2}$

d) $\frac{2\ln^2 x}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = 2\ln x \cdot (\ln x)' = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2\ln x}{x}$$

(10) إذا كانت $y = \ln\left(\frac{10}{x}\right)$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

a) $-\frac{10}{x}$

b) $\frac{10}{x}$

c) $\frac{1}{x}$

d) $-\frac{1}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{10}{x}\right)'}{\frac{10}{x}} = \frac{-10x}{x^2} \cdot \frac{x}{10} = \frac{-1}{x}$$

(11) إذا كانت $y=\ln(x^2+1)$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $\frac{x}{x^2+1}$ (b) $\frac{2}{x^2+1}$

(c) $\frac{2x}{x^2+1}$ (d) $-\frac{2x}{x^2+1}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}=\frac{2x}{x^2+1}$$

(12) $\int \frac{2x}{x^2+1}dx =$

(a) $2\ln(x^2+1)+C$ (b) $\ln(x^2+1)+C$

(c) $\frac{x^2}{x^2+1}+C$ (d) $\frac{x}{\frac{1}{3}x^2+1}+C$

$$u=x^2+1, u'=2x$$

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\ dx=\int \frac{u'}{u}\ dx=\ln|u|+C=\ln|x^2+1|+C=\ln(x^2+1)+C$$

(13) $\int \frac{e^x+e^{-x}}{2}dx =$

(a) $\frac{e^x-e^{-x}}{2}+C$ (b) $\frac{e^x+e^{-x}}{2}+C$

(c) $\frac{e^{-x}-e^x}{2}+C$ (d) $\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}+C$

$$\frac{1}{2}\int(e^x+e^{-x})\ dx=\frac{1}{2}\left(\int e^x\ dx+\int e^{-x}\ dx\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(\int e^x\ dx-\int(-1)e^{-x}\ dx\right)=\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{-x}+C=\frac{e^x-e^{-x}}{2}+C$$

(14) $\int \frac{e^x}{e^x-4}dx =$

(a) $-\frac{1}{2}(e^x-4)+C$ (b) $\ln|e^x-4|+C$

(c) $-\ln|e^x-4|+C$ (d) $\frac{1}{2}\ln|e^x-4|+C$

$$u=e^x-4, u'=e^x$$

$$\int \frac{e^x}{e^x-4}\ dx=\int \frac{u'}{u}\ dx=\ln|u|+C=\ln|e^x-4|+C$$

بند (5 – 5) التكامل بالتجزئ

في التمارين (1–5)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int x\cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}x\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos 2x + C$ (a) (b)

$$u = x, dv = \cos(2x)dx$$

$$du = dx, v = \frac{\sin(2x)}{2}$$

$$\int u\ dv = u\cdot v - \int v\ du$$

$$\int x\cos(2x)dx = x\cdot\frac{\sin(2x)}{2} - \int\frac{\sin(2x)}{2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}x\sin(2x) - \frac{1}{2}\frac{-\cos(2x)}{2} + C$$

$$= \frac{1}{2}x\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x) + C$$

حل ثالث
طريقة مختصرة للموضوعي

اشتقاق		تكامل
+	x	$\cos 2x$
−	1	$\frac{\sin 2x}{2}$
	0	$\frac{-\cos 2x}{4}$

ناتج التكامل :

$$\frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$$

حل ثاني إيجاد مشتقة الطرف الأيمن

$$(\frac{1}{2}x\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x) + C)' =$$

$$\cancel{\frac{1}{2}\sin(2x)} + \frac{1}{2}x\cos(2x)\cdot 2 - \cancel{\frac{1}{4}\sin(2x)\cdot 2} = x\cos(2x)$$

---

(2) $\int x\sin(\pi x)\,dx = -\frac{x}{\pi}\cos(\pi x) + \frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x) + C$ (a) (b)

$$u = x, dv = \sin(\pi\ x)dx$$

$$du = dx, v = \frac{-\cos(\pi\ x)}{\pi}$$

$$\int u\ dv = u\cdot v - \int v\ du$$

$$\int x\sin(\pi\ x)dx = x\cdot\frac{-\cos(\pi\ x)}{\pi} - \int\frac{-\cos(\pi\ x)}{\pi}dx$$

$$= -\frac{x}{\pi}\cos(\pi\ x) + \frac{1}{\pi}\frac{\sin(\pi\ x)}{\pi} + C = -\frac{x}{\pi}\cos(\pi\ x) + \frac{1}{\pi^2}\sin(\pi\ x) + C$$

