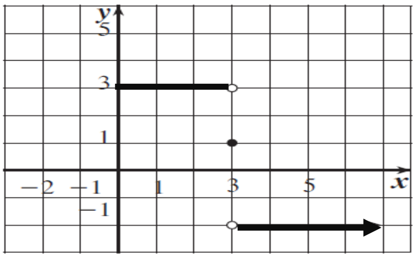
بند (1 – 1) النهايات بنود موضوعية

في التمارين (1—5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\lim_{x \to 3} f(x) = -2$ (في الرسم البياني أدناه) (a) (b)



$$\lim_{y \to 3^+} f(x) = -2$$
$$\lim_{y \to 3^-} f(x) = 3$$

(2) $\lim_{y \to 2} \frac{y^2+5y+6}{y+2} = 5$ (a) (b)

نتحقق من أن نهاية المقام لا تساوي صفر

$$\lim_{y \to 2}(y+2) = 2+2 = 4, 4 \neq 0$$

$$\lim_{y \to 2} \frac{y^2+5y+6}{y+2} = \frac{(2)^2+5(2)+6}{2+2} = 5$$

(3) $\lim_{x \to 0} \frac{5x^3+8x^2}{3x^4-16x^2} = 0$ (a) (b)

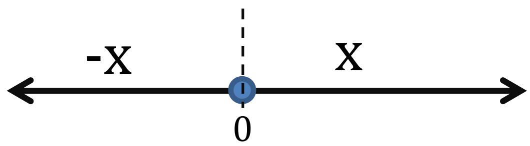
عند التعويض المباشر عن x=0 نحصل على قيمة غير معينة

$$\lim_{y \to 0} \frac{x^2(5x+8)}{x^2(4x^2-16)} = \lim_{y \to 0} \frac{(5x+8)}{(4x^2-16)} = \frac{(5\times 0+8)}{(4\times 0^2-16)} = -\frac{1}{2}$$

(4) $\lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{x^2}-x}{x} = -2$ (a) (b)

عند التعويض المباشر عن x=0 نحصل على قيمة غير معينة

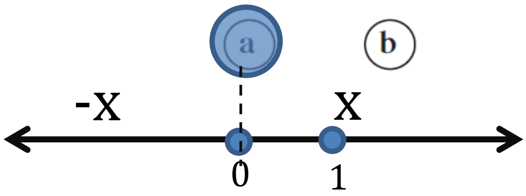
$$\sqrt{x^2} = |x| \quad \because x \to 0^- \quad \therefore |x| = -x$$



لأننا نسعى إلى صفر المطلق من جهة اليسار

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{x^2}-x}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x-x}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-2x}{x} = \lim_{x \to 0^-} -2 = -2$$

(5) $\lim\limits_{x\to 1^+} (2x - |x| + 2) = 3$



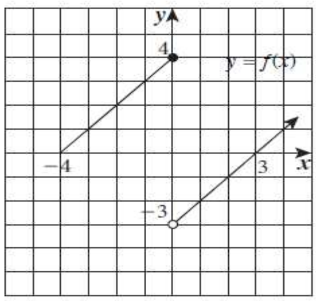
$\because x \to 1^+ \qquad \therefore |x| = x$

لأن 1 يقع على يمين صفر المطلق

$$\lim_{x\to 1^+}(2x - x + 2) = \lim_{x\to 1^+}(x+2) = 1+2 = 3$$

في التمارين (6—14)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) الشكل المقابل هو بيان دالة f.



العبارة الصحيحة في ما يلي هي:

(a) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 4$ (b) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -3$

(c) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 4$ (d) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -3$

---

(7) $\lim\limits_{x\to -2}(x^3 + 3x^2 - 2x - 17) =$

(a) 17 (b) −17 (c) 9 (d) −9

$$(-2)^3 + 3(-2)^2 - 2(-2) - 17 = -9$$

---

(8) $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-1}=$

ⓐ 1 ⓑ 0 ⓒ $\frac{1}{2}$ ⓓ غير موجودة

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{(x+1)}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

(9) $\lim_{x\to2}\frac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+2}=$

ⓐ 1 ⓑ 0 ⓒ $\frac{1}{2}$ ⓓ $\frac{1}{3}$

عند التعويض المباشر عن x=0 نحصل على قيمة غير معينة

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x-1)}{(2x-1)(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{(x-1)}{(2x-1)}=\frac{2-1}{2\times2-1}=\frac{1}{3}$$

(10) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=$

ⓐ -1 ⓑ 1 ⓒ $\frac{1}{2}$ ⓓ 0

عند التعويض المباشر عن x=0 نحصل على قيمة غير معينة

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=$$

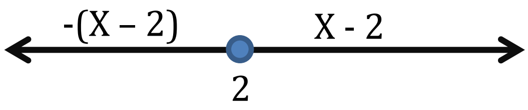
$$\frac{\lim_{x\to1}1}{\lim_{x\to1}(\sqrt{x}+1)}=\frac{\lim_{x\to1}1}{\lim_{x\to1}\sqrt{x}+\lim_{x\to1}1}=\frac{\lim_{x\to1}1}{\sqrt{\lim_{x\to1}x}+\lim_{x\to1}1}=\frac{1}{\sqrt{1}+1}=\frac{1}{2}$$

