اليوم : التاريخ: / / ٢٠٢٠ م الصف :١٢ع

العنوان : التكامل بالتجزيء

بند (٥-٥)
الحصة الأولى

الأهداف السلوكية :

- يوجد تكامل حاصل ضرب دالتين باستخدام قاعدة التكامل بالتجريء.

التدريس:

قاعدة التكامل بالتجزيء :

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

حاول أن تحل صـ 37 (1) : أوجد :

$$\int x\cos x\,dx$$

$u = x$	$dv = \cos x\,dx$
$du = 1dx$	$v = \sin x$

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C$$

التطبيق: أسئلة من كتاب التمارين (بند ٥ – ٥) صـ ١٨ أوجد التكامل :

$$(1)\ \int x\cos 3x\,dx$$

$u = x$	$dv = \cos 3x\,dx$
$du = 1\,dx$	$v = \frac{1}{3}\sin 3x$

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

$$\int x\cos 3x\,dx = \frac{1}{3}x\sin 3x - \int \frac{1}{3}\sin 3x\,dx$$

$$\int x\cos 3x\,dx = \frac{1}{3}x\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + C$$

(2) $\int x \ sin\, 5x\, dx$

$u = x$	$dv = sin\ 5x\ dx$
$du = 1\ dx$	$v = \frac{-1}{5} \cos 5x$

$$\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$$

$$\int x \ sin\ 5x\ dx = \frac{1}{5} x \cos xx + \int \frac{1}{5} \cos xx \quad dx$$

$$\int x \ sin\ xx\ dx = \frac{-1}{5} x \cos xx + \frac{1}{25} \sin 5x + C$$

اليوم :   **التاريخ: / / ٢٠٢٠ م**   **الصف :١٢ع**

العنوان : تابع التكامل بالتجزيء

بند (٥-٥)

الحصة الثانية

الأهداف السلوكية :

- يوجد تكامل حاصل ضرب دالتين باستخدام قاعدة التكامل بالتجزيء.

التدريس:

حاول أن تحل صـ 38 (2) : أوجد :

$(a) \int (x-3)\, e^{x-3}\, dx$

$u = x\text{-}3$	$dv = e^{x\text{-}3}\, dx$
$du = dx$	$v = e^{x\text{-}3}$

$$\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$$

$$\int (x-3)\, e^{x-3}\, dx = (x-3)\, e^{x-3} - \int e^{x-3}\, dx = (x-3)\, e^{x-3} - e^{x-3} + C$$

$(b) \int 4x\, e^{-5x}\, dx$

$u = 4x$	$dv = e^{-5x}\, dx$
$du = 4\, dx$	$v = -\frac{1}{5}\, e^{-5x}$

$$\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$$

$$\int x\, e^{x}\, dx = \frac{-4}{5} x\, e^{-5x} - \int \frac{-4}{5} e^{-5x}\, dx = \frac{-4}{5} x\, e^{-5x} - \frac{4}{25} e^{-5x} + C$$

التطبيق: أسئلة من كتاب التمارين (بند ٥ – ٥) صـ ١٨ أوجد التكامل :

(3) $\int x\, e^{x-3}\, dx$

$u = x$	$dv = e^{x-3}\, dx$
$du = dx$	$v = e^{x-3}$

$$\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$$

$$\int x\, e^{x-3}\, dx = x\, e^{x-3} - \int e^{x-3}\, dx$$

$$= x\, e^{x-3} - e^{x-3} + C$$

(4) $\int (x-5)\, e^{x-5}\, dx$

$u = x-5$	$dv = e^{x-5}\, dx$
$du = dx$	$v = e^{x-5}$

$$\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$$

$$\int (x-5)\, e^{x-5}\, dx = (x-5)\, e^{x-5} - \int e^{x-5}\, dx$$

$$= (x-5)\, e^{x-5} - e^{x-5} + C$$

اليوم :   التاريخ: /   / ٢٠٢٠ م   الصف :١٢ع

العنوان : تابع التكامل بالتجزيء

بند (٥-٥)

الحصة الثالثة

الأهداف السلوكية :

- يوجد تكامل حاصل ضرب دالتين باستخدام قاعدة التكامل بالتجزيء.

التدريس:

حاول أن تحل صـ 38 (٣) : أوجد :

$$\int \ln x \, dx$$

$u = \ln x$	$dv = dx$
$du = \frac{1}{x} dx$	$v = x$

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

حاول أن تحل صـ ٣٩ (٤) : أوجد :

$$\int (x+1)\ln(x+1)\,dx$$

$u = \ln(x+1)$	$dv = (x+1)\,dx$
$du = \frac{1}{x+1} dx$	$v = \frac{(x+1)^2}{2}$

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

$$\int (x+1)\ln(x+1)\,dx = \frac{(x+1)^2}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{2}\int (x+1)\,dx$$

$$= \frac{(x+1)^2}{2} \ln(x+1) - \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + C$$

التطبيق: أسئلة من كتاب التمارين (بند ٥ – ٥) صـ ١٨ أوجد التكامل :

(5) $\int ln \sqrt[4]{x}\, dx$

$u = ln \sqrt[4]{x}$	$dv = dx$
$du = \frac{1}{4x} dx$	$v = x$

$$\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$$

$$\int ln\, x\, dx = x\, ln \sqrt[4]{x} - \int \frac{1}{4} dx = x\, ln \sqrt[4]{x} - \frac{1}{4} x + C$$

(6) $\int ln(2x-1)\, dx$

$u = ln\,(2x-1)$	$dv = dx$
$du = \frac{2}{2x-1} dx$	$v = x$

$$\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$$

$$\int ln(2x-1)\, dx = x\, ln\,(2x-1) - \int \frac{2x}{2x-1} dx$$

$$= x\, ln\,(2x-1) - \int \left(1 + \frac{1}{2x-1}\right) dx$$

$$= x\, ln\,(2x-1) - x + \frac{1}{2}\, ln\,(2x-1) + C$$

(7) $\int (2x+1)\, ln(x+1)\, dx$

$u = ln\,(x+1)$	$dv = 2x+1\ dx$
$du = \frac{1}{x+1} dx$	$v = x^2 + x$

$$\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$$

$$\int (2x+1)\, ln(x+1)\, dx = (x^2+x)\, ln\,(x+1) - \int \frac{x^2+x}{x+1} dx$$

$$= (x^2+x)\, ln\,(x+1) - \int x\, dx = (x^2+x)\, ln\,(x+1) - \frac{1}{2} x^2 + C$$

(8) $\int \frac{\ln x}{x^2}\ dx$

$u = ln\,(x)$

$dv = \frac{1}{x^2}\ dx$

$du = \frac{1}{x}dx$

$v = \frac{-1}{x}$

$$\int u\,dv \ = u\,v - \int v\,du$$

$$\int \frac{\ln x}{x^2}dx = \frac{-\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}dx \ = \frac{-\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C = \frac{-\ln(x) - 1}{x} + C$$

(9) $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}\ dx$

$u = ln\,(x)$

$dv = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\ dx$

$du = \frac{1}{x}dx$

$v = \frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2}$

$$\int u\,dv \ = u\,v - \int v\,du$$

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}dx = \frac{3\,x^{\frac{2}{3}}\ln x}{2} - \int \frac{3}{2x^{\frac{1}{3}}}dx$$

$$= \frac{3\,x^{\frac{2}{3}}\ln x}{2} - \frac{9x^{\frac{2}{3}}}{4} + C$$

(10) $\int x^2\,ln(x^2)\,dx$

$u = ln\,(x^2)$

$dv = x^2dx$

$du = \frac{2}{x^2}dx$

$v = \frac{x^3}{3}$

$$\int u\,dv \ = u\,v - \int v\,du$$

$$\int x^2\,ln(x^2)\,dx = \frac{x^3}{3}ln\,(x^2) - \int \frac{2x}{3}dx$$

$$= \frac{x^3}{3}ln\,(x^2) - \frac{x^2}{3} + C$$

اليوم : ***التاريخ:*** / / ٢٠٢٠ م ***الصف :*** ١٢ع

العنوان : التكامل باستخدام الكسور الجزئية

الأهداف السلوكية :

- يوجد تكامل دالة كسرية حيث المقام عبارة عن ناتج ضرب عوامل خطية غير مكرره

التدريس:

بند (٥-٦)
الحصة الأولى

أولا المقام h(x) عبارة عن ناتج ضرب عوامل خطية غير مكرره :

لتكن : $f(x) = \frac{r(x)}{h(x)}$ حيث المقام $h(x)$ على الصورة :

$$h(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \dots (a_kx + b_k)$$

حيث لا يوجد عوامل مكررة و لا يوجد عامل ثابت مضروب بآخر

و في هذه الحالة تكون الدالة f على صورة كسور جزئية كالتالي :

$$\frac{r(x)}{h(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_k}{a_kx + b_k}$$

حاول أن تحل صـ ٤٣ (١) : لتكن الدالة f : $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-4x+3}$ أوجد :

(a) الكسور الجزئية .

(b) $\int f(x)\,dx$.

الحل :

(a) $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$

$$\frac{2x-1}{x^2-4x+3} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x-3} \Rightarrow 2x - 1 = A_1(x-3) + A_2(x-1)$$

بالتعويض عن $x=1$: $2(1) - 1 = A_1(1-3) + A_2(1-1)$

$1 = -2A_1 + 0 \Rightarrow A_1 = \frac{-1}{2}$

بالتعويض عن $x=3$: $\quad 2(3)-1 = A_1(3-3)+A_2(3-1)$

$$5 = 0 + 2A_2 \quad \Rightarrow \quad A_2 = \frac{5}{2}$$

$$\frac{2x-1}{x^2-4x+3} = \frac{\frac{-1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{5}{2}}{x-3}$$

$$(b)\int f(x)\,dx = \int\left(\frac{\frac{-1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{5}{2}}{x-3}\right)dx = \frac{-1}{2}\int\frac{1}{x-1}dx + \frac{5}{2}\int\frac{1}{x-3}dx$$

$$= \frac{-1}{2}\ln|x-1| + \frac{5}{2}\ln|x-3| + C$$

التطبيق: أسئلة من كتاب التمارين (بند ٥ – ٦) صـ ٢٠ أوجد الكسور الجزئيّة لكل دالة f ثم أوجد $\int f(x)\,dx$:

$$(1)f(x) = \frac{2}{(x-5)(x-3)}$$

الحل :

$$\frac{2}{(x-5)(x-3)} = \frac{A_1}{x-5} + \frac{A_2}{x-3} \quad \Rightarrow 2 = A_1(x-3) + A_2(x-5)$$

بالتعويض عن $x=3$: $\quad 2 = -2A_2$

$$\Rightarrow \quad A_2 = -1$$

بالتعويض عن $x=5$: $\quad 2 = 2A_1$

$$\Rightarrow \quad A_1 \ 4 \ 1$$

$$\frac{2}{(x-5)(x-3)} \ 4 \ \frac{1}{x-5} + \frac{-1}{x-3}$$

$$\int f(x)\,dx \ 4 \ \int\left(\frac{1}{x-5} + \frac{-1}{x-3}\right)dx \ 4 \ \int\frac{1}{x-5}dx - \int\frac{1}{x-3}dx$$

$$4 \ \ln|x-5| - \ln|x-3| + C$$

$(2) f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x}$

الحل :

$x^2 + 2x = x(x+2)$

$\frac{1}{x^2+2x} = \frac{1}{x(x+2)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x+2} \quad \Rightarrow 1 = A_1(x+2) + A_2(x)$

$1 = -2A_2$ $\quad$ بالتعويض عن $x=-2$:

$\Rightarrow \quad A_2 = \frac{-1}{2}$

$2 = 2A_1$ $\quad$ بالتعويض عن $x=0$:

$\Rightarrow \quad A_1 = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{x(x+2)} = \frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{-1}{2}}{x+2}$$

$$\int f(x)\,dx = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{-1}{2}}{x+2}\right)dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x+2| + C$$

$(3) f(x) = \frac{-x+10}{x^2 + x - 12}$

الحل :

$x^2 + x - 12 = (x-3)(x+4)$

$$\frac{-x+10}{x^2 + x - 12} = \frac{-x+10}{(x+4)(x-3)} = \frac{A_1}{x+4} + \frac{A_2}{x-3}$$

$\Rightarrow -x + 10 = A_1(x-3) + A_2(x+4)$

$7 = 7A_2$: بالتعويض عن $x=3$

$\Rightarrow \quad A_2 = 1$

$14 = -7A_1$: بالتعويض عن $x=-4$

$\Rightarrow \quad A_1 = -2$

$$\frac{-x+10}{x^2 + x - 12} = \frac{-2}{x+4} + \frac{1}{x-3}$$

$$\int f(x)\,dx = \int \left(\frac{-2}{x+4} + \frac{1}{x-3}\right) dx = -2\int \frac{1}{x+4}\,dx + \int \frac{1}{x-3}\,dx$$

$$= -2\ln|x+4| + \ln|x-3| + C$$

اليوم : **التاريخ:** / / ٢٠٢٠ م **الصف :١٢ع**

العنوان : تابع التكامل باستخدام الكسور الجزئية

الأهداف السلوكية :

- يوجد تكامل دالة كسرية حيث المقام عبارة عن ناتج ضرب عوامل خطية غير مكرره

بند (٥-٦)
الحصة الثانية

التدريس:

حاول أن تحل صـ ٤٤ (٢) : أوجد dx $\int \frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x}$:

الحل :

$$f(x) = \frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x}$$

$$2x^3-5x^2-3x = x(2x^2-5x-3) = x(2x+1)(x-3)$$

وبضرب طرفي المعادلة ب x(2x+1)(x-3)

$$\frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{2x+1} + \frac{A_3}{x-3}$$

$$x^2-2 = A_1(x-3)(2x+1) + A_2x(x-3) + A_3x(2x+1)$$

بالتعويض عن $x=0$:

$$(0)^2-2 = A_1(0-3)(0+1) + A_2 0(0-3) + A_3 0(0+1)$$

$$-2 = -3A_1 + 0 + 0 \Rightarrow A_1 = \frac{2}{3}$$

بالتعويض عن $x=3$:

$$(3)^2-2 = A_1(3-3)(3+1) + A_2 3(3-3) + A_3 3(2(3)+1)$$

$$7 = 0 + 0 + 21A_3 \Rightarrow A_3 = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$$

بالتعويض عن $x=-\frac{1}{2}$:

$$\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - 2 = A_1\left(\frac{-1}{2}-3\right)\left(2\left(\frac{-1}{2}\right)+1\right) + A_2\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}-3\right) + A_3\left(\frac{-1}{2}\right)\left(2\left(\frac{-1}{2}\right)+1\right)$$

$\frac{-7}{4} = 0 + \frac{7}{4}A_2 + 0 \Rightarrow \quad A_2 = 1$

$$\frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x} = \frac{\frac{2}{3}}{x} + \frac{-1}{2x+1} + \frac{\frac{1}{3}}{x-3}$$

$$\int \frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x}dx = \int \left(\frac{\frac{2}{3}}{x} + \frac{-1}{2x+1} + \frac{\frac{1}{3}}{x-3}\right)dx$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{2x+1}dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-3}dx$$

$$= \frac{2}{3}\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|2x+1| + \frac{1}{3}\ln|x-3| + C$$

التطبيق: أسئلة من كتاب التمارين (بند ٥ – ٦) صـ ٢٠ أوجد الكسور الجزئيّة لكل دالة f ثم أوجد $\int f(x)\,dx$:

$$(4) f(x) = \frac{12}{x^3+2x^2-3x}$$

الحل :

$x^3+2x^2-3x = x(x-1)(x+3)$

$$\frac{12}{x^3+2x^2-3x} = \frac{12}{x(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+3}$$

وبضرب طرفي المعادلة ب $x(x-1)(x+3)$

$12 = A(x-1)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-1)$

بالتعويض عن $x=-3$: $\quad 12 = 12C \Rightarrow C = 1$

بالتعويض عن $x=1$: $\quad 12 = 4B \Rightarrow B = 3$

بالتعويض عن $x=0$: $\quad 12 = -3A \Rightarrow A = -4$

$$\frac{12}{x^3+2x^2-3x} = \frac{12}{x(x-1)(x+3)} = \frac{-4}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{x+3}$$

$$\int f(x)\,dx = \int \left(\frac{-4}{x}+\frac{3}{x-1} + \frac{1}{x+3}\right)dx$$

$$= -4\int \frac{1}{x}dx + 3\int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{1}{x+3}dx$$

$$= -4\ln|x| + 3\ln|x-1| + \ln|x+3| + C$$

$$(5)\ \frac{x+17}{2x^2+5x-3} \qquad , 2x^2+5x-3 = (2x-1)(x+3)$$

الحل :

$$\frac{x+17}{2x^2+5x-3} = \frac{x+17}{(2x-1)(x+3)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+3}$$

$$\Rightarrow \quad x+17 = A(x+3) + B(2x-1)$$

بالتعويض عن $x=-3$: $\quad 14 = 4B \quad \Rightarrow \quad B = -2$

بالتعويض عن $x=\frac{1}{2}$: $\quad \frac{35}{2} = \frac{7}{2}A \quad \Rightarrow \quad A = 5$

$$\frac{x+17}{2x^2+5x-3} = \frac{5}{2x-1} + \frac{-2}{x+3}$$

$$\int \left(\frac{5}{2x-1} + \frac{-2}{x+3}\right)dx = \frac{5}{2}\int \frac{2}{2x-1}dx - 2\int \frac{1}{x+3}dx$$

$$= \frac{5}{2}\ln|2x-1| - 2\ln|x+3| + C$$

اليوم :　　　　　　　　التاريخ:　　/　　/　٢٠٢٠ م　　　　　　　　الصف :١٢ع

العنوان : تابع التكامل باستخدام الكسور الجزئية

الأهداف السلوكية :

- يوجد تكامل دالة كسرية حيث المقام عبارة عن ناتج ضرب عوامل خطية بعضها مكرره

بند (٥-٦)
الحصة الثالثة

التدريس:

ثانيا المقام h(x) عبارة عن ناتج ضرب عوامل خطية بعضها مكرره :

لكل عامل من عوامل المقام $h(x)$ على الصورة $(mx+n)^k$ يجب أن يحتوي التفكيك إلى كسور جزئية على مجموع حدود عددها k :

$$\frac{A_1}{mx+n}+\frac{A_2}{(mx+n)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(mx+n)^k}$$

حاول أن تحل صـ ٤٥ (٣) : أوجد $\int \frac{4x^2-4x+1}{x^3-2x^2+x}dx$:

الحل :

$$f(x)=\frac{4x^2-4x+1}{x^3-2x^2+x}$$

$$x^3-2x^2+x=x(x^2-2x+1)=x(x-1)(x-1)$$

وبضرب طرفي المعادلة ب $x(x-1)^2$

$$\frac{4x^2-4x+1}{x^3-2x^2+x}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{A_3}{(x-1)^2}\quad\Rightarrow$$

$$4x^2-4x+1= A_1(x-1)^2+A_2x(x-1)+ A_3x$$

بالتعويض عن $x=0$: $1 = A_1$

بالتعويض عن $x=1$: $1 = A_3$

بالتعويض عن $x = 2$, $A_1 = 1$, $A_3 =1$

$$4(2)^2-4(2)+1 = (2-1)^2+A_2(2)(2-1)+ 2$$

$9 = 1 + A_2(2) + 2 \;\Rightarrow\quad A_2 = 3$

$$\frac{4x^2 - 4x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{1}{x} + \frac{3}{x-1} \;+ \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\int \frac{4x^2 - 4x + 1}{x^3 - 2x^2 + x}dx \;=\; \int \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x-1} \;+ \frac{1}{(x-1)^2}\right)dx$$

$$= \;\int \frac{1}{x}dx \;- 3\int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx$$

$$= \;\ln|x| - 3\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + C$$

حاول أن تحل صـ ٤٦ (٤) : أوجد $\int \frac{x^2+1}{x^3+4x^2}dx$:

الحل :

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 + 4x^2}$$

$$x^3 + 4x^2 = x^2(x+4)$$

$$\frac{x^2 + 1}{x^3 + 4x^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x+4} \quad \Rightarrow$$

وبضرب طرفي المعادلة ب $(x+4)(x)^2$

$$x^2 + 1 = \; A_1x(x+4) + A_2(x+4) + \; A_3x^2$$

بالتعويض عن $x=0$: $\frac{1}{4} = \; A_2$

بالتعويض عن $x=-4$: $\frac{17}{16} = \; A_3$

بالتعويض عن $A_2 = \frac{1}{4}, A_3 = \frac{17}{16}, x = 2$

$$(2)^2 + 1 = \; A_1(2)(2+4) + \frac{1}{4}(2+4) + \;\frac{17}{16}(2)^2$$

$$5 = 12A_1 + \frac{3}{2} + \frac{17}{4} \;\Rightarrow\quad A_1 = \frac{-1}{16}$$

$$\frac{x^2+1}{x^3+4x^2} = \frac{\frac{-1}{16}}{x} + \frac{\frac{1}{4}}{x^2} + \frac{\frac{17}{16}}{x+4}$$

$$\int \frac{x^2+1}{x^3+4x^2}\,dx = \int \left(\frac{\frac{-1}{16}}{x} + \frac{\frac{1}{4}}{x^2} + \frac{\frac{17}{16}}{x+4} \right) dx$$

$$= \frac{-1}{16} \int \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x^2}\,dx + \frac{17}{16} \int \frac{1}{x+4}\,dx$$

$$= \frac{-1}{16} \ln|x| + \frac{17}{16} \ln|x+4| - \frac{1}{4x} + C$$

التطبيق: أسئلة من كتاب التمارين (بند ٥ – ٦) صـ ٢٠ **أوجد** :

$$(6)\ \frac{-6x+25}{x^3-6x^2+9x}$$

الحل :

$$x^3-6x^2+9x = x(x-3)(x-3)$$

$$\frac{-6x+25}{x^3-6x^2+9x} = \frac{-6x+25}{x(x-3)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2}$$

وبضرب طرفي المعادلة ب $x(x-3)(x-3)$

$$-6x+25 = A\,(x-3)^2 + Bx(x-3) + Cx$$

بالتعويض عن $x=3$: $7 = 3C \Rightarrow C = \frac{7}{3}$

بالتعويض عن $x=0$: $25 = 9A \Rightarrow A = \frac{25}{9}$

بالتعويض عن $x = 1$, $A = \frac{25}{9}$, $C = \frac{7}{3}$

$$19 = \frac{-28}{9} - 2B + \frac{7}{3} \Rightarrow B = \frac{-25}{9}$$

$$\frac{-6x+25}{x^3-6x^2+9x} = \frac{-6x+25}{x(x-3)(x-3)} = \frac{\frac{25}{9}}{x} + \frac{\frac{-25}{9}}{x-3} + \frac{\frac{7}{3}}{(x-3)^2}$$

$$\int \frac{-6x+25}{x^3-6x^2+9x}dx \ = \ \int \left(\frac{25}{9x} - \frac{25}{9(x-3)} \ + \frac{7}{3(x-3)^2}\right)dx$$

$$= \ \frac{25}{9}\ln|x\ | - \frac{25}{9}\ln|x-3| - \ \frac{7}{3(x-3)} + C$$

$$(7) \int \frac{3x^2-4x+3}{x^3-3x^2}dx$$

الحل :

$$x^3-3x^2 = x^2(x-3)$$

$$\frac{3x^2-4x+3}{x^3-3x^2} = \frac{3x^2-4x+3}{x^2(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} \ + \frac{C}{x-3}$$

وبضرب طرفي المعادلة ب $x^2(x-3)$

$$3x^2-4x+3 = \ A\,x(x-3) + B(x-3) + Cx^2$$

$18 = \ 9C \ \ \Rightarrow \ \ C \ 4 \ 2$: $x=3$ بالتعويض عن

$3 \ 4 \ \ -3B \ \ \Rightarrow \ \ B \ 4 \ -1$: $x=0$ بالتعويض عن

بالتعويض عن $B = -1$, $C = 2$, $x = 1$

$$2 \ 4 \ \ -2A + 2 + 2 \ \ \Rightarrow A \ 4 \ \ 1$$

$$\frac{3x^2-4x+3}{x^3-3x^2} \ 4 \ \frac{1}{x} + \frac{-1}{x^2} \ + \frac{2}{x-3}$$

$$\int \left(\frac{1}{x} + \frac{-1}{x^2} \ + \frac{2}{x-3}\right)dx \ \ 4 \ \ \int \frac{1}{x}dx \ - \int \frac{1}{x^2}dx + 2\int \frac{1}{x-3}dx$$

$$4 \ \ \ln|x| + \frac{1}{x} + 2\ln|x-3| + C$$

اليوم : **التاريخ: / / ٢٠٢٠ م** **الصف :١٢ع**

العنوان : التكامل المحدد

بند (٥-٧)

الحصة الأولى

الأهداف السلوكية :

- يوجد تكامل محدد .
- يتعرف على خواص التكامل المحدد .
- يوجد تكامل محدد لدالة مطلق .

