

تم تحميل هذا الملف من موقع ملفات الكويت التعليمية



[com.kwedufiles.www//:https](https://www.kwedufiles.com)

*للحصول على أوراق عمل لجميع الصفوف وجميع المواد اضغط هنا

* للحصول على أوراق عمل لجميع مواد الصف الثاني عشر العلمي اضغط هنا

<https://kwedufiles.com/14>

* للحصول على جميع أوراق الصف الثاني عشر العلمي في مادة رياضيات وجميع الفصول, اضغط هنا

<https://kwedufiles.com/14math>

* للحصول على أوراق عمل لجميع مواد الصف الثاني عشر العلمي في مادة رياضيات الخاصة بـ الفصل الأول اضغط هنا

<https://www.kwedufiles.com/14math1>

* لتحميل كتب جميع المواد في جميع الفصول للـ الصف الثاني عشر العلمي اضغط هنا

<https://www.kwedufiles.com/grade14>

[bot_kwlinks/me.t//:https](https://t.me/bot_kwlinks)

للحصول على جميع روابط الصفوف على تلغرام وفيسبوك من قنوات وصفحات: اضغط هنا

الروابط التالية هي روابط الصف الثاني عشر العلمي على مواقع التواصل الاجتماعي

مجموعة الفيسبوك

صفحة الفيسبوك

مجموعة التلغرام

بوت التلغرام

قناة التلغرام

رياضيات على التلغرام

المجموعة A تمارين مقالية

(1) (a) $\lim_{t \rightarrow -4^-} g(t) = 5$ (b) $\lim_{t \rightarrow -4^+} g(t) = 2$ (c) $\lim_{t \rightarrow -4} g(t)$ غير موجودة

لأن النهايتين من جهة اليمين وجهة اليسار مختلفتان.

(d) $g(-4) = 2$

(2) (a) $\lim_{h \rightarrow 0^-} f(h) = -4$

(b) $\lim_{h \rightarrow 0^+} f(h) = -4$

(c) $\lim_{h \rightarrow 0} f(h) = -4$

(d) $f(0) = -4$

(3) (a) 6

(b) 0

(c) 9

(d) -3

(4) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} (3x^2(2x-1)) = 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \left[2\left(-\frac{1}{2}\right) - 1\right] = 3\left(\frac{1}{4}\right)(-2) = -\frac{3}{2}$

(5) $\lim_{y \rightarrow -3} \frac{y^2 + 4y + 3}{y^2 - 3} = \frac{(-3)^2 + 4(-3) + 3}{(-3)^2 - 3} = \frac{0}{6} = 0$

(6) $\lim_{x \rightarrow -4} (x+3)^{1998} = (-4+3)^{1998} = (-1)^{1998} = 1$

(7) $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x-2} = \sqrt{3-2} = 1$

(8) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$ $\therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$

(9) (a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$ $\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ غير موجودة

(b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$

(10) (a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$ $\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ غير موجودة

(b) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$

(11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4+x)^2 - 16}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x+8) = 8$

(12) $\lim_{t \rightarrow 2} \frac{t-1}{t+2} = \frac{1}{4}$

(13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3+x)^3 - 27}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} ((3+x)^2 + 3(3+x) + 9) = 27$

(14) $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{|x+2|}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{-1}{x+1} = 1$; $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{|x+2|}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{x+1} = -1$

(15) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 7 - 16}{(x-1)(x-3)(\sqrt{x^2 + 7} + 4)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{(x-1)(\sqrt{x^2 + 7} + 4)} = \frac{3}{8}$

(16) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(\sqrt[3]{(9x)^2} - 3\sqrt[3]{9x+9})}{(\sqrt[3]{9x+3})(\sqrt[3]{(9x)^2} - 3\sqrt[3]{9x+9})} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(\sqrt[3]{(9x)^2} - 3\sqrt[3]{9x+9})}{9(x+3)} = 3$

$$(17) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 3x^2 - 7x + 6}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 5x + 3) = 17$$

$$(18) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 9)(x^2 + 2)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3)(x^2 + 2) = 66$$

$$(19) \lim_{x \rightarrow 2} (4x^2 + 3x + 6) = 28$$

المجموعة B تمارين موضوعية

- | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| (1) (b) | (2) (a) | (3) (b) | (4) (a) | (5) (a) |
| (6) (a) | (7) (d) | (8) (c) | (9) (d) | (10) (c) |
| (11) (c) | (12) (d) | (13) (a) | (14) (a) | |

