الرياضيات

الكورس الثاني

12

2021 - 2020

UULA.COM

UULA

الرياضيات

الكورس الثاني

12

2021 - 2020

uula.com

قائمة المحتوى

01 التكامل

02 تطبيقات التكامل

03 القطوع المخروطية

04 الاحتمال

التكامل غير المحدد

المشتقة العكسية

تسمى الدالة F مشتقة عكسية للدالة f المعرفة على مجالها I.

إذا كان $\boldsymbol{\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)}$

س أثبت أن: $F(x) = 5 - \frac{1}{3}x^3$ هي مشتقة عكسية للدالة $f(x) = -x^2$
ثم اكتب مشتقة عكسية أخرى لها.

س أثبت أن: $F(x) = \frac{x^3+1}{x^2}$ هي مشتقة عكسية للدالة $f(x) = 1 - \frac{2}{x^3}$

ملاحظات هامة

التكامل غير المحدد للدالة f بالنسبة إلى x هو مجموعة كل المشتقّات العكسيّة F , و يكتب على الصورة:

$$\int f(x)\, dx$$

Rules of Indefinite Integral قواعد التكامل غير المحدد

$\int k\,dx = kx + C$ عدد ثابت k

قاعدة القوى

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\,, n \in Q - \{-1\}$$

Properties of Indefinite Integral خواص التكامل غير المحدد

خاصية الضرب بعدد ثابت

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx\,, k \neq 0$$

خاصية الجمع و الطرح

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

Q $\int 5\,dx$

Q $\int 15\,dx$

Q $\int 5x^4\,dx$

Q $\int 4x^3\,dx$

Q $\int (3x^2 - 4x - 1)\, dx$

Q $\int (x^2 - 2x + 5)\, dx$

Q $\int \frac{1}{x^2}\, dx$

Q $\int \frac{x^2-4x+3}{x-1}\, dx$

Q $\int \left(\frac{x^2-2}{x^2}\right)^2 dx$

Q $\int (2x-3)(x+4)\,dx$

Q $\int \frac{x^2+5x+4}{x+1}\,dx$

Q $\int \left(\frac{3x^2-x}{x}\right)^2 dx$

Q $\int \sqrt{x}\, dx$

Q $\int \sqrt[5]{x^2}\, dx$

Q $\int x\sqrt{x}\, dx$

Q $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

Q $\int \frac{x^2-3x}{\sqrt[3]{x}} dx$

Q $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1} dx$

س إذا كان: $F(x) = \int (2x+5)\, dx$, $F(-1) = 0$ فأوجد $F(x)$

س إذا كان: $F(x) = \int (2x-3)\, dx$, $F(3) = 2$ فأوجد $F(x)$

التكامل بالتعويض

Q $\int (x^2 + 2x + 5)^3 (2x + 2)\, dx$

Q $\int (x^3 + 4x^2 + x)^7 (3x^2 + 8x + 1)\, dx$

Q $\int \frac{\left(\frac{1}{x}+4\right)^5}{x^2}\,dx$

Q $\int \sqrt[3]{x^2-5x+2}\,(2x-5)\,dx$

Q $\int \sqrt{4x-5}\,dx$

Q $\int \sqrt[5]{3x+7}\,dx$

Q $\int \frac{5}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)^3} dx$

Q $\int \frac{3\left(\sqrt[3]{x-5}\right) dx}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

Q $\int x(x+1)^5 dx$

Q $\int x(2x\_1)^3 \, dx$

Q $\int x^5\sqrt{4-x^2}\,dx$

Q $\int x^5\,\sqrt{3+x^2}\,dx$

تكامل الدوال المثلثية

تذكر : اشتقاق الدوال المثلثية :

$(\sin x)' = \cos x$
$(cos\, x)' = -\sin x$

$(tan\, x)' = \sec^2 x$
$(cot\, x)' = -\csc^2 x$

$(sec\, x)' = \sec x \tan x$
$(csc\, x)' = -\csc x \cot x$

$$\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C$$

$$\int \sin kx \, \mathrm{d}x = -\frac{\cos kx}{k} + C$$

$$\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C$$

$$\int \cos kx \, \mathrm{d}x = \frac{\sin kx}{k} + C$$

$$\int \sec^2 x \, \mathrm{d}x = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x \, \mathrm{d}x = -\cot x + C$$

$$\int sec\, x \tan x \, \mathrm{d}x = \sec x + C$$

$$\int csc\, x \cot x \, \mathrm{d}x = -\csc x + C$$

Q $\int (\sin x + sec^2\, x)\, \mathrm{d}x$

Q $\int (\cos x + \csc^2 x)\, \mathrm{d}x$

Q $\int cscx(cotx + csccx)\, dx$

Q $\int secx(tanx + secx)\, dx$

Q $\int \frac{dx}{cos^2 x}$

Q $\int \frac{dx}{\sin^2 x}$

Q $\int \cos 4x \, dx$

Q $\int \sin 5x \, dx$

Q $\int (2x - \sin 3x) \, dx$

Q $\int (x^2 + \cos 2x) \, dx$

Q $\int x\, csc^2(x^2-1)\, dx$

Q $\int x \sec^2(x^2+2)\, dx$

Q $\int \cos^4 t \cdot \sin t\, dt$

Q $\int \sin^3 x \cdot \cos x\, dx$

Q $\int sec^2 x \cdot tan\, x\, dx$

Q $\int csc^2 x \cdot \cot x\, dx$

Q $\int \cos^3(2x-3) \cdot \sin(2x-3)\, dx$

Q $\int x^3 \cos(x^4+5)\,dx$

Q $\int x^2 \cdot \sin(x^3-1)\,dx$

Q $\int (1+\cos x)^6 \sin x\,dx$

Q $\int (3+\sin 2x)^5 \cos 2x\,dx$

Q $\int sec^4 x\, tan\, x\, dx$

Q $\int csc^5 x\, cot\, x\, dx$

الدوال الأسية و اللوغاريتمية

اشتقاق الدوال الأسية

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

Q $f(x) = 3^x$

Q $f(x) = 6^{\sqrt{x}}$

Q $f(x) = 10^{\sin x}$

Q $f(x) = 10^x$

Q $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$

Q $f(x) = 5^{\cos x}$

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

Q $h(x) = e^{\frac{2x}{3}}$

Q $h(x) = e^{x^2+3x-1}$

Q $h(x) = e^{\sec x}$

Q $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

Q $g(x) = e^{x^2-4}$

Q $h(x) = e^{\tan x}$

اشتقاق دوال اللوغاريتمات الطبيعية

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

Q $f(x) = \ln x^2$

Q $g(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

Q $h(x) = \ln\sqrt{x}$

Q $k(x) = \ln(\cos x)$

اشتقاق دوال اللوغاريتمات الطبيعية

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

Q $f(x) = \ln(2x + x^3)$

Q $g(x) = \ln\frac{1}{2x+1}$

Q $h(x) = \ln\left(1 + \sqrt{3}x\right)$

Q $h(x) = \ln(\sin x)$

تكامل بعض الدوال الأسية و اللوغاريتمية

التكامل غير المحدد	قاعدة المشتقة
$\int \mathbf{e}^x\, \mathbf{d}x = \mathbf{e}^x + C$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$
$\int u' \boldsymbol{e}^u\, \boldsymbol{d}x = \boldsymbol{e}^u + C$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^u = \mathrm{e}^u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u'\mathrm{e}^u$
$\int \frac{1}{x}\boldsymbol{d}x = \ln\lvert x\rvert + C$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\lvert x\rvert = \frac{1}{x}$
$\int \frac{u'}{u}\mathbf{d}x = \ln\lvert u\rvert + C$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\lvert u\rvert = \frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{u'}{u}$

ملاحظة

$$\int \frac{g'(x)\,\boldsymbol{d}x}{g(x)} = \ln\lvert g(x)\rvert + C$$

Q $\int 2e^x\,dx$

Q $\int e^{3x}\,dx$

Q $\int 2x \cdot e^{x^2+3}\,dx$

Q $\int (2x-1)e^{x^2-x+3}\,dx$

Q $\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\,dx$

Q $\int (x^2-2)e^{x^3-6x}\,dx$

Q $\int \frac{-5}{3x-2} dx$

Q $\int \frac{3}{2x+5} dx$

Q $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+7} dx$

Q $\int \frac{3t^2-6t}{t^3-3t^2+8}\,dt$

Q $\int \frac{x^2-5x+6}{x}\,dx$

Q $\int \frac{x^3+4}{x}\,dx$

أوجد $\int tanx\, dx$

أوجد $\int cotx\, dx$

التكامل بالتجزيء

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

أوجد:

Q $\int x \sin x \, dx$

Q $\int x \cos x \, dx$

Q $\int xe^x\,dx$

Q $\int 4xe^{-5x}\,dx$

Q $\int (x-3)e^{x-3}\,dx$

Q $\int xe^{x-3}\,dx$

Q $\int \ln x \, dx$

Q $\int x \ln x \, dx$

Q $\int \ln(x+1) \, dx$

Q $\int (x+1)\ln(x+1)\,dx$

Q $\int (2x+1)\ln(x+1)\,dx$

Q $\int x^2 \cos x \, dx$

Q $\int x^2 \sin x \, dx$

Q $\int x^2 e^x \, dx$

Q $\int x^2 e^{x+2} \, dx$

Q $\int e^x \sin x \, dx$

Q $\int e^x cos \, x \, dx$

التكامل باستخدام الكسور الجزئية

لتكن الدالة f : $f(x) = \frac{5x-1}{x^2-2x-15}$ فأوجد : الكسور الجزئية , $\int f(x)\,dx$