التدريس:

تذكر :

إذا كانت الدالة f دالة متصلة على $[a,b]$ و كانت F مشتقه عكسية للدالة f فإن

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

حاول أن تحل صـ ٥١ (١) : أوجد : $\int_2^7 (x^3 - 2x^2 + 2)\, dx$

الحل :

$$\int_2^7 (x^3 - 2x^2 + 2)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + 2x\right]_2^7 = \left(\frac{7^4}{4} - \frac{2(7)^3}{3} + 2(7)\right) - \left(\frac{2^4}{4} - \frac{2(2)^3}{3} + 2(2)\right)$$

$$= \left(\frac{2401}{4} - \frac{686}{3} + 14\right) - \left(\frac{16}{4} - \frac{16}{3} + 4\right) = \frac{4595}{12}$$

خواص التكامل المحدد :

إذا كانت f دالة متصلة على I ، $k \in \mathbb{R}$ ، $a, b, c \in I$ فإن :

(1) $\int_a^a f(x)dx = 0$

(2) $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

(3) $\int_a^b k\, dx = k(b-a)$

(4) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

(5) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

ونلاحظ أن $\int_a^b dx = (b-a)$ حيث k=1

حاول أن تحل صـ ٥٢ (٢) : أوجد :

$$(a) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\sin 2x - \csc^2 x\right) dx = \left[\frac{-1}{4}\cos 2x + \cot x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{-1}{4}\right) - (1) = \frac{-3}{4}$$

$$(b) \int_{2}^{-3} (5)\, dx = 5(-3-2) = -25$$

$$(c) \int_{3}^{3} (-2x^3 + x^2)\, dx = 0$$

$$(d) \int_{2}^{4} \frac{dx}{x-1} = [ln\,|x-1|]_2^4 = ln3 - ln1\ 4\ \ ln\,3$$

حاول أن تحل صـ ٥٢ (٣) : أوجد :

$$(a) \int_{-3}^{4} |2x-4|\, dx = \int_{-3}^{2} (4-2x)\, dx + \int_{2}^{4} (2x-4)\, dx$$

$$= [4x - x^2\,]_{-3}^{2} + [x^2 - 4x\,]_2^4 = (25) + (4) = 29$$

$$(b) \int_{1}^{3} |x+2|\, dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^3 = \left(\frac{9}{2} + 6\right) - \left(\frac{1}{2} + 2\right) = 8$$

التطبيق: أسئلة من كتاب التمارين (بند ٥ – ٧) صـ ٢٢ **أوجد** :

$$(1) \int_{-1}^{1} 3x(x-4)\, dx = \int_{-1}^{1} (3x^2 - 12x) dx = [x^3 - 6x^2]_{-1}^{1} = \big(-5 - (-7)\big) = 2$$

$$(2) \int_{0}^{2} (x+1)^2\, dx = \int_{0}^{2} (x^2 + 2x + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + x\right]_0^2 = \frac{26}{3}$$

$$(3) \int_{0}^{4} \frac{x^2-1}{x+1}\, dx = \int_{0}^{4} (x-1) dx = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_0^4 = 4$$

$$(4) \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos xx\, dx = \frac{1}{3}[\sin 3x]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{3}(0-0) = f$$

$$(5) \int_{1}^{4} \frac{8-x^4}{2x^2}\, dx = \int_{1}^{4} \left(\frac{4}{x^2} - \frac{x^2}{2}\right) dx = \left[\frac{-4}{x} - \frac{x^3}{6}\right]_1^4 = \frac{-15}{2}$$

$$(6)\ \int_0^1 x\sqrt{x}\,dx = \int_0^1 x^{\frac{3}{2}}dx = \left[\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}\right]_0^1 = \frac{2}{5}$$

$$(7)\ \int_1^2 \left(3e^x + \frac{5}{x}\right)dx = [3e^x + 5\ln|x|]_1^2 = 3(e^2 - e) + 5\ln 2$$

$$(8)\ \int_{-1}^3 |\mathrm{x} - 2|\,\mathrm{dx} = \int_{-1}^2 (2 - \mathrm{x})\,\mathrm{dx} + \int_2^3 (\mathrm{x} - 2)\,\mathrm{dx}$$

$$= \left[2\mathrm{x} - \frac{\mathrm{x}^2}{2}\right]_{-1}^2 + \left[\frac{\mathrm{x}^2}{2} - 2\mathrm{x}\right]_2^3$$

$$= \left(4\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) = 5$$

$$(9)\ \int_{-1}^1 |\mathrm{x}^3|\,\mathrm{dx} = -\int_{-1}^0 \mathrm{x}^3\,\mathrm{dx} + \int_0^1 \mathrm{x}^3\,\mathrm{dx} = -\left[\frac{\mathrm{x}^4}{4}\right]_{-1}^0 + \left[\frac{\mathrm{x}^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$(10)\ \int_{-2}^3 (x|\mathrm{x}| + 3)\mathrm{dx} = \int_{-2}^0 (-\mathrm{x}^2 + 3)\,\mathrm{dx} + \int_0^3 (\mathrm{x}^2 + 3)\,\mathrm{dx}$$

$$= \left[\frac{-\mathrm{x}^3}{3} + 3x\right]_{-2}^0 + \left[\frac{\mathrm{x}^3}{3} + \right] x\Big]_0^3$$

$$= \left(\frac{10}{\ }\right) + (18) = \frac{64}{3}$$

اليوم : **التاريخ: / / ٢٠٢٠ م** **الصف :١٢ع**

العنوان : تابع التكامل المحدد

بند (٥-٧)
الحصة الثانية

الأهداف السلوكية :

- يوجد تكامل محدد .
- يتعرف على خواص التكامل المحدد .
- يوجد تكامل محدد بيانيا .

التدريس:

إذا كانت f دالة متصلة على $[a\,,b]$

(٦) إذا كانت : $f(x) \geq 0 \;\; \forall\, x \in [a,b]$ فإن $\int_a^b f(x)dx \;\geq 0$

(٧) إذا كانت : $f(x) \leq 0 \;\; \forall\, x \in [a,b]$ فإن $\int_a^b f(x)dx \;\leq 0$

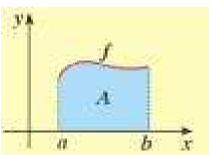
(٨) لتكن الدالتين $f\,,g$ متصلتين على $[a\,,b]$ و كانت $f(x) \leq g(x) \;\; \forall\, x \in [a,b]$

فإن $\int_a^b f(x)dx \;\leq \int_a^b g(x)dx$

التفسير البياني للتكامل المحدد

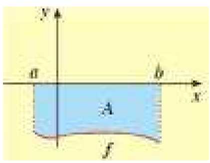
في المستوى الإحداثي لتكن f دالة متصلة على $[a\,,b]$

A تمثل مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f و محور السينات و المستقيمين x= a , x=b



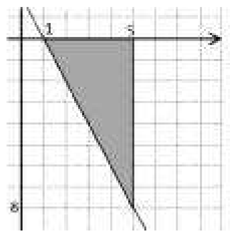
(١) إذا كانت : $f(x) \geq 0 \;\; \forall\, x \in [a,b]$

فإن $\int_a^b f(x)dx = A$



(2) إذا كانت : $f(x) \leq 0 \;\; \forall\, x \in [a,b]$

فإن $\int_a^b f(x)dx = -A$



حاول أن تحل صـ ٥٥ (٦) : أوجد قيمة $\int_1^5 (2-2x\,)\,dx$ بيانياً .

الحل :

و برسم بيان الداله f(x) = 2-2x كما في الشكل

مساحة المثلث المظلل : $A = 0.5\ (4)(8) = 16\ usquared$

و بما أن المنطقة أسفل محور السيني

$$\therefore \int_1^5 (2-2x\,)\,dx = -A = -16$$

حاول أن تحل صـ ٥٦ (٧) : أوجد :

$$(a) \int_{-5}^{5} \sqrt{25-x^2}\,dx$$

نأخذ : $y = \sqrt{25-x^2} \Rightarrow y^2 = 25 - x^2 \Rightarrow y^2 + x^2 = 25$

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل و نصف قطرها ٥ وحدة طول

و الدالة : $y = \sqrt{25-x^2}$ تمثل معادلة النصف العلوي للدائرة

مساحة النصف العلوي للدائرة : $\int_{-5}^{5} \sqrt{25-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\pi(5)^2 = \frac{25}{2}\pi$

$$(b) \int_0^4 -\sqrt{16-x^2}\,dx$$

نأخذ : $y = -\sqrt{16-x^2} \Rightarrow y^2 = 16 - x^2 \Rightarrow y^2 + x^2 = 16$

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل و نصف قطرها ٤ وحدة طول

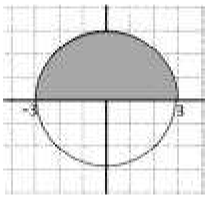
و الدالة : $y = -\sqrt{16-x^2}$ تمثل معادلة الربع السفلي للدائرة

مساحة الربع السفلي للدائرة : A

$$\int_0^4 -\sqrt{16-x^2}\,dx = -A = -\frac{1}{4}\,\pi(4)^2 = -4\pi$$

التطبيق: أسئلة من كتاب التمارين (بند ٥ – ٧) صـ ٢٢ استعن برسم بيان الدالة لإيجاد :

$$(14)\ \int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$$



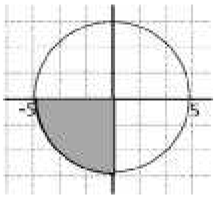
نأخذ : $y=\sqrt{9-x^2}\ \Rightarrow y^2=x-x^2\ \Rightarrow y^2+x^2=x$

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل و نصف قطرها 3 وحدة طول

و الدالة : $y=\sqrt{x-x^2}$ تمثل معادلة النصف العلوي للدائرة

مساحة النصف العلوي للدائرة : $\int_{-3}^{3}\sqrt{x-x^2}\,dx\ =\frac{1}{2}\,\pi(3)^2=\frac{9}{2}\pi$

$$(15)\ \int_{-5}^{0}-\sqrt{25-x^2}\,dx$$



نأخذ : $y=-\sqrt{25-x^2}\ \Rightarrow y^2=25-x^2\ \Rightarrow y^2+x^2=25$

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل و نصف قطرها ٥ وحدة طول

و الدالة : $y=-\sqrt{25-x^2}$ تمثل معادلة الربع السفلي للدائرة

مساحة الربع السفلي للدائرة : A

$$\int_{0}^{5}-\sqrt{25-x^2}\,dx\ =-A=-\frac{1}{4}\,\pi(5)^2=-\frac{25}{4}\pi$$

اليوم :   التاريخ: / / ٢٠٢٠ م   الصف :١٢ع

العنوان : تابع التكامل المحدد

بند (٥-٧)
الحصة الثالثة

الأهداف السلوكية :

- يوجد تكامل محدد بطريقة التعويض .
- يوجد تكامل محدد بطريقة الكسور الجزئية .

التدريس:

حاول أن تحل صـ 58 (10) : أوجد : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\, sec^2\, x\, dx$

الحل :

$u = x$	$dv = sec^2 x\, dx$
$du = dx$	$v = \tan x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\, sec^2\, x\, dx = [x\, tanx]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x = [x\, tanx]_0^{\frac{\pi}{4}} + [ln\,|cos\, x|]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= (\frac{\pi}{4}\,(\tan\frac{\pi}{4}) - (0)) + \left(ln\left|cos\,\frac{\pi}{4}\right|\right) - (0) = \frac{\pi}{4} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2}$$

أسئلة من كتاب التمارين (بند ٥ – ٧) صـ ٢٢ أوجد :

$$(25)\int_{-2}^{0} \frac{5x-1}{x^2+2x-3}\,dx$$

الحل :

$$f(x) = \frac{5x-1}{x^2+2x-3} \qquad x^2 + 2\,x - 3 = (x+3)(x-1)$$

$$\frac{5x-1}{x^2+2x-3} = \frac{5x-1}{(x+3)(x-1)} = \frac{A_1}{x+3} + \frac{A_2}{x-1}$$

$$\Rightarrow\ 5x - 1 = A_1(x+3) + A_2(x-1)$$

بالتعويض عن $x=-3$: $-16 = -4A_2 \ \Rightarrow\ A_2 = -$

بالتعويض عن $x=1$: $-= -A_1 \ \Rightarrow\ A_1 = 1$

$$\frac{5x-1}{x^2+2x-3} = \frac{1}{x+3} + \frac{4}{x-1}$$

$$\int_{-2}^{0}\left(\frac{1}{x+3} + \frac{4}{x-1}\right)dx = [\ln|x+3|]_{-2}^{0} + 4[\ln|x-1|]_{-2}^{0} = ln\,3 + 4ln3$$

التطبيق: أسئلة من كتاب التمارين (بند ٥ – ٧) صـ ٢٢ أوجد :

(20) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \ sin\, x\, dx$

$u = x$	$dv = sin\, x\, dx$
$du = 1\, dx$	$v = -\cos x$

$$\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \ sin\, x\, dx = [x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ dx = [x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

(22) $\int_1^3 x^3 \ ln \ x\, dx$

$u = ln\, x$	$dv = x^3 \ dx$
$du = \frac{1}{x} dx$	$v = \frac{1}{4}x^4$

$$\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$$

$$\int_1^3 x^3 \ ln \ x\, dx = \left[\frac{1}{4}x^4 \ln \ x\right]_1^3 - \frac{1}{4}\int_1^3 x^3 \ dx$$

$$\int_0^{\pi} x \ cos\, 3x\, dx = \left[\frac{1}{4}x^4 \ln \ x\right]_1^3 - \left[\frac{1}{16}x^4\right]_1^3 = \frac{81}{4}\ln 3 - 5$$

$$(24)\int_{-1}^{1}\frac{4}{x^2-4}dx$$

الحل :

$$f(x)=\frac{4}{x^2-4} \qquad x^2+\ x-12=(x-3)(x+4)$$

$$\frac{4}{x^2-4}=\frac{4}{(x+2)(x-2)}=\frac{A_1}{x+2}+\frac{A_2}{x-2} \quad \Rightarrow\ 4=\ A_1(x-2)+A_2(x+2)$$

بالتعويض عن $x=2$: $4=\ 4A_2 \ \Rightarrow \ A_2 \Big(\ 1$

بالتعويض عن $x=-2$: $4 \Big(\ -4A_1 \ \Rightarrow \ A_1 \Big(\ -1$

$$\frac{4}{x^2-4}\Big(\ \frac{1}{x+2}+\frac{-1}{x-2}$$

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{x+2}+\frac{-1}{x-2}\right)dx \Big(\ \ [\ln|x+2|]_{-1}^{1}-[\ln|x-2|]_{-1}^{1}=-2ln\,3$$

اليوم :   التاريخ: /   / ٢٠٢٠ م   الصف :١٢ع

العنوان : المساحات في المستوي

بند (٦-١)
الحصة الأولى

الأهداف السلوكية :

- أن يوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى دالة ومحور السينات والمستقيمين $x = a , x = b$
- أن يوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى دالة ومحور السينات وحدود التكامل هي الإحداثيات السينية لنقط تقاطع منحنى الدالة مع محور السينات

التدريس:

مساحة منطقة محددة بمنحنى الدالة f و محور السينات في الفترة $[a , b]$

علمنا من دراستنا السابقة انه اذا كانت الدالة f متصلة على $[a , b]$ فان مساحة المنطقة A المحددة بمنحنى الدالة f و محور السينات و المستقيمين $x = a, \ x = b$

اذا كانت $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a , b]$

فان $A = \int_a^b f(x)dx$

اذا كانت $f(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a , b]$

فان $A = - \int_a^b f(x)dx$

حاول أن تحل صـ ٦٧ (١) :يبين الشكل المقابل بيان الدالة f :

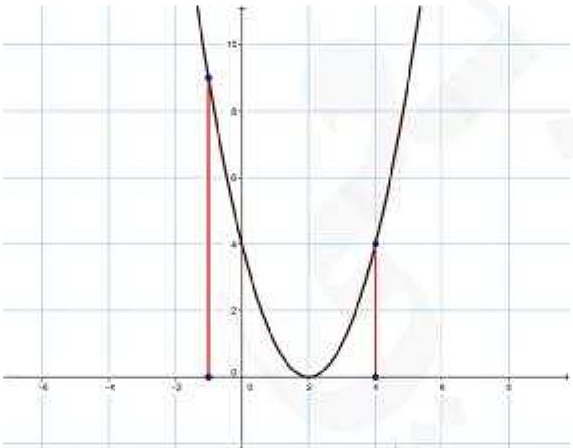
$$f(x) = x^2 + 4 - 4x$$

اوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة و محور السينات و المستقيمين $x = -1 , x = 4$

الحل :

من الشكل :

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [-1 , 4]$$



$$\therefore \ A = \int_{-1}^4 f(x)dx$$

$$= \int_{-1}^4 (x^2 + 4 - 4x)dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + 4x - 2x^2\right]_{-1}^4$$

$$= \left[\frac{(4)^3}{3} + 4(4) - 2(4)^2 \ \right] - \left[\frac{(-1)^3}{3} + 4(-1) - 2(-1)^2\right]$$

$$= \left[\frac{64}{3} + 16 - 32 \ \right] - \left[\frac{-1}{3} - 4 - 2\right] = \frac{16}{3} - \left(-\frac{19}{3}\right) = \frac{35}{3} \qquad \text{units square}$$

حاول أن تحل صـ ٦٧ (٢) : اوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f :

$f(x) = x^2 + 5x + 4$ ، و محور السينات

الحل :

نوجد الاحداثيات السينية لنقاط تقاطع منحنى الدالة f مع محور السينات بوضع

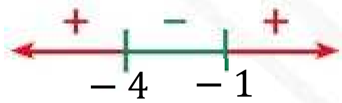
$$f(x) = 0$$

$$x^2 + 5x + 4 = 0$$

$$(x + 4)(x + 1) = 0$$

$x = -4$ أو $x = -1$

نبحث هل : $f(x) \leq 0$ أو $f(x) \geq 0$ في الفترة $[-4, -1]$



$$\because \ f(x) \ \leq \ 0 \qquad \forall x \ \in \ [-4, -1]$$

المساحة :

$$\therefore \ A = -\int_{-4}^{-1} f(x)dx$$

$$= -\int_{-4}^{-1} (x^2 + 5x + 4)dx$$

$$= -\left[\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} + 4x\right]_{-4}^{-1}$$

$$= -\left[\left(\frac{(-1)^3}{3} + 5\frac{(-1)^2}{2} + 4(-1)\right) - \left(\frac{(-4)^3}{3} + 5\frac{(-4)^2}{2} + 4(-4)\right)\right]$$

$$= -\left[\left(-\frac{11}{6}\right) - \left(\frac{8}{3}\right)\right]$$

$$= -\left(-\frac{9}{2}\right) = \frac{9}{2} \qquad \text{units square}$$

التطبيق: أسئلة من كتاب التمارين (بند ٦ – ١) صـ ٢٧ :

(١) : اوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = 8x^3$ ، و محور السينات و المستقيمين $x \,(\, 1 \,, x \,(\, 3$

الحل:

$$\because 8x^3 \geq 0 \qquad \forall x \in [1\,,3\,]$$

$$\therefore \; f(x) \geq 0 \qquad \forall x \in [1\,,3\,]$$

$$\therefore \; A \,(\, \int_1^3 f(x)dx$$

$$(\, \int_1^3 (8x^3)dx$$

$$(\, [2x^4]_1^3$$

$$(\, [2(3)^4 - 2(1)^4]$$

$$(\, [162 - 2]$$

$$(\, 160 \qquad \text{units square}$$

(٢) اوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f:

$f(x) = x^2 - 5x$ ، و محور السينات .

الحل:

نوجد الاحداثيات السينية لنقاط تقاطع منحنى الدالة f مع محور السينات بوضع

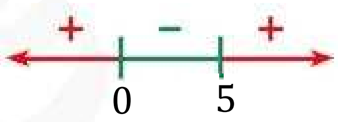
$$f(x) = 0$$

$$x^2 - 5x = 0$$

$$x(x-5) = 0$$

$x = 0$ او $x \,(\, 5$

نبحث هل : $f(x) \leq 0$ أو $f(x) \geq 0$ في الفترة $[\,0\,,5\,]$



$$\because \; f(x) \leq 0 \qquad \forall x \in \; [0, 5\,]$$

المساحة :

$$\therefore \; A \,(\, - \int_0^5 f(x)dx$$

$$(\, - \int_0^5 (x^2 - 5x)dx$$

$$= -\left[\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2}\right]_0^5$$

$$= -\left[\left(\frac{(5)^3}{3} - \frac{5(5)^2}{2}\right) - \left(\frac{(0)^3}{3} - \frac{5(0)^2}{2}\right)\right]$$

$$= -\left[\left(-\frac{125}{6}\right) - (0)\right] = \frac{125}{6} \qquad \text{units square}$$

(٣) اوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f:

$f(x) = 12 - x^2$ ، و محور السينات .

