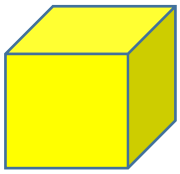
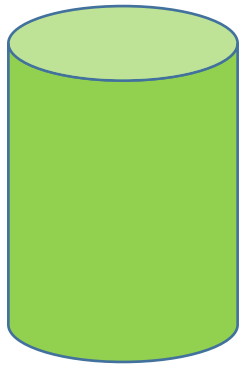
تطبيقات على القيم القصوى



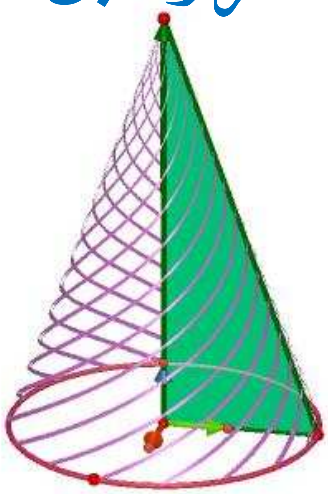
حلول تمارين الكتاب

و الكراسة



إعداد : قسم الرياضيات

ثانوية عروة بن الزبير



تطبيقات على القيم القصوى

حاول أن تحل (1) صـ 156 ـ

أوجد عددين مجموعهما 14 و ناتج ضربهما أكبر مايمكن .

الحل : بفرض أحد العددين هو x حيث $0 < x < 14$ فيكون العدد الآخر هو $14 - x$

ناتج ضربهما : $f(x) = x(14 - x) = 14x - x^2$

$$f'(x) = 14 - 2x$$

$$f'(x) = 0 \implies 14 - 2x = 0 \implies x = 7$$

يوجد نقطة حرجة $(7, f(7))$

$$f''(x) = -2 \quad , -2 < 0 \qquad , \quad \forall\, x \in (0,14)$$

$$f''(7) = -2 \quad , -2 < 0$$

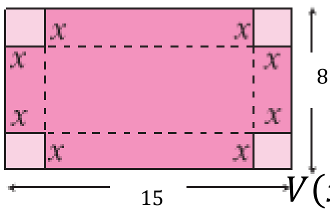
$\therefore$ $f(7) = 49$ قيمة عظمى عند $x = 7$

العدد الأول هو 7 و العدد الثاني هو : $14 - 7 = 7$

العددان هما 7 , 7

*** حاول أن تحل (2) : يراد صنع صندوق بدون غطاء بقص مربعات متطابقة طول ضلع كل منها x من أركان طبقة صفيح أبعادها $15cm$, $8cm$ و ثني من جوانبها إلى الأعلى

أوجد قيمة x بحيث يكون حجم الصندوق أكبر ما يمكن . و ما هو حجم أكبر صندوق يمكن صنعه بهذه الطريقة ؟



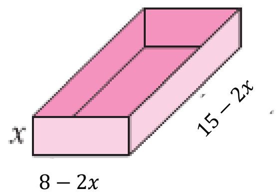
الحل : ارتفاع الصندوق x و البعدان الآخران هما $(8 - 2x)$, $(15 - 2x)$

حيث $0 < 2x < 8$ أي أن $0 < x < 4$

حجم الصندوق هو ناتج ضرب أبعاده الثلاثة

$$V(x) = x(8 - 2x)(15 - 2x) = 4x^3 - 46x^2 + 120x$$

$$V'(x) = 12x^2 - 92x + 120$$



$$V'(x) = 0 \implies 12x^2 - 92x + 120 = 0$$

$$(3x - 5)(x - 6) = 0 \implies x = \frac{5}{3} \quad , x = 6 \notin (0,4) \quad \text{مرفوضة}$$

$$V''(x) = 24x - 92 \implies V''\left(\frac{5}{3}\right) = -52 < 0$$

$\therefore$ يوجد عند $x = \frac{5}{3}$ قيمة عظمى

$\therefore$ يكون حجم الصندوق أكبر مايمكن عند $x = \frac{5}{3}$

حجمه :

$$V\left(\frac{5}{3}\right) = 4\left(\frac{5}{3}\right)^3 - 46\left(\frac{5}{3}\right)^2 + 120\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{2450}{27}cm^3$$