لتكن الدالة f : $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-4x+3}$ فأوجد : الكسور الجزئية , $\int f(x)\,dx$

Q $\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x} dx$

Q $\int \frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x} dx$

Q $\int \frac{-x^2+2x+4}{x^3-4x^2+4x}dx$

Q $\int \frac{4x^2-4x+1}{x^3-2x^2+x}dx$

Q $\int \frac{3+x+x^2}{x^3+2x^2}dx$

Q $\int \frac{x^2+1}{x^3+4x^2}dx$

Q $\int \frac{x^2-3x+7}{x^2-4x+4}dx$

Q $\int \frac{x^3-2x^2-4}{x^3-2x^2}dx$

Q $\int \frac{2x^3-9x^2+25}{x^2-6x+8}\,dx$

Q $\int \frac{x^3-7x+9}{x^2-3x+2}\,dx$

التكامل المحدد

$$\int_a^b f(x)\,\boldsymbol{d}x = [F(x)]_a^b = \boldsymbol{F}(b) - \boldsymbol{F}(a)$$

Q $\int_{-2}^{3}(3x^2 - x + 4)\,dx$

Q $\int_{2}^{7}(x^3 - 2x^2 + 2)\,dx$

خواص التكامل المحدد
Properties of Definite Integral

إذا كانت f دالة متصلة على الفترة I , $k \in \mathbb{R}$, $a ,b ,c \in I$ فإن :

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b k\,dx = k(b-a)$$

$$\int_a^b k\,f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

ملاحظة :

لاحظ في خاصية $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$ **أنه : إذا كان** $\boldsymbol{k} = 1$ **فإن :** $\int_a^b \mathbf{d}x = b-a$

Q $\int_{-8}^{-4} dx$

Q $\int_{2}^{-1}\left(\sqrt{x+1}-3\right)dx$

Q $\int_{1}^{2}\left(3e^{x}+\frac{e}{x}\right)dx$

Q $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\sin 2x-\csc^{2}x\right)dx$

Q $\int_{2}^{-3}5\,dx$

Q $\int_{2}^{4} \frac{dx}{x-1}$

Q $\int_{-2}^{3} |x| dx$

Q $\int_{0}^{5} |x-3| dx$

Q $\int_{-3}^{4} |2x - 4|\, dx$

Q $\int_{1}^{3} |x + 2|\, dx$

لتكن f دالة متصلة على $[a\ ,b]$

إذا كانت : $\boldsymbol{f(x) \geq 0}\ \forall\ \boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{a}\ ,\boldsymbol{b}]$ فإن : $\int_{\alpha}^{b} f(x)\ \mathbf{d}x \geq 0$

إذا كانت : $\boldsymbol{f(x) \leq 0}\ \forall\ \boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{a}\ ,\boldsymbol{b}]$ فإن : $\int_{\alpha}^{b} f(x)\ \mathbf{d}x \leq 0$

س دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_{3}^{5}(x^2 + x)\ \mathrm{d}x \geq 0$

س دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_{-1}^{0}(x^2 + x)\ \mathrm{d}x \leq 0$

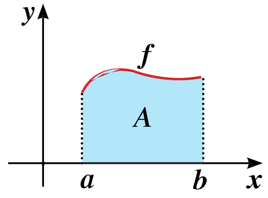
لتكن الدالتين f,g متصلتين على $[a\ ,b]$
و كانت : $\boldsymbol{f(x) \leq g(x)}\ \ \forall\ \boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{a}\ ,\boldsymbol{b}]$ فإن: $\int_a^b f(x)\,\mathbf{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathbf{d}x$

س دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_1^3 (2x-3)\,\mathrm{d}x \leq \int_1^3 (x^2+2)\,\mathrm{d}x$

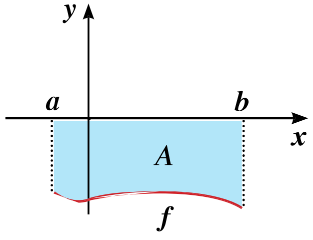
س دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_{-1}^2 (x^2+1)\,\mathrm{d}x \geq \int_{-1}^2 (x-1)\,\mathrm{d}x$

التفسير البياني للتكامل المحدد

في المستوى الإحداثي لتكن f دالة متصلة على $[a ,b]$ ،
A تمثل مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f و محور السينات و
المستقيمين $x = a , x = b$

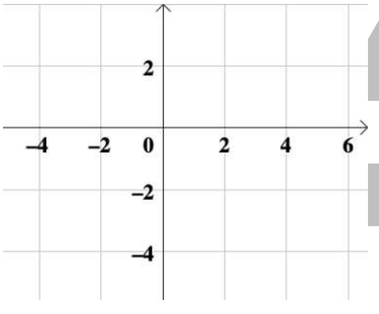


إذا كانت: $f(x) \geq 0 \ \ \forall x \in [a ,b]$
فإن: $\int_a^b f(x)\, dx = A$

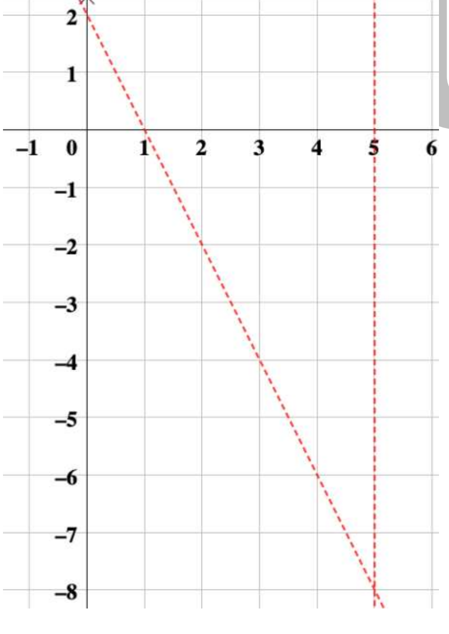


إذا كانت: $f(x) \leq 0 \ \ \forall x \in [a ,b]$
فإن: $\int_a^b f(x)\, dx = -A$

س أوجد مساحة المنطقة المحددة بين منحنى الدالة $f(x) = -3$ ومحور السينات والمستقيمين $x = -2$,$x = 4$.



س أوجد بيانياً قيمة التكامل: $\int_1^5 (2 - 2x) dx$



Q $\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx$

Q $\int_{0}^{3} -\sqrt{9-x^2}\, dx$

Q $\int_{-5}^{5} \sqrt{25 - x^2}\, dx$

Q $\int_{0}^{4} -\sqrt{16 - x^2}\, dx$

Q $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x \, dx$

Q $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x \, cos \, 2x \, dx$

Q $\int_{-1}^{1}(x^2+2x-3)^2(x+1)dx$

Q $\int_0^3 x\sqrt{x+1}dx$

Q $\int_{-1}^{1}((x+1)\sqrt{x^2+2x+5})\,dx$

Q $\int_{2}^{5} x\sqrt{x-1}\,dx$

Q $\int_{-2}^{0} \frac{x}{e^{x}} dx$

Q $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} x \sec^{2} x \, dx$

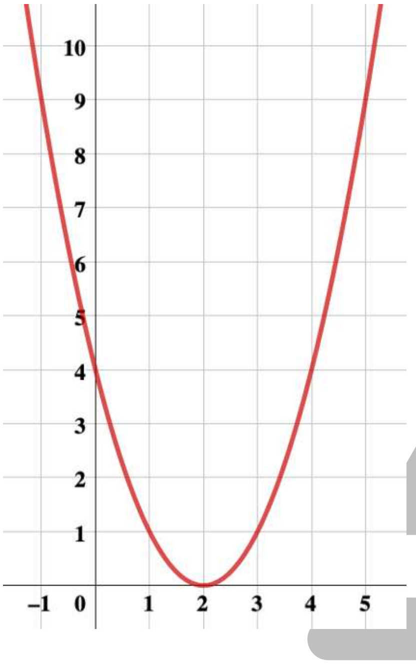
Q $\int_{1}^{5} \frac{2x+8}{x^2+4x+3} dx$

Q $\int_{4}^{7} \frac{3x^2-17}{x^2-x-6} dx$

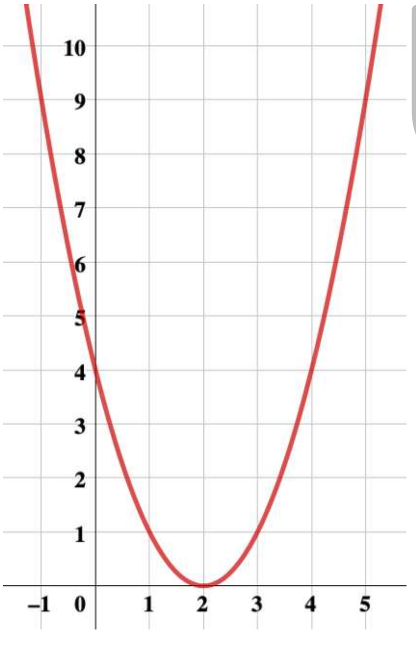
المساحات في المستوى

أولاً: مساحة منطقة محددة بمنحنى الدالة f و محور السينات في الفترة $[a, b]$

س أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = x^2 + 4 - 4x$ و محور السينات و المستقيمين $x = 5$, $x = 2$



س أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = x^2 + 4 - 4x$ و محور السينات و المستقيمين $x = 4$, $x = -1$



س أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 - 3x$ و محور السينات

س أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 5x + 4$ و محور السينات.

س أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f و محور السينات في الفترة المبينة. $\left[-\mathbf{1}\ ,\frac{\mathbf{3}}{2}\right]$, $f(x) = x^3 - 4x$

س أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f و محور السينات في الفترة المبينة. $[-2\ ,1]$, $f(x) = x^3 - 9x$

س أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f و محور السينات في الفترة المبينة. $f(x) = \sin x \, , \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

س $f(x) = \boldsymbol{cos}\, x \, ,[\mathbf{0} \, ,\boldsymbol{\pi}]$

ثانياً: مساحة منطقة محددة بمنحنيي دالتين في الفترة $[a ,b]$

س أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $\boldsymbol{f(x)} = x^2 + \mathbf{2}$
و منحنى الدالة g : $g(x) = \sqrt[3]{x}$ و المستقيمين $x = 0 ,x = 1$
علماً بأن: $\forall\, x \in [0 ,1], \quad f(x) > g(x)$

س أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $\boldsymbol{f(x)} = x^2 + \mathbf{3}$
و منحنى الدالة g : $g(x) = x^2 + 1$ و المستقيمين $x = -1 ,x = 1$
علماً بأن: $\forall\, x \in [-1 ,1], \quad f(x) > g(x)$

س أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $\boldsymbol{f(x) = e^{x}}$ و منحنى الدالة g : $g(x) = -1 - x^2$ و المستقيمين $x = 3$, $x = 0$
علماً بأن المنحنيين للدالتين g , f غير متقاطعين.

س أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $\boldsymbol{f(x)} = x^2 + \mathbf{1}$
و منحنى الدالة g : $g(x) = -x^2 - 3$ و المستقيمين $x = 1$, $x = -1$
علماً بأن المنحنيين للدالتين g , f غير متقاطعين.

س أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين :

$$y_1 = \mathbf{2} - \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} \quad , y_{\mathbf{2}} = -\boldsymbol{x}$$

س أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين :

$$y_1 = x^2 + 2 \qquad , y_{\mathbf{2}} = -\mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{5}$$

س أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين :

$f(x) = x^2 + 1 \qquad , g(x) = -x^2 + \mathbf{9}$

س أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين :

$f(x) = -2x^2 + 2 \qquad , g(x) = x^2 - 1$

س أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f و منجنى الدالة g حيث:
$f(x) = x^3 - 1 \ , g(x) = x - 1$

س أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f و منجنى الدالة g في كل مما يلي: $f(x) = 1 - x^3 \ , g(x) = -4x + 1$

س أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين :
$\boldsymbol{f(x) = x^3 - x} \quad , \; \boldsymbol{g(x)} = 3 - 3x^2$

س أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين : $\boldsymbol{f(x)} = \sqrt{x} \quad , \; \boldsymbol{g(x)} = \frac{x}{2}$
و المستقيمين $x = 9$, $x = 0$

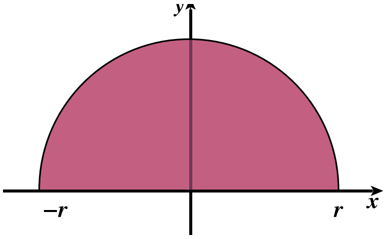
حجوم الأجسام الدورانية

$$V = \int_a^b \pi\left(f(x)\right)^2 dx$$

س أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات و المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 2$ و محور السينات في الفترة $[-1,1]$.

س أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات و المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = \sqrt{x-1}$ و محور السينات في الفترة $[1,5]$.

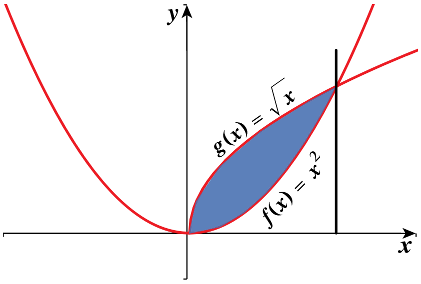
س باستخدام التكامل المحدد أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات و المحددة بنصف الدائرة $y = \sqrt{r^2 - x^2}$



س باستخدام التكامل المحدد أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات و المحددة بمنحنى الدالة f :

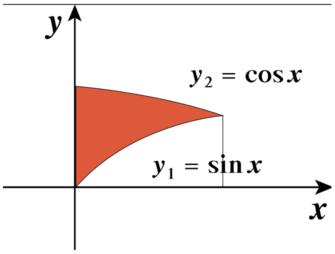
س $r \neq 0 \quad , \quad f(x) = r$ في الفترة $[0, h]$

س أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات و المحددة بمنحنيي الدالتين: $g(x) = \sqrt{x} \quad , \quad f(x) = x^2$



س أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات و المحددة بين منحنيي الدالتين: $g(x) = \frac{x}{2} + 2 \quad , \quad f(x) = \frac{x^2}{2} + 1$

س أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات و المحددة بمنحنيي الدالتين: $y_1 = sinx\ ,y_2 = \cos x$ على الفترة $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$



س أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات و المحددة بمنحنيي الدالتين: $y_1 = x + 3, y_2 = x^2 + 1$

طول قوس و معادلة منحنى دالة

قاعدة طول القوس

إذا كانت الدالة f' متصلة على $[a,b]$ فإن طول القوس من منحنى $y = f(x)$ في $[a\ ,b]$ هو :

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$$

س أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \sqrt{x^3}$ في الفترة $[0,4]$

س أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 1$ في الفترة $[3,8]$

س أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \frac{1}{3}(3+2x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[0,6]$

س أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \frac{2}{9}(9+3x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[2,5]$

ثانياً: إيجاد معادلة منحنى دالة باستخدام التكامل

س أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $P(x,y)$ يساوي $3x^2 - 4x + 1$ و يمر بالنقطة $A(1\ ,2)$

س أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $P(x,y)$ يساوي $3x^2 + x$ و يمر بالنقطة $(2\ ,2)$

س أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $P(x,y)$ يساوي $4x^3 + 6x^2 - 2x + 1$ و يمر بالنقطة $(1\ ,0)$

س أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $P(x,y)$ يساوي $-8x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ و يمر بالنقطة $(-1\ ,-5)$

س إذا كان ميل العمودي على منحنى الدالة f عند أي نقطة عليه $(x\ ,y)$ يساوي $\sqrt{5-4x}$ فأوجد معادلة المنحنى عندما يمر بالنقطة $A(-5,3)$

س إذا كان ميل العمودي لمنحنى الدالة f عند أي نقطة عليه $(x\ ,y)$ هو $2x - 1$ فأوجد معادلة المنحنى علمًا بأنه يمر بالنقطة $B(1,0)$

س لتكن: $f''(x) = 6x - 6$
فأوجد معادلة الدالة f إذا كانت النقطة $P(-1\ ,15)$ نقطة حرجة للدالة.

س لتكن: $f''(x) = 5x - 2$
فأوجد معادلة الدالة f إذا كانت النقطة $P(2\ , -2)$ نقطة حرجة للدالة.

المعادلات التفاضلية

المعادلات التفاضلية

هي معادلات تحتوي على دالّة مجهولة و بعض مشتقاتها.
نستخدم عادة y بدلاً من $f(x)$.

رتبة المعادلة التفاضلية

هي أعلى رتبة لمشتقة دالة موجودة في هذه المعادلة.
$y' = xy$, $y' = -8$, $y' - 2y = x - 1$ هي معادلات تفاضلية من الرتبة الأولى.
$y'' = -8$, $y'' + 2xy' - y = 0$ هي معادلات تفاضلية من الرتبة الثانية.

درجة المعادلة التفاضلية

هي أكبر أس لأعلى المشتقات رتبة.
$y'' + (y')^2 + y = 1$ هي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى.
$(y')^2 = \frac{4x}{y}$ هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية.

تدريب

س أكمل الجدول التالي محدّدًا رتبة و درجة كل معادلة من المعادلات التفاضلية فيه.

المعادلة التفاضلية	الرتبة	الدرجة
$y' = 5y$	1	1
$y'^2 = \frac{4x}{y}$	1	2
$y'' = 5y' + xy$	2	1
$(y'')^2 = 1 + (y')^3$	2	2
$y''' = (y')^2 + x^3$	3	1

س أثبت أن الدالة : $y = e^{x^2}$ هي حل للمعادلة التفاضلية : $y' - 2xy = 0$

س أثبت أنّ الدالة : $y = 2e^{3x} + 1$ هي حل للمعادلة التفاضلية : $y' + \mathbf{3} = \mathbf{3y}$

النوع الأول: المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى و الدرجة الأولى التى على الصورة $y' = f(x)$ حلها يكون على الصورة: $y = \int f(x)\, dx$.