حل ثالث
طريقة مختصرة للموضوعي

اشتقاق		تكامل
+	x	$\sin \pi x$
−	1	$\frac{-\cos \pi x}{\pi}$
	0	$\frac{-\sin \pi x}{\pi^2}$

ناتج التكامل :

$$\frac{-x}{\pi}\cos \pi x + \frac{x}{\pi^2}\sin \pi x + C$$

(3) $\int x e^{6x} dx = \frac{1}{6} x e^{6x} - \frac{1}{36} e^{6x} + C$

a b

إيجاد مشتقة الطرف الأيمن

$$(\frac{1}{6} xe^{6x} - \frac{1}{36} e^{6x} + C)' = \cancel{\frac{1}{6}(1)e^{6x}} + \frac{1}{6} x(e^{6x} \cdot 6) - \cancel{\frac{1}{36}(e^{6x} \cdot 6)} = xe^{6x}$$

(4) $\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} + e^{-x} + C$

a b

إيجاد مشتقة الطرف الأيمن

$$(-xe^{-x} + e^{-x} + C)' = -(1)e^{-x} - x(e^{-x} \cdot (-1)) + (e^{-x} \cdot (-1)) = -2e^{-x} + x\ e^{-x}$$

(5) $\int x \sec^2 x\, dx = x \tan x - \ln|\sec x| + C$

a b

إيجاد مشتقة الطرف الأيمن

$$(x \tan x - \ln|\sec x| + C)' = \tan x + x\sec^2 x - \frac{(\sec x)'}{\sec x}$$

$$= \cancel{\tan x} + x\sec^2 x - \cancel{\frac{\sec x \tan x}{\sec x}} = x\sec^2 x$$

في التمارين (6—11)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\int (2x+1)\sin x\, dx$

ⓐ $(2x+1)\cos x + 2\sin x + C$

ⓑ $-(2x+1)\cos x + 2\sin x + C$

ⓒ $-(x+1)\cos x - 2\sin x + C$

ⓓ $(2x+1)\cos x - \sin x + C$

$$u = 2x+1, dv = \sin x dx$$

$$du = 2dx, v = -\cos x$$

$$\int u\ dv = u \cdot v - \int v\ du$$

$$\int (2x+1)\sin x dx = (2x+1)\cdot(-\cos x) - \int (-\cos x) 2dx$$

$$= (2x+1)\cdot(-\cos x) + 2\sin x + C$$

حل ثاني
طريقة مختصرة للموضوعي

	الاشتقاق	تكامل
+	$2x+1$	$\sin x$
−	2	$-\cos x$
	0	$-\sin x$

ناتج التكامل :

$-(2x+1)\cos x + 2\sin x + C$

(7) $\int x^2 \ln(x)\,dx =$

a) $\frac{1}{3}x^3\ln(x)-\frac{x^3}{3}+C$

b) $\frac{1}{3}x^3\ln(x)-\frac{x^3}{9}+C$

c) $\frac{1}{3}x^3\ln(x)+\frac{x^3}{9}+C$

d) $-\frac{1}{3}x^3\ln(x)-\frac{x^3}{9}+C$

$$u=\ln x,\ dv=x^2dx$$

$$du=\frac{1}{x}dx,\ v=\frac{x^3}{3}$$

$$\int u\ dv=u\cdot v-\int v\ du$$

$$\int x^2\ln x dx=\frac{1}{3}x^3\ln x-\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{1}{3}x^3\ln x-\int\frac{x^2}{3}\cdot dx=$$

$$=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{3}\frac{x^3}{3}+C=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{x^3}{9}+C$$

في التمرينين (8–9)، إذا كان $\int(2x+1)\ln x\,dx=uv-\int vdu$ فإن:

(8) $uv=$

a) $(2x+1)\ln x$

b) $2x\ln x$

c) $\frac{2x+1}{2}\ln x$

d) $x(x+1)\ln x$

(9) $\int vdu=$

a) $\frac{1}{2}x\ln x+C$

b) $\frac{1}{2}x^2+x+C$

c) $(2x+1)\ln x+C$

d) $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+C$

$$u=\ln x,\ dv=(2x+1)dx$$

$$du=\frac{1}{x}dx,\ v=\frac{2x^2}{2}+x=x^2+x=x(x+1)$$

$$uv=x(x+1)\ln x$$

$$\int vdu=\int x(x+1)\frac{1}{x}dx=\int(x+1)dx=\frac{x^2}{2}+x+C$$

في التمرينين (10–11)، إذا كان $\int (3x-1)e^{3x+2}\,dx = uv - \int v\,du$ فإن:

(10) $uv =$

ⓐ $(3x-1)e^{3x+2}$

ⓑ $\frac{1}{3}(3x-1)e^{3x+2}$

ⓒ $(3x-1)e^{x+2}$

ⓓ $\frac{1}{3}(x-1)e^{3x+2}$

(11) $\int v\,du =$

ⓐ $-\frac{1}{3}e^{3x+2}+C$

ⓑ $-e^{3x+2}+C$

ⓒ $\frac{1}{3}e^{3x+2}+C$

ⓓ $e^{3x+2}+C$

$$u=(3x-1),\ dv=e^{3x+2}dx=\frac{1}{3}(3e^{3x+2}dx)$$

$$du=3dx,\ v=\frac{1}{3}e^{3x+2}$$

$$uv=\frac{1}{3}(3x-1)e^{3x+2}$$

$$\int v\,du=\int\frac{1}{3}e^{3x+2}\cdot 3dx=\int\frac{1}{3}(e^{3x+2}\cdot 3)dx=\frac{1}{3}e^{3x+2}+C$$

بند (6 – 5) التكامل باستخدام الكسور الجزئية

في التمارين (1–4)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int \frac{4dx}{(x+3)(x+7)} = \ln|x+3| + \ln|x+7| + C$ (a) (b)

$$\frac{4}{(x+3)(x+7)} = \frac{A}{(x+3)} + \frac{B}{(x+7)}$$

$$4 = A(x+7) + B(x+3)$$

$$4 = A(-7+7) + B(-7+3) \Rightarrow 4 = -4B \Rightarrow B = -1$$

$$4 = A(-3+7) + B(-3+3) \Rightarrow 4 = 4A \Rightarrow A = 1$$

$$\int \frac{4}{(x+3)(x+7)} dx = \int \left(\frac{1}{(x+3)} + \frac{-1}{(x+7)}\right) dx =$$

$$\ln|x+3| - \ln|x+7| + C$$

حل آخر إيجاد مشتقة الطرف الأيمن ثم توحيد المقامات

$$(\ln|x+3| + \ln|x+7| + C)' = \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+7} = \frac{x+7+x+3}{(x+3)(x+7)} = \frac{2x+10}{(x+3)(x+7)}$$

لا يساوي الطرف الأيسر

(2) $\int \frac{-6dx}{x^2+3x} = -2\ln|x+3| + 2\ln|x| + C$ (a) (b)

$$\frac{-6}{x(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3}$$

$$-6 = A(x+3) + B(x)$$

$$-6 = A(-3+3) + B(-3) \Rightarrow -6 = -3B \Rightarrow B = 2$$

$$-6 = A(0+3) + B(0) \Rightarrow -6 = 3A \Rightarrow A = -2$$

$$\int \frac{-6}{x(x+3)} dx = \int \left(\frac{-2}{x} + \frac{2}{(x+3)}\right) dx =$$

$$-2\ln|x| + 2\ln|x+3| + C$$

حل آخر إيجاد مشتقة الطرف الأيمن ثم توحيد المقامات

$$(-2\ln|x+3| + 2\ln|x| + C)' = \frac{-2}{x+3} + \frac{2}{x} = \frac{-2x + 2(x+3)}{(x+3)(x)} = \frac{6}{x^2+3x}$$

لا يساوي الطرف الأيسر

(3) الدالة: $f(x)=\frac{4x-11}{2x^2-x-3}$ على صورة كسور جزئية هي: $f(x)=\frac{3}{x+1}-\frac{2}{2x-3}$ ⓑ ⓐ

بتوحيد المقامات

$$\frac{3}{x+1}-\frac{2}{2x-3}=\frac{3(2x-3)-2(x+1)}{(x+1)(2x-3)}=\frac{6x-9-2x-2}{2x^2-3x+2x-3}=\frac{4x-11}{2x^2-x-3}$$

(4) للحدودية النسبية: $\frac{x^2-x+2}{x^3-2x^2+x}$ ثلاثة كسور جزئية. ⓑ ⓐ

في التمارين (5–10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) $\int \frac{6}{x^2-9}dx=$