****

حاول أن تحل (3) صـ158ـ

تعطي الدالة $V(h) = 2\pi(-h^3 + 36h)$ حجم أسطوانة بدلالة ارتفاعها h .

a) أوجد الارتفاع $h(cm)$ للحصول على أكبر حجم للأسطوانة .

b) ما قيمة هذا الحجم ؟

الحل : a

$$\frac{dV}{dh} = 2\pi(-3h^2 + 36) \qquad \text{نضع} \qquad \frac{dV}{dh} = 0$$

$$2\pi(-3h^2 + 36) = 0 \quad \Rightarrow -3h^2 + 36 = 0 \implies \quad h^2 = 12$$

$$h = 2\sqrt{3} \qquad \text{أو} \qquad h = -2\sqrt{3} \quad (\text{مرفوضة})$$

$$\frac{d^2V}{dh^2} = 2\pi(-6h) = -12\pi h \quad \implies \quad \left.\frac{d^2V}{dh^2}\right|_{h=2\sqrt{3}} = -12\pi(2\sqrt{3}) = -24\sqrt{3}\pi < 0$$

$\therefore$ يوجد عند $h = 2\sqrt{3}$ قيمة عظمى

$\therefore$ نحصل على أكبر حجم للأسطوانة عند $h = 2\sqrt{3}$

b) أكبر حجم للأسطوانة : $V(2\sqrt{3}) = 2\pi(-(2\sqrt{3})^3 + 36(2\sqrt{3})) \approx 522.37cm^3$

****

حاول أن تحل(4) صـ 159-

أوجد أقصر مسافة بين النقطة $A(x,y)$ على المنحني الذي معادلته $y=\sqrt{x}$ و النقطة $B(3,0)$

الحل : المسافة بين النقطتين A,B هي :

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}=\sqrt{(x-3)^2+y^2}$$

نفرض دالة المسافة هي : $s(x)=\sqrt{(x-3)^2+y^2}$

من معادلة المنحني : $y=\sqrt{x}\Longrightarrow y^2=x$ بالتعويض بالدالة :

$$s(x)=\sqrt{x^2-6x+9+x}=\sqrt{x^2-5x+9}$$

$$s(x)=(x^2-5x+9)^{\frac{1}{2}}$$

$$s'(x)=\frac{1}{2}(2x-5)(x^2-5x+9)^{-\frac{1}{2}}=\frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+9}}$$

$$s'(x)=0\Longrightarrow 2x-5=0\Longrightarrow x=\frac{5}{2}$$

نوجد أصفار المقام بوضع : $x^2-5x+9=0$

لايوجد أصفار للمقام. $\Delta=b^2-4ac=25-4(1)(9)=-11<0.$

x		$\frac{5}{2}$	
$s'(x)$	--		++
$s(x)$	↘		↗

∴أقصر مسافة بين النقطتين $A\,,B$ هي عند $x=\frac{5}{2}$ قيمة صغرى

$$s\left(\frac{5}{2}\right)=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-5\left(\frac{5}{2}\right)+9}=\frac{\sqrt{11}}{2}$$

∴أقصر مسافة هي $\frac{\sqrt{11}}{2}$ وحدة طول

5 تصنع إحدى الشركات يومياً x (بالآلاف) من المكثفات الكهربائية .