س حل المعادلة: $y' = \mathbf{3}x^2 - 1$

س حل المعادلة: $y' = 7x^2 + 9x - 1$

س حل المعادلة: $y' = 3x^2 - 1$, و التي تحقق $y = 2$ عند $x = 1$

س حل المعادلة: $y' = 8x^3 - 3x^2 + 4$, و التي تحقق $y = 5$ عند $x = 1$

النوع الثاني: المعادلات التفاضلية على الصورة $y' = g(x).h(y)$ يتم حلها بطريقة فصل المتغيرات

س $y' - 2xy = 0$

س $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2y}{x}$

النوع الثالث: المعادلات التفاضلية على الصورة $a \neq 0$: $y' = ay$

يكون حلها: $y = ke^{ax}$ حيث $k \in R^*$

س أوجد حلاً للمعادلة: $y' = 4y$ إذا كان $y = 2$ عند $x = 0$

س أوجد حلاً للمعادلة: $y' = -2y$ إذا كان $y = 3$ عند $x = 0$

النوع الرابع: المعادلات التفاضلية على الصورة $y' = ay + b : a \neq 0 , b \neq 0$

يكون حلها: $y = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ حيث $k \in R^*$

س أوجد حلاً للمعادلة: $2y' + y = 1$ إذا كان $y = 2$ عند $x = -1$

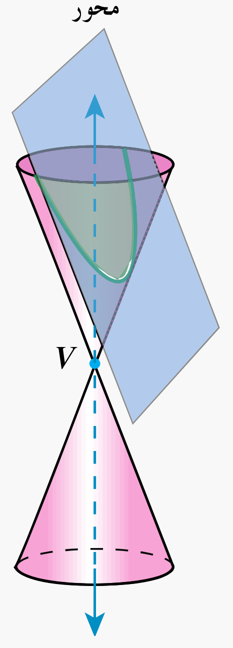
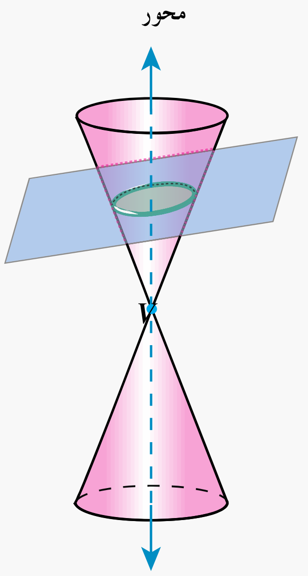
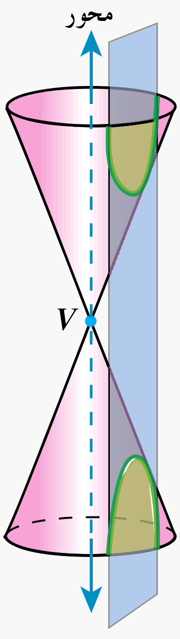
س أوجد حلاً للمعادلة: $3y' - 2y = 4$ إذا كان $y = 3$ عند $x = 0$

النوع الخامس: المعادلات التفاضلية على الصورة: $y'' = f(x)$
يتم حل هذه المعادلات بخطوتين: $y' = \int f(x)\, dx = F(x) + C_1$
ثم $y = \int (F(x) + C_1)\, dx$

س حل المعادلة: $y'' = 3x^2 - 2x$

س حل المعادلة: $y'' = -3x^2 + 6x$

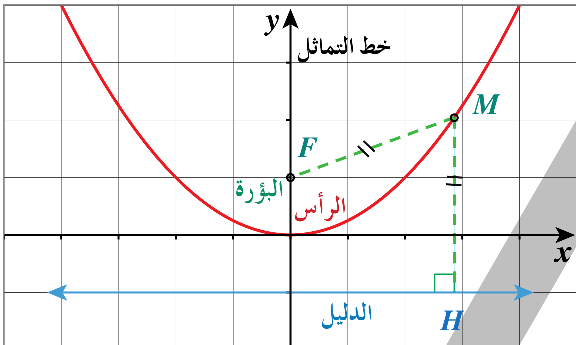
القطوع المخروطية

الشكل			
وضع المستوى	المستوى موازٍ لراسم و لا يحويه	المستوى ليس عموديًا على المحور و ليس موازيًا لأي راسم	المستوى موازٍ للمحور و لا يحويه
القطع الناتج	قطع مكافئ	قطع ناقص	قطع زائد

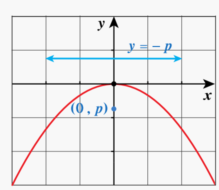
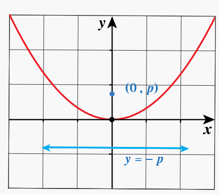
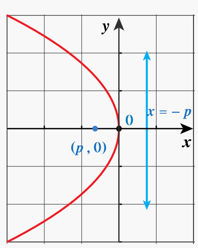
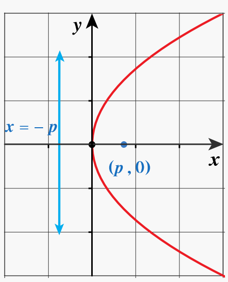
القطع المكافئ

القطع المكافئ

القطع المكافئ هو مجموعة كل النقاط في المستوى المتساوية البعدين عن نقطة ثابتة معطاة (البؤرة) و عن مستقيم ثابت معطى (الدليل).



القطع مكافئ رأسه نقطة الأصل (0 ,0)

<table dir="rtl">
<tr><td>الصورة العامة</td><td colspan="2">$x^2 = 4py$</td><td colspan="2">$y^2 = 4px$</td></tr>
<tr><td>الفتحة</td><td colspan="2">إلى أعلى أو إلى أسفل</td><td colspan="2">إلى اليمين أو إلى اليسار</td></tr>
<tr><td>البؤرة</td><td colspan="2">$(0, p)$</td><td colspan="2">$(p, 0)$</td></tr>
<tr><td>الدليل</td><td colspan="2">$y = -p$</td><td colspan="2">$x = -p$</td></tr>
<tr><td>محور التناظر</td><td colspan="2">محور الصادات $(y - axis)$</td><td colspan="2">محور السينات $(x - axis)$</td></tr>
<tr><td>المسافة من الراس إلى البؤرة</td><td colspan="4" rowspan="2">$|p|$</td></tr>
<tr><td>المسافة من الرأس إلى الدليل</td></tr>
<tr><td>إشارة p</td><td>$p < 0$</td><td>$p > 0$</td><td>$p < 0$</td><td>$p > 0$</td></tr>
<tr><td>الشكل</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي:

س رأسه نقطة الأصل و بؤرته $F(4\ ,0)$

س بؤرته $F(0, -3)$ و دليله المستقيم : $y = 3$

س أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل و بؤرته $F(-4\ ,0)$

س أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $F(0\ ,2)$ و دليله المستقيم $y = -2$

أوجد البؤرة و معادلة الدليل لقطع مكافئ، ثم ارسم شكلاً تقريبيًا لهذا القطع في كل مما يلي

س المعادلة: $x^2 = -2y$

س المعادلة: $\frac{1}{3}y^2 = x$

أوجد البؤرة و الدليل لقطع مكافئ، ثم ارسم شكلاً تقريبيًا لهذا القطع في كل مما يلي :

س المعادلة: $y = \frac{x^2}{4}$

س المعادلة: $x = -\frac{1}{5}y^2$

س أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل و يمر بالنقطة $A(1\ ,2)$ و خط تماثله $x - axis$.

س أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل و يمر بالنقطة $A(1\ ,1)$ و خط تماثله $y - axis$.

س أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(0,0)$ و يمر بالنقطتين $B(1\ ,4)$ ، $A(-1\ ,4)$

س أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل و معادلة دليله $x = -3$

س أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل و معادلة دليله $y = 1$

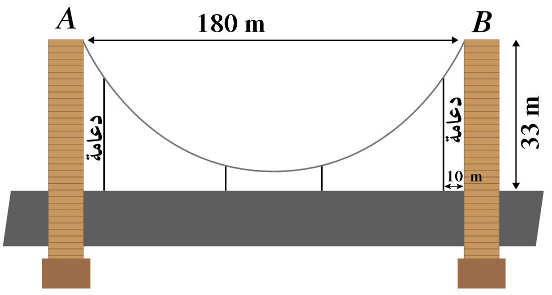
س تُستخدم ميكروفونات مكافئة على جانبي ملعب لالتقاط الأصوات من داخل الملعب.
إذا كان قد تولد ميكروفون مكافئ من تدوير قطع مكافئ معادلته: $y^2 = 15x$
فحدّد موضع البؤرة (جهاز الاستقبال الإلكتروني) لهذا القطع المكافئ.

س تصنع إحدى الشركات الكشافات المكافئة لنوعيات عديدة من السيارات.
إذا كان لأحد هذه الكشافات سطح مكافئ متولد من تدوير القطع المكافئ الذي معادلته $x^2 = 12y$, فأين سيكون موضع المصباح الكهربائي ؟

س تصنع إحدى الشركات مصابيح أمامية للسيارات. إذا كان أحد المصابيح على شكل سطح مكافئ متولد من تدوير قطع مكافئ معادلته $y^2 = 12x$, فأين يجب وضع لمبة المصباح؟

س في السؤال السابق: ما معادلة القطع المكافئ إذا كانت اللمبة تبعد 4 (وحدات قياس) عن رأس القطع المكافئ؟

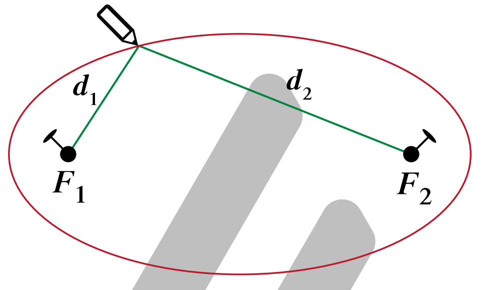
س يصل سلك معدني متدلٍ بين رأسي عمودي جسر. السلك المعدني هو على صورة قطع مكافئ. يبعد العمودان عن بعضهما مسافة 180 m و يبلغ ارتفاع كل منهما 33 m , يبلغ أصغر ارتفاع للسلك عن الطريق العام 3 m , وضعت على الطريق دعامات للسلك المتدلي. أوجد طول الدعامة التي تبعد 10 m عن أي من العمودين.