تمرن 1-2

نهايات تشتمل على ∞ ، $-\infty$

المجموعة A تمارين مقالية

- | | | |
|--|-------------------|-------------------|
| (1) 0 | (2) 0 | (3) $\frac{1}{2}$ |
| (4) $(2 - 1) \times 1 = 1$ | (5) ∞ | (6) ∞ |
| (7) $-\infty$ | | |
| (8) $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} \frac{2x - 1}{\sqrt{(2x - 1)^8}} = \infty$ | | |
| (9) (a) $x = 0$, $x = -\frac{5}{2}$ | $y = \frac{3}{2}$ | |
| (10) (a) $x = 1$, $x = -\frac{5}{2}$ | $y = 0$ | |
| (11) (a) $x = 0$, $x = -1$ | $y = 4$ | |
| (12) (a) $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$ | $y = 0$ | |

المجموعة B تمارين موضوعية

- | | | | |
|----------|----------|----------|----------|
| (1) (a) | (2) (a) | (3) (a) | (4) (b) |
| (5) (b) | (6) (b) | (7) (c) | (8) (d) |
| (9) (b) | (10) (b) | (11) (d) | (12) (a) |
| (13) (c) | (14) (d) | | |

المجموعة A تمارين مقالية

- (1) ∞ (2) $-\infty$ (3) $-\infty$ (4) ∞ (5) -2
 (6) $-\frac{2}{5}$ (7) 0 (8) 0 (9) 1 (10) -1

$$(11) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{(x-1)(x+1)} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1-2}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

$$(12) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{(x-1)(x^2+x+1)} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x+1-3}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)} = 1$$

$$(13) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{x-2} - \frac{4x}{(x-2)(x+2)} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)x-4x}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-2x}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{(x+2)} = \frac{1}{2}$$

$$(14) a = 0, \quad \frac{b}{3} = -1 \Rightarrow b = -3$$

$$(15) a = 0, \quad \frac{2}{b} = -1 \Rightarrow b = -2$$

$$(16) \frac{3}{\sqrt{a}} = 2 \Rightarrow a = \frac{9}{4}$$

$$(17) a = 0, \quad \frac{b}{-2} = -1 \Rightarrow b = 2$$

المجموعة B تمارين موضوعية

- (1) (a) (2) (b) (3) (a) (4) (a)
 (5) (a) (6) (b) (7) (c) (8) (b)
 (9) (d) (10) (a) (11) (a)

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $\frac{5}{3}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} = 0$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2 \sin^2 x} = \frac{1}{2}$

(4) $\frac{0}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x - \cos x} = -1$

(6) -2

(7) 5

(8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \frac{1}{2}$

(9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 - \cos x} = 2$

(10) $\frac{4}{7}$

(11) $\frac{3}{2}$

(12) 1

(13) 3

(14) $\frac{3}{2}$

(15) 2

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)

(2) (b)

(3) (b)

(4) (a)

(5) (b)

(6) (a)

(7) (c)

(8) (d)

(9) (a)

(10) (b)

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $x = 0$ لا تنتمي إلى المجال، إذاً f غير متصلة عند $x = 0$.

(2) $f(1) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \neq 1$

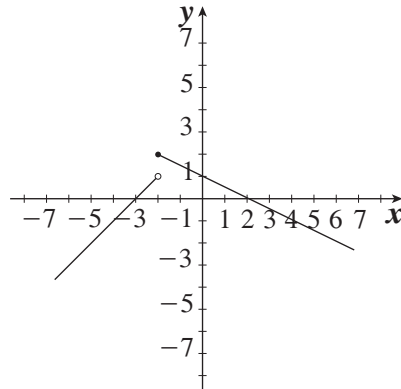
f غير متصلة عند $x = 1$

(3) $f(2) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$

f متصلة عند $x = 2$

(4) لا، لأن النهاية لجهة اليمين لا تساوي النهاية لجهة اليسار عند النقطة صفر.