يعطى معدل كلفة إنتاج كل قطعة بالعلاقة : $C(x) = x - 2 + \frac{25}{x}$

a) أوجد كمية المكثفات المنتجة يومياً لتحقيق أقل كلفة ممكنة .

b) تباع كل ألف قطعة بسعر 10 دنانير .
أوجد كمية المكثفات المنتجة لتحقيق أكبر ربح

الحل: a x عدد المكثفات $\therefore \quad x \in (0,\infty)$

$$c'(x) = 1 - \frac{25}{x^2} = \frac{x^2-25}{x^2}$$

$$c'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2-25}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 25 = 0 \Rightarrow (x-5)(x+5) = 0$$

$$x = 5 \quad , \quad x = -5 \notin (0,\infty)$$

x		5	
$c'(x)$	$----$		$+++++$
$c(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

من الجدول يوجد قيمة صغرى عند $x = 5$

$\therefore$ كمية المكثفات التي تحقق أقل كلفة 5000 مكثف

b الربح = سعر مبيع الكمية – كلفة الكمية

$$p(x) = 10x - \left(x - 2 + \frac{25}{x}\right)x = 10x - x^2 + 2x - 25 = -x^2 + 12x - 25$$

$$p'(x) = -2x + 12 \Rightarrow -2x + 12 = 0 \Rightarrow x = 6$$

x		6	
$p'(x)$	$+++$		$----$
$p(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

من الجدول يوجد قيمة عظمى عند $x = 6$

$\therefore$ مبيع 6000 قطعة يحقق أكبر ربح

$$p(x) = -(6)^2 + 12(6) - 25 = 11$$

أكبر قيمة للربح تساوي 11 دينار

حلول تمارين الكراسة

(1): مجموع عددين غير سالبين هو 20 أوجد العددين إذا كان :

(a) مجموع مربعيهما أصغر ما يمكن .

(b) أحد العددين مضافاً إليه الجذر التربيعي للآخر أكبر ما يمكن .

الحل: (a) بفرض أحد العددين هو x حيث $0 \leq x \leq 20$ و العدد الآخر يكون $20 - x$

دالة مجموع مربعيهما :

$$f(x) = x^2 + (20 - x)^2 = x^2 + x^2 - 40x + 400 = 2x^2 - 40x + 400$$

$$f'(x) = 4x - 40 \Longrightarrow f'(x) = 0 \Longrightarrow 4x - 40 = 0 \Longrightarrow x = 10$$

∴ يوجد نقطة حرجة هي : $(10, f(10))$

$$f''(x) = 4 > 0$$

∴ $f(10)$ هي قيمة صغرى عند $x = 10$

العددان هما $10 , 10$

(b) بفرض أحد العددين هو x حيث $0 \leq x \leq 20$ و العدد الآخر يكون $20 - x$

الدالة:

$$g(x) = 20 - x + \sqrt{x} = 20 - x + x^{\frac{1}{2}}$$

$$g'(x) = -1 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = -1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-2\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}} \Longrightarrow$$

$$g'(x) = 0 \Longrightarrow \frac{-2\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}} = 0 \Longrightarrow -2\sqrt{x} + 1 = 0 \Longrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = \frac{1}{4}$$

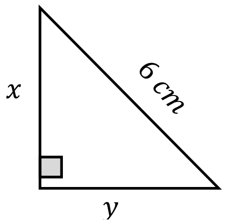
$$g''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{-1}{4\sqrt{x^3}}$$

$$g''\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{-1}{4\sqrt{\frac{1}{4}^3}} = -2 < 0$$

∴ $g\left(\frac{1}{4}\right)$ هي قيمة عظمى عند $x = \frac{1}{4}$

العددان هما $19\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$

(2) ما أكبر مساحة ممكنة لمثلث قائم الزاوية و طول وتره يساوي $6\ cm$ ؟ و ما أبعاده ؟



الحل : بتطبيق فيثاغورث : $x^2+y^2=36 \Rightarrow y=\sqrt{36-x^2}$

دالة المساحة : $s(x)=\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}x\sqrt{36-x^2}=\frac{1}{2}x(36-x^2)^{\frac{1}{2}}$

$$s'(x)=\frac{1}{2}(36-x^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x(\frac{1}{2}(-2x))\,(36-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{36-x^2}-\frac{\frac{1}{2}x^2}{\sqrt{36-x^2}}=\frac{\sqrt{36-x^2}}{2}-\frac{x^2}{2\sqrt{36-x^2}}$$