ⓐ $\ln|x+3|-\ln|x-3|+C$ ⓑ $\ln(x-3)-\ln(x+3)+C$

ⓒ $\ln|x+3|+\ln|x-3|+C$ ⓓ $\ln|x-3|-\ln|x+3|+C$

$$\frac{6}{(x+3)(x-3)}=\frac{A}{(x+3)}+\frac{B}{(x-3)}$$

$$6=A(x-3)+B(x+3)$$

$$6=A(3-3)+B(3+3)\Rightarrow 6=6B\Rightarrow B=1$$

$$6=A(-3-3)+B(-3+3)\Rightarrow 6=-6A\Rightarrow A=-1$$

$$\int\frac{6}{(x+3)(x-3)}dx=\int\left(\frac{-1}{(x+3)}+\frac{1}{(x-3)}\right)dx=$$

$$-\ln|x+3|+\ln|x-3|+C$$

(6) $\int \frac{7x-7}{x^2-3x-10}dx=$

ⓐ $4\ln|x+2|+3\ln|x-5|+C$ ⓑ $3\ln|x+2|+2\ln|x-5|+C$

ⓒ $4\ln|x-5|+3\ln|x+2|+C$ ⓓ $4\ln|x-5|-3\ln|x+2|+C$

$$\frac{7x-7}{(x-5)(x+2)}=\frac{A}{(x-5)}+\frac{B}{(x+2)}$$

$$7x-7=A(x+2)+B(x-5)$$

$$7(-2)-7=A(-2+2)+B(-2-5)\Rightarrow -21=-7B\Rightarrow B=3$$

$$7(5)-7=A(5+2)+B(5-5)\Rightarrow 28=7A\Rightarrow A=4$$

$$\int\frac{7x-7}{(x-5)(x+2)}dx=\int\left(\frac{4}{(x-5)}+\frac{3}{(x+2)}\right)dx=$$

$$4\ln|x-5|+3\ln|x+2|+C$$

(7) الدالة النسبية: $f(x)=\frac{x}{x^2-4}$ على صورة كسور جزئية هي $f(x)$ تساوي:

ⓐ $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}$ ⓑ $\frac{1}{2(x-2)}+\frac{1}{2(x+2)}$

ⓒ $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}$ ⓓ $\frac{1}{2(x-2)}-\frac{1}{2(x+2)}$

$$\frac{x}{(x-2)(x+2)}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x+2)}$$

$$x=A(x+2)+B(x-2)$$

$$-2=A(-2+2)+B(-2-2)\Rightarrow -2=-4B\Rightarrow B=\frac{1}{2}$$

$$2=A(2+2)+B(2-2)\Rightarrow 2=4A\Rightarrow A=\frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{x^2-4}=\frac{1}{2(x-2)}+\frac{1}{2(x+2)}$$

---

(8) $\int \frac{2x^2-4x+3}{x^2-1}dx=$

ⓐ $2+2\ln|x-1|-\frac{9}{2}\ln|x+1|+C$ ⓑ $\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{9}{2}\ln|x+1|+C$

ⓒ $2x+\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{9}{2}\ln|x+1|+C$ ⓓ $x+\frac{1}{2}\ln|x-1|-9\ln|x+1|+C$

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline x^2-1 & 2x^2-4x+3 \\ & 2x^2 \quad\quad -2 \\ \hline & -4x+5 \end{array}$$

$$\frac{2x^2-4x+3}{x^2-1}=2+\frac{-4x+5}{x^2-1}$$

$$\frac{-4x+5}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x+1)}$$

$$-4x+5=A(x+1)+B(x-1)$$

$$-4(1)+5=A(1+1)+B(1-1)\Rightarrow 1=2A\Rightarrow A=\frac{1}{2}$$

$$-4(-1)+5=A(-1+1)+B(-1-1)\Rightarrow 9=-2B\Rightarrow B=\frac{-9}{2}$$

$$\frac{-4x+5}{x^2-1}=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{9}{2(x+1)}$$

$$\int\frac{2x^2-4x+3}{x^2-1}dx=\int(2+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{9}{2(x+1)})dx=$$

$$=2x+\frac{1}{2}\ln(x-1)-\frac{9}{2}\ln(x+1)+C$$

(9) $\int \frac{3x^2+2x}{x^2-4}dx =$

(a) $4\ln|x-2|-2\ln|x+2|+C$ (b) $3x+2\ln|x-2|-2\ln|x-2|+C$

(c) $3x+4\ln|x-2|-2\ln|x+2|+C$ (d) $3x+4\ln|x-2|+2\ln|x+2|+C$

$$\begin{array}{r|l} & 3 \\ \hline x^2-4 & 3x^2+2x \\ & 3x^2 \qquad -12 \\ \hline & \qquad 2x+12 \end{array}$$