ملاحظة في الأسئلة المقالية يجب التحقق من أن
نهاية ما تحت الجذر اكبر من الصفر
ونهاية المقام لا تساوي الصفر

(11) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{|x-2|}{x^2-4} =$

ⓐ $\frac{1}{2}$ ⓑ $-\frac{1}{2}$ ⓒ $\frac{1}{4}$ ⓓ $-\frac{1}{4}$

$$\because x \to 2^+ \Rightarrow \therefore |x-2| = x-2$$



$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{(x+2)} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

(12) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{2+x} - \frac{1}{2}}{x} =$

ⓐ $-\frac{1}{2}$ ⓑ $\frac{1}{2}$ ⓒ $\frac{1}{4}$ ⓓ $-\frac{1}{4}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{2+x} - \frac{1}{2} \div x = \lim_{x \to 0} \frac{2-(2+x)}{2(2+x)} \div x = \lim_{x \to 0} \frac{-x}{2(2+x)} \div x =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{-x}{2(2+x)} \times \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{-1}{2(2+x)} = \lim_{x \to 0} \frac{-1}{4+2x} = \frac{-1}{4+2\times 0} = -\frac{1}{4}$$

(13) $\lim\limits_{x \to -8} \dfrac{x+8}{\sqrt[3]{x}+2} =$

ⓐ 12 ⓑ -12 ⓒ 4 ⓓ -4

$$\lim_{x \to -8} \frac{(\sqrt[3]{x}+2)(\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x}+4)}{\sqrt[3]{x}+2} = \lim_{x \to -8}(\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x}+4) =$$

$$\lim_{x \to -8} \sqrt[3]{x^2} - 2\lim_{x \to -8} \sqrt[3]{x} + \lim_{x \to -8} 4 ==$$

$$\sqrt[3]{\lim_{x \to -8} x^2} - 2\sqrt[3]{\lim_{x \to -8} x} + \lim_{x \to -8} 4 = \sqrt[3]{(-8)^2} - 2\sqrt[3]{-8} + 4 = 12$$

(14) $\lim_{x \to -3} \frac{2x^3 + 9x^2 + 9x}{x + 3} =$

(a) 9 (b) 0 (c) -3 (d) -9

$$\lim_{x\to -3} \frac{x(2x^2+9x+9)}{x+3} = \lim_{x\to -3} \frac{x(x+3)(2x+3)}{x+3}$$

$$= \lim_{x\to -3}\left(x(2x+3)\right) = \lim_{x\to -3}\left(2x^2+3x\right) = 2(-3)^2 + 3\times -3 = 9$$

بند (2 – 1) نهايات تشتمل على ∞,-∞ (مقالي)

5)) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{4x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2|x|}$

$$|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2|x|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2x} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{x}\right) = \infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right) = \infty, \frac{1}{2} > 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{2|x|} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{-2x} = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{-1}{2}\times\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^-} \left(\frac{1}{x}\right) = -\infty, \frac{-1}{2} < 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2|x|} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{2|x|} = \infty \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1}{2|x|} = \infty$$

8)) $\lim_{x\to \frac{1}{2}^+} \frac{2x-1}{\sqrt{(2x-1)^8}} = \lim_{x\to \frac{1}{2}^+} \frac{2x-1}{\left|(2x-1)^4\right|} = \lim_{x\to \frac{1}{2}^+} \frac{2x-1}{(2x-1)^4} = \lim_{x\to \frac{1}{2}^+} \frac{1}{(2x-1)^3}$

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}^+} \frac{1}{(2x-1)^3} = \infty$$

بند (2 – 1) نهايات تشتمل على ∞,-∞

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\lim_{x \to -4^-} \frac{1}{(x+4)^9} = -\infty$ (a) (b)

لأن الأس فردي إذا النهاية من اليسار = ∞-

(2) $\lim_{x \to \infty} \frac{2x-1}{|x|-3} = 2$ (a) (b)

$$\because x \to \infty \to \therefore |x| = x$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x-1}{x-3} = 2$$

لأن درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام

(3) $\lim_{x \to -\infty} \frac{|x|-3}{x+3} = -1$ (a) (b)

$$\because x \to -\infty \to \therefore |x| = -x$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-x-3}{x+3} = -1$$

لأن درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام

(4) $\lim_{x \to \infty} \frac{1-x}{2x^2-5x-3} = -\infty$ (a) (b)