الحل:

نوجد الاحداثيات السينية لنقاط تقاطع منحنى الدالة f مع محور السينات بوضع

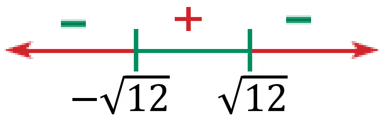
$$f(x) = 0$$

$$12 - x^2 = 0$$

$$x^2 = 12$$

$x = -\sqrt{12}$ او $x = \sqrt{12}$

نبحث هل : $f(x) \le 0$ أو $f(x) \ge 0$ في الفترة $[-\sqrt{12}, \sqrt{12}]$



$$\because\ f(x) \ge 0 \qquad \forall x \in \quad [-\sqrt{12}, \sqrt{12}]$$

المساحة :

$$\therefore\ A = \int_{-\sqrt{12}}^{\sqrt{12}} f(x)dx$$

$$= \int_{-\sqrt{12}}^{\sqrt{12}} (12 - x^2)dx$$

$$= \left[12x - \frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{12}}^{\sqrt{12}}$$

$$= \left[\left(12(\sqrt{12}) - \frac{(\sqrt{12})^3}{3}\right) - \left(12(-\sqrt{12}) - \frac{(-\sqrt{12})^3}{3}\right)\right]$$

$$= [(16\sqrt{3}) - (-16\sqrt{3})]$$

$$= 32\sqrt{3} \qquad \text{units square}$$

اليوم :　　　　　　　　التاريخ:　　/　　/ ٢٠٢٠ م　　　　　　　　الصف :١٢ع

العنوان : تابع المساحات في المستوي

بند (٦-١)
الحصة الثانية

الأهداف السلوكية :

- أن يوجد نقاط تقاطع منحنى الدالة مع محور السينات
- يحدد الاحداثيات السينية لنقاط التقاطع والتي تنتمي للفترة المطلوب إيجاد المساحة خلالها
- يوجد المساحة باستخدام القاعدة
- يستخدم قيمة اختيارية لـ x تنتمي للفترة لتحديد العلاقة بين الدالتين
- أن يوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحني دالتين في الفترة [a،b]

التدريس:

إذاكانت الدالة f متصلة على الفترة $[a\,, b\,]$ ، $c \in (a\,, b\,)$ حيث $f(c) = 0$
فان مساحة المنطقة المستوية المحددة بمنحنى الدالة f و محور السينات في الفترة $[a\,, b\,]$ هي:

$$A = \left|\int_a^c f(x)dx\right| + \left|\int_c^b f(x)dx\right|$$

حاول أن تحل صـ ٦٩ (٣) : اوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f و محور السينات في الفترة المبينة فيما يلي :

❶ $f(x) = x^3 - 9x \quad , \qquad [-2\,, 1\,]$

❷ $f(x) = \cos x \quad , \qquad [0\,, \pi\,]$

الحل :

❶ نوجد الاحداثيات السينية لنقاط تقاطع منحنى الدالة f مع محور السينات بوضع

$$f(x) \;=\; 0$$

$$x^3 - 9x = 0$$

$$x(x^2 - 9) = 0$$

$$x(x-3)(x+3) = 0$$

$$x = 0 \in (-2,1)$$

$$x = 3 \quad \notin (-2,1)$$

$$x = -3 \quad \notin (-2,1)$$

المنحنى يقطع محور السينات عند $x = 0$ داخل الفترة المعطاة فتكون المساحة A كما يلي :

$$A = \left|\int_{-2}^{0} f(x)dx\right| + \left|\int_{0}^{1} f(x)dx\right|$$

$$= \left|\int_{-2}^{0}(x^3 - 9x)dx\right| + \left|\int_{0}^{1}(x^3 - 9x)dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{x^4}{4} - 9\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - 9\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}\right|$$

$$= \left|\left[\left(\frac{(0)^4}{4} - 9\frac{(0)^2}{2}\right) - \left(\frac{(-2)^4}{4} - 9\frac{(-2)^2}{2}\right)\right]\right|$$

$$+ \left|\left[\left(\frac{(1)^4}{4} - 9\frac{(1)^2}{2}\right) - \left(\frac{(0)^4}{4} - 9\frac{(0)^2}{2}\right)\right]\right|$$

$$= |[(0) - (-14)]| + \left|\left[\left(-\frac{17}{4}\right) - (0)\right]\right|$$

$$= |14| + \left|-\frac{17}{4}\right|$$

$$= \frac{73}{4} \quad \text{units square}$$

❷ نوجد الاحداثيات السينية لنقاط تقاطع منحنى الدالة f مع محور السينات بوضع

$$f(x) = 0$$

$$cos\, x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} \in (0, \pi)$$

المنحنى يقطع محور السينات عند $x = \frac{\pi}{2}$ داخل الفترة المعطاة فتكون المساحة A كما يلي :

$$A = \left|\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx\right|$$

$$A = \left|\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cos\, x\, dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} cos\, x\, dx\right|$$

$$= \left|[sin\, x]_{0}^{\frac{\pi}{2}}\right| + \left|[sin\, x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right|$$

$$= \left|\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right| + \left|\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2}\right|$$

$$= |[1 - 0]| + |[0 - (-1)]|$$

$$= 1 + 1 \Big(\quad 2 \quad \text{units square}$$

مساحة منطقة محددة بمنحنيي دالتين في الفترة $[a\,,b]$: إذا كانت كل من $f\,,g$ متصلتين على الفترة $[a\,,b]$ حيث كانت $f(x)\ \geq\ g(x) \qquad \forall x\ \in\ \ [a\,,b\,]$

فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين $f\,,g$ والمستقيمين $x=a\,,x=b$ هي:

$$A=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

حاول أن تحل صـ ٧٠ (٤) : اوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $f(x)=x^2+3$ ومنحني الدالة $g(x)=x^2+1$ و المستقيمين $x=-1\ ,\ x=1$.

علماً بأنّ : $f(x)>g(x)\ ,\ \forall x\in[-1\,,1\,]$

الحل :

$$\because\ f(x)>g(x)\ ,\ \forall x\in[-1\,,1\,]$$

$\therefore$ مساحة المنطقة المحددة هي :

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= \int_{-1}^{1}[f(x)-g(x)]dx\\
&= \int_{-1}^{1}[(x^2+3)-(x^2+1)]dx\\
&= \int_{-1}^{1}2\ dx\\
&= \ [2x]_{-1}^{1}\\
&= \ (\ 2\ )\text{–}\ (\ -2\ )=\ 4\ \text{ units square}
\end{aligned}$$

حاول أن تحل صـ ٧١ (٥) : اوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x)=x^2+1$، ومنحنى الدالة g : $g(x)=-x^2-3$ و المستقيمين $x=-1\ ,\ x=1$

علمًا بأن المنحنيين للدالتين f,g غير متقاطعين .

الحل :

$\because$ منحنيين الدالتين f,g غير متقاطعين .

ناخذ قيمة اختيارية من الفترة $(-1,1)$ ولتكن $x=0$

$$f(0)=1,\ \ g(0)=-3$$

$$\therefore f(x)>g(x) \qquad ,\forall x\in[-1\,,1\,]$$

مساحة المنطقة المحددة هي :

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{1}[f(x)-g(x)]dx\\
&= \int_{-1}^{1}[(x^2+1)-(-x^2-3)]dx\\
&= \int_{-1}^{1}2x^2+4\ dx\\
&= \ \left[\frac{2x^3}{3}+4x\right]_{-1}^{1}\\
&= \ \left[\frac{2(1)^3}{3}+4(1)\right]-\left[\frac{2(-1)^3}{3}+4(-1)\right]\\
&= \ \left(\frac{14}{3}\right)\text{-}\ \Big)\frac{-14}{3}\Big)\\
&= \ \frac{28}{3}\ \text{ units square}
\end{aligned}$$

التطبيق: أسئلة من كتاب التمارين (بند ٦ – ١) صـ ٢٧ : اوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f و محور السينات في الفترة المحددة :

$$f(x) = x^2 - x - 6 \quad , \quad [-3,2]:(٤)$$

الحل: نوجد الاحداثيات السينية لنقاط تقاطع منحنى الدالة f مع محور السينات بوضع

$$f(x) \;=\; 0$$
$$x^2 - x - 6 \Big(\; 0$$
$$(x-3)(x+2) \Big(\; 0$$
$$x \Big(\; 3 \notin (-3,2)$$
$$x \Big(\; -2 \; \in (-3,2)$$

المنحنى يقطع محور السينات عند $0 \Big) \; x$ داخل الفترة المعطاة فتكون المساحة A كما يلي :

$$A \Big(\; \left|\int_{-3}^{-2} f(x)dx\right| + \left|\int_{-2}^{2} f(x)dx\right|$$
$$\Big(\; \left|\int_{-3}^{-2}(x^2 - x - 6)dx\right| + \left|\int_{-2}^{2}(x^2 - x - 6)dx\right|$$
$$\Big(\; \left|\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x\right]_{-3}^{-2}\right| + \left|\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x\right]_{-2}^{2}\right|$$
$$\Big(\; \left|\left[\left(\frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} - 6(-2)\right) - \left(\frac{(-3)^3}{3} - \frac{(-3)^2}{2} - 6(-3)\right)\right]\right|$$
$$+ \left|\left[\left(\frac{(2)^3}{3} - \frac{(2)^2}{2} - 6(2)\right) - \left(\frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} - 6(-2)\right)\right]\right|$$
$$\Big(\; \left|\left[\left(\frac{22}{3}\right) - \left(\frac{9}{2}\right)\right]\right| + \left|\left[\left(-\frac{34}{3}\right) - \left(\frac{22}{3}\right)\right]\right|$$
$$\Big(\; \left|\frac{17}{6}\right| + \left|-\frac{56}{3}\right|$$
$$\Big(\; \frac{43}{2} \quad \text{units square}$$

$$f(x) = x^3 - 6x \quad , \quad [0\,,3\,] \;\; (٥)$$

الحل: نوجد الاحداثيات السينية لنقاط تقاطع منحنى الدالة f مع محور السينات بوضع

$$f(x) \;=\; 0$$
$$x^3 - 6x = 0$$
$$(x^2 - 6) = 0$$
$$x(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6}) = 0$$

$$x = 0 \notin (0,3)$$
$$x = \sqrt{6} \in (0,3)$$
$$x = -\sqrt{6} \notin (0,3)$$

المنحنى يقطع محور السينات عند $x = \sqrt{6}$ داخل الفترة المعطاة فتكون المساحة A كما يلي :

$$A = \left|\int_0^{\sqrt{6}} f(x)dx\right| + \left|\int_{\sqrt{6}}^{3} f(x)dx\right|$$
$$= \left|\int_0^{\sqrt{6}} (x^3 - 6x)dx\right| + \left|\int_{\sqrt{6}}^{3} (x^3 - 6x)dx\right|$$
$$= \left|\left[\frac{x^4}{4} - 6\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{6}}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - 6\frac{x^2}{2}\right]_{\sqrt{6}}^{3}\right|$$
$$= \left|\left[\left(\frac{(\sqrt{6})^4}{4} - 6\frac{(\sqrt{6})^2}{2}\right) - \left(\frac{(0)^4}{4} - 6\frac{(0)^2}{2}\right)\right]\right|$$
$$+ \left|\left[\left(\frac{(3)^4}{4} - 6\frac{(3)^2}{2}\right) - \left(\frac{(\sqrt{6})^4}{4} - 6\frac{(\sqrt{6})^2}{2}\right)\right]\right|$$
$$= |[(-9) - (0)]| + \left|\left[\left(-\frac{27}{4}\right) - (-9)\right]\right|$$
$$= |-9| + \left|\frac{9}{4}\right|$$
$$= \frac{45}{4} \text{ units square}$$

(٦) $f(x) = cos\, 2x \quad , \quad [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$

الحل: نوجد الاحداثيات السينية لنقاط تقاطع منحنى الدالة f مع محور السينات بوضع

$$f(x) = 0$$
$$cos\, 2x = 0$$
$$2x = \frac{\pi}{2}$$
$$x = \frac{\pi}{4} \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$$

المنحنى يقطع محور السينات عند $x = \frac{\pi}{4}$ داخل الفترة المعطاة فتكون المساحة A كما يلي :

$$A = \left|\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx\right|$$
$$= \left|\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} cos\, 2x\, dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} cos\, 2x\, dx\right|$$
$$= \left|\left[\frac{1}{2} sin\, 2x\right]_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\right| + \left|\left[\frac{1}{2} sin\, 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$$
$$= \left|\frac{1}{2}\sin 2(\frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2}\sin 2(-\frac{\pi}{4})\right| + \left|\frac{1}{2}\sin 2(\frac{\pi}{2}) - \frac{1}{2}\sin 2(\frac{\pi}{4})\right|$$
$$= \left|\left[\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2})\right]\right| + \left|\left[0 - \frac{1}{2}\right]\right|$$
$$= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ units square}$$

(٧) : اوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = 4x - x^2$، وممنحنى الدالة g :
$g(x) = 5 + x^2$ و المستقيمين $x = 0$, $x = 2$ علمًا بأن المنحنيين للدالتين f, g غير متقاطعين .

الحل:

$\because$ منحنيين الدالتين f, g غير متقاطعين .

ناخذ قيمة اختيارية من الفترة (0,2) ولتكن $x = 1$

$$f(1) = 3, \ g(1) = 6$$

$$\therefore g(x) > f(x) \quad , \forall x \in [0\,,2\,]$$

مساحة المنطقة المحددة هي :

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^2 [g(x) - f(x)]dx \\
&= \int_0^2 [(5 + x^2) - (4x - x^2)]dx \\
&= \int_0^2 (2x^2 - 4x + 5)\, dx \\
&= \left[\frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 5x\right]_0^2 \\
&= \left[\frac{2(2)^3}{3} - 2(2)^2 + 5(2)\right] - \left[\frac{2(0)^4}{3} - 2(0)^2 + 5(0)\right] \\
&= \left(\frac{22}{3}\right) - 0 \\
&= \frac{22}{3} \ \text{units square}
\end{aligned}$$

اليوم : **التاريخ:** / / ٢٠٢٠ م **الصف :**١٢ع

العنوان : تابع المساحات في المستوي

بند (٦-١)
الحصة الثالثة

الأهداف السلوكية :

- يوجد الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع منحنيي الدالتين
- يوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين معتبرا الإحداثيات السينية لنقطتي التقاطع كحدود للتكامل

التدريس:

ملاحظة : عندما تنحصر منطقة بين منحنيات متقاطعة، فإنّ حدود التكامل هي الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع .

حاول أن تحل صـ ٧٢ (٦) : اوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالتين :

$$y_1 = x^2 + 2 \ , \quad y_2 = -2x + 5$$

الحل :

لايجاد الاحداثيات السينية لنقطتي التقاطع:

نضع $y_1 = y_2$

$$x^2 + 2 = -2x + 5$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x + 3)(x - 1) = 0$$

$x = -3$ او $x = 1$

حدا التكامل هما : $-3 , 1$

ناخذ قيمة اختيارية من الفترة $(-3 , 1)$ ولتكن $x = 0$

$$\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix} \left(\begin{matrix} 2 \\ 5 \end{matrix} \right.$$

$$\therefore \ y_2 > y_1 \ , \ \forall x \in [-3 , 1]$$

مساحة المنطقة المحددة هي :

$$A = \int_{-3}^{1} [y_2 - y_1] dx$$

$$= \int_{-3}^{1} [(-2x + 5) - (x^2 + 2)] dx$$

$$= \int_{-3}^{1} (-x^2 - 2x + 3) \, dx$$

$$= \left[\frac{-x^3}{3} - x^2 + 3x\right]_{-3}^{1}$$

$$= \left[\frac{-(1)^3}{3} - (1)^2 + 3(1)\right] - \left[\frac{-(-3)^3}{3} - (-3)^2 + 3(-3)\right]$$

$$= \left(\frac{5}{3}\left(- (-27 \right)\right.$$

$$= \frac{86}{3} \quad \text{units square}$$

ملاحظة : في المثال السابق يمكن إيجاد المساحة باستخدام القيمة المطلقة دون الحاجة لاستخدام القيمة الاختيارية كالتالي: $\mathrm{A} = \left|\int_{-3}^{1}[y_2 - y_1]dx\right| = \left|\int_{-3}^{1}[y_1 - y_2]dx\right|$

حاول أن تحل صـ ٧٢ (٧) : اوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالتين :

$$f(x) = -2x^2 + 2 \ , \ \ g(x) = x^2 - 1$$

الحل :

لايجاد الاحداثيات السينية لنقطتي التقاطع:

نضع $f(x) = g(x)$

$$-2x^2 + 2 = x^2 - 1$$

$$-3x^2 + 3 = 0$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$(x+1)(x-1) = 0$$

$$x = -1 \quad \text{او} \quad x = 1$$

حدا التكامل هما : $-1 , 1$

مساحة المنطقة المحددة هي :

$$A = \left|\int_{-1}^{1}(f(x) - g(x)dx\right|$$

$$= \left|\int_{-1}^{1}(-2x^2 + 2 - x^2 + 1)\, dx\right|$$

$$= \left|\int_{-1}^{1}(-3x^2 + 3)\, dx\right|$$

$$= |[-x^3 + 3x]|$$

$$= |[-(1)^3 + 3(1)] - [-(-1)^3 + 3(-1)]|$$

$$= |(2) - (-2)|$$

$$= 4 \ \ units\ square$$

التطبيق: أسئلة من كتاب التمارين (بند ٦ – ١) صـ ٢٧ : أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيات التالية :

(١١) : $f(x) = x^2 - 2 \quad , \quad g(x) = 2$

الحل:

لإيجاد الاحداثيات السينية لنقطتي التقاطع:

نضع $f(x) = g(x)$

$$x^2 - 2 = 2$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$(x+2)(x-2) = 0$$

$x = -2$ او $x = 4$

مساحة المنطقة المحددة هي:

$$A = \left|\int_{-2}^{2}(f(x) - g(x)dx\right|$$

$$= \left|\int_{-2}^{2}(x^2 - 2 - 2)\,dx\right|$$

$$= \left|\int_{-2}^{2}(x^2 - 4)\,dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{-2}^{2}\right|$$

$$= \left|\left[\left(\frac{(2)^3}{3} - 4(2)\right) - \left(\frac{(-2)^3}{3} - 4(-2)\right)\right]\right|$$

$$= \left|\left(-\frac{16}{3}\right) - \left(\frac{16}{3}\right)\right|$$

$$= \frac{32}{3}\ \ units\ square$$

(١٢) : $g(x) = -2x$, $f(x) = 2x - x^2$

الحل:

لإيجاد الاحداثيات السينية لنقطتي التقاطع:

نضع $f(x) = g(x)$

$$2x - x^2 = -2x$$
$$x^2 - 4x = 0$$
$$x(x-4) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{او} \quad x \,\Big(\, 4$$

مساحة المنطقة المحددة هي :

$$A \,\Big(\, \left|\int_0^4 (f(x) - g(x)dx\right|$$
$$\Big(\, \left|\int_0^4 (2x - \mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x})\, \mathrm{dx}\right|$$
$$= \left|\int_0^4 (-\mathrm{x}^2 + 4x)\, \mathrm{dx}\right|$$
$$= \left|\left[-\frac{x^3}{3} - 2x^2\right]_0^4\right|$$
$$= \left|\left[\left(-\frac{(4)^3}{3} - 2(4)^2\right) - \left(-\frac{(0)^3}{3} - 2(0)^2\right)\right]\right|$$
$$= \left|\left(-\frac{160}{3}\right) - 0\right|$$
$$= \frac{160}{3} \quad \textit{units square}$$

اليوم : **التاريخ:** / / ٢٠٢٠ م **الصف :**١٢ع

العنوان : حجوم الأجسام الدورانية

بند (٦-٢)

الحصة الأولى

الأهداف السلوكية :

- أن يوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية المحددة بمنحنى دالة دورة كاملة حول محور السينات

التدريس:

حجوم الاجسام الدورانية: يعطى حجم الجسم الناتج من دوران منطقة محددة بمنحنى f و محور السينات والمستقيمين $x = a , x = b$ حيث $a < b$ دورة كاملة حول محور السينات بالعلاقة:

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx$$

حاول أن تحل صـ ٧٧ **(١)** : اوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات بمنحنى الدالة f : $f(x) = \sqrt{x-1}$ ومحور السينات في الفترة $[1,5]$

الحل :

$$V = \int_1^5 \pi(f(x))^2 dx$$

$$V = \int_1^5 \pi(\sqrt{x-1}\,)^2 dx$$

$$V = \pi \int_1^5 (x-1) dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^5$$

$$= \pi \left[\left(\frac{(5)^2}{2} - 5\right) - \left(\frac{(1)^2}{2} - 1\right)\right]$$

$$= \pi \left[\frac{15}{2} - (-\frac{1}{2})\right]$$

$$\Big(\ 8\pi \ \ units\ cube$$

التطبيق: أسئلة من كتاب التمارين (بند ٦ – ٢) صـ ٣٠ :
اوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات و المحددة من المستقيمات و المنحنيات التالية:

(١) : $y_1 = x^2, \quad y_2 = 0, \ , x = 0 , x = 2$

الحل:

$$V = \int_0^2 \pi (y)^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^2 (x^2\ )^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^2 x^4 dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2$$

$$= \pi \left[\left(\frac{(2)^5}{5}\right) - \left(\frac{(0)^5}{5}\right)\right]$$

$$= \pi \left[\left(\frac{32}{5}\right) - (0)\right]$$

$$= \frac{32}{5} \pi \ units\ cube$$

(٢) : $y_1 = \frac{1}{x} \quad , y_2 = 0, \ \ x = 1 , x = 4$

الحل:

$$V = \int_1^4 \pi (y)^2 dx$$

$$V = \pi \int_1^4 (\ \frac{1}{x}\ )^2 dx$$

$$V = \pi \int_1^4 \frac{1}{x^2} dx$$

$$= \pi \int_1^4 x^{-2}\ dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^4$$

$$= \pi \left[\frac{-1}{x}\right]_1^4$$

$$= \pi \left[\frac{-1}{4} - \frac{-1}{1}\right]$$

$$= \frac{3}{4} \pi \ units\ cube$$

أسئلة من كتاب التمارين صفحة ٣٠ : اوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات و المحددة من المستقيمات و المنحنيات التالية:

$y_1 = \sqrt{1-x^2}$, $y_2 = 0$: (٣)

الحل:

$$f(x) = y = \sqrt{1-x^2}$$

$$g(x) = y = 0$$

المنطقة المستوية محددة بمنحنى الدالتين

نجد نقاط التقاطع بوضع:

$$f(x) = g(x)$$

$$\sqrt{1-x^2} = 0$$

نربع الطرفين

$$1 - x^2 = 0$$

$$(1-x)(1+x) = 0$$

$$x = 1 \quad \text{او} \quad x = -1$$

ناخذ قيمة اختيارية من الفترة $(-1,1)$ ولتكن $x = 0$

$$f(0) = 1, \ \ g(0) = 0$$

$$f(x) > g(x) \qquad , \forall x \in (-1,1)$$

حجم الجسم الناتج عن الدوران:

$$V = \int_{-1}^{1} \pi[(f(\mathrm{x}))^2 - (g(x))^2]dx$$

$$V = \pi \int_{-1}^{1} \left[(\sqrt{1-x^2}\,)^2 - (0\,)^2\right]dx$$

$$V = \pi \int_{-1}^{1} [1-x^2]dx$$

$$= \pi \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \pi \left[\left((1) - \frac{(1)^3}{3}\right) - \left((-1) - \frac{(-1)^3}{3}\right)\right]$$

$$= \pi \left[\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{4}{3}\pi \quad units\ cube$$