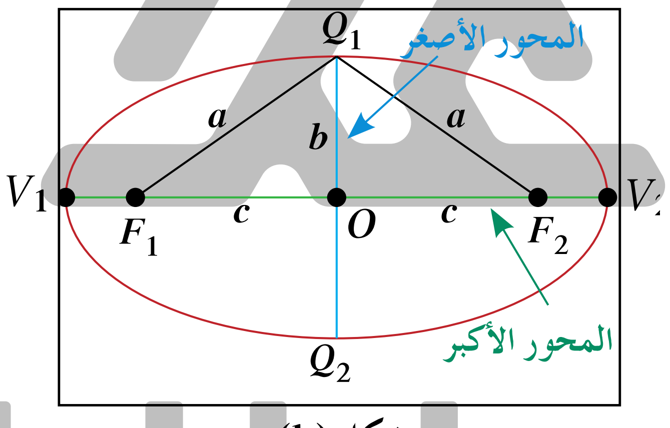


القطع الناقص

القطع الناقص

القطع الناقص هو مجموعة كل النقاط في المستوى التي يكون مجموع بعدي كل نقطة منها عن نقطتين ثابتتين في المستوى ثابتًا.





شكل (b)

$$a^2 = b^2 + c^2$$

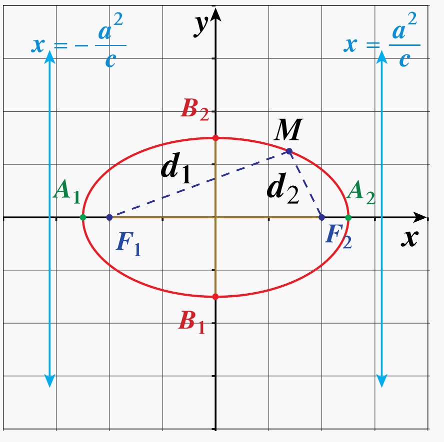
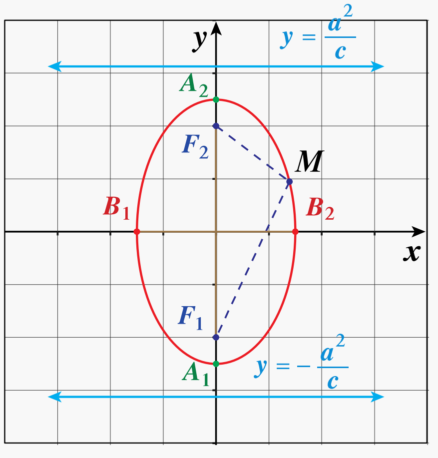
طول المحور الأكبر: $2a$

طول المحور الأصغر: $2b$

البعد بين البؤرتين: $2c$

العلاقة الأساسية: $c^2 = a^2 - b^2$

معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل (0 , 0) كالتالي:

المعادلة	$a > b > 0$	$a > b > 0$
	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	$\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$
بيان القطع		
المحور الأكبر	ينطبق على محور السينات	ينطبق على محور الصادات
الرأسان طرفا المحور الأكبر	$A_1(-a, 0), A_2(a, 0)$	$A_1(0, -a), A_2(0, a)$
طول المحور الأكبر	$2a$	
طرفا المحور الأصغر	$B_1(0, -b), B_2(0, b)$	$B_1(-b, 0), B_2(b, 0)$
طول المحور الأصغر	$2b$	
البؤرتان	$F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$	$F_1(0, -c), F_2(0, c)$
العلاقة الأساسية	$a^2 = b^2 + c^2$	
معادلتنا الدليلين	$x = -\dfrac{a^2}{c}, x = \dfrac{a^2}{c}$	$y = -\dfrac{a^2}{c}, y = \dfrac{a^2}{c}$
التناظر	القطع الناقص متناظر حول كل من محوريه و مركزه	

س إذا كانت: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{10}=1$ معادلة قطع ناقص فأوجد:

- رأس القطع وطرفي المحور الأصغر
- البؤرتين
- معادلتي الدليلين
- طول كل من المحورين ثم ارسم شكلاً تقريبياً للقطع

س إذا كانت: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ معادلة قطع ناقص فأوجد:

- رأس القطع وطرفي المحور الأصغر
- البؤرتين
- معادلتي الدليلين
- طول كل من المحورين ثم ارسم شكلاً تقريبياً للقطع

س أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه: $F_1(0,-3)$, $F_2(0,3)$ و طول محوره الأصغر 4 , ثم ارسم شكلًا تقريبيًا لهذا القطع.

س أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه: $F_1(-2,0)$, $F_2(2,0)$ و طول محوره الأكبر 6 , ثم ارسم شكلًا تقريبيًا

س أوجد البؤرتين و الرأسين و طول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي معادلته:
$$25x^2 + 16y^2 - 400 = 0$$

س أوجد البؤرتين و الرأسين و طول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي معادلته:
$$x^2 + 4y^2 = 16$$

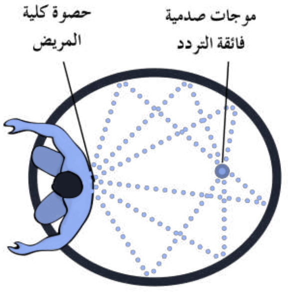
س أوجد معادلة قطع ناقص مركزه (0,0) إذا كان محوره الأكبر ينطبق على المحور الصادي وطوله 16 cm و المسافة بين البؤرتين 10 cm .

س أوجد معادلة قطع ناقص مركزه (0,0) إذا كان محوره الأكبر ينطبق على المحور السيني وطوله 12 cm و المسافة بين البؤرتين 8 cm.

س أوجد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه $F(2,0)$ و يمر بالنقطة $A(2,1)$.

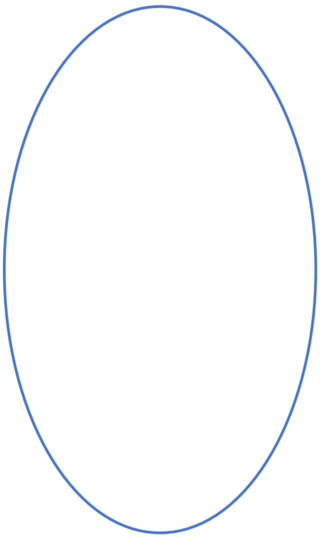
س أوجد معادلة قطع ناقص الذي محوره الأصغر أفقي طوله 10 m و يمر بالنقطة $A(2,2\sqrt{6})$

س للقطع الناقص الذي يولد السطح الناقص لجهاز تفتيت الحصوات, محور أكبر نقطتاه الطرفيتان $A_1(-6,0)$, $A_2(6,0)$, و محور الأصغر إحدى نقطتيه الطرفيتين $B_1(0,-2.5)$, أوجد إحداثيات البؤرتين.



س يتولد المجسم الناقص لأحد أجهزة تفتيت الحصوات, من دوران قطع ناقص نقطتا طرفي محوره الأكبر $A_1(-8,0)$, $A_2(8,0)$. إذا كانت إحدى نقطتي طرفي محوره الأصغر $B_1(0,3.5)$, فأوجد إحداثيات البؤرتين.

س لمتابعة الهمس في الصالات البيضاوية الشكل فإن الصوت الذي ينطلق من بؤرة يمكن الاستماع إليه بشكل تام في البؤرة الثانية. على افتراض أن إحدى الصالات الكبرى مبنية على شكل بيضاوي طولي محوريها 98 m و 46 m .
على أي مسافة من مصدر الصوت يجب أن يكون موقع شخص ليتمكن من سماعه بشكل واضح؟

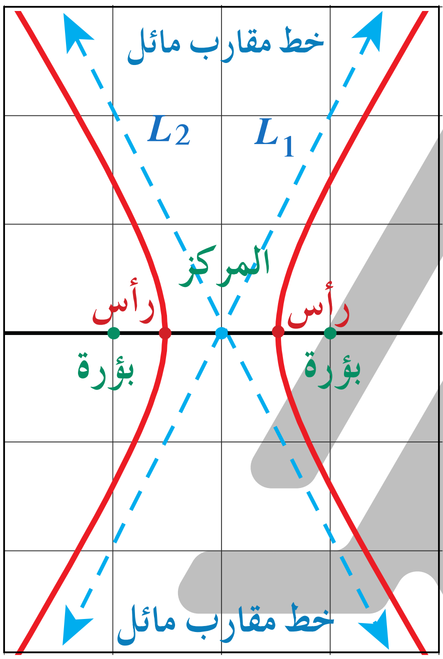


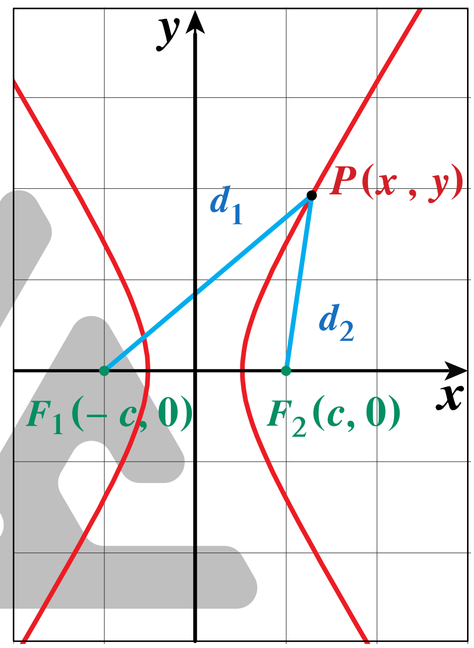
س على افتراض أن الصالة بيضاوية الشكل طولي محوريها 78 m , 36 m .
على أي مسافة من مصدر الصوت يجب أن يكون موقع شخص ليتمكن من سماع الصوت المنطلق بشكل واضح ؟