لأن درجة حدودية البسط اصغر من درجة حدودية المقام
الناتج = 0

(5) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{|2x-3|} = \frac{1}{2}$

ⓐ ⓑ

$\because x \to -\infty \to \therefore |2x-3| = -2x+3$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{-2x-3} = -\frac{1}{2}$$

لأن درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام

في التمارين (14 – 6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\lim_{x \to \infty} \frac{|x|}{|x|+1} =$

ⓐ 0 ⓑ 1 ⓒ ∞ ⓓ $\frac{1}{2}$

$\because x \to \infty \to \therefore |x| = x$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

لأن درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام

(7) $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x+3} =$

لأن درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام

ⓐ ∞ ⓑ $-\infty$ ⓒ 1 ⓓ 0

(8) $\lim_{x \to -\infty} \frac{3x-5}{\sqrt{x^2+1}} =$

فكرة مثال 4 ص 40 كتاب الطالب

ⓐ ∞ ⓑ $-\infty$ ⓒ 3 ⓓ -3

$$|x| = \begin{cases} x, x \to \infty \\ -x, x \to -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x(3-\frac{5}{x})}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x(3-\frac{5}{x})}{|x|\sqrt{(1+\frac{1}{x^2})}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x(3-\frac{5}{x})}{-x\sqrt{(1+\frac{1}{x^2})}} = \frac{-3}{\sqrt{1}} = -3$$

(9) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{x}+1\right)\left(\frac{5x^2-1}{x^2}\right)=$

(a) 0 (b) 5 (c) 1 (d) $-\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2+x}{x}\right)\left(\frac{5x^2-1}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2+x}{x}\right)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2-1}{x^2}\right)=1\times5=5$$

(10) $\lim_{x\to\infty}\frac{-|x+3|}{2x}=$

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) ∞ (d) $-\infty$

$$|x+3|=\begin{cases}x+3, x\to\infty\\-(x+3), x\to-\infty\end{cases}$$

$$\because x\to\infty\to\therefore|x+3|=x+3$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-(x+3)}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x-3}{2x}=-\frac{1}{2}$$

(11) $\lim_{x\to2^-}\left(\frac{3}{x-2}\right)^5=$

(a) 0 (b) 2 (c) ∞ (d) $-\infty$

$$\lim_{x\to2^-}\frac{3^3}{(x-2)^5}=\lim_{x\to2^-}\left(3^5\times\frac{1}{(x-2)^5}\right)=-\infty$$

لأن الأس فردي و x تؤول إلى 2 من جهة اليسار و 3^5 أكبر من الصفر

سؤال من اختبار الفترة الثانية ٢٠١٤/٢٠١٥

$$\lim_{x\to3^-}\frac{1}{(3-x)^5}=\lim_{x\to3^-}\frac{1}{-(x-3)^5}=\lim_{x\to3^-}\frac{-1}{(x-3)^5}=\infty$$

لأن الأس فردي و x تؤول إلى 3 من جهة اليسار و 1- أصغر من الصفر(سالب)

(12) $\lim_{x\to 4^+}\frac{2}{(x-4)^3}=$

a) ∞ b) 2 c) $-\infty$ d) 0

$$\lim_{x\to 4^+}\frac{2}{(x-4)^3}=\lim_{x\to 4^+}\left(2\times\frac{1}{(x-4)^3}\right)=\infty$$

لأن الأس فردي و x تؤول إلى 4 من جهة اليمين و 2 أكبر من الصفر

بند (3– 1) الصيغ الغير معينة

في التمارين (1–6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\lim_{x\to\infty}(3x^2+7x-8)=\infty$ (a) (b)

$$\lim_{x\to\infty} 3x^2=\infty$$

(2) $\lim_{x\to-\infty}(-x^3-2x+1)=-\infty$ (a) (b)

$$\lim_{x\to-\infty}(-x^3)=\infty$$

(3) $\lim_{x\to-\infty}(-x^2+x-3)=-\infty$ (a) (b)

$$\lim_{x\to-\infty}(-x^2)=-\infty$$

(4) $\lim_{x\to\infty}\frac{-2x+4}{3x^2-5x+1}=0$ (a) (b)

لأن درجة البسط حدودية اصغر من درجة حدودية المقام
الناتج = 0

(5) $\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^3+7x^2-1}{2x^3-4}=2$ (a) (b)

$$=\frac{4}{2}=2$$

لأن درجة البسط حدودية = درجة حدودية المقام

(6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-7}{\sqrt{4x^2-8x+5}}=\dfrac{3}{2}$

(a) (b)

فكرة مثال 4 ص 40 كتاب الطالب

$$=\frac{3}{-\sqrt{4}}=\frac{-3}{2}$$

في التمارين (7–11)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x+5}{2x^4+x^2-2}=$