$$=\frac{36-x^2-x^2}{2\sqrt{36-x^2}}=\frac{36-2x^2}{2\sqrt{36-x^2}}=\frac{18-x^2}{\sqrt{36-x^2}}$$

$$s'(x)=0 \Rightarrow 18-x^2=0 \Rightarrow x^2=18 \Rightarrow$$

$x=3\sqrt{2}$, $x=-3\sqrt{2}$ (مرفوضة)

x		$3\sqrt{2}$	
إشارة s'	++++		----
سلوك s	↗		↘

∴ يوجد قيمة عظمى مطلقة عند $x=3\sqrt{2} \Leftarrow y=\sqrt{36-18}=3\sqrt{2}$

أكبر مساحة هي : $s(3\sqrt{2})=\frac{1}{2}(3\sqrt{2})(3\sqrt{2})=9\ cm^2$

أبعاد المثلث هي : $3\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$

****

(3) أثبت أن من بين المستطيلات التي محيطها $8m$ واحداً منها يعطي أكبر مساحة ويكون مربعاً .

الحل : محيط المستطيل يساوي $8m$ فإن نصف المحيط يساوي $4m$

بعدا المستطيل : $4-x$, x

دالة المساحة : $A(x)=x(4-x)=4x-x^2$

$$A'(x)=4-2x \Rightarrow A'(x)=0 \Rightarrow 4-2x=0 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$$

$$A''(x)=-2<0$$

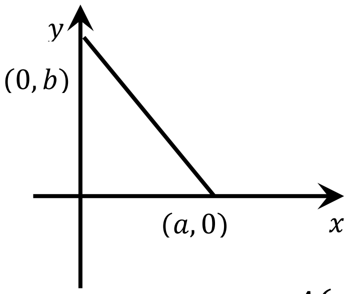
يوجد قيمة عظمى عند $x=2$

أكبر مساحة هي : $A(2)=4(2)-2^2=4\ cm^2$ ، بعدا المستطيل : 2cm , 2 cm فهو مربع

(4) يراد التخطيط لغلق ركن في الربع الأول من المستوى الإحداثي بقطعة مستقيمة طولها 20 وحدة طول نبدأ العمل لغلق الركن من نقطة $(a,0)$ إلى النقطة $(0,b)$

أثبت أن مساحة المثلث الذي تحده القطعة المستقيمة

يكون أكبر ما يمكن عندما $a=b$



الحل : $a^2+b^2=400 \Longrightarrow b=\sqrt{400-a^2}$

$$A(a)=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}a\sqrt{400-a^2}=\frac{1}{2}a(400-a^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$A'(a)=\frac{1}{2}(400-a^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}a(\frac{1}{2}(-2a))\,(400-a^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{400-x^2}-\frac{\frac{1}{2}a^2}{\sqrt{400-a^2}}=\frac{\sqrt{400-a^2}}{2}-\frac{a^2}{2\sqrt{400-a^2}}$$

$$=\frac{400-a^2-a^2}{2\sqrt{400-a^2}}=\frac{400-2a^2}{2\sqrt{400-a^2}}=\frac{200-a^2}{\sqrt{400-a^2}}$$

$$A'(a)=0\Longrightarrow 200-a^2=0\Longrightarrow a^2=200\Longrightarrow$$

$x=10\sqrt{2}$, $x=-10\sqrt{2}$ (مرفوضة)

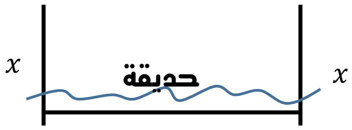
الفترات		$10\sqrt{2}$
إشارة A'	++++	----
سلوك A	↗	↘

∴ يوجد قيمة عظمى عند $a=10\sqrt{2} \Longleftarrow b=\sqrt{400-200}=10\sqrt{2}$

أكبر مساحة تكون عندما يكون : $a=b$

****

(5) مزرعة على شكل قطعة مستطيلة من الأرض تقع على حافة نهر مستقيم يراد وضع سياج على الجوانب الثلاثة الأخرى ما أكبر مساحة يمكن إحاطتها بسياج طوله $800m$؟ و ما أبعادها ؟