القطع الزائد

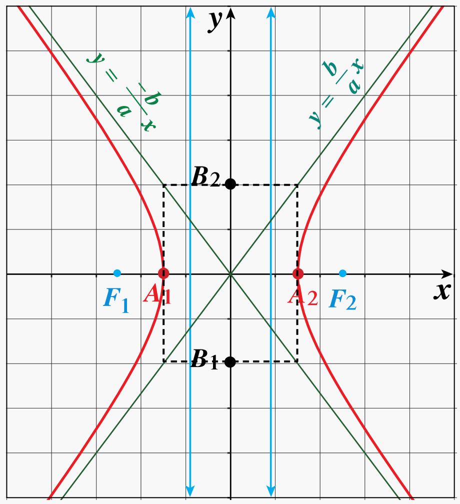
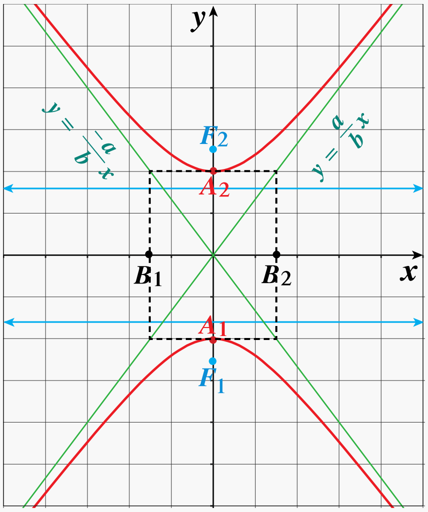
القطع الزائد

القطع الزائد هو مجموعة كل النقاط في المستوي التي تكون القيمة المطلقة للفرق بين بعدي كل نقطة منها عن نقطتين ثابتتين في المستوي ثابتًا.





معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل كالتالي:

المعادلة	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$
بيان القطع		
طرفا المحور القاطع الرأسان	$A_1(-a,0), A_2(a,0)$	$A_1(0,-a), A_2(0,a)$
المحور القاطع (الأساسي)	ينطبق على محور السينات	ينطبق على محور الصادات
طول المحور القاطع	$2a$	
طرفا المحور المرافق	$B_1(0,-b), B_2(0,b)$	$B_1(-b,0), B_2(b,0)$
طول المحور المرافق	$2b$	
البؤرتان	$F_1(-c,0), F_2(c,0)$	$F_1(0,-c), F_2(0,c)$
العلاقة الأساسية	$c^2 = a^2 + b^2$	
معادلة الخطين المقاربين	$y = \pm\frac{b}{a}x$	$y = \pm\frac{a}{b}x$
معادلة الدليلين	$x = \pm\frac{a^2}{c}$	$y = \pm\frac{a^2}{c}$
التناظر	القطع متناظر حول محوريه و مركزه	

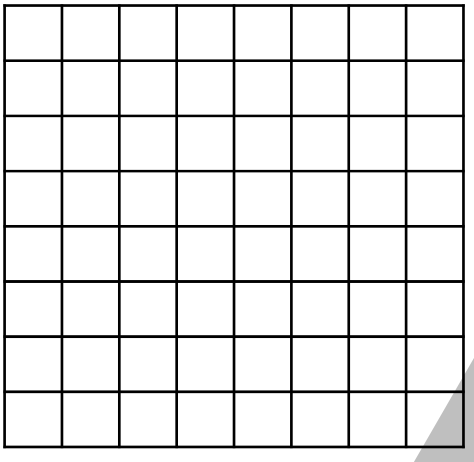
س لتكن: $9x^2 - 16y^2 = 144$ معادلة قطع زائد فأوجد:

- رأسي القطع
- البؤرتين
- معادلتي الدليلين
- طول كل من المحورين
- معادلة كل من الخطين المقاربين ثم ارسم شكلاً تخطيطياً للقطع

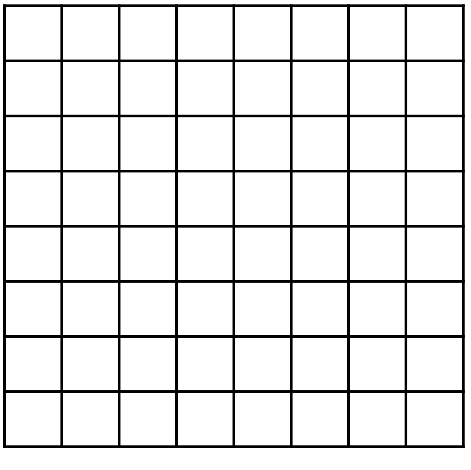
س لتكن: $9y^2 - 25x^2 = 225$ معادلة قطع زائد فأوجد:

- رأسي القطع
- البؤرتين
- معادلتي الدليلين
- طول كل من المحورين
- معادلة كل من الخطين المقاربين ثم ارسم شكلاً تخطيطياً للقطع

س أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $F_2(0,3)$, $F_1(0,-3)$ و رأساه $A_2(0,2)$, $A_1(0,-2)$
ثم أوجد معادلة كلّ من خطيه المقاربين و ارسم شكلًا تقريبيًا للقطع.



س أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $F_2(4,0)$, $F_1(-4,0)$ و رأساه $A_2(2,0)$, $A_1(-2,0)$ ثم أوجد معادلة كلّ من خطيه المقاربين و ارسم شكلًا تقريبيًا للقطع.



س أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0,0)$ و إحدى بؤرتيه $F\left(0,\sqrt{34}\right)$ و معادلة أحد خطيه المقاربين هي: $y=\frac{3}{5}x$

س أوجد معادلة القطع الزائد الذي إحدى بؤرتيه $F\left(\sqrt{41},0\right)$ و معادلة أحد خطية المقاربين $y=\frac{4}{5}x$

س أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0,0)$ و أحد رأسيه $(-4,0)$ و يمر بالنقطة $(5,-2)$

س أوجد معادلة القطع الزائد الذي أحد رأسيه $\left(0,\frac{5}{4}\right)$ و يمر بالنقطة $\left(-\sqrt{3},-\frac{5}{2}\right)$

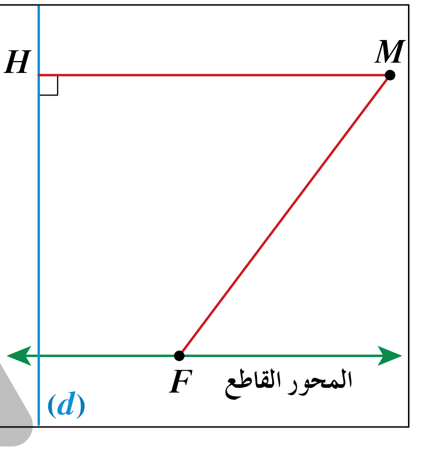
س أوجد معادلة قطع زائد لمسار مركبة فضائية حول كوكب المشتري علمًا أن:
$a = 38942360 \text{ km}$,$c = 778547200 \text{ km}$

الاختلاف المركزي

القطع المخروطي

القطع المخروطي هو مجموعة كل النقاط في المستوى الإحداثي حيث تكون نسبة بعد كل منها من نقطة ثابتة (البؤرة) إلى بعدها عن مستقيم ثابت (الدليل) في نفس المستوى تساوي مقدارًا ثابتًا.

إذا $e = 1$ يكون القطع المخروطي **قطعًا مكافئًا**
إذا $e < 1$ يكون القطع المخروطي **قطعًا ناقصًا**
إذا $e > 1$ يكون القطع المخروطي **قطعًا زائدًا**



حدد نوع القطع في كل مما يلي ثم أوجد معادلته.

س اختلافه المركزي $(e = 1)$ و بؤرته $F(-1,0)$

س اختلافه المركزي $\left(e = \frac{4}{5}\right)$ و إحدى بؤرته $F\left(-4\sqrt{2},0\right)$

س اختلافه المركزي $\left(e = \sqrt{3}\right)$ و معادلة أحد دليليه $x = \frac{1}{3}$

أوجد الاختلاف المركزي لكل قطع مما يلي حيث معادلته:

س $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

س $x^2-25y^2=1$

س $x^2+\frac{y^2}{25}=1$

س $24y^2=600+25x^2$

س أوجد طول المحور القاطع للقطع الزائد الذي اختلافه المركزي $(e = 2)$ و طول محوره المرافق 6 وحدات.

س أوجد طول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي اختلافه المركزي $\left(e = \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ و طول محوره الأصغر 4 وحدات.

يمكن وضع الأقمار الاصطناعية في مدارات بيضاوية الشكل (قطع ناقص) في دورانها حول الأرض.
لنفترض أن قمرًا صناعيًا يتحرك في مدار بيضاوي (قطع ناقص) حول الأرض حيث الاختلاف المركزي $(e = 0.04)$ و طول نصف محوره الأكبر 7500 km و إحدى بؤرتيه مركز الأرض.

س أوجد معادلة مدار القمر الاصطناعي.

س على افتراض أن طول نصف قطر الأرض 6372 km فأوجد أطول و أقصر بُعد للقمر الاصطناعي عن سطح الأرض.