اليوم : **التاريخ:** / / ٢٠٢٠ م **الصف :**١٢ع

العنوان : تابع حجوم الأجسام الدورانية

الأهداف السلوكية :

- أن يوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات و المحددة بمنحنى دالتين دورة كاملة حول محور السينات

بند (٦-٢)
الحصة الثانية

التدريس:

الحجوم الناتجة من دوران منطقة محددة منحنيين دالتين : إذا نتج مجسم عن دوران منطقة محددة بمنحنيي الدالتين f, g والمستقيمان $x = a \, , x = b$ دورة كاملة حول محور السينات بحيث f, g لهما نفس الإشارة في الفترة $[a \, , b]$ فإن حجم هذا المجسم يعطى بالقاعدة:

$V = \int_a^b \pi[(f(x))^2 - (g(x))^2]dx$ إذا كانت $f(x) \geq g(x)$ في الفترة $[a \, , b]$

$V = \int_a^b \pi[(g(x))^2 - (f(x))^2]dx$ إذا كانت $g(x) \geq f(x)$ في الفترة $[a \, , b]$

حاول أن تحل صـ ٧٨ (٣) : اوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات و المحددة بمنحنى الدالتين: $f(x) = \frac{x^2}{2} + 1 \, , g(x) = \frac{x}{2} + 2$

الحل :

المنطقة المستوية محددة بمنحنى الدالتين

نوجد أولاً نقاط التقاطع بوضع:

$$f(x) = g(x)$$

$$\frac{x^2}{2} + 1 = \frac{x}{2} + 2$$

$$\frac{x^4}{2} - \frac{x}{2} - 1 = 0$$

نضرب بـ 2

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x-2)(x+1) = 0$$

$$x = 2 \quad \text{أو} \quad x = -1$$

ناخذ قيمة اختيارية من الفترة $(-1,2)$ ولتكن $x = 0$

$$f(0) = 1,\ \ g(0) = 2$$

$$g(x) > f(x) \qquad ,\forall x \in (-2,1)$$

حجم الجسم الناتج عن الدوران:

$$V = \int_{-1}^{2} \pi[(g(x))^2 - (f(x))^2]dx$$

$$V = \pi \int_{-1}^{2} \left[(\frac{x}{2} + 2\,)^2 - (\frac{x^2}{2} + 1\,)^2 \right] dx$$

$$V = \pi \int_{-1}^{2} \left[\frac{x^2}{4} + 2x + 4 - (\frac{x^4}{4} + x^2 + 1) \right] dx$$

$$V = \pi \int_{-1}^{2} \left[\frac{x^2}{4} + 2x + 4 - \frac{x^4}{4} - x^2 - 1 \right] dx$$

$$V = \pi \int_{-1}^{2} \left[-\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + 2x + 3 \right] dx$$

$$= \pi \left[-\frac{1}{4}\frac{x^5}{5} - \frac{3}{4}\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right]_{-1}^{2}$$

$$= \pi \left[-\frac{x^5}{20} - \frac{x^3}{4} + x^2 + 3x \right]_{-1}^{2}$$

$$= \pi \left[\left(-\frac{(2)^5}{20} - \frac{(2)^3}{4} + (2)^2 + 3(2) \right) - \left(-\frac{(-1)^5}{20} - \frac{(-1)^3}{4} + (-1)^2 + 3(-1) \right) \right]$$

$$= \pi \left[\frac{32}{5} - (-\frac{17}{10}) \right]$$

$$= \frac{81}{10}\pi \quad units\ cube$$

حاول أن تحل صـ ٧٩ (٤) : اوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات و المحددة بمنحنى الدالتين $y_1 = x + 3\,, y_2 = x^2 + 1$

الحل :

المنطقة المستوية محددة بمنحنى الدالتين

نجد نقاط التقاطع بوضع:

$$y_1 = y_2$$

$$x + 3 \ (\ \ x^2 + 1$$

$$x^2 - x - 2 \ (\ \ 0$$

$$(x-1)(x+2)=0$$

$x=1$ أو $x=-2$

ناخذ قيمة اختيارية من الفترة $(-2,1)$ ولتكن $x=0$

$$y_1=3,\ y_2=1$$

$$\therefore y_1>y_2\ \forall x\in(-2,1)$$

حجم الجسم الناتج عن الدوران:

$$V=\int_{-2}^{1}\pi[(y_1)^2-(y_2)^2]dx$$

$$V=\pi\int_{-2}^{1}[(x+3)^2-(x^2+1)^2]dx$$

$$V=\pi\int_{-2}^{1}[x^2+6x+9-(x^4+2x^2+1)]dx$$

$$V=\pi\int_{-2}^{1}[x^2+6x+9-x^4-2x^2-1]dx$$

$$V=\pi\int_{-2}^{1}[x^2+6x+9-x^4-2x^2-1]dx$$

$$V=\pi\int_{-2}^{1}[-x^4-x^2+6x+8]dx$$

$$=\pi\left[-\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}+3x^2+8x\right]_{-2}^{1}$$

$$=\pi\left[\left(-\frac{(1)^5}{5}-\frac{(1)^3}{3}+3(1)^2+8(1)\right)-\left(-\frac{(-2)^5}{5}-\frac{(-2)^3}{3}+3(-2)^2+8(-2)\right)\right]$$

$$=\pi\left[\frac{157}{15}-\frac{76}{15}\right]$$

$$=\frac{27}{5}\pi \quad units\ cube$$

التطبيق: أسئلة من كتاب التمارين (بند ٦ – ٢) صـ ٣٠ : اوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات و المحددة من المستقيمات و المنحنيات التالية:

(٤) : $y_1 = x^2 + 1\,, y_2 = \ x + 3$

الحل:

$$f(x) = y = x^2 + 1$$

$$g(x) = y = x + 3$$

المنطقة المستوية محددة بمنحنى الدالتين

نجد نقاط التقاطع بوضع:

$$f(x) = g(x)$$
$$x + 3 = x^2 + 1$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$(x-1)(x+2) = 0$$
$$x = 1 \quad \text{او} \quad x = -2$$

ناخذ قيمة اختيارية في (-2,1) ولتكن $x = 0$

$$f(0) = 3,\ \ g(0) = 1$$

$$f(x) > g(x) \quad \forall x \in (-2,1)$$

حجم الجسم الناتج عن الدوران:

$$V = \int_{-2}^{1} \pi[(f(x))^2 - (g(x))^2]dx$$

$$V = \pi \int_{-2}^{1}[(x+3)^2 - (x^2+1)^2]dx$$

$$V = \pi \int_{-2}^{1}[x^2 + 6x + 9 - x^4 - 2x^2 - 1]dx$$

$$V = \pi \int_{-2}^{1}[x^2 + 6x + 9 - x^4 - 2x^2 - 1]dx$$

$$V = \pi \int_{-2}^{1}[-x^4 - x^2 + 6x + 8]dx$$

$$= \pi \left[-\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 8x\right]_{-2}^{1}$$

$$= \pi\left[\left(-\frac{(1)^5}{5} - \frac{(1)^3}{3} + 3(1)^2 + 8(1)\right) - \left(-\frac{(-2)^5}{5} - \frac{(-2)^3}{3} + 3(-2)^2 + 8(-2)\right)\right]$$

$$= \pi\left[\frac{157}{15} - \frac{76}{15}\right]$$

$$= \frac{27}{5}\pi \qquad units\ cube$$

$y_1 = \sec x \ \ , \ y_2 = \sqrt{2} \ \ , \ \ -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$: (٥)

الحل:

$$f(x) = y = \sec x$$

$$g(x) = y = \sqrt{2}$$

الـ1نطقة المستوية محددة بمنحنى الدالتين

نجد نقاط التقاطع بوضع:

$$f(x) = g(x)$$

$$\sec x = \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\cos x} = \sqrt{2}$$

$x = -\frac{\pi}{4}$ او $x = \frac{\pi}{4}$

ناخذ قيمة اختيارية من الفترة $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ ولتكن $x = 0$

$$f(0) = 1, \ g(0) = \sqrt{2}$$

$$g(x) > f(x) \ \ \forall x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$$

حجم الجسم الناتج عن الدوران:

$$V = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \pi[g(x))^2 - (f(x))^2]dx$$

$$V = \pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[(\sqrt{2})^2 - (\sec x)^2\right]dx$$

$$V = \pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} [2 - \sec^2 x]dx$$

$$= \pi \ [2x - \tan x]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \pi \ \left[\left(2(\frac{\pi}{4}) - \tan(\frac{\pi}{4})\right) - \left(2(-\frac{\pi}{4}) - \tan(-\frac{\pi}{4})\right)\right]$$

$$= \pi \ \left[\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) - \left(-\frac{\pi}{2} + 1\right)\right]$$

$$= \ \pi(\pi - 2) \quad \textit{units cube}$$

(٦) : $y_1 = x + 1\,, y_2 = x - 1\,,\ x = 1\,, x = 4$

الحل:

$$f(x) = y = x + 1$$

$$g(x) = y = x - 1$$

المنطقة المستوية محددة بمنحنى الدالتين

نجد نقاط التقاطع بوضع:

$$f(x) = g(x)$$

$$x + 1 = x - 1$$

$$1 \neq -1$$

نلاحظ ان المنحنيان لا يتقاطعان

ناخذ قيمة اختيارية من الفترة $(1,4)$ ولتكن $x = 2$

$$f(2) = 3,\ \ g(2) = 1$$

$$f(x) > g(x) \quad \forall x \in (1,4)$$

حجم الجسم الناتج عن الدوران:

$$V = \int_1^4 \pi[f(x))^2 - (g(x))^2]dx$$

$$V = \pi \int_1^4 [(x+1)^2 - (x-1)^2]dx$$

$$V = \pi \int_1^4 [x^2 + 2x + 1 - (x^2 - 2x + 1)]dx$$

$$V = \pi \int_1^4 [x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1]dx$$

$$V = \pi \int_1^4 [4x]dx$$

$$= \pi\ [2x^2]_1^4$$

$$= \pi\ [2(4)^2 - 2(1)^2]$$

$$= \pi\ [32 - 2]$$

$$= 30\,\pi \qquad units\ cube$$

$y_1 = x \ , \ y_2 = 1 \ , \ x = 0$: (٧)

الحل:

$$f(x) = y = x$$
$$g(x) = y = 1$$

المنطقة المستوية محددة بمنحنى الدالتين

نجد نقاط التقاطع بوضع:

$$f(x) = g(x)$$
$$x = 1$$

ناخذ قيمة اختيارية في $(0,1)$ ولتكن $x = \frac{1}{2}$

$$f(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}, \ g(\tfrac{1}{2}) = 1$$
$$g(x) > f(x) \quad \forall x \in (0,1)$$

حجم الجسم الناتج عن الدوران:

$$V = \int_0^1 \pi[g(x))^2 - (f(x))^2]dx$$
$$V = \pi \int_0^1 [(1)^2 - (x)^2]dx$$
$$V = \pi \int_0^1 [1 - x^2]dx$$
$$= \pi \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1$$
$$= \pi \left[\left((1) - \frac{(1)^3}{3}\right) - \left((0) - \frac{(0)^3}{3}\right)\right]$$
$$= \pi \left[\frac{2}{3} - 0\right]$$
$$= \frac{2}{3}\pi \quad units\ cube$$

$y_1 = \sqrt{x}\ ,\ y_2 = 0\ ,\ x = 4$: (٨)

الحل:

$$f(x) = y = \sqrt{x}$$

$$g(x) = y = 0$$

المنطقة المستوية محددة بمنحنى الدالتين

نجد نقاط التقاطع بوضع:

$$f(x) = g(x)$$

$$\sqrt{x} = 0$$

تربيع الطرفين

$$x = 0$$

ناخذ قيمة اختيارية من الفترة $[0,4]$ ولتكن $x = 1$

$$f(1) = 1,\ \ g(1) = 0$$

$$f(x) > g(x) \quad \forall x \in (0,4)$$

حجم الجسم الناتج عن الدوران:

$$V = \int_0^4 \pi[f(x))^2 - (g(x))^2]dx$$

$$V = \pi \int_0^4 \left[(\sqrt{x})^2 - (0)^2\right]dx$$

$$V = \pi \int_0^4 [x]dx$$

$$= \pi \ \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4$$

$$= \pi\left[\frac{(4)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2}\right]$$

$$= \pi[8 - 0]$$

$$= x\,\pi \quad\ units\ cube$$

اليوم : **التاريخ:** / / ٢٠٢٠ م **الصف :**١٢ع

العنوان : إيجاد معادلة منحني دالة باستخدام التكامل

بند (٦-٣)
الحصة الأولى

الأهداف السلوكية :

- أن يوجد معادلة منحنى دالة f الذي ميله عند أي نقطة (x, y) معلوم ويمر بالنقطة معلومة

التدريس:

حاول أن تحل صـ ٨٣ (٣) : أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $p(x, y)$ يساوي $3x^2 + x$ ويمر بالنقطة $(2\,,2)$.

الحل :

$$\because f'(x) = \pi x^2 + x$$
$$\therefore f(x) = \int f'(x)dx$$
$$\therefore f(x) = \int (3x^2 + x)dx$$
$$f(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} + c$$

لتعيين قيمة الثابت c نعوض بالنقطة $P(2,2)$ في المعادلة السابقة فنحصل على

$$2 = (2)^3 + \frac{(2)^2}{2} + c$$
$$2 = 8 + 2 + c$$
$$c = -8$$

$\therefore$ معادلة المنحنى f المطلوب هي :

$$f(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} - 8$$

حاول أن تحل صـ ٨٣ (٤) : أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $p(x, y)$ يساوي $-8x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ ويمر بالنقطة $(-1\,, -5)$.

الحل :

$$\because f'(x) = -8x^3 + 3x^2 - 2x + 4$$
$$\therefore f(x) = \int f'(x)dx$$

$$\therefore f(x) = \int(-8x^3 + 3x^2 - 2x + 4)dx$$

$$f(x) = -2x^4 + x^3 - x^2 + 4x + c$$

لتعيين قيمة الثابت c نعوض بالنقطة $P(-1\,,-5)$ في المعادلة السابقة فنحصل على

$$-5 = -2(-1)^4 + (-1)^3 - (-1)^2 + 4(-1) + c$$

$$-5 = -2 - 1 - 1 - 4 + c$$

$$-5 = -8 + c$$

$$c = 3$$

$\therefore$ معادلة المنحنى f المطلوب هي :

$$f(x) = -2x^4 + x^3 - x^2 + 4x + 3$$

التطبيق: أسئلة من كتاب التمارين (بند ٦ – ١) صـ ٣٢ : (٤) : أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة (x, y) يساوي $-x^2 + 2x - 4$ ويمر بالنقطة $A(3\ x7\ )$.

الحل:

$$\because f'(x) = -x^2 + 2x - 4$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x)dx$$

$$\therefore f(x) = \int(-x^2 + 2x - 4)dx$$

$$f(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 - 4x + c$$

لتعيين قيمة الثابت c نعوض بالنقطة $A(3\,,7)$ في المعادلة السابقة فنحصل على

$$7 = -\frac{(3)^3}{3} + (3)^2 - 4(3) + c$$

$$7 = -9 + x - 12 + c$$

$$7\Big(\ 12 = c$$

$$c = 19$$

$\therefore$ معادلة المنحنى f المطلوب هي :

$$f(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 - 4x + 19$$

أسئلة من كتاب التمارين صفحة ٣٢ : (٥) : أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة (x, y) يساوي $-4x^3 + 2x + 5$ ويمر بالنقطة $A(1\,,3\,)$.

الحل:

$$\because f'(x) = \; -4x^3 + 2x + 5$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x)dx$$

$$\therefore f(x) = \int(-4x^3 + 2x + 5)dx$$

$$f(x) = -x^4 + x^2 + 5x + c$$

لتعيين قيمة الثابت c نعوض بالنقطة $A(1\,,3\,)$ في المعادلة السابقة فنحصل على

$$\boldsymbol{\pi} = -(1)^4 + (1)^2 + 5(1) + c$$

$$3 = 5 + c$$

$$c = -2$$

$\therefore$ معادلة المنحنى f المطلوب هي :

$$f(x) = -x^4 + x^2 + 5x - 2$$

أسئلة من كتاب التمارين صفحة ٣٢ : (٦) : أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة (x, y) يساوي $\cos 2x$ ويمر بالنقطة $A(-\frac{\pi}{4}\,,\frac{5}{2}\,)$.

الحل:

$$\because f'(x) = \; \cos 2x$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x)dx$$

$$\therefore f(x) = \int(\cos 2x)dx$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + c$$

لتعيين قيمة الثابت c نعوض بالنقطة $A(-\frac{\pi}{4}\,,\frac{5}{2}\,)$ في المعادلة السابقة فنحصل على

$$\frac{5}{2} = \frac{1}{2}\sin(\,2(-\frac{\pi}{4})) + c$$

$$\frac{5}{2} = -\frac{1}{2} + c$$

$$c = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \Big(\;\; 3$$

$\therefore$ معادلة المنحنى f المطلوب هي :

$$f(x) \Big(\;\; f(x) \Big(\;\; \frac{1}{2}\sin 2x + 3$$

أسئلة من كتاب التمارين صفحة ٣٤ : (٧) : أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة (x, y) يساوي $\sin 3x$ ويمر بالنقطة $A(\frac{2\pi}{9}, \frac{7}{6})$.

الحل:

$$\because f'(x) = \sin 3x$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x)dx$$

$$\therefore f(x) = \int (\sin 3x)dx$$

$$f(x) = -\frac{1}{3}\cos 3x + c$$

لتعيين قيمة الثابت c نعوض بالنقط $A(\frac{2\pi}{9}, \frac{7}{6})$ في المعادلة السابقة فنحصل على

$$\frac{7}{6} = -\frac{1}{3}\cos(3\left(\frac{2\pi}{9}\right)) + c$$

$$\frac{7}{6} = -\frac{1}{3}(-\frac{1}{2}) + c$$

$$\frac{7}{6} = \frac{1}{6} + c$$

$$c = \frac{7}{6} - \frac{1}{6} = 1$$

$\therefore$ معادلة المنحنى f المطلوب هي :

$$f(x) = -\frac{1}{3}\cos 3x + 1$$

اليوم : **التاريخ:** / / ٢٠٢٠ م **الصف :١٢ع**

العنوان : تابع إيجاد معادلة منحني دالة باستخدام التكامل

بند (٦-٣)
الحصة الثانية

الأهداف السلوكية :

- أن يوجد معادلة منحنى دالة f عُلم مشتقها الثاني ونقطة حرجة لها .

التدريس:

حاول أن تحل صـ ٨٥ (٦) : لتكن $f''(x) = 5x - 2:$

فأوجد معادلة الدالة f إذا كانت النقطة $p(2\,,-2)$ نقطة حرجة للدالة

الحل :

$$f'(x) = \int f''(x)dx = \int (5x-2)dx$$

$$\therefore f'(x) = \frac{5x^2}{2} - 2x + c$$

$\because (2\,,-2)$ نقطة حرجة $\therefore f'(2) = 0$

$$0 = \frac{5(2)^2}{2} - 2(2) + c$$

$$0 = 10 - 4 + c$$

$$0 = 6 + c$$

$$c = -6$$

$$\therefore f'(x) = \frac{5x^2}{2} - 2x - 6$$

$$f(x) = \int f'(x)dx$$

$$f(x) = \int (\frac{5x^2}{2} - 2x - 6\,)dx$$

$$f(x) = \frac{5x^3}{6} - x^2 - 6x + c$$

بالتعويض إحداثيات النقطة $(2\,,-2)$ نجد :

$$-2 = \frac{5(2)^3}{6} - (2)^2 - 6(2) + c$$

$$-2 = \frac{40}{6} - 4 - 12 + c$$

$$-2 - \frac{20}{3} + 4 + 12 = c$$

$$c = \frac{22}{3}$$

∴ معادلة المنحنى f المطلوب هي :

$$f(x) = \frac{5x^3}{6} - x^2 - 6x + \frac{22}{3}$$

التطبيق: أسئلة من كتاب التمارين (بند ٦ – ٣) صـ ٣٢ :

(٩) : لتكن : $f''(x) = 12x^2 - 24x - 1$

فأوجد معادلة الدالة f إذا كان لها نقطة عظمى محلية عند $A\left(\frac{-1}{2}, \frac{15}{16}\right)$

الحل:

$$f'(x) = \int f''(x)dx = \int(12x^2 - 24x - 1)dx$$

$$\therefore f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - x + c$$

∵ $\left(\frac{-1}{2}, \frac{15}{16}\right)$ نقطة عظمى محلية (حرجة) $\therefore f'\left(\frac{-1}{2}\right) = 0$

$$0 = 4\left(\frac{-1}{2}\right)^3 - 12\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{-1}{2}\right) + c$$

$$0 = -\frac{1}{2} - 3 + \frac{1}{2} + c$$

$$0 = -3 + c$$

$$c = \boldsymbol{\pi}$$

$$\therefore f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - x + 3$$

$$f(x) = \int f'(x)dx$$

$$f(x) = \int(\ 4x^3 - 12x^2 - x + 3\ )dx$$

$$f(x) = x^4 - 4x^3 - \frac{x^4}{2} + 3x + c$$

بالتعويض إحداثيات النقطة $\left(\frac{-1}{2}, \frac{15}{16}\right)$ نجد :

$$\frac{15}{16} = \left(\frac{-1}{2}\right)^4 - 4\left(\frac{-1}{2}\right)^3 - \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^2}{2} + 3\left(\frac{-1}{2}\right) + c$$

$$c = -\frac{11}{2}$$

∴ معادلة المنحنى f المطلوب هي :

$$f(x) = x^4 - 4x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x - \frac{11}{2}$$

اليوم : التاريخ: / / ٢٠٢٠ م الصف :١٢ع

بند (٧-١)
الحصة الأولى

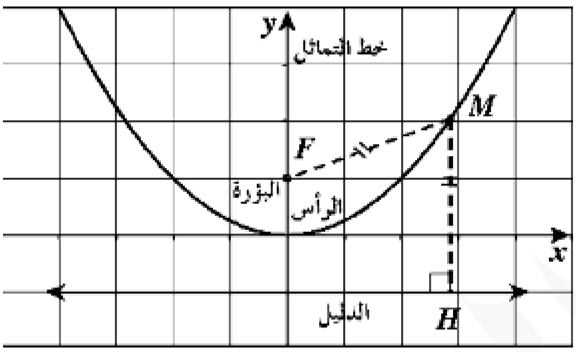
العنوان : القطع المكافئ

الأهداف السلوكية :

- يوجد معادلة القطع المكافئ علم رأسه نقطة الأصل
- يوجد معادلة القطع المكافئ علم بؤرته ودليله
- يوجد البؤرة والدليل لقطع مكافئ علمت معادلته

التدريس:

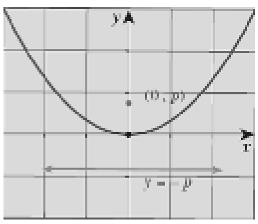
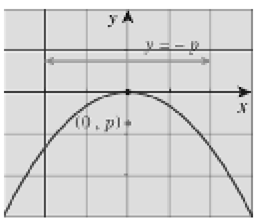
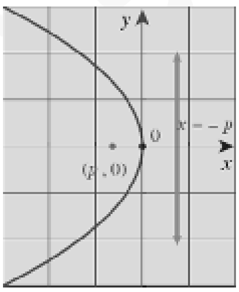
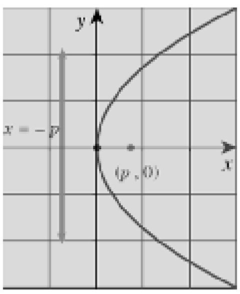
القطع المكافئ :



هو مجموعة كل النقاط في المستوى المتساوية البعدين عن نقطة ثابتة مُعطاة تسمى البؤرة " يرمز لها بـ F " وعن مستقيم ثابت مُعطى يسمى الدليل .