(5) إجابة ممكنة:



$$(6) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 5$$

إذا الدالة f متصلة عند $x = 0$

$$(7) h(-1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-4)}{x+1} = -5$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} h(x) \neq h(-1)$$

\therefore الدالة h ليست متصلة عند $x = -1$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x-3)}{-x} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x-3)}{x} = -3 = f(0)$$

إذا الدالة f ليست متصلة عند $x = 0$. f متصلة جهة اليمين عند $x = 0$.

$$(9) g(1) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

إذا الدالة متصلة عند $x = -1$.

$$(10) \text{ نحتاج إلى } f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (2ax) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 - 1)$$

$$2a(3) = 3^2 - 1$$

$$6a = 8$$

$$a = \frac{4}{3}$$

$$(11) \text{ الدالة } y = \frac{x-1}{x^2-4x+3} \text{ هي } y = \frac{x-1}{(x-1)(x-3)}, \text{ وهي متصلة على مجالها لأنها دالة نسبية، وتقع نقاط انفصالها}$$

حيث هي غير معرفة. المقام $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ يساوي صفراً عند $x = 1$ ، $x = 3$.

هناك انفصال لا يمكن التخلص منه عند $x = 3$ وانفصال يمكن التخلص منه بإعادة تعريف الدالة عند $x = 1$

$$(12) \text{ الدالة } y = \sqrt[3]{2x-1} \text{ هي دالة متصلة على مجالها } (-\infty, \infty), \text{ لا يوجد نقاط انفصال.}$$

$$(13) x = -1, \text{ يمكن التخلص من الانفصال بجعل } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) = 0$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x+3} & , x \neq -3 \\ -6 & , x = -3 \end{cases} \text{ فالدالة هي: } f(x) = \frac{x^2-9}{x+3} = \frac{(x+3)(x-3)}{x+3} = x-3 , x \neq -3 \quad (14)$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & , x \neq 0 \\ 4 & , x = 0 \end{cases} \text{ الدالة هي: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} = 4(1) = 4 \quad (15) \text{ حيث}$$

$$(16) \begin{cases} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} & , x \neq 4 \\ 4 & , x = 4 \end{cases}$$

المجموعة B تمارين موضوعية

- | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| (1) (b) | (2) (a) | (3) (a) | (4) (a) | (5) (c) |
| (6) (a) | (7) (d) | (8) (d) | (9) (b) | (10) (a) |
| (11) (a) | (12) (d) | (13) (d) | (14) (b) | (15) (c) |

تمرن 1-6

نظريات الاتصال

المجموعة A تمارين مقالية

(1) f متصلة عند $x = 2$

(2) $g(x) = \frac{x+3}{x^2+1}$: دالة حدودية نسبية متصلة عند $x = -1$

$h(x) = \frac{3}{x}$: دالة حدودية نسبية متصلة عند $x = -1$

\therefore دالة الطرح f متصلة عند $x = -1$

(3) $g(x) = x^2 + 3x$: دالة متصلة عند $x = 3$

$h(x) = |x|$: دالة متصلة عند $x = 3$

$\therefore f(x) = g(x) + h(x)$ متصلة عند $x = 3$

(4) الدالة $g(x) = \sqrt[3]{x}$: دالة جذرية متصلة عند $x = -1$

الدالة $h(x) = x^2 + 1$: دالة كثيرة حدود متصلة عند $x = -1$

$$g(-1) = 2 , 2 \neq 0$$

\therefore دالة ناتج القسمة f متصلة عند $x = -1$

(5) نفرض أن $g(x) = x^2 + 5x + 4$

g دالة كثيرة حدود متصلة عند $x = -5$

$$g(-5) = 4 , 4 > 0 \quad \therefore f(x) = \sqrt{g(x)} \text{ متصلة عند } x = -5$$

$$(6) (a) (g \circ f)(x) = g(-x+2) = (-x+2)^2 - 3 = x^2 - 4x + 1$$

$$(b) (g \circ f)(-1) = 6$$

$$(c) (f \circ g)(x) = f(x^2 - 3) = -x^2 + 5$$

$$(d) (f \circ g)(-1) = 4$$

(9) f دالة كثيرة حدود $\therefore f$ متصلة عند $x = -2$

$$x = 5 \text{ متصلة عند } g \iff f(-2) = 5$$

$$\therefore g \circ f \text{ متصلة عند } x = -2$$

(10) نفرض أن: $h(x) = |x|$, $g(x) = \sqrt{x} - 3$

$$\text{حيث } f(x) = (h \circ g) = h(g(x))$$

$$= h(\sqrt{x} - 3)$$

$$= |\sqrt{x} - 3|$$

$$\text{نفرض أن: } g(x) = g_1(x) - g_2(x)$$

$$\text{حيث } g_1(x) = \sqrt{x} , g_2(x) = 3$$

$$g_1 \text{ متصلة عند } x = 4$$

$$g_2 \text{ دالة ثابتة متصلة عند } x = 4$$

$$(1) \text{ الدالة } g(x) = g_1(x) - g_2(x) \text{ متصلة عند } x = 4$$

$$g(4) = \sqrt{4} - 3 = -1$$

$$(2) \text{ دالة مطلق } x \text{ متصلة عند } x = -1$$

$$\text{من (1)، (2) نجد أن: الدالة } f \text{ متصلة عند } x = 4$$

(11) نفرض أن $h(x) = |x - 3|$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ حيث $g(x) = f(x) - h(x)$