الحل : أبعاد الحديقة : $x \;,\; 800-2x$

دالة المساحة : $A(x)=x(800-2x)=800x-2x^2$

$$A'(x)=800-4x \Rightarrow A'(x)=0 \Rightarrow 800-4x=0 \Rightarrow 4x=800 \Rightarrow x=200$$

$$A''(x)=-4<0$$

يوجد قيمة عظمى عند $x=200$

أكبر مساحة هي : $A(200)=200(800-2\times200)=80000\ m^2$

، بعدا المستطيل : $200\text{m}\,,400\text{ m}$

****

(6) يراد تصميم خزان حديدي لأحد المصانع على شكل شبه مكعب قاعدته مربعة و مفتوح من أعلى و حجمه $500\ m^3$ لصنع الخزان يتم وصل ألواح الحديد الصلب مع بعضها من أطرافها .
أوجد أبعاد القاعدة و الارتفاع التي تجعل وزن الخزان أقل ما يمكن .

الحل : وزن الخزان يتناسب طردياً مع المساحة السطحية للخزان

$$A(x)=x^2+4(xy)$$

الحجم يساوي ناتج حاصل ضرب أبعاده الثلاثة :

$$x.x.y=500 \Rightarrow x^2y=500 \Rightarrow y=\frac{500}{x^2}$$

$$A(x)=x^2+4\left(x.\frac{500}{x^2}\right)=x^2+\frac{2000}{x}$$

$$A'(x)=2x-\frac{2000}{x^2}=\frac{2x^3-2000}{x^2}$$

$$A'(x)=0 \Rightarrow 2x^3-2000=0 \Rightarrow x^3=1000 \Rightarrow x=10$$

x		10	
إشارة A'	----		++++
سلوك A	↘		↗

$\therefore$ يوجد قيمة صغرى عن $x=10$

أصغر مساحة سطحية تكون عند : $x=10$ ومنه : $y=\frac{500}{(10)^2}=5$

$$A(10)=(10)^2+\frac{2000}{10}=100+200=300\ cm^2$$

أبعاد الخزان : $5\ m\ ,10\ m\,,10\ m$

****

(7) ضلعان في مثلث طولاهما a و b والزاوية θ ماقيمة θ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن

الحل :
$$A(\theta) = \frac{1}{2}ab.\sin\theta$$

$$A'(\theta) = \frac{1}{2}ab.\cos\theta$$

$$A'(\theta) = 0 \implies \frac{1}{2}ab.\cos\theta = 0 \implies \cos\theta = 0 \implies \theta = \frac{\pi}{2}$$

x		$\frac{\pi}{2}$	
إشارة A'	++++		------
سلوك A	↗		↘

∴ يوجد قيمة عظمى عن $\theta = \frac{\pi}{2}$

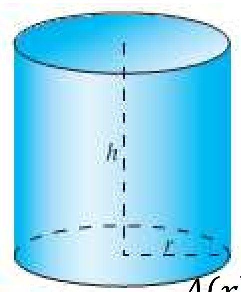
أكبر مساحة للمثلث:

$$A\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}ab.\sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}ab$$ وحدة مساحة

---

(8) علبة من الصفيح على شكل أسطوانة قائمة مفتوحة من أعلى حجمها $1000cm^3$

أوجد أبعاد العلبة بحيث يكون وزنها أقل ما يمكن .



الحل : نصف قطر الأسطوانة هو r ، ارتفاع الأسطوانة هو L

حجم الأسطوانة : $V = \pi r^2 L = 1000 \implies L = \frac{1000}{\pi r^2}$

مساحة الصفيحة = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

$$A(r) = 2\pi rL + \pi r^2 = 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) + \pi r^2 = \frac{2000}{r} + \pi r^2$$

$$A'(r) = \frac{-2000}{r^2} + 2\pi r = \frac{-2000 + 2\pi r^3}{r^2}$$

$$A'(r) = 0 \implies \frac{-2000 + 2\pi r^3}{r^2} = 0 \implies -2000 + 2\pi r^3 = 0$$

$$r^3 = \frac{2000}{2\pi} = \frac{1000}{\pi} \implies r = \sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}} = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$$

x		$\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$	
إشارة A'	----		++++
سلوكA	↘		↗