- خط تماثل القطع المكافئ هو المستقيم العمودي على الدليل مارًا بالبؤرة ويسمى محور القطع المكافئ .
- رأس القطع المكافئ هو نقطة تقاطع المحور مع المنحنى وهذه النقطة في منتصف المسافة بين البؤرة والدليل

معادلة القطع المكافئ : سوف تقتصر دراستنا على القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل (0,0)

الصورة العامة	$x^2 = 4py$		$y^2 = 4px$	
محور القطع	محور الصادات ($y - axis$)		محور السينات ($x - axis$)	
البؤرة	$\mathrm{F}(0, p)$		$\mathrm{F}(p, 0)$	
الدليل	$y = -p$		$x = -p$	
الفتحة	$p > 0$	$p < 0$	$p > 0$	$p < 0$
	إلى الأعلى	إلى الأسفل	إلى اليمين	إلى اليسار
رسم القطع				

لتعيين معادلة القطع المكافئ نحن بحاجة لتعيين ثلاث أشياء هي : رأس القطع ، محور القطع ، قيمة p

- رأس القطع يقع في منتصف المسافة بين البؤرة F والدليل .
- لتعيين محور القطع المكافئ(الدال عليه المتغير ذو الدرجة الأولى) نميز حالتين :

١. إذا أُعطيت البؤرة فيكون المحور هو المتغير الدال على الإحداثي الغير صفري في البؤرة .

٢. إذا أُعطيَّ الدليل فيكون المحور هو المتغير الموجود في معادلة الدليل .

- لتعيين قيمة p نميز حالتين :

١. إذا أُعطيت البؤرة فتكون قيمة p هي الإحداثي الغير صفري في البؤرة .

٢. إذا أُعطيَّ الدليل فتكون قيمة p هي معاكس العدد الموجود في معادلة الدليل .

حاول أن تحل صـ ١٠٤ (١) :

❶ أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته $F(-4,0)$.

❷ أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $F(0,2)$ ودليله المستقيم $y = -2$.

الحل :

❶ الرأس نقطة الأصل $(0,0)$

$\because$ البؤرة $F(-4,0)$ فإن محور القطع المكافئ هو $(\ x - axis\ )$

$$p = -4$$

$\therefore$ معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $y^2 = 4px$

$$y^2 = 4(-4)x$$

$$y^2 = -16x$$

❷ $\because$ البؤرة : $F(0,2) \Rightarrow p = 2$ فإن محور القطع المكافئ هو $(\ y - axis\ )$

معادلة الدليل هي : $y \int -2$

$\therefore$ رأس القطع يقع في منتصف المسافة بين البؤرة F والدليل أي رأس القطع $(0,0)$

$\therefore$ معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $x^2 = 4py$

$$x^2 = 4(2)y$$

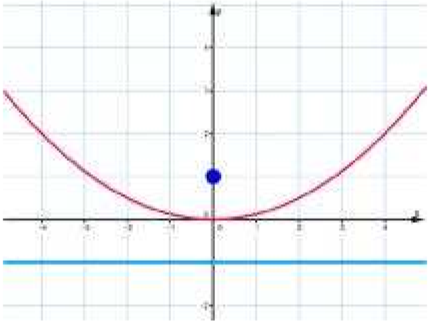
$$x^2 = 8y$$

حاول أن تحل صـ ١٠٥ (٢) : أوجد البؤرة والدليل لقطع مكافئ ،ثم ارسم شكلاً تقريبياً له في كل ممايلي :

❶ المعادلة : $y = \frac{x^2}{4}$.

❷ المعادلة : $x = -\frac{1}{5}y^2$.

الحل :



❶ ∵ معادلة القطع المعطاة للقطع المكافئ هي : $x^2 = 4y$

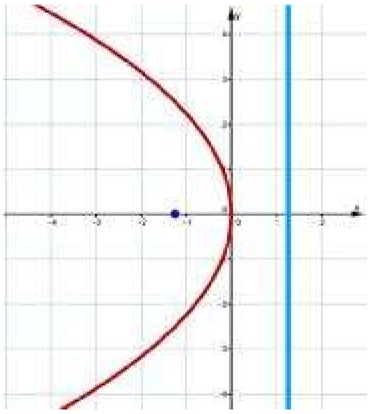
∴ معادلة القطع المعطاة للقطع المكافئ على الصورة : $x^2 = 4py$

محور القطع المكافئ هو $(y - axis)$

$$4p = 4 \Rightarrow \quad p = 1 \quad , \quad p > 0$$

∴ البؤرة : $F(0,p) = F(0,1)$

ومعادلة دليله : $y = -p \Rightarrow y = -1$.



❷ ∵ معادلة القطع المعطاة للقطع المكافئ هي : $y^2 = -5x$

∴ معادلة القطع المعطاة للقطع المكافئ على الصورة : $y^2 = 4px$

محور القطع المكافئ هو $(x - axis)$

$$4p = -5 \Rightarrow \quad p = -\frac{5}{4} \quad , \quad p < 0$$

∴ البؤرة : $F(p,0) = F(-\frac{5}{4},0)$

ومعادلة دليله : $x = -p \Rightarrow x = \frac{5}{4}$.

التطبيق: أسئلة من كتاب التمارين (بند ٧ – ١) صـ ٤٠ : أوجد معادلة القطع المكافئ

(١) : رأسه نقطة الأصل والبؤرة $F(-3,0)$.

الحل :

الرأس نقطة الأصل $(0,0)$

∵ البؤرة $F(-3,0)$ فإن محور القطع المكافئ هو $(x - axis)$

$$p = -3$$

∴ معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $y^2 = 4px$

$$y^2 = 4(-3)x$$

$$y^2 = -12x$$

(٢) : رأسه نقطة الأصل والبؤرة $F(0,-2)$.

الحل :

الرأس نقطة الأصل $(0,0)$

∵ البؤرة $F(0,-2)$ فإن محور القطع المكافئ هو $(y - axis)$

$$p = -2$$

∴ معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $x^2 = 4py$

$$x^2 = 4(-2)y$$

$$x^2 = -8y$$

(٣) : بؤرته $F(0,2)$ ومعادلة دليله $y\ y\ -2$.

الحل :

∵ البؤرة : $F(0,2) \Rightarrow p\ y\ 2$ فإن محور القطع المكافئ هو $(y - axis)$

معادلة الدليل هي : $y\ y\ -2$

∴ رأس القطع يقع في منتصف المسافة بين البؤرة F والدليل أي رأس القطع $(0,0)$

∴ معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $x^2\ y\ 4py$

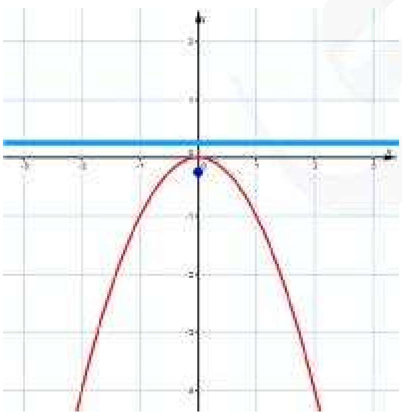
$$x^2\ y\ 4(2)y$$

$$x^2\ y\ 8y$$

أسئلة من كتاب التمارين (بند ٧ – ١) صـ ٤٠ : أوجد البؤرة والدليل وخط تماثل القطع المكافئ ،ارسم تخطيطاً للرسم البياني للقطع المكافئ في ما يلي :

(٤) : المعادلة : $x^2\ y\ -y$.

الحل :



∵ معادلة القطع المعطاة للقطع المكافئ هي : $x^2\ y\ -y$

∴ معادلة القطع المعطاة للقطع المكافئ على الصورة : $x^2\ y\ 4py$

خط تماثل القطع المكافئ هو $(y - axis)$

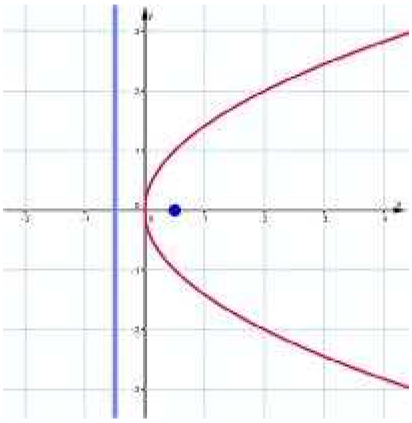
$$4p\ y\ -1 \Rightarrow p\ y\ -\frac{1}{4}\ ,\ p < 0$$

∴ البؤرة : $F(0,p) = F(0,-\frac{1}{4})$

ومعادلة دليله : $y\ y\ -p \Rightarrow y\ y\ \frac{1}{4}$.

(٥) : المعادلة: $y^2 = 2x$

الحل :



$\because$ معادلة القطع المعطاة للقطع المكافئ هي : $y^2 = 2x$

$\therefore$ معادلة القطع المعطاة للقطع المكافئ على الصورة : $y^2 = 4px$

خط تماثل القطع المكافئ هو $(x - \text{axis})$

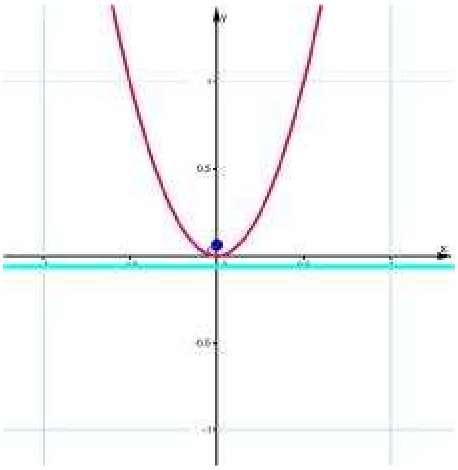
$$4p = 2 \Rightarrow \quad p\ x\ \frac{2}{4}\ x\ \frac{1}{2} \quad , \ p > 0$$

$\therefore$ البؤرة : $F(p,0) = F(\frac{1}{2},0)$

ومعادلة دليله : $x = -p \ \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$.

(٦) : المعادلة : $y = 4x^2$.

الحل :



$\because$ معادلة القطع المعطاة للقطع المكافئ هي : $x^2 = \frac{1}{4}y$

$\therefore$ معادلة القطع المعطاة للقطع المكافئ على الصورة : $x^2 = 4py$

خط تماثل القطع المكافئ هو $(y - \text{axis})$

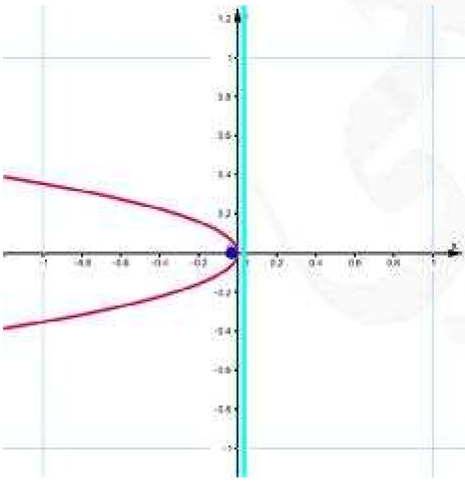
$$4p = \frac{1}{4} \Rightarrow \quad p = \frac{1}{16} \quad , \ p > 0$$

$\therefore$ البؤرة : $F(0,p) = F(0,\frac{1}{16})$

ومعادلة دليله : $y\ y\ -p \ \Rightarrow y\ y\ -\frac{1}{16}$.

(٧) : المعادلة: $x\ y\ -8y^2$

الحل :



$\because$ معادلة القطع المعطاة للقطع المكافئ هي : $y^2\ y\ -\frac{1}{8}x$

$\therefore$ معادلة القطع المعطاة للقطع المكافئ على الصورة : $y^2\ y\ 4px$

خط تماثل القطع المكافئ هو $(x - \text{axis})$

$$4p\ y\ -\frac{1}{8} \Rightarrow \quad p\ y\ -\frac{1}{32} \quad , \ p < 0$$

$\therefore$ البؤرة : $F(p,0) = F(-\frac{1}{32},0)$

ومعادلة دليله : $x = -p \ \Rightarrow x = \frac{1}{32}$.

اليوم :　　　　　التاريخ:　/　/　٢٠٢٠ م　　　　　الصف :١٢ع

العنوان : تابع القطع المكافئ

بند (٧-١)
الحصة الثانية

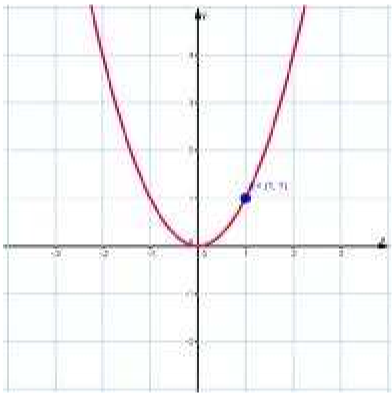
الأهداف السلوكية :

- يوجد معادلة القطع المكافئ رأسه نقطة الأصل ويمر بنقطة معلومة
- يوجد معادلة القطع المكافئ رأسه نقطة الأصل وعلم معادلة دليله

التدريس:

حاول أن تحل صـ ١٠٥ (٣) : أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطة $A(1,1)$ ، وخط تماثله $(y-\text{axis})$

الحل :



$\because$ الرأس نقطة الأصل $(0,0)$، وخط تماثله $(y-\text{axis})$

$\therefore$ معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $x^2=4py$

$\because$ القطع المكافئ يمر بالنقطة $A(1,1)$ $\therefore$ تحقق المعادلة

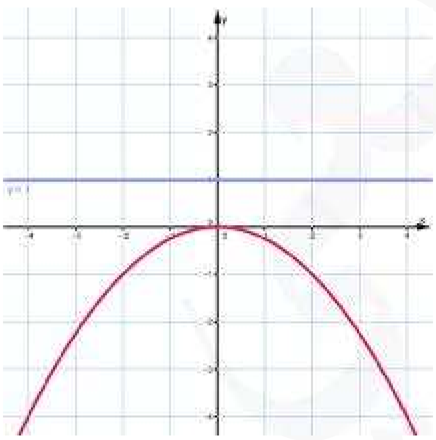
نعوض في معادلة القطع عن x بـ 1 و عن y بـ 1 :

$$(1)^2=4p(1)\Rightarrow 1=4p\Rightarrow p=\frac{1}{4}$$

$\therefore$ معادلة القطع المكافئ هي : $x^2=y \quad \Rightarrow \quad x^2=4(\frac{1}{4})y \quad \Rightarrow \quad x^2=4py$

حاول أن تحل صـ ١٠٦ (٥) : أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(0,0)$ ومعادلة دليله $y=1$

الحل :



$\because$ معادلة الدليل $y=1$

$\therefore$ خط تماثله $(y-axis)$

$\because$ الرأس نقطة الأصل $(0,0)$

$\therefore$ معادلة القطع المكافئ هي على الصورة :

$$x^2=4py$$

معادلة الدليل هي على الصورة :

$$y=-p$$

$$y=1\Rightarrow -p=1\Rightarrow p=-1$$

$\therefore$ معادلة القطع المكافئ هي :

$$x^2=4py\quad\Rightarrow x^2=4(-1)y$$

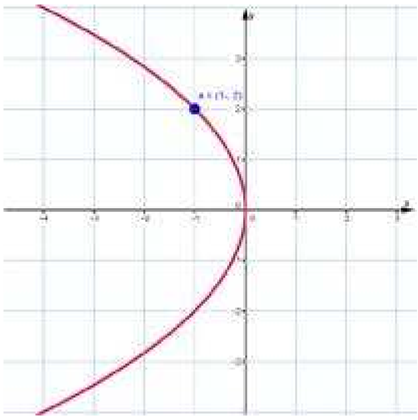
$$x^2=-4y$$

التطبيق: أسئلة من كتاب التمارين (بند ٧ – ١) صـ ٤٠ :

(٨) : أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطة $A(-1,2)$ ، وخط تماثله $(x - axis)$

الحل :

$\because$ الرأس نقطة الأصل $(0,0)$، وخط تماثله $(x - axis)$



$\therefore$ معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $y^2 = 4px$

$\because$ القطع المكافئ يمر بالنقطة $A(-1,2)$ $\therefore$ تحقق المعادلة

نعوض في معادلة القطع عن x بـ -1 و عن y بـ 2 :

$$(2)^2 = 4p(-1) \Rightarrow 4 = -4p \Rightarrow p = -1$$

$\therefore$ معادلة القطع المكافئ هي :

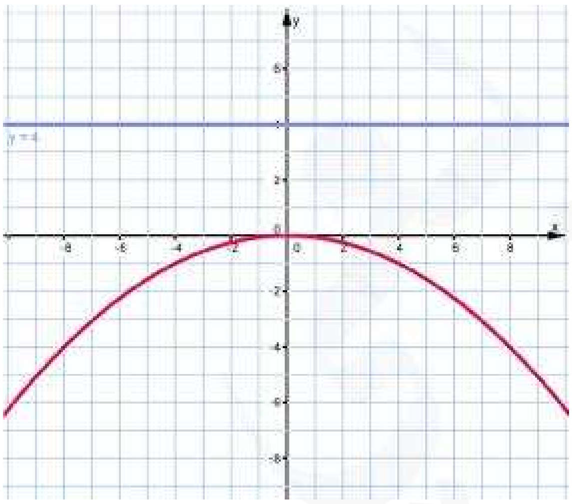
$$y^2 = 4px \quad \Rightarrow \quad y^2 = 4(-1)x \quad \Rightarrow \quad y^2 = -4x$$

ملاحظة : لتعيين محور قطع مكافئ (خط التماثل) عُلم نقطتان منه ننظر إلى الإحداثي الذي له نفس الاشارة في النقطتين فيكون هو خط التماثل والأشارة تحدد جهة الفتحة .

(١٠) : أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(0,0)$

ومعادلة دليله $y = 4$

الحل :



$\because$ معادلة الدليل $y = 4$

$\therefore$ خط تماثله $(y - axis)$

$\because$ الرأس نقطة الأصل $(0,0)$

$\therefore$ معادلة القطع المكافئ هي على الصورة :

$$x^2 = 4py$$

معادلة الدليل هي على الصورة:

$$y = -p$$

$$y = 4 \Rightarrow -p = 4 \Rightarrow p = -4$$

$\therefore$ معادلة القطع المكافئ هي :

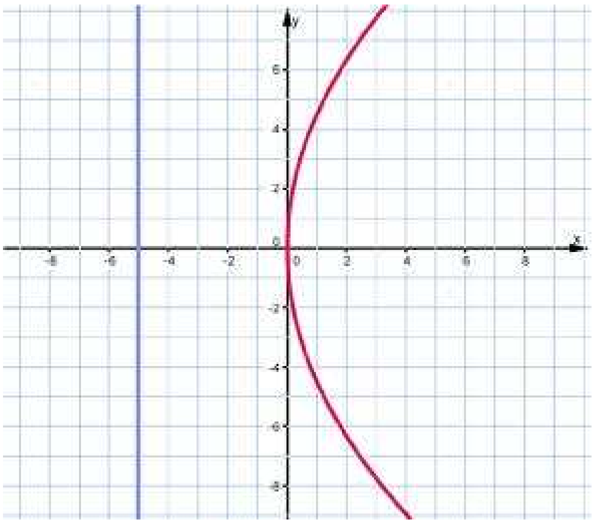
$$x^2 = 4py \quad \Rightarrow x^2 = 4(-4)y$$

$$x^2 = -16y$$

(١١) : أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(0,0)$

ومعادلة دليله $x = -5$

الحل :



$\because$ معادلة الدليل $x = -5$

$\therefore$ خط تماثله $(x - axis)$

$\because$ الرأس نقطة الأصل $(0,0)$

$\therefore$ معادلة القطع المكافئ هي على الصورة :

$$y^2 = 4px$$

معادلة الدليل هي على الصورة :

$$x = -p$$

$$x = -5 \Rightarrow -p = -5 \Rightarrow p = 5$$

$\therefore$ معادلة القطع المكافئ هي :

$$y^2 = 4px \quad \Rightarrow \quad y^2 = 4(5)x$$

$$y^2 = 20x$$

اليوم :   التاريخ: /   / ٢٠٢٠ م   الصف :١٢ع

بند (٧-٢)
الحصة الأولى

العنوان : القطع الناقص

الأهداف السلوكية :

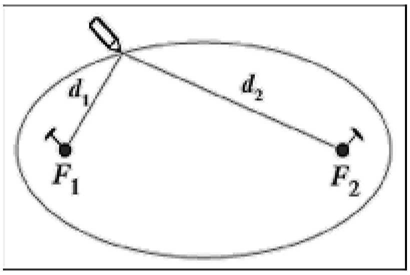
- يعرف القطع الناقص.
- يعين بؤرتي القطع الناقص .
- يعين رأسي القطع الناقص .
- يعين النقطتان الطرفيتان للمحور الأصغر للقطع الناقص .
- يرسم القطع الناقص رسماً تقريبياً .

التدريس:

تعريف القطع الناقص : هو مجموعة كل النقاط في المستوى التي يكون مجموع بعدي كل نقطة منها عن نقطتين ثابتتين في المستوى ثابتاً .

- نسمي النقطتين الثابتتين بـ بؤرتي القطع الناقص ويرمز لهما بـ F_1 , F_2 .