$$\text{لتكن } f(x) = \sqrt{f_1(x)} \text{ حيث } f_1(x) = x^2 + 1$$

$$f_1 \text{ متصلة عند } x = 3 , f_1(3) = 9 + 1 = 10 > 0$$

$$\therefore f \text{ متصلة عند } x = 3 \quad (1)$$

$$\text{لتكن: } h_1(x) = x - 3 , h_2(x) = |x|$$

$$\therefore h(x) = (h_2 \circ h_1)(x) = h_2(h_1(x)) = h_2(x - 3) = |x - 3|$$

$$h_1 \text{ متصلة عند } x = 3 , h_1(3) = 0$$

$$h_2 \text{ متصلة عند } x = 0$$

$$\therefore h \text{ متصلة عند } x = 3 \quad (2)$$

$$\text{من (1)، (2) نجد أن } g \text{ دالة متصلة عند } x = 3$$

المجموعة B تمارين موضوعية

- | | | | | | |
|---------|---------|---------|----------|----------|----------|
| (1) (a) | (2) (b) | (3) (a) | (4) (a) | (5) (a) | (6) (d) |
| (7) (a) | (8) (c) | (9) (d) | (10) (a) | (11) (d) | (12) (a) |

تمرّن 7-1

الاتصال على فترة

المجموعة A تمارين مقالية

(1) f دالة كثيرة حدود متصلة عند كل $x \in \mathbb{R}$ $\therefore f$ متصلة على $[-2, 5]$

(2) f دالة حدودية نسبية متصلة عند كل $x \in \mathbb{R}$ $\therefore f$ متصلة على $[1, 3]$

(3) f غير متصلة عند $x = 3$ $\therefore f$ متصلة على الفترة $[0, 3)$ والفترة $(3, 5]$

(4) f غير متصلة عند $x = 1$ ، $x = 4$. $\therefore f$ متصلة على كل من الفترات $[-2, 1)$ ، $(1, 4)$ ، $(4, 6]$

(5) f متصلة على $(-3, 4)$ ، $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -12 \neq f(4)$ ، $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -5 = f(-3)$. $\therefore f$ متصلة على $[-3, 4)$

(6) $f(7) = -3$ ، $\lim_{x \rightarrow 7^-} f(x) = -3$ ، $\lim_{x \rightarrow 7^+} f(x) = -3$

$\therefore f$ متصلة عند $x = 7$

f متصلة على كل من الفترتين $(-\infty, 7)$ ، $(7, \infty)$. $\therefore f$ متصلة على \mathbb{R}

(7) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3 = f(0)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$

$\therefore f$ متصلة على كل من $(-\infty, 0)$ ، $[0, \infty)$

(8) f متصلة على كل من الفترات $(-\infty, -2)$ ، $(-2, 4)$ ، $(4, \infty)$

$f(-2) = -9$ ، $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -9$ ، $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -9$

$\therefore f$ متصلة عند $x = -2$

$f(4) = 9$ ، $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -3$ ، $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 9$

$\therefore f$ متصلة عند $x = 4$ لجهة اليمين.

$\therefore f$ متصلة على كل من $(-\infty, 4)$ ، $[4, \infty)$

(9) f متصلة على كل من الفترات $(-\infty, -4)$ ، $(-4, 1)$ ، $(1, \infty)$

$f(-4) = -2$ ، $\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = -2$ ، $\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = -2$

$\therefore f$ متصلة عند $x = -4$

$f(1) = -2$ ، $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -2$ ، $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -2$

$\therefore f$ متصلة عند $x = 1$

$\therefore f$ متصلة على $(-\infty, \infty)$

(10) $f(1) = b$ ، $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3 + a$

$\therefore a = -3$ ، $b = 0$

(11) $f(-2) = \frac{4-a}{-2-b}$ ، $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = 4$ ، $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \frac{4-a}{-2-b}$

$f(1) = 1$ ، $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$ ، $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1-a}{1-b}$

$\therefore \frac{4-a}{-2-b} = 4$ ، $\frac{1-a}{1-b} = 1$

$\therefore a = b = -4$

(12) $D_f = [-1, 6]$

لتكن $g : g(x) = -x^2 + 5x + 6$ لكل $x \in [0, 4]$

$\therefore f$ متصلة على $[0, 4]$

(13) $D_f = [-2, 2]$ متصلة على مجالها.