إذا كان القمر الاصطناعي له مدار بيضاوي (قطع ناقص) حول الأرض حيث اختلافه المركزي $e = 0.05$ و طول نصف محوره الأكبر $8600\ km$ و إحدى بؤرتيه مركز الأرض.

س أوجد معادلة مدار القمر الاصطناعي.

س إذا كان نصف قطر الأرض 6372 km فأوجد أطول و أقصر بُعد للقمر الاصطناعي عن سطح الأرض.

المتغيرات العشوائية المتقطة

المتغير العشوائي
Random Variable

هو دالة مجالها فضاء العينة لتجربة عشوائية S و مجالها المقابل هو $\mathbb{R}$ و مداها مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ حيث

$$X : S \rightarrow \mathbb{R}$$

(X هو المتغير العشوائي لتجربة عشوائية, S فضاء العينة, $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية).

دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X

إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متقطعًا مداه $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$
فإن دالة التوزيع الاحتمالي f تعرّف كالتالي:

$$f(x_i) = P(X = x_i) \quad , \qquad i = 1,2,3, \dots$$

و يمكن تمثيلها بالجدول التالي:

x_i	x_1	x_2	...
$f(x_i)$	$P(x_1)$	$P(x_2)$	...

في تجربة رمي حجر نرد مرة واحدة, المتغير العشوائي X يعبّر عن:
الجذر التربيعي للعدد الظاهر على الوجه العلوي عندما يكون الجذر التربيعي عددًا كليًّا و الصفر لغير ذلك.
فأوجد :

س فضاء العينة (S) و عدد عناصره $n(S)$.

س مدى المتغير العشوائي X .

س احتمال وقوع كل عنصر من عناصر فضاء العينة (S) : $f(x_i) = P(X = x_i)$

س دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X .

عند رمي حجر نرد مرة واحدة, إذا كان المتغير العشوائي X يعبّر عن:
"مربع العدد الظاهر مطروحًا منه 1 عندما يكون العدد الظاهر أصغر من 4 , و
-1 لغير ذلك".
فأوجد :

س فضاء العينة (S) و عدد عناصر فضاء العينة $n(S)$.

س مدى المتغير العشوائي X .

س احتمال وقوع كل عنصر من عناصر فضاء العينة (S) .

س دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X .

عند إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية, إذا كان المتغير العشوائي X يعبر عن "عدد الصور"
فأوجد ما يلي :

س فضاء العينة (S) و عدد عناصره $n(S)$.

س مدى المتغير العشوائي X .

س احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي X .

س دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X .

عند إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية, إذا كان المتغير العشوائي X يعبر عن "عدد الكتابات"
فأوجد ما يلي :

س فضاء العينة (S) و عدد عناصره $n(S)$.

س مدى المتغير العشوائي X .

س احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي X .

س دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X .

بيان دالة التوزيع الاحتمالي

دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X :

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X هي :

x	-2	1	2	3
$f(x)$	0.3	0.1	k	0.2

س فأوجد قيمة k .

إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X هي :

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.35	0.15	0.1	0.2	k

س فأوجد قيمة k .

س إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متقطعًا مداه هو : $\{0, 1, 2, 3\}$
و كان: $f(0) = 0.1$, $f(1) = 0.6$, $f(2) = 0.15$
فأوجد $f(3)$, ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X .

س إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متقطعًا مداه هو : $\{-2, -1, 0, 1\}$
و كان: $f(-2) = f(-1) = 0.3$, $f(1) = 0.2$
فأوجد $f(0)$, ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X .

صندوق يحتوي على 10 كرات متماثلة منها 7 كرات بيضاء و 3 كرات حمراء.
سحبت عشوائيًا 3 كرات معًا من الصندوق.
إذا كان المتغير العشوائي X يمثل عدد الكرات البيضاء،
فأوجد ما يلي :

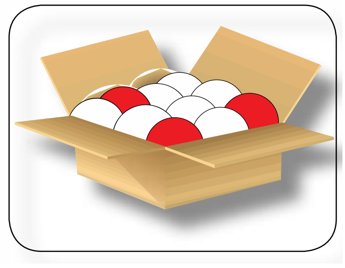
س عدد عناصر فضاء العينة (S) .

س مدى المتغير العشوائي X .

س احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي X.

س دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X .

صندوق يحتوي على 10 كرات متماثلة منها 7 كرات بيضاء و 3 كرات حمراء.
سحبت أربع كرات عشوائيًا معًا من الصندوق.
إذا كان المتغير العشوائي X يمثل عدد الكرات الحمراء,
فأوجد ما يلي :



س عدد عناصر فضاء العينة $n(S)$.

س مدى المتغير العشوائي X .

س احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي X.

س دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X .

التوقع (الوسط) و التباين للمتغيرات العشوائية المتقطعة

يبين الجدول التالي دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X :

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	0.43	0.29	0.17	0.09	0.02

فأوجد :

س التوقع (μ).

س التباين (σ^2)

س الانحراف المعياري (σ)

يبين الجدول التالي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع X :

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	0.2	0.1	0.3	0.1	0.3

فأوجد :

س التوقع (μ).

س التباين (σ^2)

س الانحراف المعياري (σ)

دالة التوزيع التراكمي لمتغير عشوائي متقطع

دالة التوزيع التراكمي

دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع عند القيمة a هي احتمال وقوع المتغير العشوائي X بحيث يكون X أصغر من أو يساوي a
أي أن:

$$F(a) = P(x \leq a)$$

الجدول التالي يبيّن دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X :

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	0.43	0.29	0.17	0.09	0.02

إذا كانت F دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X . فأوجد:

س $F(0)$

س $F(1)$

س $F(3.5)$

س $F(4)$

س $F(5)$

س $F(8)$

الجدول التالي يبيّن دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X :

x	3	4	5
$f(x)$	0.5	0.3	0.2

إذا كانت F دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X . فأوجد:

س $F(2)$

س $F(3)$

س $F(4)$

س $F(4.5)$

س $F(5)$

س $F(7)$

الجدول التالي يبين بعض قيم دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع X :

x	**1**	**2**	**3**	**5**
$f(x)$	0.15	0.2	0.6	1

فأوجد :

$P(1 < X \leq 3)$

$P(2 \leq X < 5)$

$P(X > 2)$

يبين الجدول التالي بعض قيم دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع X :

x	1	2	3	4
$f(x)$	0.25	0.40	0.65	1

فأوجد :

$P(2 < X < 4)$

$P(X > 3)$

توزيع ذات حدين

نعلم من خلال دراستنا أن بعض التجارب العشوائية يكون لها ناتجان أو عدة نواتج يمكن اختزالها إلى ناتجين فقط أي أن فضاء العينة يصبح محتويًا على عنصرين فمثلًا:

- عند إلقاء قطعة نقود مرة واحدة يكون الناتج إما صورة أو كتابة.
- عند تأدية الطالب اختبارًا في مادة ما تكون النتيجة إما نجاح أو رسوب.
- عند دخول شخص اختبار الحصول على رخصة القيادة تكون النتيجة نجاح أو رسوب.

و هكذا فإننا قيد دراسة التجارب التي يكون لها ناتجان فقط و هي ما يسمى **بتجربة ذات الحدين.**
و التي تتبع دالة التوزيع الاحتمالي المتقطع.

تجربة ذات الحدين

هي تجربة عشوائية تحقق الشروط التالية:

- تتكوّن التجربة من عدد n من المحاولات المستقلة و المتماثلة.

(المحاولات المستقلة تعني أن نتيجة كل محاولة لا تؤثر و لا تتأثر بنتائج المحاولات الأخرى).

- كل محاولة يكون لها ناتجان فقط مثل (نجاح أو فشل)
- احتمال الحصول على أحد الناتجين يكون ثابتًا من تجربة إلى أخرى. و سوف نرمز لهذا الاحتمال بالرمز P .

و تسمى كل محاولة من محاولات التجربة **بمحاولة برنولي Bernoulli** .

احتمال النجاح في x من المحاولات يعطى بالعلاقة

$$P(X = x) = f(x) = C_x \cdot P^x \cdot (1 - P)^{n-x}, n \in \mathbb{Z}^+$$

حيث n عدد المحاولات

$\{0,1,2,\cdots, n\} = X$ مجموعة القيم الممكنة للمتغير العشوائي

x عدد مرات النجاح في n من المحاولات

P احتمال النجاح

$(1 - P)$ احتمال الفضل

إذا كان X متغيرًا عشوائيًا ذو حدين و معلمتيه هما: $P = 0.1$, $n = 7$. فأوجد:

س $P(X = 0)$

س $P(1 < X \leq 3)$

إذا كان X متغيرًا عشوائيًا ذو حدين و معلمتيه هما: $P = 0.6$, $n = 6$. فأوجد:

س $P(X = 1)$

س $P(2 < X \leq 4)$

التوقع و التباين لتوزيع ذات الحدين

التوقع: $\mu = nP$

التباين: $\sigma^2 = nP(1-P)$

الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{nP(1-P)}$

س ينتج مصنع سيارات 200 سيارة يوميًا, إذا كانت نسبة إنتاج السيارات المعيبة 0.01 فأوجد التوقع و التباين و الانحراف المعياري لعدد السيارات المعيبة في يوم واحد.

س ينتج مصنع سيارات 350 سيارة يوميًا, إذا كانت نسبة إنتاج السيارات المعيبة 0.02 فأوجد التوقع و التباين و الانحراف المعياري لعدد السيارات المعيبة في يوم واحد.