البعد بينهما = $2c$

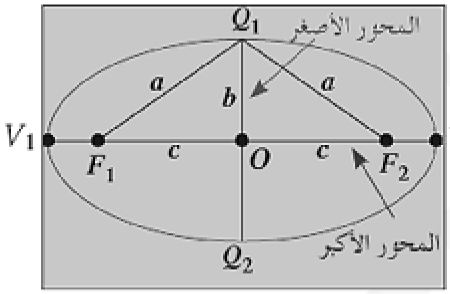


- d_1 , d_2 هما البعدان اللذان مجموعهما ثابت

سوف نرمز لهذا البعد الثابت بـ : $2a$

أي : $d_1 + d_2 = 2a$

- مركز القطع الناقص : هو منتصف المسافة بين البؤرتين .



- المحور الأكبر للقطع الناقص (المحور الرئيسي) :

هو القطعة المستقيمة $V_1 V_2$ المارة بالبؤرتين وطرفاها على القطع .

طول المحور الأكبر هو $2a$

أي : $V_1 V_2 = 2a$

- المحور الأصغر للقطع الناقص (المحور الثانوي) :

هو القطعة المستقيمة $Q_1 Q_2$ المارة بالمركز والعمودية على المحور الأكبر .

طول المحور الأصغر هو $2b$

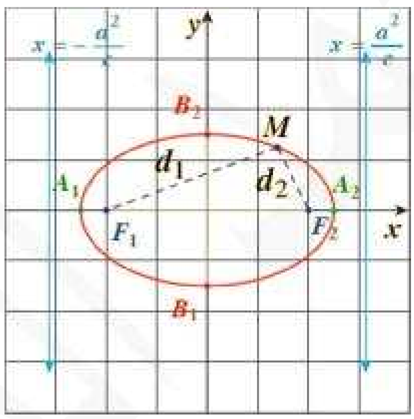
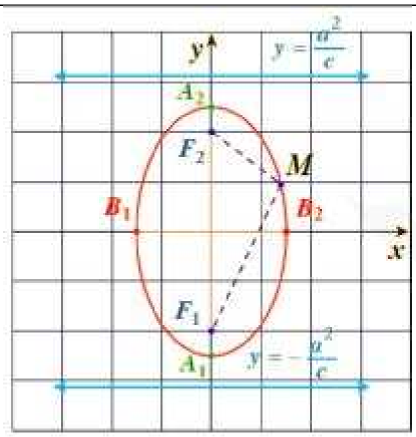
أي : $Q_1 Q_2 = 2b$

- رأسي القطع الناقص : وهما نقطتي طرفي المحور الأكبر للقطع .
- العلاقة الأساسية بين القيم a, b, c هي :

$$a^2 = b^2 + c^2$$

لاحظ أنّ : $a > c > 0 \quad , \quad a > b > 0$

معادلة القطع الناقص : سوف تقتصر دراستنا على القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل $(0,0)$

الصورة العامة	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$
محور الأكبر	ينطبق على محور السينات	ينطبق على محور الصادات
طرفا المحور الأكبر (الرأسان)	$A_1(-a,0)$ $A_2(a,0)$	$A_1(0,-a)$ $A_2(0,a)$
طرفا المحور الأصغر	$B_1(0,-b)$ $B_2(0,b)$	$B_1(-b,0)$ $B_2(b,0)$
البؤرتان	$F_1(-c,0)$ $F_2(c,0)$	$F_1(0,-c)$ $F_2(0,c)$
معادلتي الدليلين	$x=\frac{a^2}{c}\ ,\ x=-\frac{a^2}{c}$	$y=\frac{a^2}{c}\ ,\ y=-\frac{a^2}{c}$
رسم القطع		

لتعيين معادلة القطع الناقص نحن بحاجة لتعيين أربع أشياء هي :
المركز ، المحور الرئيسي ، قيمة a ، قيمة b

- مركز القطع يقع في منتصف المسافة بين البؤرتين أو في منتصف المسافة بين طرفا المحور الأكبر أو في منتصف المسافة بين طرفا المحور الأصغر .
- لتعيين المحور الرئيسي للقطع الناقص (الدال عليه المتغير ذو المقام الأكبر) نميز حالتين :
  ٣. إذا أُعطيت إحدى النقاط A_1, A_2, F_1, F_2 فيكون المحور الرئيسي هو المتغير الدال على الإحداثي الغير صفري في هذه النقاط .
  ٤. إذا أُعطيت إحدى النقطتين B_1, B_2 فيكون المحور هو المتغير الدال على الإحداثي الصفري في هذه النقاط .
- لتعيين قيمة $a\ ,b$ نستفيد من العلاقات :

$$A_1A_2=2a \quad , \quad B_1B_2=2b \quad , \quad F_1F_2=2c$$
$$a^2=\mathrm{b}^2+\mathrm{c}^2$$

حاول أن تحل صـ ١١٢ (١) : إذا كانت : $\frac{x^2}{4}+\frac{y^4}{9}=1$ معادلة قطع ناقص فأوجد :

❶ رأسي القطع الناقص وطرفي المحور الأصغر .

❷ البؤرتين .

❸ معادلتي دليلي القطع .

❹ طول كل من المحورين ، ثم ارسم شكلاً تقريبياً للقطع .

الحل :

❶ معادلة القطع الناقص هي : $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

معادلة القطع الناقص هي على الصورة : $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

من معادلة القطع نجد :

$$a^2 \,(\, 9 \Rightarrow a \,(\, 3$$

$$b^2=4 \Rightarrow b=2$$

والمحور الأكبر ينطبق على محور الصادات

رأسا القطع الناقص هما : $A_1(0,-3)\;,\;A_2(0,3)$

طرفا المحور الأصغر هما: $B_1(-2,0)\;,\;B_2(2,0)$

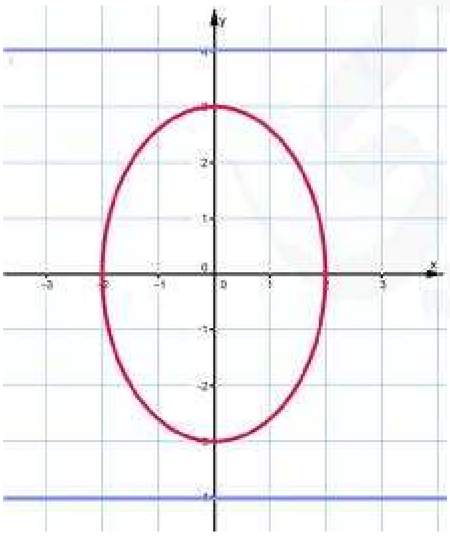
❷

$$c^2=a^2-b^2$$

$$c^2 \,(\, 9-4 \,(\, 5$$

ومنه : $c=\sqrt{5}$

بؤرتي القطع الناقص هما : $F_1(0,-\sqrt{5})\;,\;F_2(0,\sqrt{5})$



❸ معادلتي الدليلين هما : $y=-\frac{a^2}{c}\;,\;y=\frac{a^2}{c}$

$$y=-\frac{9}{\sqrt{5}}\;,\;y=\frac{9}{\sqrt{5}}$$

$$y=-\frac{9\sqrt{5}}{5}\;,\;y=\frac{9\sqrt{5}}{5}$$

❹ طول المحور الأكبر هو $2a$:

$$2a=2\times 3 \,(\, 6$$

طول المحور الأصغر هو $2b$

$$2b=2\times 2=4$$

حاول أن تحل صـ ١١٣ (٣) : أوجد البؤرتين والرأسين وطول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي معادلته :

$$x^2 + 4y^2 = 16$$

الحل :

$$\frac{x^2}{16} + \frac{4y^2}{16} = \frac{16}{16}$$

معادلة القطع الناقص هي : $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

معادلة القطع الناقص هي على الصورة : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

من معادلة القطع نجد :

$$a^2 = 16 \Rightarrow a = \sqrt{16} = 4$$

$$b^2 = 4 \Rightarrow b = \sqrt{4} = 2$$

والمحور الأكبر ينطبق على محور السينات

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c^2 = 16 - 4 = 12$$

ومنه : $c = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

بؤرتا القطع الناقص هما : $F_1\left(-2\sqrt{3}, 0\right)$, $F_2(2\sqrt{3}, 0)$

رأسا القطع الناقص هما : $A_1(-4,0)$ x $A_2(4,0)$

طول المحور الأكبر هو $2a$:

$$2a = 2 \times 4 = 8$$

التطبيق: أسئلة من كتاب التمارين (بند ٧ – ٢) صـ ٤٣ : لكل معادلة من معادلات القطع الناقص التالية أوجد : رأسي القطع - طرفي المحور الأصغر - البؤرتين - معادلتي دليلي القطع - طول كل من المحورين، ثم ارسم شكلاً تقريبياً لكل قطع.

(١) : $\frac{x^2}{8^2}+\frac{y^2}{6^2}=1$

الحل :

معادلة القطع الناقص هي على الصورة : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

من معادلة القطع نجد :

$a^2=8^2 \Rightarrow a=8$

$b^2=6^2 \Rightarrow b=6$

والمحور الأكبر ينطبق على محور السينات

رأسا القطع الناقص هما : $A_1(-8,0)\ \ x\,A_2(8,0)$

طرفا المحور الأصغر هما: $B_1(0,-6)\ \ ,\ \ B_2(0,6)$

$$c^2=a^2-b^2$$

$$c^2=64-3p=28$$

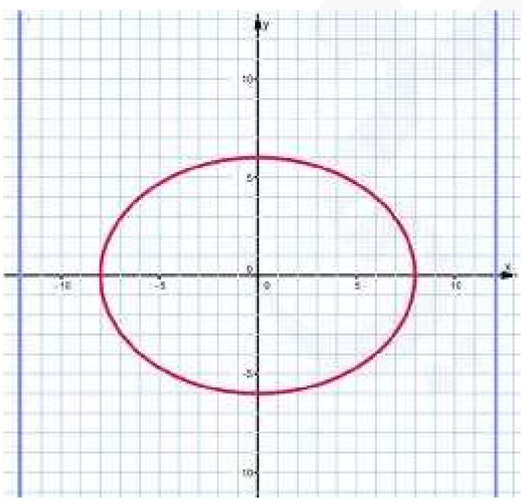
ومنه : $c=2\sqrt{7}$

بؤرتي القطع الناقص هما : $F_1\left(-2\sqrt{7},0\right)\ ,\ F_2(2\sqrt{7},0)$

معادلتي الدليلين هما : $x=-\frac{a^2}{c}\quad ,\quad x=\frac{a^2}{c}$

$$x=-\frac{64}{2\sqrt{7}}\quad ,\quad x=\frac{64}{2\sqrt{7}}$$

$$x=-\frac{32\sqrt{7}}{7}\quad ,\quad x=\frac{32\sqrt{7}}{7}$$



طول المحور الأكبر هو $2a$:

$$2a=2\times 8=16$$

طول المحور الأصغر هو $2b$

$$2b=2\times 6=12$$

$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1$: (٢)

الحل :

معادلة القطع الناقص هي : $\frac{x^2}{4^4} + \frac{y^2}{6^2} = 1$

معادلة القطع الناقص هي على الصورة : $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

من معادلة القطع نجد :

$$a^2 (6^2 \Rightarrow a (6$$

$$b^2 = 4^2 \Rightarrow b = 4$$

والمحور الأكبر ينطبق على محور الصادات

رأسا القطع الناقص هما : $A_1(0,-6)$, $A_2(0,6)$

طرفا المحور الأصغر هما: $B_1(-4,0)$, $B_2(4,0)$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c^2 = 36 - 16 = 20$$

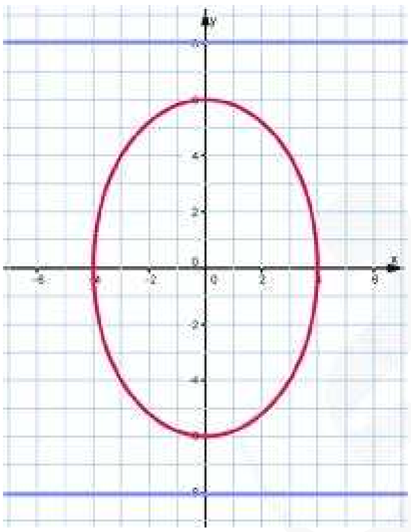
ومنه : $c = 2\sqrt{5}$

بؤرتي القطع الناقص هما : $F_1\left(0,-2\sqrt{5}\right)$, $F_2(0,2\sqrt{5})$

معادلتي الدليلين هما : $y = -\frac{a^2}{c}$, $y = \frac{a^2}{c}$

$$y = -\frac{36}{2\sqrt{5}} \quad , \quad y = \frac{36}{2\sqrt{5}}$$

$$y = -\frac{18\sqrt{5}}{5} \quad , \quad y = \frac{18\sqrt{5}}{5}$$



طول المحور الأكبر هو $2a$:

$$2a = 2 \times 6 = 12$$

طول المحور الأصغر هو $2b$

$$2b = 2 \times 4 = 8$$

(٣) : $3x^2 + 5y^2 - 225 = 0$

الحل :

$$3x^2 + yy^2 = 225$$

$$\frac{3x^2}{225} + \frac{5y^2}{225} = \frac{225}{225}$$

معادلة القطع الناقص هي : $\frac{x^2}{75} + \frac{y^2}{45} = 1$

معادلة القطع الناقص هي على الصورة : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

من معادلة القطع نجد :

$$a^2 = 7x \Rightarrow a = \sqrt{7x} = x\sqrt{3}$$

$$b^2 = 45 \Rightarrow b = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

والمحور الأكبر ينطبق على محور السينات

رأسا القطع الناقص هما : $A_2(5\sqrt{3}, 0)$ x $A_1(-5\sqrt{3}, 0)$

طرفا المحور الأصغر هما : $B_2(0, 3\sqrt{5})$, $B_1(0, -3\sqrt{5})$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c^2 = 75 - 45 = 30$$

ومنه : $c = \sqrt{30}$

بؤرتي القطع الناقص هما : $F_2(\sqrt{30}, 0)$, $F_1(-\sqrt{30}, 0)$

معادلتي الدليلين هما : $x = \frac{a^2}{c}$, $x = -\frac{a^2}{c}$

$$x = \frac{75}{\sqrt{30}} \quad , \quad x = -\frac{75}{\sqrt{30}}$$

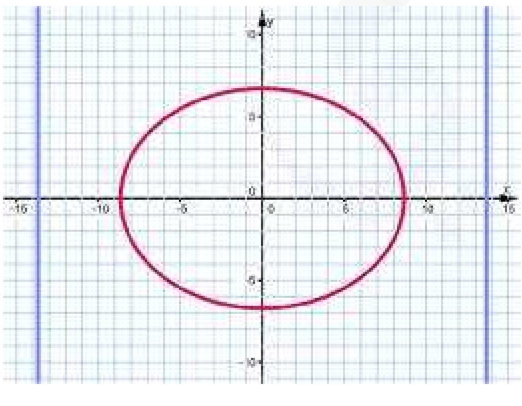
$$x = \frac{5\sqrt{30}}{2} \quad , \quad x = -\frac{5\sqrt{30}}{2}$$

طول المحور الأكبر هو $2a$:

$$2a = 2 \times 5\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$$

طول المحور الأصغر هو xb

$$xb = x \times 3\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$



(٤) : $4x^2 + y^2 - 28 = 0$

الحل :

$$4x^2 + y^2 = 28$$

$$\frac{4x^2}{28} + \frac{y^2}{28} = \frac{28}{28}$$

معادلة القطع الناقص هي : $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{28} = 1$

معادلة القطع الناقص هي على الصورة : $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

من معادلة القطع نجد :

$$a^2 = 28 \Rightarrow a = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

$$b^2 = 7 \Rightarrow b = \sqrt{7}$$

والمحور الأكبر ينطبق على محور الصادات

رأسا القطع الناقص هما : $A_1(0,-2\sqrt{7})$, $A_2(0,2\sqrt{7})$

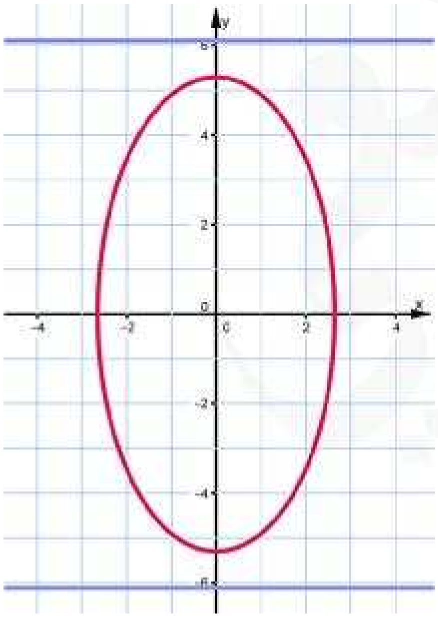
طرفا المحور الأصغر هما : $B_1(-\sqrt{7},0)$, $B_2(\sqrt{7},0)$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c^2 = 28 - 7 = 21$$

ومنه : $c = \sqrt{21}$

بؤرتي القطع الناقص هما : $F_1(0,-\sqrt{21})$, $F_2(0,\sqrt{21})$



معادلتي الدليلين هما : $y = -\frac{a^2}{c}$, $y = \frac{a^2}{c}$

$$y = -\frac{28}{\sqrt{21}} \quad , \quad y = \frac{28}{\sqrt{21}}$$

$$y = -\frac{4\sqrt{21}}{3} \quad , \quad y = \frac{4\sqrt{21}}{3}$$

طول المحور الأكبر هو $2a$:

$$2a = 2 \times 2\sqrt{7} = 4\sqrt{7}$$

طول المحور الأصغر هو $2b$

$$2b = 2 \times \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$$

اليوم : **التاريخ:** / / ٢٠٢٠ م **الصف :**١٢ع

بند (٧-٢)
الحصة الثانية

العنوان : تابع القطع الناقص

الأهداف السلوكية :

- يعرف القطع الناقص.
- يعين بؤرتي القطع الناقص .
- يعين رأسي القطع الناقص .
- يعين النقطتان الطرفيتان للمحور الأصغر للقطع الناقص .
- يرسم القطع الناقص رسماً تقريبياً .

التدريس:

حاول أن تحل صـ ١١٣ (٢) :أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_2(2{,}0)$, $F_1(-2{,}0)$ وطول محوره الأكبر 6 ارسم شكلاً تقريبياً لهذا القطع .

الحل :

$\because$ البؤرتان $F_2(2{,}0)$, $F_1(-2{,}0)$

$\therefore$ مركز القطع نقطة الاصل $(0{,}0)$

والمحور الأكبر ينطبق على محور السينات (كون البؤرتين تقعان على محور السينات)

$\therefore$ معادلة القطع الناقص هي على الصورة : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

من إحداثيات البؤرة نجد : $c=2$

$\because$ طول محوره الأكبر 6

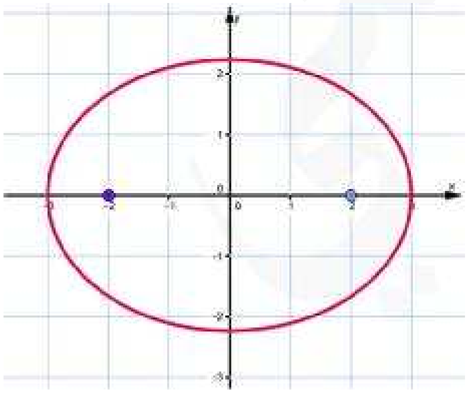
$$\therefore 2a\ (\ 6 \Rightarrow a\ (\ 3$$

$$b^2=a^2-c^2$$

$$b^2\ (\ 9-4\ (\ 5$$

ومنه : $b\ (\ \sqrt{5}$

نعوض في معادلة القطع الناقص: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}\ (\ 1$



حاول أن تحل صـ ١١٤ (٤) :أوجد معادلة قطع ناقص إذا كان محوره الأكبر 16 cm والمسافة بين البؤرتين 10 cm .

الحل :

$\because$ طول محوره الأكبر 16 cm

$\therefore 2a = 16 \Rightarrow a = 8$

$\because$ المسافة بين البؤرتين 10 cm .

$\therefore 2c = 10 \Rightarrow c = 5$

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$b^2 = 64 - 25 = 39$$

ومنه : $b = \sqrt{39}$

نميز حالتين :

❶ إذا كان المحور الأكبر ينطبق على محور السينات

تكون معادلة القطع الناقص هي على الصورة : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^4}{b^4} = 1$

بالتعوض نحصل على المعادلة : $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{39} = 1$

❷ إذا كان المحور الأكبر ينطبق على محور الصادات

تكون معادلة القطع الناقص هي على الصورة : $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

بالتعوض نحصل على المعادلة : $\frac{x^2}{39} + \frac{y^2}{64} = 1$

التطبيق: أسئلة من كتاب التمارين (بند ٧ – ٢) صفحة ٤٣ : اكتب معادلة في الصورة العامة للقطع الناقص الذي فيه :

(٥) : البؤرتان $F_1(-2,0)$, $F_2(2,0)$ ونقطتا طرفي المحور الأصغر $B_1(0,-3)$, $B_2(0,3)$

الحل :

$\because$ البؤرتان $F_1(-2,0)$, $F_2(2,0)$

$\therefore$ مركز القطع نقطة الاصل $(0,0)$

والمحور الأكبر ينطبق على محور السينات (كون البؤرتين تقعان على محور السينات)

$\therefore$ معادلة القطع الناقص هي على الصورة : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

من إحداثيات البؤرة نجد : $c = 2$

من إحداثيات طرفي المحور الأصغر نجد : $b = 3$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = 9 + 4 = 13$$

ومنه : $a = \sqrt{13}$

نعوض في معادلة القطع الناقص: $\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$

(٧) : نقطتا طرفي المحور الأكبر $A_2(0,5)$, $A_1(0,-5)$ طول المحور الأصغر 4 .

الحل :

∵ نقطتا طرفي المحور الأكبر $A_2(0,5)$, $A_1(0,-5)$

∴ مركز القطع نقطة الاصل $(0,0)$

والمحور الأكبر ينطبق على محور الصادات

∴ معادلة القطع الناقص هي على الصورة : $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

من إحداثيات طرفي المحور الأكبر نجد : $a = 5$

∵ طول المحور الأصغر 4

$$\therefore 2b = 4 \Rightarrow b = 2$$

نعوض في معادلة القطع الناقص:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$$

(٨) : نقطتا طرفي المحور الأصغر $B_2(0,4)$, $B_1(0,-4)$ طول المحور الأكبر 10 .

الحل :

∵ نقطتا طرفي المحور الأصغر $B_2(0,4)$, $B_1(0,-4)$

∴ مركز القطع نقطة الاصل $(0,0)$

والمحور الأكبر ينطبق على محور السينات

∴ معادلة القطع الناقص هي على الصورة : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

من إحداثيات طرفي المحور الأصغر نجد : $b = 4$

∵ طول المحور الأكبر 10

$$\therefore 2a = 10 \Rightarrow a = 5$$

نعوض في معادلة القطع الناقص:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

اليوم : **التاريخ:** / / ٢٠٢٠ م **الصف :**١٢ع

بند (٧-٣)
الحصة الأولى

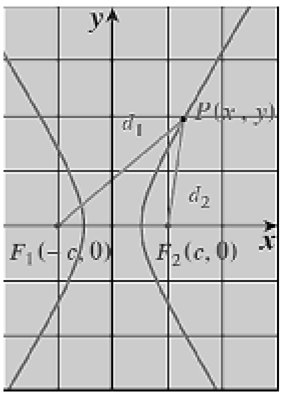
العنوان : القطع الزائد

الأهداف السلوكية :

- يعرف القطع الزائد.
- يعين بؤرتي القطع الزائد .
- يعين رأسي القطع الزائد .
- يعين النقطتان الطرفيتان للمحور الأصغر للقطع الزائد .
- يرسم القطع الزائد رسماً تقريبياً .