$$\frac{3x^2+2x}{x^2-4}=3+\frac{2x+12}{x^2-4}$$

$$\frac{2x+12}{(x-2)(x+2)}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x+2)}$$

$$2x+12=A(x+2)+B(x-2)$$

$$2(2)+12=A(2+2)+B(2-2)\Rightarrow 16=4A\Rightarrow A=4$$

$$2(-2)+12=A(-2+2)+B(-2-2)\Rightarrow 8=-4B\Rightarrow B=-2$$

$$\frac{3x^2+2x}{x^2-4}=\frac{4}{(x-2)}-\frac{2}{2(x+2)}$$

$$\int\frac{3x^2+2x}{x^2-4}dx=\int(3+\frac{4}{x-2}-\frac{2}{x+2})dx=$$

$$=3x+4\ln|x-2|-2\ln|x+2|+C$$

---

(10) $\int \frac{x^3+2}{x^2-x}dx =$

(a) $\frac{x^2}{2}+3\ln|x-1|+2\ln|x|+C$ (b) $\frac{x^2}{2}-x+3\ln|x-1|+2\ln|x|+C$

(c) $\frac{x^2}{2}-3\ln|x-1|+2\ln|x|+C$ (d) $\frac{x^2}{2}+x+3\ln|x-1|-2\ln|x|+C$

$$\begin{array}{r|l} & x\ +1 \\ \hline x^2-x & x^3 \qquad\qquad +2 \\ & x^3 -x^2 \\ \hline & \quad x^2 \qquad +2 \\ & \quad x^2 - x \\ \hline & \qquad\quad x+2 \end{array}$$

$$\frac{x^3+2}{x^2-x}=x+1+\frac{x+2}{x^2-x}$$

$$\frac{x+2}{x(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}$$

$$x+2=A(x-1)+B(x)$$

$$0+2=A(0-1)+B(0)\Rightarrow 2=-A\Rightarrow A=-2$$

$$1+2=A(1-1)+B(1)\Rightarrow 3=B\Rightarrow B=3$$

$$\frac{x+2}{x(x-1)}=\frac{-2}{x}+\frac{3}{x-1}$$

$$\int\frac{x^3+2}{x^2-x}dx=\int(x+1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x-1})dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}+x-2\ln|x|+3\ln|x-1|+C$$

بند (7 – 5) التكامل المحدد

في التمارين (1–7)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}$ (a) (b)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\ dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x + \cos^2 x)\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\ dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

(2) $\int_{-3}^{-2} (|x| + x + 5)\,dx = -2$ (a) (b)

$$\int_{-3}^{-2} -x + x + 5\ dx = \int_{-3}^{-2} 5\ dx = 5(-2-(-3)) = 5$$

(3) $\int_{-1}^{1} (|x|)^3\,dx = -\frac{1}{2}$ (a) (b)

$$\int_{-1}^{0} (-x)^3\ dx + \int_0^1 (x)^3\ dx = \left[\frac{(-x)^4}{4}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{(x)^4}{4}\right]_0^1 = \left[\frac{(x)^4}{4}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{(x)^4}{4}\right]_0^1$$

$$= \left[\frac{(0-(-1)^4}{4}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{(1)^4 - 0^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

(4) $\int_0^1 12(3x-2)^3\,dx = -15$ (a) (b)

$$4\int_0^1 (3x-2)^3\ 3dx = 4\left[\frac{(3x-2)^4}{4}\right]_0^1 = 4\left[\frac{(3(1)-2)^4 - (3(0)-2)^4}{4}\right] = 4 \times \frac{1-16}{4} = -15$$

(5) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\pi}\sqrt{1-x^2}\,dx = 1$ (a) (b)

$y = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$ **معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 1**

$y = \sqrt{1-x^2}$ **معادلة النصف العلوي من الدائرة**

$\frac{1}{\pi}\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi\ \cdot(1) = \frac{1}{2}$ **مساحة النصف العلوي من الدائرة**