(14) $D_f = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

f متصلة على كل من الفترتين $(-\infty, -1]$ ، $[1, \infty)$

(15) f متصلة لكل قيم $x \in \mathbb{R}$

(16) g متصلة لكل قيم $x \in \mathbb{R}$ حيث $g(x) = 3x^2 + 4x - 1$. $\therefore f$ حيث $f(x) = |g(x)|$ متصلة لكل قيم $x \in \mathbb{R}$

المجموعة B تمارين موضوعية

- | | | | |
|---------|----------|----------|---------|
| (1) (b) | (2) (a) | (3) (b) | (4) (b) |
| (5) (b) | (6) (c) | (7) (c) | (8) (b) |
| (9) (d) | (10) (c) | (11) (a) | |

اختبار الوحدة الأولى

$$(1) \lim_{x \rightarrow -2} (x^3 - 2x^2 + 1) = (-2)^3 - 2(-2)^2 + 1 = -15$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{3x^2 - 2x + 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -4} \sqrt{1 - 2x} = 3$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2+x} - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - (2+x)}{2x(2+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{2x(2+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2(2+x)} \right) = -\frac{1}{2(2+0)} = -\frac{1}{4}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{4x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = \frac{1}{2} (1) = \frac{1}{2}$$

(6) اضرب البسط والمقام بـ $\sin x$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \csc x + 1}{x \csc x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right) \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 0} 1 \right) + \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right) = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 1} |x - 2| + 2x = \lim_{x \rightarrow 1} (-x + 2 + 2x) = 3$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{9-x} - 2}{x-5} \times \frac{\sqrt{9-x} + 2}{\sqrt{9-x} + 2} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-1}{\sqrt{9-x} + 2} = -\frac{1}{4}$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{x+1} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1} = \frac{1}{3}$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 7x + 12} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-5)}{(x-3)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-5}{x-4} = 2$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right)}{x \left(1 + \frac{\cos x}{x} \right)} = \frac{1+0}{1+0} = 1$$

(12) (a) f غير معرفة عند $x = 2$ ، $x = -2$

$\therefore f$ غير متصلة عند $x = 2$ ، $x = -2$.

$$(b) g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} & , \quad x \neq 2 \quad , \quad x \neq -2 \\ -\frac{1}{4} & , \quad x = 2 \end{cases}$$

(13) $x = -2$

(14) $x = -2$, $x = 0$

(15) (a) عند $x = -1$

النهاية لجهة اليسار: $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (1) = 1$

النهاية لجهة اليمين: $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (-x) = 1$

$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$

عند $x = 0$

النهاية لجهة اليسار: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$

النهاية لجهة اليمين: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

عند $x = 1$

النهاية لجهة اليسار: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x) = -1$

النهاية لجهة اليمين: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (1) = 1$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ غير موجودة

(b) عند $x = -1$: متصلة لأن النهاية تساوي $f(-1)$

عند $x = 0$ ، غير متصلة لأن النهاية لا تساوي $f(0)$

عند $x = 1$ ، غير متصلة لأن النهاية غير موجودة.

(16) $x = -2$, $x = 2$

(17) لا وجود لنقاط عدم اتصال.

(18) $y = 0$, $x = 1$

(19) $y = 2$, $x = -2$, $x = 0$

(20) $\frac{x^2 + 2x - 15}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 5)}{x - 3} = x + 5$; $k = 8$

(21) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \times \frac{\sin x}{x} \right) = \frac{1}{2}$; $k = \frac{1}{2}$