التدريس:

تعريف القطع الزائد : هو مجموعة كل النقاط في المستوى التي تكون القيمة المطلقة للفرق بين بعدي كل نقطة منها عن نقطتين ثابتتين في المستوى ثابتاً .



(للقطع الزائد فرعين)

- نسمي النقطتين الثابتتين بـ بؤرتي القطع الزائد

ويرمز لهما بـ F_1 , F_2 .

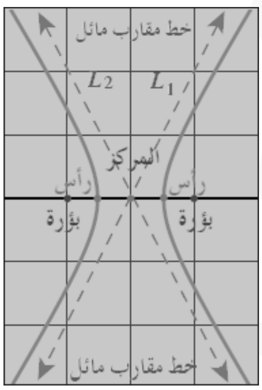
البعد بينهما $= 2c$

- d_1 , d_2 هما البعدان اللذان فرقهما بالقيمة المطلقة ثابت

سوف نرمز لهذا البعد الثابت بـ : $2a$

أي : $|d_1 - d_2| = 2a$

- رأسي القطع الزائد A_1 , A_2 : وهما نقطتي تقاطع القطع مع المستقيم المارة بالبؤرتين .



- المحور القاطع للقطع الزائد (المحور القاطع) :

هو القطعة المستقيمة المارة بالرأسين .

وطرفاها على القطع .

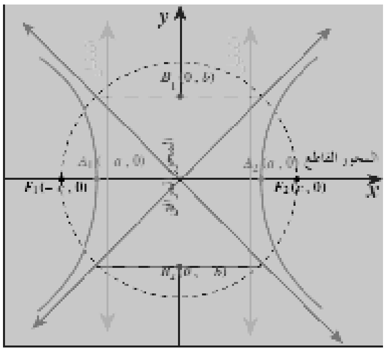
طول المحور القاطع هو $2a$

أي : $A_1 A_2 = 2a$

- مركز القطع الزائد : هو منتصف المسافة بين البؤرتين .

كذلك هو منتصف المسافة بين الرأسين

- L_1 , L_2 هما الخطين المقاربين المائلين للقطع

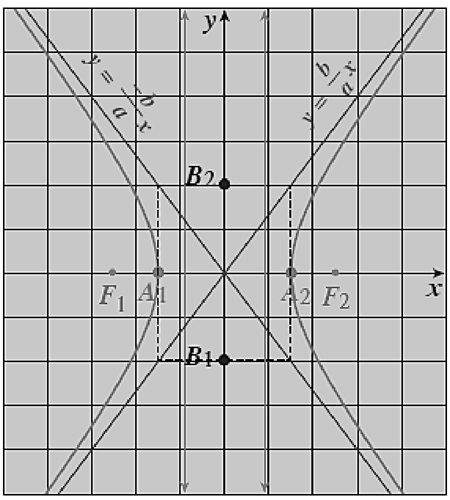
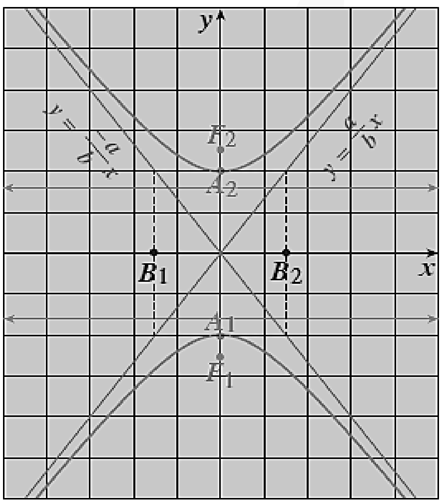


- إذا رسمنا مماسين للقطع الزائد عند نقطتي الرأسين،ودائرة مركزها هو مركز القطع الزائد، وطول نصف قطرها c هو بعد البؤرة عن مركز القطع، فإن الدائرة تقطع كل مماس بنقطتين ، وبرسم مستطيل رؤوسه النقاط الأربع يكون أحد بعديه $2a$ مساوياً لطول المحور القاطع $(A_1\,A_2)$ وبعده الآخر $2b$ مساوياً لطول المحور المرافق $(B_1\,B_2)$ ، وبالتالي نحصل على العلاقة الأساسية :

$$c^2 = a^2 + b^2$$

لاحظ أنّ : $c > a > 0 \quad , \quad c > b > 0$

معادلة القطع الزائد : سوف تقتصر دراستنا على القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل $(0,0)$

الصورة العامة	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	$\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$
المحور القاطع	ينطبق على محور السينات	ينطبق على محور الصادات
طرفا المحور القاطع (الرأسان)	$A_1(-a,0)$ $A_2(a,0)$	$A_1(0,-a)$ $A_2(0,a)$
طرفا المحور المرافق	$B_1(0,-b)$ $B_2(0,b)$	$B_1(-b,0)$ $B_2(b,0)$
البؤرتان	$F_1(-c,0)$ $F_2(c,0)$	$F_1(0,-c)$ $F_2(0,c)$
معادلتي الدليلين	$x = \dfrac{a^2}{c} \;,\; x = -\dfrac{a^2}{c}$	$y = \dfrac{a^2}{c} \;,\; y = -\dfrac{a^2}{c}$
معادلتي الخطين المقاربين	$y = \dfrac{b}{a}x \;,\; y = -\dfrac{b}{a}x$	$y = \dfrac{a}{b}x \;,\; y = -\dfrac{a}{b}x$
رسم القطع		

ملاحظات :

١. دوماً a^2 يكون في مقام المتغير الموجب .

٢. المحور القاطع ينطبق على المحور الدال على المتغير الموجب .

٣. في معادلتي الخطين المقاربين دوماً يكون المقام هو الوسيط الموجود تحت x^2 في معادلة القطع .

٤. لتعيين معادلة القطع الزائد نحن بحاجة لتعيين أربع أشياء هي :

المركز ، المحور القاطع ، قيمة a ، قيمة b

- مركز القطع يقع في منتصف المسافة بين البؤرتين أو في منتصف المسافة بين طرفا المحور القاطع أو في منتصف المسافة بين طرفا المحور المرافق .
- لتعيين المحور القاطع للقطع الزائد (الدال عليه المتغير الموجب) نميز حالتين :

٥. إذا أُعطيت إحدى النقاط A_1, A_2, F_1, F_2 فيكون المحور القاطع هو المتغير الدال على الإحداثي الغير صفري في هذه النقاط .

٦. إذا أُعطيت إحدى النقطتين B_1, B_2 فيكون المحور هو المتغير الدال على الإحداثي الصفري في هذه النقاط .

- لتعيين قيمة a , b نستفيد من العلاقات :

$$A_1A_2 = 2a \quad , \quad B_1B_2 = 2b \quad , \quad F_1F_2 = 2c$$
$$c^2 = a^2 + b^2$$

٥. لرسم مخطط القطع الزائد نعيّن طرفي المحور القاطع (رأسي القطع) ونرسم منهما مستقيمين موازيين للمحور القاطع ، ونعيّن طرفي المحور المرافق ونرسم منهما مستقيمين موازيين لمحور المرافق . تتقاطع هذه المستقيمات في أربع نقاط تشكل رؤوس مستطيل والخطان المقاربان للقطع الزائد ينطبقان على قطري المستطيل ، ونكمل رسم بيان القطع.

حاول أن تحل صـ ١٢٢ (١) : لتكن : $9y^2 - 25x^2 = 225$ معادلة قطع زائد فأوجد :

❶ رأسي القطع الزائد.

❷ البؤرتين .

❸ معادلتي دليلي القطع .

❹ طول كل من المحورين

❺ معادلة كل من الخطين المقاربين ، ثم ارسم شكلاً تقريبياً للقطع .

الحل :

❶ معادلة القطع الزائد هي : $\frac{9y^2}{225} - \frac{25x^2}{225} = \frac{225}{225}$

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{9} = 1$$

معادلة القطع الزائد هي على الصورة : $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

من معادلة القطع نجد :

$$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$$
$$b^2 \left(\; 9 \Rightarrow b \left(\; 3 \right.\right.$$

والمحور القاطع ينطبق على محور الصادات

رأسا القطع الزائد هما : $A_1(0,-5)$, $A_2(0,5)$

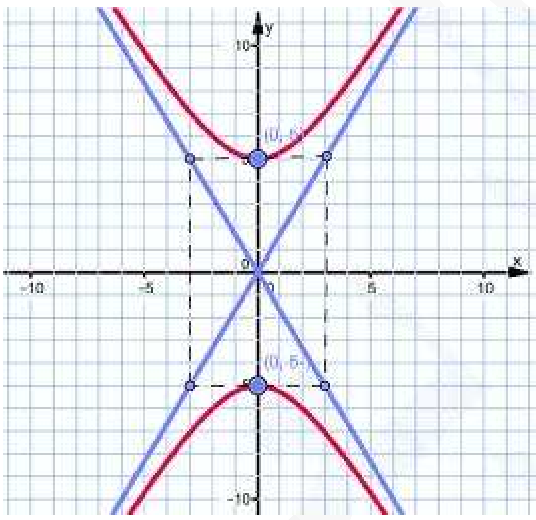
❷ $$c^2 \left(\; a^2 + b^2 \right.$$
$$c^2 = 25 + 9 = 34$$

ومنه : $c = \sqrt{34}$

بؤرتي القطع الزائد هما : $F_1\left(0,-\sqrt{34}\right)$, $F_2\left(0,\sqrt{34}\right)$

❸ معادلتي الدليلين هما : $y = -\frac{a^2}{c}$, $y = \frac{a^2}{c}$

$$y = -\frac{25}{\sqrt{34}} \quad , \quad y = \frac{25}{\sqrt{34}}$$



❹ طول المحور القاطع هو $2a$:

$$2a = 2 \times 5 = 10$$

طول المحور المرافق هو $x\mathrm{b}$

$$x\mathrm{b} = x \times 3 = 6$$

❺ معادلة كل من الخطين المقاربين هما :

$$y = \frac{a}{b}x \quad , \quad y = -\frac{a}{b}x$$
$$y = \frac{5}{3}x \quad , \quad y = -\frac{5}{3}x$$

حاول أن تحل صـ ١٢٢ (٢) :أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $F_2(4,0)$, $F_1(-4,0)$ ورأساه $A_2(2,0)$ x $A_1(-2,0)$ ثمَّ أوجد معادلتي الخطين المقاربين وارسم شكلا ً تقريبيا ً لهذا القطع .

الحل :

∵ البؤرتان $F_2(4,0)$, $F_1(-4,0)$

∴ مركز القطع نقطة الاصل $(0,0)$

والمحور القاطع ينطبق على محور السينات (كون البؤرتين تقعان على محور السينات)

∴ معادلة القطع الزائد هي على الصورة : $\frac{x^2}{a^4} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

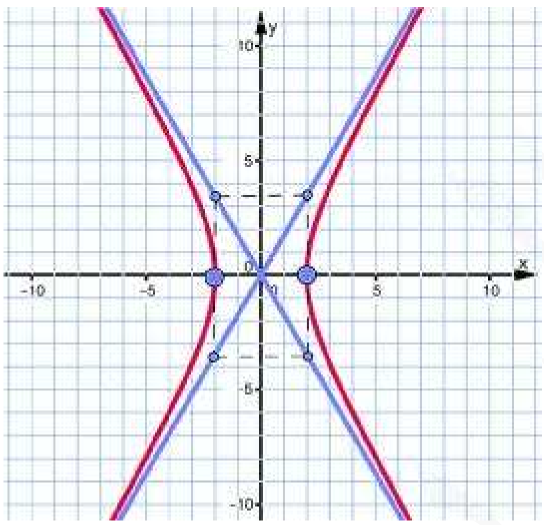
من إحداثيات البؤرة نجد : $c = 4$

من إحداثيات الرأس نجد : $a = 2$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$b^2 = 16 - 4 = 12$$

ومنه : $b = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$



نعوض في معادلة القطع الزائد: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

معادلة كل من الخطين المقاربين هما :

$$y = \frac{b}{a}x \quad , \quad y = -\frac{b}{a}x$$

$$y = \frac{2\sqrt{3}}{2}x \quad , \quad y = -\frac{2\sqrt{3}}{2}x$$

$$y = \sqrt{3}\,x \quad , \quad y = -\sqrt{3}\,x$$

التطبيق: أسئلة من كتاب التمارين (بند ٧ – ٣) صـ ٤٦ : لكل معادلة من معادلات القطع الزائد التالية أوجد : رأسي القطع - البؤرتين - معادلتي الخطين المقاربين - معادلتي دليلي القطع - طول كل من المحورين، ثم ارسم شكلاً تقريبياً لكل قطع.

(١) : $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{16} = 1$

الحل :

معادلة القطع الزائد هي على الصورة : $\frac{y^4}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

من معادلة القطع نجد :

$$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$$

$$\mathrm{b}^2 = 16 \Rightarrow \mathrm{b} = 4$$

والمحور القاطع ينطبق على محور الصادات

رأسا القطع الزائد هما : $\mathrm{A}_1(0,-5)\ \ x\,\mathrm{A}_2(0,5)$

$$\mathrm{c}^2 = a^2 + \mathrm{b}^2$$

$$\mathrm{c}^2 = 25 + 16 = 41$$

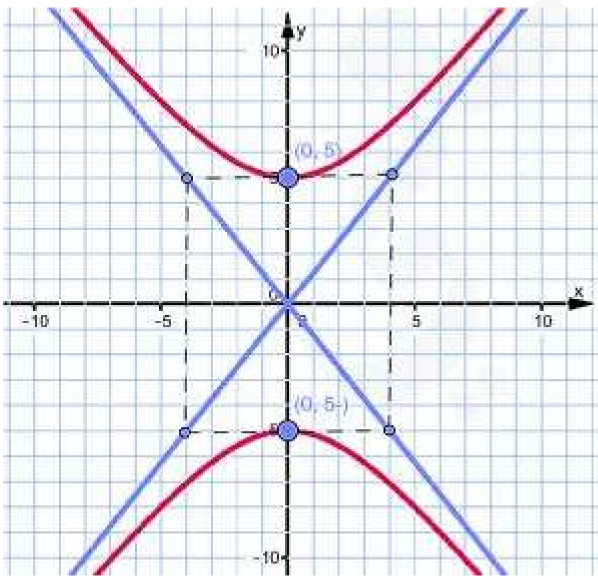
ومنه : $\mathrm{c} = \sqrt{41}$

بؤرتي القطع الزائد هما : $\mathrm{F}_1\left(0,-\sqrt{41}\right)\ ,\ \mathrm{F}_2(0,\sqrt{41})$

معادلة كل من الخطين المقاربين هما :

$$y = \frac{a}{b}x \quad , \quad y = -\frac{a}{b}x$$

$$y = \frac{5}{4}x \quad , \quad y = -\frac{5}{4}x$$



معادلتي الدليلين هما :

$$y = -\frac{a^2}{c} \quad , \quad y = \frac{a^2}{c}$$

$$y = -\frac{25}{\sqrt{41}} \quad , \quad y = \frac{25}{\sqrt{41}}$$

طول المحور القاطع هو $2a$:

$$2a = 2 \times 5 = 10$$

طول المحور المرافق هو $2b$

$$2b = 2 \times 4 = 8$$

$24x^2 - 12y^2 - 192 = 0$: (٢)

الحل :

$$24x^2 - 12y^2 = 192$$

$$\frac{24x^2}{192} - \frac{12y^2}{192} = \frac{192}{192}$$

$$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{16} = 1$$

معادلة القطع الزائد هي على الصورة : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

من معادلة القطع نجد :

$$a^2 = 8 \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$$

$$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$$

والمحور القاطع ينطبق على محور السينات

رأسا القطع الزائد هما : $A_1(-2\sqrt{2}, 0)$ x $A_2(2\sqrt{2}, 0)$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 8 + 16 = 24$$

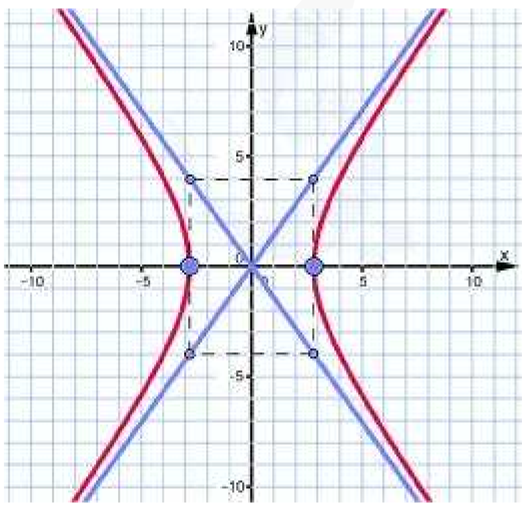
ومنه : $c = \sqrt{24}$

بؤرتي القطع الزائد هما : $F_1(-\sqrt{24}, 0)$, $F_2(\sqrt{24}, 0)$

معادلة كل من الخطين المقاربين هما :

$$y = \frac{b}{a}x \quad , \quad y = -\frac{b}{a}x$$

$$y = \frac{4}{2\sqrt{2}}x \quad , \quad y = -\frac{4}{2\sqrt{2}}x$$



معادلتي الدليلين هما :

$$x = -\frac{a^2}{c} \quad , \quad x = \frac{a^4}{c}$$

$$x = -\frac{25}{\sqrt{41}} \quad , \quad x = \frac{25}{\sqrt{41}}$$

طول المحور القاطع هو $2a$:

$$2a = 2 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

طول المحور المرافق هو $x\text{b}$

$$x\text{b} = x \times 4 = 8$$

اليوم : **التاريخ:** / / ٢٠٢٠ م **الصف :١٢ع**

بند (٧-٣)
الحصة الثانية

العنوان : تابع القطع الزائد

الأهداف السلوكية :

- يعرف القطع الزائد.
- يعين بؤرتي القطع الزائد .
- يعين رأسي القطع الزائد .
- يعين النقطتان الطرفيتان للمحور الأصغر للقطع الزائد .
- يرسم القطع الزائد رسماً تقريبياً .

التدريس:

حاول أن تحل صـ ١٢٣ (٣) : أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0,0)$ وإحدى البؤرتين $F_1(\sqrt{41},0)$ ومعادلة إحدى خطيه المقاربين $y=\frac{4}{5}x$.

الحل :

∵ مركز القطع نقطة الاصل $(0,0)$، إحدى البؤرتين $F_1(\sqrt{41},0)$

∴ المحور القاطع ينطبق على محور السينات (كون البؤرة تقع على محور السينات)

∴ معادلة القطع الزائد هي على الصورة : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

من إحداثيات البؤرة نجد : $c=\sqrt{41}$

من معادلة الخط المقارب $y=\frac{4}{5}x$ نجد : $\frac{b}{a}=\frac{4}{5}$

$$b=\frac{4a}{5}$$
$$c^2=a^2+b^2$$
$$41=a^2+(\frac{4a}{5})^2$$
$$41=a^2+\frac{16a^2}{25}$$
$$1025=25a^2+16a^2$$
$$1025=41a^2$$
$$\frac{41a^2}{41}=\frac{1025}{41}$$
$$a^2=25$$

ومنه : $a=\sqrt{25}=5$

ومنه : $b=\frac{4a}{5}=\frac{4(5)}{5}=4$

نعوض في معادلة القطع الزائد: $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$

حاول أن تحل صـ ١٢٤ (٤) : أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0,0)$ وإحدى رأسيه $\left(0,\frac{5}{4}\right)$ و يمر بالنقطة $\left(-\sqrt{3},-\frac{5}{2}\right)$.

الحل :

$\because$ مركز القطع نقطة الاصل $(0,0)$، إحدى رأسيه $\left(0,\frac{5}{4}\right)$

$\therefore$ المحور القاطع ينطبق على محور الصادات (كون الرأس يقع على محور الصادات)

$\therefore$ معادلة القطع الزائد هي على الصورة : $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

من إحداثيات الرأس نجد : $a=\frac{5}{4}$

$\therefore$ معادلة القطع الزائد هي: $\frac{y^2}{(\frac{5}{2})^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

$$\frac{y^2}{\frac{25}{16}}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

$\because$ القطع يمر بالنقطة $\left(-\sqrt{3},-\frac{5}{2}\right)$ $\therefore$ تحقق المعادلة

نعوض في معادلة القطع عن x بـ $-\sqrt{3}$ و عن y بـ $-\frac{5}{2}$:

$$\frac{(-\frac{5}{2})^2}{\frac{25}{16}}-\frac{(-\sqrt{3})^2}{b^2}=1$$

$$\frac{\frac{25}{2}}{\frac{25}{16}}-\frac{3}{b^2}=1$$

$$4-\frac{3}{b^2}=1$$

$$4-1=\frac{3}{b^2}$$

$$\frac{3}{b^2}=3$$

$$b^2=1$$

$\therefore$ معادلة القطع الزائد هي: $\frac{y^2}{\frac{25}{16}}-\frac{x^2}{1}=1$

$$\frac{16y^2}{25}-x^2=1$$

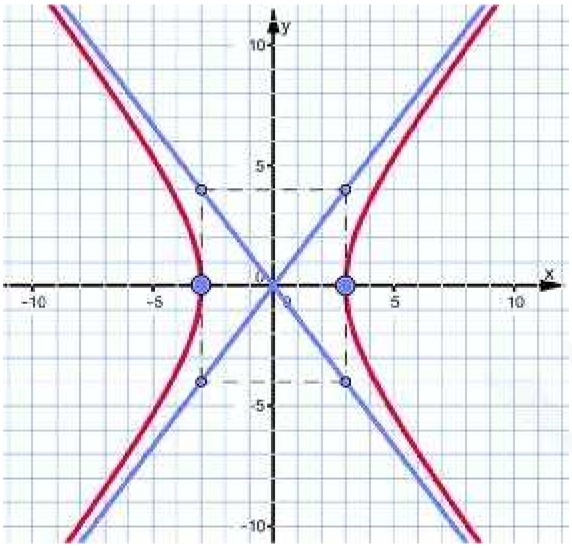
التطبيق: أسئلة من كتاب التمارين (بند ٧ – ٣) صفحة ٤٦ : (٣) : أوجد معادلة القطع الزائد الذي إحدى بؤرتيه $F_1(-5,0)$ ورأساه $A_1(-3,0)\ x\ A_2(3,0)$ ثمَّ أوجد معادلتي الخطين المقاربين وارسم شكلاً تقريبياً له .