(a) ∞ (b) $\frac{1}{2}$ (c) 0 (d) $-\infty$

لأن درجة حدودية البسط اصغر من درجة حدودية المقام

الناتج = 0

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-5x+3}{\sqrt{9x^2-2x+4}}=$

(a) $\frac{5}{3}$ (b) $-\frac{5}{3}$ (c) $\frac{5}{9}$ (d) $-\frac{5}{9}$

فكرة مثال 4 ص 40 كتاب الطالب

$$=\frac{-5}{\sqrt{9}}=\frac{-5}{3}$$

(9) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x+1}{\sqrt{4x^2-x+3}}$

(a) -1 (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

$$=\frac{-2}{-\sqrt{4}}=\frac{-2}{-2}=1$$

(10) إذا كان: $\lim_{x\to\infty} \frac{mx^2+nx+4}{\sqrt{x^2-2x+4}} = -2$ فإن قيم m , n هي:

(a) $m=0$, $n=-2$ (b) $m=0$, $n=2$ (c) $m=1$, $n=-1$ (d) $m=1$, $n=1$

لحل هذه التمارين يجب أن تكون درجة الحدودية التي تحت الجذر التربيعي أكبر من درجة الحدودية ب واحد اذا يجب أن تكون درجة الحدودية (البسط) من الدرجة الأولى

$$mx^2=0 \Rightarrow m=0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{nx+4}{\sqrt{x^2-2x+4}} = \frac{n}{\sqrt{1}} = -2 \Rightarrow n=-2$$

(11) إذا كانت: $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2-2x+3}}{mx^2+nx-4} = 1$ فإن قيم m , n هي:

(a) $m=0$, $n=-2$ (b) $m=0$, $n=2$ (c) $m=0$, $n=4$ (d) $m=0$, $n=-4$

لحل هذه التمارين يجب أن تكون درجة الحدودية التي تحت الجذر التربيعي أكبر من درجة الحدودية ب واحد اذا يجب أن تكون درجة الحدودية (المقام) من الدرجة الأولى

$$mx^2=0 \Rightarrow m=0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2-2x+3}}{nx-4} = \frac{-\sqrt{4}}{n} = 1 \Rightarrow n=-2$$

بند (4 – 1) نهايات بعض الدوال المثلثية

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin 3x}{2x}=\frac{3}{2}$ معلق (a) (b)

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{\cos 2x}{4x}=\frac{1}{2}$ معلق (a) (b)

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}=0$ (a) (b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\lim_{x\to 0}(1-\sin x)}{\lim_{x\to 0}\cos^2 x}=\frac{\lim_{x\to 0}1-\lim_{x\to 0}\sin x}{\lim_{x\to 0}\cos^2 x}=\frac{1-0}{1}=1$$

نتحقق من أن نهاية المقام $\neq 0$

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin 2x}{2\cos 2x}=\frac{1}{2}$ (a) (b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin 2x}{2\cos 2x}=\frac{\lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)}{\lim_{x\to 0}2\cos 2x}=\frac{\lim_{x\to 0}1+\lim_{x\to 0}\sin 2x}{2\lim_{x\to 0}\cos 2x}=\frac{1+0}{2\times 1}=\frac{1}{2}$$

نتحقق من أن نهاية المقام $\neq 0$

(5) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2\sin x+5x^3}{4x^3}=2$ معلق (a) (b)

في التمارين (6—10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\sin x} =$

ⓐ 2 ⓑ -2 ⓒ 0 ⓓ ∞

بقسمة كل من البسط والمقام على x

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan 2x}{x}}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = \frac{2}{1} = 2$$

نتحقق من أن نهاية المقام $\neq 0$

(7) $\lim\limits_{x\to 0} \left(3 + x^2 \sin \frac{1}{x}\right) =$

معلق

ⓐ 0 ⓑ 4 ⓒ 3 ⓓ ∞

(8) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^2 - x\cos x}{2x^2}$

معلق

ⓐ ∞ ⓑ $-\infty$ ⓒ -2 ⓓ 2

(9) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{4x^2 + 5\sin^2 x}{3x^2} =$

ⓐ 3 ⓑ 9 ⓒ 0 ⓓ ∞

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{4x^2}{3x^2} + \frac{5\sin^2 x}{3x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{4}{3} + \frac{5}{3}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \frac{4}{3} + \frac{5}{3}\times 1 = 3$$

(10) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x + \cos x}{|2x|} =$

معلق

ⓐ $\frac{1}{2}$ ⓑ $-\frac{1}{2}$ ⓒ 0 ⓓ ∞

بند (5 – 1) الإتصال

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الدالة f: $f(x)=\frac{1}{(x+2)^2}+1$ متصلة عند $x=-2$ — (a) **(b)**

أصفار المقام هي 2-
الدالة غير معرفة عند x=-2

(2) الدالة: $y=\frac{1}{x^2+1}$ متصلة عند كل $x\in\mathbb{R}$ — **(a)** (b)

لأنها حدودية نسبية والمقام $\neq 0$ ، لكل x تنتمى R

(3) الدالة: $y=\frac{1}{\sqrt{x+2}}$ متصلة عند $x=-1$ — **(a)** (b)