$\therefore$ يوجد قيمة صغرى عند $r = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$

$\therefore$ يوجد أصغر مساحة سطحية $\therefore$ وزن العلبة أقل مايكن

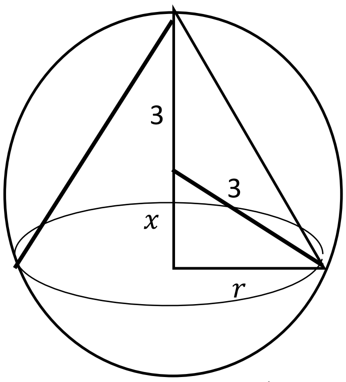
أبعاد العلبة :

$$r = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}} \quad , \quad L = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi\left(\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^2} = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$$

****

(9) أوجد أكبر حجم لمخروط دائري قائم داخل كرة طول نصف قطرها $3\ m$

الحل : من الشكل :



$$L = x + 3 \Longrightarrow x = L - 3$$

$$r^2 + x^2 = 9 \Longrightarrow r^2 = 9 - x^2 = 9 - (L-3)^2$$

حجم المخروط : $V(L) = \frac{1}{3}\pi r^2 L = \frac{1}{3}\pi(9-(L-3)^2)L$

$$V(L) = \frac{1}{3}\pi L(9 - L^2 + 6L - 9) = \frac{1}{3}\pi L(-L^2 + 6L) = -\frac{1}{3}\pi L^3 + 2\pi L^2$$

$$V'(L) = -\pi L^2 + 4\pi L$$

$$V'(L) = 0 \Longrightarrow -\pi L^2 + 4\pi L = 0 \Longrightarrow -L^2 + 4L = 0$$

$$L(4-L) = 0 \Longrightarrow L = 0\ (\text{مرفوضة}),\ \ L = 4$$

x		4	
إشارة V'	++++		------
سلوكV	↗		↘

$\therefore$ يوجد قيمة عظمى عند $L = 4$

أكبر حجم : $V(L) = -\frac{1}{3}\pi(4)^3 + 2\pi(4)^2 = \frac{32}{3}\pi \ \ m^3$

(10) ما أقصر بعد للنقطة $\left(\frac{3}{2},0\right)$ عن منحنى الدالة $y=\sqrt{x}$ ؟

الحل : نفرض أن (x,y) نقطة من المنحنى

البعد بينها و بين النقطة $\left(\frac{3}{2},0\right)$ هو :

$$S=\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-0)^2}=\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2}$$

من معادلة المنحنى : $y=\sqrt{x} \Longrightarrow y^2=x \;,\; y\geq 0, x\in[0,\infty)$ بالتعويض بالدالة :

$$s(x)=\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+x}=\sqrt{x^2-3x+\frac{9}{4}+x}=\sqrt{x^2-2x+\frac{9}{4}}$$

$$s(x)=\left(x^2-2x+\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$s'(x)=\frac{1}{2}(2x-2)\left(x^2-2x+\frac{9}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{2(x-1)}{2\sqrt{x^2-2x+\frac{9}{4}}}$$

$$s'(x)=0 \Longrightarrow x-1=0 \Longrightarrow x=1$$

نوجد أصفار المقام بوضع : $x^2-2x+\frac{9}{4}=0$

$\Delta=b^2-4ac=4-4(1)\left(\frac{9}{4}\right)=-5<0.$ لايوجد أصفار للمقام

x		1	
$s'(x)$	--		++
$s(x)$	↘		↗

∴أقصر بعد بين النقطتين هي عند $x=1$ قيمة صغرى

$$s(1)=\sqrt{(1)^2-2(1)+\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

∴أقصر بعد هو $\frac{\sqrt{5}}{2}$ وحدة طول

********************** انتهت التمارين ********************