الحل :

∵ الرأسان $A_1(-3,0)\ x\ A_2(3,0)$

∴ مركز القطع نقطة الاصل $(0,0)$

والمحور القاطع ينطبق على محور السينات (كون الرأسان تقعان على محور السينات)



∴ معادلة القطع الزائد هي على الصورة : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

من إحداثيات البؤرة نجد : $c = 5$

من إحداثيات الرأس نجد : $a = 3$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$b^2 = 25 - 9 \Big(\ 16$$

ومنه : $b \Big(\ \sqrt{16} \Big(\ 4$

نعوض في معادلة القطع الزائد: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} \Big(\ 1$

معادلة كل من الخطين المقاربين هما :

$$y \Big(\ \frac{b}{a}x \ , \ y \Big(\ -\frac{b}{a}x$$

$$y \Big(\ \frac{4}{3}x \ , \ y \Big(\ -\frac{4}{3}x$$

(٤) : أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0,0)$ وإحدى البؤرتين $F_1\left(0,-\sqrt{5}\right)$ ومعادلة إحدى خطيه المقاربين $y = 2x$.

الحل :

∵ مركز القطع نقطة الاصل $(0,0)$، إحدى البؤرتين $F_1\left(0,-\sqrt{5}\right)$

∴ المحور القاطع ينطبق على محور الصادات (كون البؤرتين تقعان على محور الصادات)

∴ معادلة القطع الزائد هي على الصورة : $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^4}{b^4} = 1$

من إحداثيات البؤرة نجد : $c = \sqrt{5}$

من معادلة الخط المقارب $y = 2x$ نجد : $\frac{a}{b} = 2$

$$a = 2b$$
$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$5 = (2b)^2 + b^2$$
$$5 = 4b^2 + b^2$$
$$5b^2 = 5$$
$$b^2 = 1$$
ومنه : $b = 1$

ومنه : $a = 2(1) = 2$

نعوض في معادلة القطع الزائد: $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{1} = 1$

(٥) : أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0,0)$ وإحدى رأسيه $A_2\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ و يمر بالنقطة $(1,1)$.

الحل :

$\because$ مركز القطع نقطة الاصل $(0,0)$، إحدى رأسيه $A_2\left(\frac{2}{3}, 0\right)$

$\therefore$ المحور القاطع ينطبق على محور السينات (كون الرأس يقع على محور السينات)

$\therefore$ معادلة القطع الزائد هي على الصورة : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

من إحداثيات الرأس نجد : $a = \frac{2}{3}$

$\therefore$ معادلة القطع الزائد هي: $\frac{x^2}{(\frac{4}{3})^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\frac{x^2}{\frac{4}{9}} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$\because$ القطع يمر بالنقطة $(1,1)$ $\therefore$ تحقق المعادلة

نعوض في معادلة القطع عن x بـ 1 و عن y بـ 1 :

$$\frac{1}{\frac{4}{9}} - \frac{1}{b^2} = 1$$
$$\frac{9}{4} - \frac{1}{b^2} = 1$$
$$\frac{9}{4} - 1 = \frac{1}{b^2}$$
$$\frac{1}{b^2} = \frac{5}{4}$$

$$b^2 = \frac{4}{5}$$

∴ معادلة القطع الزائد هي: $\frac{x^2}{\frac{4}{9}} - \frac{y^2}{\frac{4}{5}} = 1$

$$\frac{9x^2}{4} - \frac{5y^2}{4} = 1$$

$$9x^2 - 5y^2 = 4$$

(٦) : أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0,0)$ و يمر بالنقطتين $A(2,1), B(4,3)$ ومحوره الأساسي جزء من محور السينات .

الحل :

∵ مركز القطع نقطة الاصل $(0,0)$، ومحوره الأساسي جزء من محور السينات

∴ معادلة القطع الزائد هي على الصورة : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

∵ القطع يمر بالنقطة $(2,1)$ ∴ تحقق المعادلة

نعوض في معادلة القطع عن x بـ 2 و عن y بـ 1 :

$$b^2(2)^2 - a^2(1)^2 = a^2b^2$$

$$4b^2 - a^2 = a^2b^2 \qquad \text{........ ①}$$

∵ القطع يمر بالنقطة $(4,3)$ ∴ تحقق المعادلة

نعوض في معادلة القطع عن x بـ 4 و عن y بـ 3 :

$$b^2(4)^2 - a^2(3)^2 = a^2b^2$$

$$16b^2 - 9a^2 = a^2b^2 \qquad \text{........ ②}$$

من ① و ② نجد : $16b^2 - 9a^2 = 4b^2 - a^2$

$$16b^2 - 4b^2 = 9a^2 - a^2$$

$$12b^2 = 8a^2$$

$$a^2 = \frac{12b^2}{8}$$

$$a^2 = \frac{3b^2}{2} \qquad \text{........ ③}$$

نعوض في ① نجد : $4b^2 - \frac{3b^2}{2} = (\frac{3b^2}{2})b^2$

$$\frac{5b^2}{2} = \frac{3b^4}{2}$$

$5b^2 = 3b^4$ نقسم الطرفين على b^2

$$5 = 3b^2$$

$$b^2 = \frac{5}{3}$$

نعوض في ③ نجد : $a^2 = \frac{3(\frac{5}{3})}{2} = \frac{5}{2}$

∴ معادلة القطع الزائد هي: $\frac{x^2}{\frac{5}{2}} - \frac{y^4}{\frac{5}{3}} = 1$

$$\frac{2x^2}{5} - \frac{3y^2}{5} = 1$$

$$2x^2 - 3y^2 = 5$$

اليوم : **التاريخ:** / / ٢٠٢٠ م **الصف :١٢ع**

بند (٧-٤)
الحصة الأولى

العنوان : الاختلاف المركزي

الأهداف السلوكية :

- يعرف الاختلاف المركزي.
- يعين بؤرتي الاختلاف المركزي .
- يعين رأسي الاختلاف المركزي .
- يعين النقطتان الطرفيتان للمحور الأصغر للقطع الزائد .
- يرسم الاختلاف المركزي رسماً تقريبياً .

التدريس:

القطع المخروطي : هو مجموعة كل النقاط في المستوى الإحداثي حيث تكون نسبة بعد كل منها من نقطة ثابتة (البؤرة) إلى بعدها عن مستقيم ثابت(الدليل) في نفس المستوى تساوي مقداراً ثابتاً . هذا المقدار الثابت يسمى الاختلاف المركزي للقطع المخروطي ويرمز إليه بالرمز e

$\mathrm{e} = \frac{MF}{MH} = \frac{c}{a}$ نميز ثلاث حالات :

- إذا كانت $\mathrm{e} = 1$ يكون القطع المخروطي قطعاً مكافئاً .
- إذا كانت $\mathrm{e} < 1$ يكون القطع المخروطي قطعاً ناقصاً .
- إذا كانت $\mathrm{e} > 1$ يكون القطع المخروطي قطعاً زائداً .

حاول أن تحل صـ ١٢٩ (١) : حدد نوع القطع في كل مما يلي ثم أوجد معادلته

❶ اختلافه المركزي ($\mathrm{e} = 1$) وبؤرته $F(-1,0)$.

❷ اختلافه المركزي ($\mathrm{e} = \frac{4}{5}$) وإحدى بؤرتيه $F(-4\sqrt{2}, 0)$.

❸ اختلافه المركزي ($\mathrm{e} = \sqrt{3}$) ومعادلة أحد دليليه $x = \frac{1}{3}$.

الحل :

❶ الرأس نقطة الأصل $(0,0)$

$\because \mathrm{e} = 1$

$\therefore$ القطع هو قطع مطافئ

$\because$ البؤرة $\mathrm{F}(-1,0)$ فإن محور القطع المكافئ هو ($x - axis$)

$$p = -1$$

∴ معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $y^2 = 4px$

$$y^2 = 4(-1)x$$

$$y^2 = -4x$$

❷ ∵ $e = \frac{4}{5}, \frac{4}{5} < 1$

∴ القطع هو قطع ناقص

مركز القطع نقطة الاصل $(0,0)$

∵ إحدى بؤرتيه $F(-4\sqrt{2}, 0)$

∴ المحور الأكبر ينطبق على محور السينات (كون البؤرة تقع على محور السينات)

∴ معادلة القطع الناقص هي على الصورة : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^4} = 1$

من إحداثيات البؤرة نجد : $c = 4\sqrt{2}$

∵ $e = \frac{4}{5}$

$$\therefore \frac{c}{a} = \frac{4}{5} \Rightarrow a = \frac{5c}{4} = \frac{5(4\sqrt{2})}{4} = 5\sqrt{2}$$

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$b^2 = (5\sqrt{2})^2 - \left(4\sqrt{2}\right)^2 = 50 - 32 = 18$$

ومنه : $b = \sqrt{18}$

نعوض في معادلة القطع الناقص: $\frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{18} = 1$

❸ ∵ $e = \sqrt{3}, \sqrt{3} > 1$

∴ القطع هو قطع زائد

مركز القطع نقطة الاصل $(0,0)$

∵ معادلة أحد دليليه $x = \frac{1}{3}$

∴ المحور القاطع ينطبق على محور السينات (كون الدليل بدلالة x)

∴ معادلة القطع الزائد هي على الصورة : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

من معادلة الدليل $x = \frac{1}{3}$ نجد : $\frac{a^2}{c} = \frac{1}{3}$

$$c = 3a^2 \quad ....①$$

$\because \ e = \sqrt{3}$

$\therefore \frac{c}{a} = \sqrt{3}$ ....②

نعوض ① في ② نجد :

$$\frac{3a^2}{a} = \sqrt{3}$$

$$3a = \sqrt{3} \quad a = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

نعوض في ① نجد :

$$c = 3(\frac{\sqrt{3}}{3})^2 = 3\left(\frac{3}{9}\right) = 1$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$b^2 = (1)^2 - (\frac{\sqrt{3}}{3})^2$$

$$b^2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

نعوض في معادلة القطع الزائد: $\frac{x^2}{\frac{1}{3}} - \frac{y^2}{\frac{2}{3}} = 1$

$$3x^2 - \frac{3y^2}{2} = 1$$

التطبيق: أسئلة من كتاب التمارين (بند ٧ – ٤) صـ ٤٩ : حدّد نوع القطع في كل ممّا يلي، ثم أوجد معادلته.

(١) : اختلافه المركزي ($e = \frac{3}{2}$) وإحدى بؤرتيه $F(0,3)$.

الحل :

الرأس نقطة الأصل $(0,0)$

$\because \ e = \frac{3}{2}, \frac{3}{2} > 1$

$\therefore$ القطع هو قطع زائد

$\because \ e = \frac{3}{2}$

$\therefore \frac{c}{a} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{2c}{3}$ ....①

$\because$ البؤرة $F(0,3)$

$\therefore$ المحور القاطع ينطبق على محور الصادات (كون البؤرة تقع على محور الصادات)

$\therefore$ معادلة القطع الزائد هي على الصورة : $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

من إحداثيات البؤرة نجد : $c = 3$

نعوض في ① نجد :

$$a = \frac{2(3)}{3} = 2$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$b^2 \left(\; 9 - 4 \left(\; 5\right.\right.$$

ومنه : $b \left(\; \sqrt{5}\right.$

نعوض في معادلة القطع الزائد: $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} \left(\; 1\right.$

(٢) : اختلافه المركزي ($\mathrm{e} \left(\; \frac{\sqrt{7}}{4}\right.$) وإحدى بؤرتيه $\mathrm{F}(0, -\sqrt{7})$.

الحل :

$\because \; \mathrm{e} = \frac{\sqrt{7}}{4} , \frac{\sqrt{7}}{4} < 1$

$\therefore$ القطع هو قطع ناقص

مركز القطع نقطة الاصل $(0,0)$

$\because$ إحدى بؤرتيه $\mathrm{F}(0, -\sqrt{7}) \; \therefore$

والمحور الأكبر ينطبق على محور الصادات (كون البؤرة تقع على محور الصادات)

$\therefore$ معادلة القطع الناقص هي على الصورة : $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$

من إحداثيات البؤرة نجد : $c = \sqrt{7}$

$$\because \; \mathrm{e} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\therefore \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4} \;\; \Rightarrow a = \frac{4c}{\sqrt{7}} = \frac{4(\sqrt{7})}{\sqrt{7}} = 4$$

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$b^2 = (4)^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2 = 16 - 7 = 9$$

ومنه : $b = \sqrt{9} = 3$

نعوض في معادلة القطع الناقص: $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{9} = 1$

(٣) : اختلافه المركزي ($e = \frac{5}{3}$) وإحدى رأسيه $A(-4,0)$.

الحل :

$\because \quad e = \frac{5}{3} , \frac{5}{3} > 1$

$\therefore$ القطع هو قطع زائد

مركز القطع نقطة الاصل $(0,0)$

$\because$ إحدى رأسيه $Ap-4,0)$

$\therefore$ المحور القاطع ينطبق على محور السينات (كون الرأس يقع على محورالسينات)

$\therefore$ معادلة القطع الزائد هي على الصورة : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

من إحداثيات الرأس نجد : $a = 4$

$\because \quad e = \frac{5}{3}$

$$\therefore \frac{c}{a} = \frac{5}{3} \quad \Rightarrow c = \frac{5a}{3} = \frac{5(4)}{3} = \frac{20}{3}$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$b^2 = (\frac{20}{3})^2 - (4)^2$$

$$b^2 = \frac{400}{9} - 16 = \frac{256}{9}$$

نعوض في معادلة القطع الزائد: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{\frac{256}{9}} = 1$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{9y^2}{256} = 1$$

(٤) : اختلافه المركزي ($e = \frac{3}{4}$) ومعادلة أحد دليليه $x = 8$.

الحل :

$\because \quad e = \frac{3}{4} , \frac{3}{4} < 1$

$\therefore$ القطع هو قطع ناقص

مركز القطع نقطة الاصل $(0,0)$

$\because$ معادلة أحد دليليه $x = 8$

$\therefore$ المحور الأكبر ينطبق على محور السينات (كون الدليل بدلالة x)

∴ معادلة القطع الناقص هي على الصورة : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

من معادلة الدليل $x=8$ نجد : $\frac{a^2}{c}=8$

$$c=\frac{a^2}{8} \quad \text{.........①}$$

$\because e=\frac{3}{4}$

$$\therefore \frac{c}{a}=\frac{3}{4}$$

$$3a=4c \quad \text{.........②}$$

نعوض ① في ② نجد :

$$3a=4\left(\frac{a^2}{8}\right)$$

$$3a=\frac{a^2}{2}$$

$6a=a^2$ نقسم على a كون $(a\neq 0)$ نجد :

$$a=6$$

نعوض في① نجد :

$$c=\frac{36}{8}=\frac{9}{2}$$

$$b^2=a^2-c^2$$

$$b^2=(6)^2-\left(\frac{9}{2}\right)^2=36-\frac{81}{4}=\frac{63}{4}$$

نعوض في معادلة القطع الناقص: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{\frac{63}{4}}=1$

$$\frac{x^2}{36}+\frac{4y^2}{63}=1$$

اليوم : **التاريخ:** / / ٢٠٢٠ م **الصف :١٢ع**

بند (٤-٧)

الحصة الثانية

العنوان : تابع الاختلاف المركزي

الأهداف السلوكية :

- يعرف الاختلاف المركزي.
- يعين بؤرتي الاختلاف المركزي .
- يعين رأسي الاختلاف المركزي .
- يعين النقطتان الطرفيتان للمحور الأصغر للقطع الزائد .
- يرسم الاختلاف المركزي رسماً تقريبياً .

التدريس:

حاول أن تحل صـ ١٣٠ (٢) : أوجد الاختلاف المركزي لكل قطع مما يلي حيث معادلته :

❶ $x^2 + \frac{y^2}{25} = 1$.

❷ المعادلة : $24y^2 = 600 + 25x^2$.

الحل :

❶ المعادلة هي : $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{25} = 1$

وهي معادلة قطع ناقص المحور الأكبر ينطبق على محور الصادات

معادلة القطع الناقص هي على الصورة : $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

من معادلة القطع نجد :

$$a^2 = 25 \Rightarrow a = \sqrt{25} = 5$$

$$b^2 = 1 \Rightarrow b = \sqrt{1} = 1$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c^2 = 25 - 1 = 24 \Rightarrow c = \sqrt{24}$$

∴ الاختلاف المركزي هو : $e = \frac{c}{a}$

$$e = \frac{\sqrt{24}}{5}$$

❷المعادلة هي : $24y^2 = 600 + 25x^2$

$$24y^2 - 25x^2 = 600$$

$$\frac{24y^2}{600} - \frac{25x^2}{600} = \frac{600}{600}$$

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{24} = 1$$

وهي معادلة قطع زائد محور القاطع ينطبق على محور الصادات

معادلة القطع الناقص هي على الصورة : $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

من معادلة القطع نجد :

$$a^2 = 25 \Rightarrow a = \sqrt{25} = 5$$

$$b^2 = 24 \Rightarrow b = \sqrt{24}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 25 + 24 = 49 \Rightarrow c = \sqrt{49} = 7$$

$\therefore$ الاختلاف المركزي هو : $e = \frac{c}{a}$

$$e = \frac{7}{5}$$

حاول أن تحل صـ ١٣١ (٣) : أوجد طول المحور القاطع للقطع الزائد الذي اختلافه المركزي ($e\ 5\ 2$) وطول محوره المرافق 6 وحدات.

الحل :

$\because$ $e\ 5\ 2$

$$\therefore \frac{c}{a}\ 5\ 2 \Rightarrow c\ 5\ 2a \qquad ....①$$

$\because$ طول محوره المرافق 6 وحدات

$$\therefore 2b\ 5\ 6 \Rightarrow b\ 5\ 3$$

$\because$ القطع زائد

$$c^2\ 5\ a^2 + b^2 \qquad ....②$$

نعوض في① نجد :

$$(2a)^2\ 5\ a^2 + (3)^2$$

$$4a^2\ 5\ a^2 + 9$$

$$3a^2\ 5\ 9$$

$$a^2\ 5\ 3 \Rightarrow a\ 5\ \sqrt{3}$$

$\therefore$ طول المحور القاطع هو: $2a\ 5\ 2\left(\sqrt{3}\right)\ 5\ 2\sqrt{3}$

التطبيق: أسئلة من كتاب التمارين (بند ٧ – ٤) صفحة ٤٩ : أوجد الاختلاف المركزي لكل قطع مما يلي حيث معادلته :

(٥) : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

الحل :

المعادلة هي : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

وهي معادلة قطع ناقص المحور الأكبر ينطبق على محور السينات

معادلة القطع الناقص هي على الصورة : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

من معادلة القطع نجد :

$$a^2 = 9 \ \Rightarrow a = \sqrt{9} = 3$$

$$b^2 = 4 \ \Rightarrow b = \sqrt{4} = 2$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c^2 = 9 - 4 \ 5 \ \ 5 \Rightarrow c \ 5 \ \sqrt{5}$$

∴ الاختلاف المركزي هو : $\mathrm{e} \ 5 \ \frac{c}{a}$

$$\mathrm{e} \ 5 \ \frac{\sqrt{5}}{3}$$

(٦) : $4y^2 - 9x^2 \ 5 \ \ 36$

الحل :

المعادلة هي : $4y^2 - 9x^2 \ 5 \ \ 36$

$$\frac{4y^2}{36} - \frac{9x^2}{36} \ 5 \ \ \frac{36}{36}$$

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} \ 5 \ \ 1$$

وهي معادلة قطع زائد محور القاطع ينطبق على محور الصادات

معادلة القطع الزائد هي على الصورة : $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} \ 5 \ \ 1$

من معادلة القطع نجد :

$$a^2 \ 5 \ \ 9 \ \Rightarrow a \ 5 \ \sqrt{9} \ 5 \ \ 3$$

$$b^2 = 4 \Rightarrow b = \sqrt{4} = 2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 9 + 4 = 13 \Rightarrow c = \sqrt{13}$$

∴ الاختلاف المركزي هو : $\mathrm{e} = \frac{c}{a}$

$$\mathrm{e} = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

أسئلة من كتاب التمارين (بند ٧ – ٤) صـ ٤٩ : أوجد الرأسين والبؤرتين والاختلاف المركزي ومعادلتي الدليلين للقطع الزائد.

(٧) :المعادلة : $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{16} = 1$.

الحل :

المعادلة هي : $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{16} = 1$

وهي معادلة قطع زائد محور القاطع ينطبق على محور السينات

معادلة القطع الزائد هي على الصورة : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

من معادلة القطع نجد :

$$a^2\ 5\ 7 \Rightarrow a\ 5\ \sqrt{7}$$

$$b^2\ 5\ 16 \Rightarrow b\ 5\ \sqrt{16}\ 5\ 4$$

$$c^2\ 5\ a^2 + b^2$$

$$c^2\ 5\ 7 + 16\ 5\ 23 \Rightarrow c\ 5\ \sqrt{23}$$

رأسا القطع الزائد هما : $\mathrm{A}_1\left(-\sqrt{7}, 0\right)\ ,\ \mathrm{A}_2(\sqrt{7}, 0)$

بؤرتي القطع الزائد هما : $\mathrm{F}_1\left(-\sqrt{23}, 0\right)\ ,\ \mathrm{F}_2(\sqrt{23}, 0)$

الاختلاف المركزي هو : $\mathrm{e} = \frac{c}{a}$

$$\mathrm{e} = \frac{\sqrt{23}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{161}}{7}$$

معادلتي الدليلين هما :

$$x = -\frac{a^2}{c} \quad , \quad x = \frac{a^2}{c}$$

$$x = -\frac{7}{\sqrt{23}} \quad , \quad x = \frac{7}{\sqrt{23}}$$

$$x = -\frac{7\sqrt{23}}{23} \quad , \quad x = \frac{7\sqrt{23}}{23}$$

(٨) :المعادلة : $\frac{y^4}{16}-\frac{x^2}{4}=1$.

الحل :

المعادلة هي : $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{4}=1$

وهي معادلة قطع زائد محور القاطع ينطبق على محور الصادات

معادلة القطع الزائد هي على الصورة : $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

من معادلة القطع نجد :

$$a^2=16 \Rightarrow a=\sqrt{16}=4$$

$$b^2=4 \Rightarrow b=\sqrt{4}=2$$

$$c^2=a^2+b^2$$

$$c^2=16+4=20 \Rightarrow c=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

رأسا القطع الزائد هما : $\mathrm{A}_1(0,-4)\ ,\ \mathrm{A}_2(0,4)$

بؤرتي القطع الزائد هما : $\mathrm{F}_1\left(0,-2\sqrt{5}\right)\ ,\ \mathrm{F}_2(0,2\sqrt{5})$

الاختلاف المركزي هو : $\mathrm{e}=\frac{c}{a}$

$$\mathrm{e}=\frac{2\sqrt{5}}{4}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

معادلتي الدليلين هما :

$$y=-\frac{a^2}{c} \quad , \quad y=\frac{a^2}{c}$$

$$y=-\frac{16}{2\sqrt{5}} \quad , \quad y=\frac{16}{2\sqrt{5}}$$

$$y=-\frac{8\sqrt{5}}{5} \quad , \quad y=\frac{8\sqrt{5}}{5}$$