(6) $\int_2^3 f(x)\,dx + \int_3^5 f(x)\,dx - \int_5^2 f(x)\,dx = 0$ (a) (b)

$$\int_2^3 f(x)dx + \int_3^5 f(x)dx - \int_5^2 f(x)dx = \int_2^5 f(x)dx + \int_2^5 f(x)dx = 2\int_2^5 f(x)dx$$

(7) $\int_2^4 f(x)\,dx + \int_4^2 g(x)\,dx = 0$ (a) (b)

لا يمكن تطبيق الخواص لأن الدالتين مختلفتين

في التمارين (8–12)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(8) إذا كان: $\int_3^{-1} g(x)\,dx = 2$ ، $\int_{-1}^3 f(x)\,dx = 4$ فإن $\int_{-1}^3 (2f(x) + 3g(x) + 1)\,dx$ تساوي:

(a) 18 (b) −6 (c) 6 (d) 12

$$2\int_{-1}^3 f(x)dx + 3\int_{-1}^3 g(x)dx + \int_{-1}^3 (1)dx = 2\times 4 + 3\times(-2) + (3-(-1)) = 8 - 6 + 4 = 6$$

(9) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{18}} \sqrt{2}\,dx =$

باستخدام الآله الحاسبة

(a) 2 (b) $2\sqrt{2}$ (c) 4 (d) 8

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{18}} \sqrt{2}\ dx = \sqrt{2}(\sqrt{18} - \sqrt{2}) = 4$$

(10) $\int_{-1}^1 (1 - |x|)\,dx =$

باستخدام الآله الحاسبة

(a) 1 (b) −1 (c) 0 (d) $\frac{1}{2}$

$$\int_{-1}^1 (1-|x|)\ dx = \int_{-1}^1 1\ dx - \int_{-1}^1 |x|)\ dx = \int_{-1}^1 1\ dx - \int_{-1}^0 (-x)\ dx - \int_0^1 (x)\ dx =$$

$$1(1-(-1)) - \left[\frac{-x^2}{2}\right]_{-1}^0 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 2 + \frac{1}{2}(0^2 - (-1)^2) - \frac{1}{2}(1^2 - 0^2) = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

(11) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)\,dx =$

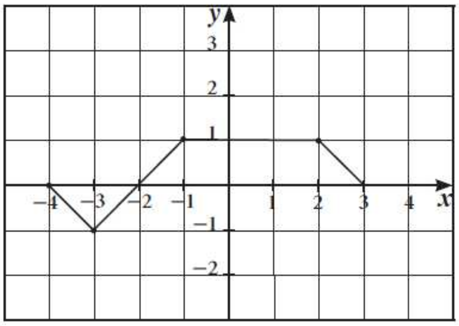
باستخدام الآله الحاسبة

(a) 4 (b) 2 (c) 0 (d) π

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)\ dx = [-\cos x + \sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = (-\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}) - (-\cos\frac{-\pi}{2} + \sin\frac{-\pi}{2})$$
$$= (0+1) - (0 + (-1)) = 2$$

في التمارين (13–15)، لديك قائمتان، اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين من القائمة (1) لتحصل على عبارة صحيحة.

إذا كان بيان الدالة f كما في الشكل المقابل، فإن:



(1)	(2)
(13) $\int_{-4}^{3} f(x)\,dx$ يساوي: d	(a) 6
(14) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات هي: b	(b) 5
(15) $\int_{-4}^{-1}\left(f(x)+\frac{1}{6}\right)dx$ يساوي: c	(c) 0
	(d) 3

$$\int_{-4}^{-2} f(x)\,dx = -1$$

$$\int_{-2}^{3} f(x)\,dx = 4$$

$$\int_{-4}^{3} f(x)\,dx = \int_{-4}^{-2} f(x)\,dx + \int_{-2}^{3} f(x)\,dx = -1+4 = 3$$

$$\int_{-4}^{-1} f(x)\,dx + \int_{-4}^{-1}\left(\frac{1}{6}\right)dx = \left(-1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{6}\left[-1-(-4)\right] = \frac{-1}{2}+\frac{1}{6}\times 3 = 0$$

Graphical Interpretation of Definite Integral **التفسير البياني للتكامل المحدد**

في المستوى الإحداثي لتكن f دالة متصلة على $[a, b]$،
A تمثل مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات والمستقيمين

$x = a$, $x = b$

1 إذا كانت: $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$

فإن: $\int_a^b f(x)\,dx = A$

2 إذا كانت: $f(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a, b]$

فإن: $\int_a^b f(x)\,dx = -A$