(22) (a) $(g \circ f)(x) = x^2$

(b) $(g \circ f)(0) = 0$

(c) $(f \circ g)(x) = \sqrt{(x^2 - 5)^2 + 5}$, $(f \circ g)(0) = \sqrt{30}$

$$(23) \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = 1$$

$\therefore f$ متصلة عند $x = 2$

f غير معرفة عند $x = 15$

$\therefore f$ غير متصلة عند $x = 15$

f متصلة على كل من الفترتين: $(-\infty, 15)$, $(15, \infty)$

تمارين إثرائية

$$(1) f \text{ معرفة عند } x = 2, \text{ إذ } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = \sqrt{3(2) - 2} = 2$$

$$(2) (a) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} (f \cdot g)(x) = 1$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} (f \cdot g)(x) = -8$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 2} (f \cdot g)(x) = 0$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 3} g(x) \text{ غير موجودة}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{5}{x-3} = -\infty; \lim_{x \rightarrow 3^+} (f \cdot g)(x) = \infty$$

(3) لنفرض أن هذا غير صحيح. فتكون f سالبة في مكان ما من الفترة وموجبة في مكان آخر. وبنظرية القيمة المتوسطة يكون للدالة f صفراً في مكان ما من هذه الفترة وهذا ما لا يتلاءم مع المعطيات.

(4) بما أن الدالة f هي متصلة، باستخدام نظرية الاتصال فإن الدالة المركبة لدالة متصلة هي متصلة فتكون بذلك $|f|$ متصلة.

$$(5) (a) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} |x^3 - 4x| = |(1)^3 - 4(1)| = |-3| = 3 \text{ النهاية لجهة اليسار}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 2x - 2) = (1)^2 - 2(1) - 2 = -3 \text{ النهاية لجهة اليمين}$$

(b) كلاً، لأن النهايتين من كل جهة مختلفتان.

(c) كلاً.

$$(6) (a) 3x - 4 \geq -\frac{1}{2}; x \geq \frac{7}{6}, D_{f \circ g} = \left[\frac{7}{6}, \infty\right), D_{g \circ f} = \left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$$

$$(b) (f \circ g)(x) = \sqrt{2(3x-4)+1} = \sqrt{6x-7}, (g \circ f)(x) = 3\sqrt{2x+1} - 4$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \infty} (f \circ g)(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} (g \circ f)(x) = \infty$$

(7) نقاط الانفصال -2 , 2 . لا يمكن التخلص من هذا الانفصال لأن $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \pm \infty$ كذلك $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \pm \infty$

(8) (a) فترة الانفصال: $[-2, 2]$

(b) المقارب الأفقي: $y = 1$

المقاربات الرأسية: $x = -2$, $x = 2$

(9) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 5$, $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4) = 5$

$\therefore f$ متصلة عند $x = 4$

$f(18) = \frac{333}{5} = \lim_{x \rightarrow 18^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 18^+} f(x) = -36$

$\therefore f$ غير متصلة عند $x = 18$

$\therefore f$ متصلة على $(-\infty, 18]$, $(18, \infty)$

(10) -4

(11) 0

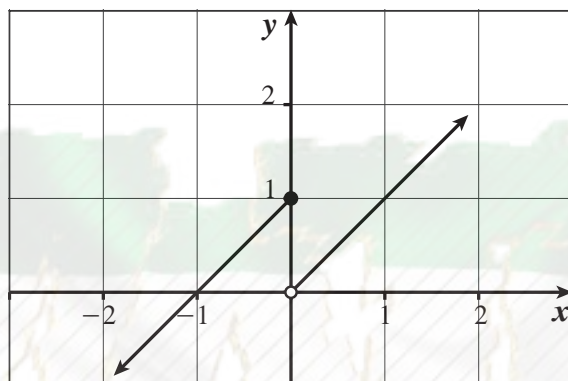
(12) $3x^2$

(13) $\frac{1}{2}$

(14) 0

(15) ∞

(16) (a)



(b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ غير موجودة

(17) (a) $x = -2$, لا يمكن التخلص منه

(b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -2$, $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 1$

عند $x = 0$ انفصال لا يمكن التخلص منه.

(c) $x = 2$, $x = 3$

يمكن التخلص من الانفصال عند $x = 2$.

عند $x = 3$ انفصال لا يمكن التخلص منه.

(d) $x = 1$, $x = -1$

يمكن التخلص من الانفصال عند $x = 1$.

عند $x = -1$ انفصال لا يمكن التخلص منه.