س في تجربة إلقاء قطعة نقود 5 مرات. أوجد التوقع و التباين و الانحراف المعياري إذا كان المتغير العشوائي X هو ظهور صورة.

س في تجربة إلقاء قطعة نقود 8 مرات. أوجد التوقع و التباين و الانحراف المعياري إذا كان المتغير العشوائي X هو ظهور كتابة.

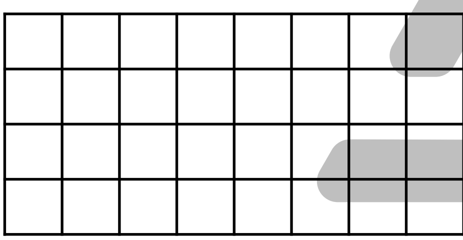
المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة)

المتغير العشوائي المتصل
Continuous Random Variable

هو المتغير التي تكون مجموعة القيم الممكنة له عبارة عن فترة من الأعداد الحقيقية أي أن مدى المتغير العشوائي المتصل $X = \{x: a \leq x \leq b\}$ و هي مجموعة غير قابلة للعد.

إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متصلًا و دالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} : 1 \leq x \leq 5 \\ 0: \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$



فأوجد:

س $P(1 < X \leq 5)$

س $P(X < 3)$

س $P(X \geq 1.5)$

س $P(X = 2)$

إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متصلًا, فدالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} : -3 \leq x \leq 3 \\ 0: \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

س $P(X < 2)$

س $P(-1 < X < 1)$

س $P(-1.5 < X < 2.5)$

س $P(X = 0)$

إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متصلًا, و دالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{8}x : 0<x\leq 4\\ 0: \text{في ما عدا ذلك}\end{cases}$$

فأوجد:

س $P(0\leq X\leq 4)$

س $P(X\leq 2)$

س $P(X>2)$

إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متصلًا, و دالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x : 0 \le x \le 2 \\ 0: \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

س $P(X < 1)$

س $P(X \geq 1)$

س $P(X = 1)$

التوزيع الاحتمالي المنتظم لمتغير عشوائي متصل (مستمر)

دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الاحتمالي المنتظم على $[a,b]$ هي:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\boldsymbol{b-a}}\boldsymbol{x} & :\ \boldsymbol{a}\le x\le \boldsymbol{b}\\ 0 & :\ \text{في ما عدا ذلك}\end{cases}$$

التوقع (الوسط) للتوزيع الاحتمالي المنتظم هو:

$$\mu=\frac{a+b}{2}$$

التباين للتوزيع الاحتمالي المنتظم هو:

$$\sigma^2=\frac{(b-a)^2}{12}$$

لتكن الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}: 0\le x\le 3\\ 0: \text{في ما عدا ذلك}\end{cases}$$

فأوجد:

س أثبت أن الدالة هي دالة كثافة احتمال.

س أثبت أن الدالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم.

س أوجد $P(1<X\le 3)$

س أوجد التوقع و التباين للدالة f

لتكن الدالة f :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} : 1 \leq x \leq 3 \\ 0: \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

س أثبت أن الدالة f هي دالة كثافة احتمال.

س أثبت أن الدالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم.

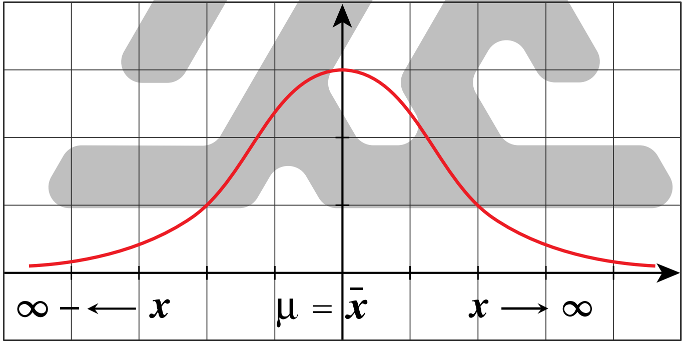
س أوجد $P(2 < X \leq 3)$

س أوجد التوقع و التباين للدالة f

التوزيع الاحتمالي الطبيعي $N(\mu,\sigma^2)$
Natural Probability Distribution $N(\mu,\sigma^2)$

يعتبر التوزيع الاحتمالي الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية المتصلة و قد سبق أن درسنا منحنى التوزيع الطبيعي و خواصه و التي منها:

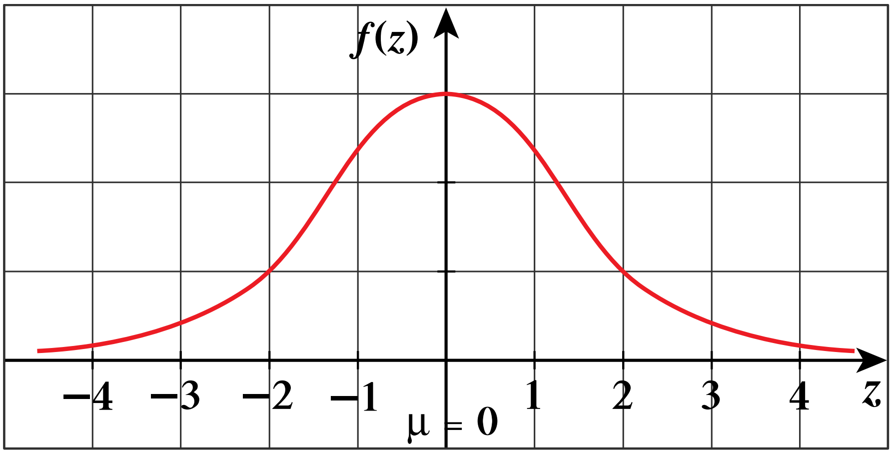
- المتوسط الحسابي = الوسيط = المنوال
- يكون بيان المنحنى على شكل ناقوس (جرس) متماثل حول محوره $(x = \mu)$
- يمتد المنحنى من طرفيه إلى $-\infty$ و إلى ∞ (لا يقطع محور السينات).
- المساحة تحت المنحنى تساوي الواحد الصحيح (وحدة مساحة).
- المستقيم الرأسي $\bar{x} = \mu$ يقسم المساحة تحت المنحنى إلى قطعتين متماثلتين مساحة كل منهما تساوي نصف (نصف وحدة مساحة)



منحنى التوزيع الطبيعي $N(\mu , \sigma^2)$

التوزيع الطبيعي المعياري $N(0,1)$

إذا كان المتوسط الحسابي للتوزيع الطبيعي $\mu = 0$ و الانحراف المعياري $\sigma = 1$ يسمى التوزيع الطبيعي **بالتوزيع الطبيعي المعياري.**
الشكل المرسوم يمثل بيان منحنى التوزيع الطبيعي المعياري.
نعلم أن منحنى التوزيع الطبيعي يتحدد بكل من التوقع μ و التباين لها σ^2 و نظرًا لاختلاف قيم μ,σ^2 من توزيع لآخر فإننا نقوم بتحويل أي توزيع طبيعي إلى توزيع طبيعي معياري وفق التحويل $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$
و تمّ وضع جداول التوزيع الطبيعي المعياري في نهاية الوحدة للتوزيع الطبيعي $N(\mu,\sigma^2)$



منحنى التوزيع الطبيعي $N(0\,,1)$

حساب الاحتمالات للتوزيع الطبيعي $N(\mu,\sigma^2)$

إذا كان للمتغير العشوائي X التوزيع الطبيعي $N(\mu,\sigma^2)$ أي التوزيع الذي توقعه μ و تباينه σ^2 و أردنا حساب احتمالات تتعلق بالمتغير X فإننا نستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري المرفق آخر الوحدة باتباع الخطوات الموضحة التالية لإيجاد $P(a \le x \le b)$:

- نوجد القيمة المعيارية المناظرة للقيمة a بالتعويض في العلاقة:

$$z_1 = \frac{a-\mu}{\sigma}$$

و القيمة المعيارية المناظرة للقيمة b بالتعويض في العلاقة:

$$z_2 = \frac{b-\mu}{\sigma}$$

- نستخدم العلاقة: $P(a < X \le b) = P(z_1 < z < z_2)$
- نستخدم أحد جدولي المساحة تحت المنحني الطبيعي (5) , (4) لحساب الطرف الأيسر من العلاقة السابقة.

حساب الاحتمالات للتوزيع الطبيعي المعياري $P(z)$

- إذا كانت $a \ge z$ أو $a \le z$, حيث $a \ge 0$ نستخدم جدول z رقم (4).
- إذا كانت $a \ge z$ أو $a \le z$, حيث $a < 0$ نستخدم جدول z رقم (5).

إذا كان z هو التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي X فأوجد:

س $P(z \leq 2.18)$

س $P(z \geq 2.43)$

س $P(1.4 \leq z \leq 2.6)$

س $P(z \leq 0.95)$

س $P(z > 0.71)$

س $P(1.45 \leq z \leq 3.26)$

إذا كان z هو التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي X فأوجد:

س $P(z \le -0.55)$

س $P(-2.2 \le z \le -1.6)$

س $P(-1.3 \le z \le 0.28)$

س $P(z \le -0.12)$

س $P(-3.2 \le z \le -0.1)$

س $P(-5.26 \le z \le 0.69)$

يمثّل المتغير X درجات الطلاب في مادة الرياضيات. إذا كان توزيع هذه الدرجات يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه $\mu = 40$ و انحرافه المعياري $\sigma = 8$ فأوجد:

س $P(30 < X \leq 65)$

س $P(X \geq 45)$