لأنها عبارة عن قسمة دالتين نفرض أن g(x)= 1 , h(x)= x + 2
g دالة ثابتة متصلة عند x=-1
المقام دالة جذر تربيعي للدالة نفرض أن t(x)= x + 2
t كثيرة حدود متصلة عند x = -1 ، t(-1)=-1+2=1>0 h متصلة عند x=-1
المقام $\neq 0$ عندما x= -1 الدالة y متصلة عند x = -1

(4) إذا كانت الدالة f متصلة عند $x=-1$ و كان $\lim_{x\to-1}(f(x)-2)=-1$ فإنّ $f(-1)=1$ — **(a)** (b)

الدالة متصلة عند x=-1

$$f(-1)=\lim_{x\to-1} f(x)$$

$$\lim_{x\to-1}(f(x)-2)=-1\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow \lim_{x\to-1} f(x)-\lim_{x\to-1}2=-1$$
$$\lim_{x\to-1} f(x)-2=-1\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow \lim_{x\to-1} f(x)=-1+2=1$$
$$\lim_{x\to-1} f(x)=1=f(-1)$$

في التمارين (5—12)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) نقاط انفصال الدالة f: $f(x) = \cot x$ هي:

(a) $0\ ,\ \pi$

(b) $2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

(c) $k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

(d) $\frac{\pi}{2} + k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sin x = 0 \forall x \in k\pi , k \in z$$

---

(6) نقاط الدالة f: $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$ التي يمكن التخلص من الانفصال عندها هي:

(a) 2

(b) $-2\ ,\ 2$

(c) -2

(d) $-5\ ,\ 2$

يمكن التخلص من الإنفصال عند العامل الصفري للمقام الذي يمكن التخلص منه

صفر لكل من البسط والمقام

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \frac{(x+3)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+2)}$$

لا يمكن إيجاد النهاية عند x=-2

، عند x=-5 لا يوجد انفصال

يمكن إيجاد النهاية عند x=2

---

(7) نقاط الدالة f : $f(x) = \frac{2x^3+16}{x^2+x-2}$ التي لا يمكن التخلص من الانفصال عندها هي:

ⓐ $-1 , 2$ ⓑ -2 ⓒ $1 , -2$ ⓓ 1

لا يمكن التخلص من الإنفصال عند العامل الصفري للمقام الذي لا يمكن التخلص منه

صفر للمقام وليس صفرا للبسط

$$f(x) = \frac{2(x^3+8)}{(x+2)(x-1)} = \frac{2\cancel{(x+2)}(x^2-2x+4)}{\cancel{(x+2)}(x-1)}$$

(8) إذا كانت الدالة f متصلة عند $x = 2$ فإنّ $f(x)$ يمكن أن تكون:

ⓐ $\frac{1}{|x-2|}$ ⓑ $\sqrt{x-2}$ ⓒ $\frac{|x-2|}{x-2}$ ⓓ $\begin{cases} \sqrt{x^2-3} & : x > 2 \\ 3x-5 & : x \leqslant 2 \end{cases}$

2 صفر للمقام
غير معرفة عند x = 2

2 – 2 =0
لابد ان يكون الناتج
اكبر من 0

2 صفر للمقام
غير معرفة عند x = 2

(9) إذا كانت الدالة f : $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & : x \geq 2 \\ \frac{x^2-4}{x-2} & : x < 2 \end{cases}$ فإن:

ⓐ $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 4$ ⓑ $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 4$ ⓒ $\lim_{x\to 2} f(x)$ موجودة ⓓ f متصلة عند $x = 2$

$$f(2) = 2^2 + 1 = 5$$

$$\lim_{y\to 2^+} f(x) = \lim_{y\to 2^+} x^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5$$

$$\lim_{y\to 2^-} f(x) = \lim_{y\to 2^-} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{y\to 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{y\to 2^-} x+2 = 2+2 = 4$$

(10) لتصبح الدالة f : $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}$ متصلة عند $x = 1$، يجب إعادة تعريفها على الشكل التالي:

ⓐ $\begin{cases} \frac{x^2+x+1}{x+1} & , x \neq 1 \\ \frac{3}{2} & , x = 1 \end{cases}$ ⓑ $\begin{cases} \frac{x^2+x+1}{x+1} & , x > 1 \\ \frac{3}{2} & , x = 1 \end{cases}$

ⓒ $\begin{cases} \frac{x^2+x+1}{x+1} & , x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & , x = 1 \end{cases}$ معلق ⓓ لا يمكن إعادة تعريفها

(11) إذا كانت الدالة f متصلة عند $x=-2$ وكانت $\lim_{x\to-2}(x^2+f(x))=7$ فإن $f(-2)$ تساوي:

ⓐ 3 ⓑ 5

ⓒ 9 ⓓ 11

$$\lim_{x\to-2}(x^2+f(x))=7$$
$$\lim_{x\to-2}x^2+\lim_{x\to-2}f(x)=7$$
$$4+\lim_{x\to-2}f(x)=7$$
$$\lim_{x\to-2}f(x)=3=f(-2)$$

F متصلة عند x=-2
∴النهاية = الصورة

(12) إذا كانت الدالة g متصلة عند $x=1$ وكانت النقطة $(1\ ,\ -3)$ تقع على منحنى الدالة g فإن $\lim_{x\to1}(g(x))^2$ تساوي:

ⓐ -6 ⓑ -3

ⓒ 1 ⓓ 9

g متصلة عند x=1
∴النهاية = الصورة

$$g(1)=-3$$
$$\lim_{x\to1}g(x)=-3$$
$$\lim_{x\to1}(g(x))^2=(\lim_{x\to1}g(x))^2=(-3)^2=9$$

في التمارين (13—15)، توجد قائمتان. اختر لكل سؤال من القائمة (1) ما يناسبه من القائمة (2) لتحصل على عبارة صحيحة:

إذا كانت g دالة متصلة عند $x = a$ ، $a \in \mathbb{Z}$ وكانت:

القائمة (1)	القائمة (2)
(13) $g(x) = \begin{cases} x+1 & : x > a \\ 3-x & : x \le a \end{cases} \Rightarrow a =$	ⓐ -1
	ⓑ 2
(14) $g(x) = \begin{cases} 2ax-2 & : x \ne a \\ 3a & : x = a \end{cases} \Rightarrow a =$	ⓒ 0
	ⓓ 1
(15) $g(x) = \begin{cases} 3x^2 & : x > a \\ 2x & : x \le a \end{cases} \Rightarrow a =$	ⓔ $\frac{2}{3}$

الدالة المتصلة
النهاية موجودة
النهاية من اليمين = النهاية من اليسار

$$\lim_{x \to a^+} g(x) = \lim_{x \to a^-} g(x)$$
$$a + 1 = 3 - a$$
$$2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

الدالة المتصلة
الصورة = النهاية

$$\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$
$$2a^2 - 2 = 3a$$
$$2a^2 - 3a - 2 = 0$$
$$(a-2)(2a+1) = 0$$
$$a = 2, a = \frac{-1}{2}$$

مرفوض لأن a عدد صحيح من رأس السؤال

الدالة المتصلة
النهاية موجودة
النهاية من اليمين = النهاية من اليسار

$$\lim_{x \to a^+} g(x) = \lim_{x \to a^-} g(x)$$
$$3a^2 = 2a$$
$$3a^2 - 2a = 0$$
$$a(3a - 2) = 0$$
$$a = 0, a = \frac{2}{3}$$

مرفوض لأن a عدد صحيح من رأس السؤال

بند (6 – 1) نظريات الإتصال

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الدالة f: $f(x)=x^2+|x-1|$ متصلة عند $x=3$ — **(a)** (b)

(2) الدالة f: $f(x)=\dfrac{2x+5}{x+2}-\dfrac{2}{x}$ متصلة عند $x=0$ — (a) **(b)**

$\dfrac{2}{x}$ غير معرفة عند $x=0$

---

(3) الدالة f: $f(x)=\dfrac{2x-2}{|x|-1}$ متصلة عند $x=0$ — **(a)** (b)

البسط دالة كثيرة حدود متصلة عند $x=0$

المقام عبارة عن دالتين احدهما ثابتة والآخرى مطلق x كلاهما متصل عند $x=0$

المقام $\neq 0$ عند $x=0$

---

(4) الدالة f: $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{3x-1}}{x^2}$ متصلة عند $x=3$ — **(a)** (b)

البسط دالة جذر تكعيبي متصلة عند $x=3$

المقام كثيرة حدود متصلة عند $x=3$

المقام $\neq 0$ عند $x=3$

---

(5) الدالة f: $f(x)=\sqrt{-x^2+5x-4}$ متصلة عند $x=2$ — **(a)** (b)

دالة ما تحت الجذر دالة كثيرة حدود متصلة عند $x=2$

نعوض عن x بـ 2 ونتحقق أن الناتج أكبر من الصفر

- $-(2)^2+5(2)-4=2>0$

في التمارين (6—12)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) نقاط انفصال الدالة f: $f(x)=\frac{-x+2}{x^2+9}$ عند:

ⓐ 3 ⓑ -3

ⓒ 2 ⓓ لا يوجد

حدودية نسبية و المقام $\neq 0$ لجميع الأعداد الحقيقية

(7) نقاط انفصال الدالة f: $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-1}$ عند:

ⓐ $1\ ,\ -1$ ⓑ $2\ ,\ -2$ ⓒ $1\ ,\ 2$ ⓓ $-1\ ,\ -2$

المقام = 0 عندما $x=\pm1$ f حدودية نسبية و أصفار المقام 1- , 1

$$f(x)=\frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+1)}$$

(8) لتكن الدالة f: $f(x)=x^2+3$ ، الدالة g : $g(x)=\frac{x}{x-3}$ ، فإن: $(g\circ f)(x)$ تساوي:

ⓐ $\frac{4x^2-18x+27}{(x-3)^2}$ ⓑ $\frac{x^2}{x^2-3}$ ⓒ $\frac{x^2+3}{x^2}$ ⓓ $\frac{x^2}{x^2+3}$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2+3)=\frac{x^2+3}{x^2+3-3}=\frac{x^2+3}{x^2}$$

(9) لتكن الدالة f: $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x-3}}$ ، الدالة g : $g(x)=x^2+3$ ، فإن: $(f\circ g)(x)$ تساوي:

ⓐ $\frac{x^2}{x-3}+3$ ⓑ $\frac{x}{\sqrt{x-3}}+3$ ⓒ $\frac{-(x^2+3)}{x}$ ⓓ $\frac{x^2+3}{|x|}$

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2+3)=\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+3-3}}=\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2}}=\frac{x^2+3}{|x|}$$

(10) لتكن الدالة f: $f(x)=\sqrt{x^2+7}$ ، g : $g(x)=x^2-3$ فإن: $(f\circ g)(0)$ يساوي:

(a) 4 (b) -4
(c) 1 (d) -1

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2-3)=\sqrt{(x^2-3)^2+7}=$$
$$\sqrt{(0^2-3)^2+7}=\sqrt{9+7}=4$$

---

(11) إذا كانت g دالة متصلة عند $x=2$ فإن الدالة المتصلة عند $x=2$ فيما يلي هي $f(x)$ تساوي:

(a) $\sqrt{g(x)}$ (b) $\frac{1}{g(x)}$
(c) $\frac{g(x)}{x-2}$ (d) $|g(x)|$

a خطأ لأنه لم يذكر أن $g(2)>0$
b. خطأ لأنه لم يذكر أن $g(2)\neq 0$
c. خطأ لأن المقام = 0 عندما x=2
d. عبارة صحيحة لأن دالة مطلق متصلة دائما على R

---

(12) إذا كانت الدالة f: $f(x)=\sqrt{x^2-a}$ متصلة عند $x=3$ فإن a يمكن أن تساوي:

(a) 4 (b) 9
(c) 16 (d) 25

لابد أن يكون ما تحت الجذر أكبر من الصفرعند x = 3

$$3^2-4=5>0$$
$$3^2-9=0$$
$$3^2-16=-7$$
$$3^2-25=-16$$

بند (7 – 1) الإتصال على فترة

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت f دالة متصلة على كل من $[3\ ,\ 5]$, $[1\ ,\ 3)$ فإن f متصلة على $[1\ ,\ 5]$

(a) **(b)**

خطأ لأننا لابد أن نتأكد من أن الدالة f متصلة عند x = 3 من جهة اليسار

(2) الدالة f: $f(x) = x^2 - |x|$ متصلة لكل قيم $x \in \mathbb{R}$

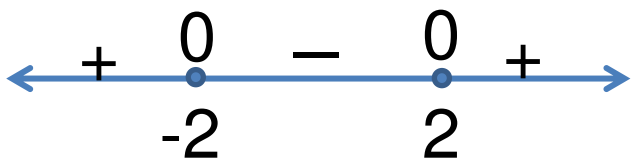
(a) (b)

لأن f عبارة عن ناتج طرح دالتين (كثيرة حدود ومطلق x) وكلاهما متصل لكل قيم x

(3) الدالة f: $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ متصلة على $[-2\ ,\ 2]$

(a) **(b)**

$$f(x) = \sqrt{g(x)},\ g(x) = x^2 - 4$$
$$x^2 - 4 \geq 0$$
$$x^2 - 4 = 0$$
$$(x-2)(x+2) = 0$$
$$x = 2,\ x = -2$$
$$g(x) \geq 0 \ \forall x \in R - (-2,2)$$



الدالة g(x) < 0 في الفترة (2 , 2-)

(4) الدالة f: $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+2}$ متصلة على $(-\infty\ ,\ 0)$

(a) **(b)**

الدالة f حدودية نسبية متصلة على R ماعدا أصفار المقام

أصفار المقام { 2- }

$\{-2\} \in (-\infty , 0)$

(5) الدالة f: $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$ متصلة على $(-\infty , 2)$ فقط

a　　**b**

هي غير متصلة عند فقط أصفار المقام وهي { 2 } (متصلة على R/{2})