المجموعة A تمارين مقالية

$$(1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{1+h} = -1$$

$$(2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 4(1+h) + 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h-2)}{h} = -2$$

$$(3) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2+h+2}{2+h-3} + 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5h}{h(h-1)} = -5$$

$$(4) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 - (1+h)^2 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-2-h)}{h} = -2$$

$$(5) (a) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{2}{a+h} - \frac{2}{a}}{h} = \frac{-2h}{ah(a+h)} = \frac{-2}{a(a+h)}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2}{a(a+h)} = \frac{-2}{a^2}$$

(b) يتغير المماس ولكن يبقئ ميله سالباً مهما كانت قيمة a .

المجموعة B تمارين موضوعية

$$(1) (b) \quad (2) (a) \quad (3) (b) \quad (4) (b) \quad (5) (a)$$

$$(6) (b) \quad (7) (c) \quad (8) (b) \quad (9) (c)$$

المجموعة A تمارين مقالية

$$(1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{3+h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h(3+h)} = -\frac{1}{3}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = 6$$

$$(3) f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + x + 1) = 3$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{x - 1} = 1$$

$$\therefore f'_-(1) \neq f'_+(1)$$

\therefore ليس للدالة f مشتقة عند $x = 1$.

$$(4) f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+3)}{x-1} = 4$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x - 1 - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4(x-1)}{x-1} = 4$$

$$\therefore f'_-(1) = f'_+(1)$$

$\therefore f$ قابلة للاشتقاق عند $x = 1$ و $f'(1) = 4$.

$$(5) \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = |3 - 3| = 0 ; f(3) = 0$$

\therefore الدالة f متصلة عند $x = 3$.

$$f'_+(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x - 3 - 0}{x - 3} = 1$$

$$f'_-(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-x + 3 - 0}{x - 3} = -1$$

$$\therefore f'_-(3) \neq f'_+(3)$$

$\therefore f$ غير قابلة للاشتقاق عند $x = 3$.

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 ; \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$$

$\therefore f$ غير متصلة عند $x = 0$ وبالتالي f غير قابلة للاشتقاق عند $x = 0$.

$$(7) g'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x+1)^2 - 1}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x+2)}{x} = 2$$

$$g'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + 1 - 1}{x} = 2$$

$$\therefore g'(0) = 2$$

$$(8) f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x + 2) = 4$$

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4x - 4 - 4}{x - 2} = 4$$

$$\therefore f'(2) = 4$$

$$(9) f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + x + 1) = 3$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x + k - 1}{x - 1}$$

$\therefore f$ قابلة للاشتقاق عند $x = 1$.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x + k - 1}{x - 1} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3\left(x + \frac{k-1}{3}\right)}{x - 1} = 3 ; \frac{k-1}{3} = -1 ; k = -2$$

(10) (a) $f(1) = a + b$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 ; \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a + b$$

$$\therefore a + b = 2 \quad (1)$$

(b) $2a + b = -1 \quad (2)$

من (1) و (2) نحصل على: $a = -3$, $b = 5$.

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)

(2) (b)

(3) (b)

(4) (b)

(5) (b)

(6) (b)

(7) (b)

(8) (a)

(9) (d)

(10) (a)

(11) (d)

(12) (b)

تمرّن 2-3

قواعد الاشتقاق

المجموعة A تمارين مقالية

$$(1) \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{3} x^3 \right) - \frac{d}{dx} (x) = x^2 - 1$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (2x) + \frac{d}{dx} (1) = 2 + 0 = 2$$

$$(3) \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (x^4) - \frac{d}{dx} (7x^3) + \frac{d}{dx} (2x^2) + \frac{d}{dx} (15) \\ = 4x^3 - 21x^2 + 4x + 0 = 4x^3 - 21x^2 + 4x$$

$$(4) \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (4x^{-2}) - \frac{d}{dx} (8x) + \frac{d}{dx} (1) \\ = -8x^{-3} - 8 + 0 = -8x^{-3} - 8$$

$$(5) f'(x) = (2x - 5)(x^3 + 2x^2 + 1) + (3x^2 + 4x)(x^2 - 5x + 6) \\ = 5x^4 - 12x^3 - 12x^2 + 26x - 5$$

$$(6) f(x) = 10x^5 - 2x^7 + 20 - 4x^2 \\ f'(x) = 50x^4 - 14x^6 - 8x$$

$$(7) (a) \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2 + 3}{x} \right) = \frac{x \frac{d}{dx} (x^2 + 3) - (x^2 + 3) \frac{d}{dx} (x)}{x^2} \\ = \frac{x(2x) - (x^2 + 3)}{x^2} = \frac{x^2 - 3}{x^2}$$

$$(b) \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2+3}{x} \right) = \frac{d}{dx} (x + 3x^{-1}) = 1 - 3x^{-2} = 1 - \frac{3}{x^2}$$