في التمارين (6–11)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) لتكن الدالة f: $f(x)=\frac{x+1}{x-4}$ فإن الدالة f:

a) لها نقطتي انفصال عند كل من $x=4$, $x=-1$

b) متصلة على $(-\infty , 4]$

c) متصلة على مجالها

d) ليس أي مما سبق

متصلة $\forall x \in R-\{4\}$

متصلة على $(-\infty,4),(4,\infty)$

الدالة f لها نقطة انفصال عند أصفار المقام التي لا يمكن التخلص عند {4}

---

(7) إذا كانت f دالة متصلة على $[-2 , 3]$ فإن:

a) $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to3^-} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=f(3)$

c) $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=f(-2)$

d) $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=f(-2)$

الدالة متصلة على الفترة المفتوحة (3 , 2-)

الدالة متصلة عند x=-2 من جهة اليمين

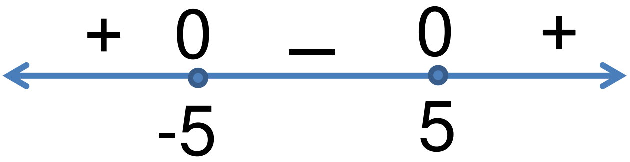
$$\lim_{x\to-2^+} f(x)=f(-2)$$

الدالة متصلة عند x=3 من جهة اليسار

$$\lim_{x\to3^-} f(x)=f(3)$$

(8) الدالة f: $f(x)=\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-25}}$ متصلة على:

- **a** $\left(-\infty\,,\,\frac{1}{2}\right]$
- **b** $(5\,,\,\infty)$
- **c** $\mathbb{R}$
- **d** $(-5\,,\,5)$



لابد أن يكون ما تحت الجذر ≥ 0

المجال $R-(-5,5)=(-\infty,-5]\cup[5,\infty)$

لابد أن يكون المقام لا يساوي 0 $x \neq \pm 5$

∴ الدالة f متصلة $\forall x \in (-\infty,-5)\cup(5,\infty)$

---

(9) لتكن f: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{5}{2} & : \; x \leqslant -3 \\ \dfrac{\sqrt{x^2+16}}{2} & : \; -3<x<0 \\ \dfrac{4-x^2}{x-2} & : \; x \geqslant 0 \end{cases}$، فإن f دالة متصلة على:

- **a** $(-\infty\,,\,\infty)$
- **b** $(-\infty\,,\,2)$
- **c** $(-\infty\,,\,0]$
- **d** $(-\infty\,,\,-3]$

الدالة f متصلة على $(-\infty,-3]$ (دالة ثابتة)
والدالة f متصلة عند $x=3$ من جهة اليمين (الصورة = النهاية من جهة اليمين)

من الفرع الثاني الدالة f متصلة على $(-3,0)$
لأنه
لا يوجد أصفار للمقام و مجال الجذر هو كل الأعداد الحقيقية

من الفرع الثالث f متصلة $\forall x \in [0,\infty)-\{2\}$
والدالة f غير متصلة عند $x=0$ من جهة اليسار (الصورة ≠ النهاية من جهة اليسار)

(10) الدالة f: $f(x)=\begin{cases}\frac{3x+m}{x-2} & : \ x<1\\ x+n & : \ x>1 \\ 2m & : \ x=1\end{cases}$ متصلة على $\mathbb{R}$ إذا كان:

(a) $m=-1 \ , \ n=3$ (b) $m=1 \ , \ n=-3$

(c) $m=-1 \ , \ n=-3$ (d) $m=1 \ , \ n=3$

الدالة f متصلة على R اذا f متصلة عند x=1

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 2m$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x+n \Rightarrow \boxed{1+n=2m}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{3x+m}{x-2} = \frac{3+m}{-1} = 2m \Rightarrow$$

$$3+m=-2m \Rightarrow 3=-3m \Rightarrow \boxed{m=-1}$$

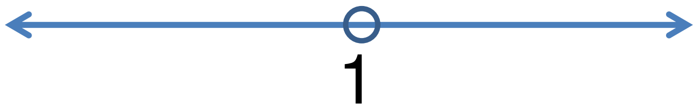
$$1+n=2m \Rightarrow 1+n=2\times -1 \Rightarrow 1+n=-2 \Rightarrow \boxed{n=-3}$$

---

(11) الدالة g: $g(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1} & : \ x>1\\ 3x & : \ x\le 1\end{cases}$ متصلة على:

(a) $(-\infty \ , 1] \ , (1 \ , \infty)$ (b) $(-\infty \ , 1) \ , [1 \ , \infty)$

(c) $(-\infty \ , \infty)$ (d) $(-\infty \ , 3]$



من الفرع الأول حدودية نسبية (أصفار المقام هي 1) الدالة g متصلة على (1 , ∞)

من الفرع الثاني كثيرة حدود متصلة على] 1, ∞-)

وببحث الإتصال عند x = 1 من جهة اليمين

$$g(1) = 3\times 1 = 3$$

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = 1-1 = 0$$

$$g(1) \neq \lim_{x\to 1^+} g(x)$$

الدالة g غير متصلة عند x= 1 من جهة اليمين