متكافئة مع إجابة السؤال (a).

$$(8) \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{1-x^3} \right) = \frac{(1-x^3)(2x) - x^2(-3x^2)}{(1-x^3)^2} = \frac{x^4+2x}{(1-x^3)^2}$$

$$(9) \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right) = \frac{(\sqrt{x}+1)\frac{1}{2\sqrt{x}} - (\sqrt{x}-1)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}+1) - (\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{2}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$$

$$\frac{d}{dx}(uv) = u(0)v'(0) + v(0)u'(0) = (5)(2) + (-1)(-3) = 13 : x = 0 \text{ عند (a) (10)}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v(0)u'(0) - u(0)v'(0)}{[v(0)]^2} = \frac{(-1)(-3) - (5)(2)}{(-1)^2} = -7 : x = 0 \text{ عند (b)}$$

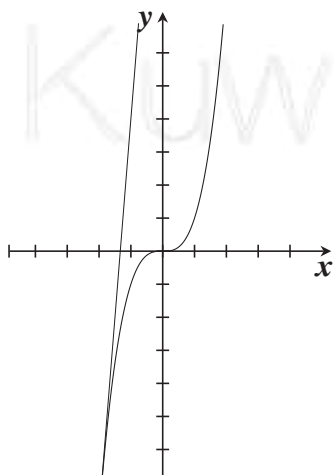
$$\frac{d}{dx} \left(\frac{v}{u} \right) = \frac{u(0)v'(0) - v(0)u'(0)}{[u(0)]^2} = \frac{(5)(2) - (-1)(-3)}{(5)^2} = \frac{7}{25} : x = 0 \text{ عند (c)}$$

$$\frac{d}{dx} (7v - 2u) = 7v'(0) - 2u'(0) = 7(2) - 2(-3) = 20 : x = 0 \text{ عند (d)}$$

$$(11) f'(x) = 3x^2 + 1 ; f'(1) = 4 ; y = 4x - 2$$

$$(12) y'(x) = 3x^2$$

$$y'(-2) = 12$$



ميل خط المماس 12 ويمر هذا الخط عبر $(-2, 8)$ ، معادلته هي:
 $y = 12x + 16$ أو $y = 12(x+2) - 8$ التقاطع مع محور السينات

هو $-\frac{4}{3}$ والتقاطع مع محور الصادات هو 16.

$$(13) f'(x) = \frac{-16x}{(4+x^2)^2} ; f'(2) = \frac{-32}{64} = -\frac{1}{2}$$

معادلة المماس: $y = -\frac{1}{2}x + 2$

معادلة الناظم: $y = 2x - 3$

$$(14) \quad f'(x) = \begin{cases} 1 + \frac{4}{x^2} & : x \geq 2 \\ 2x & : x < 2 \end{cases}$$

مجال f' : $(-\infty, \infty)$

المجموعة B تمارين موضوعية

- | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| (1) (b) | (2) (a) | (3) (b) | (4) (a) | (5) (a) |
| (6) (b) | (7) (b) | (8) (c) | (9) (c) | (10) (d) |
| (11) (c) | (12) (d) | (13) (d) | (14) (c) | |

تمرّن 4-2

مشتقات الدوال المثلثية

المجموعة A تمارين مقالية

- (1) $\frac{d}{dx}(2 \sin x - \tan x) = 2 \cos x - \sec^2 x$
- (2) $\frac{d}{dx}(4 - x^2 \sin x) = \frac{d}{dx}(4) - \left[x^2 \frac{d}{dx}(\sin x) + (\sin x) \frac{d}{dx}(x^2) \right]$
 $= 0 - [x^2 \cos x + (\sin x)(2x)]$
 $= -x^2 \cos x - 2x \sin x$
- (3) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\cot x}{1 + \cot x}\right) = \frac{(1 + \cot x) \frac{d}{dx}(\cot x) - (\cot x) \frac{d}{dx}(1 + \cot x)}{(1 + \cot x)^2}$
 $= \frac{(1 + \cot x)(-\csc^2 x) - (\cot x)(-\csc^2 x)}{(1 + \cot x)^2}$
 $= -\frac{\csc^2 x}{(1 + \cot x)^2}$
- (4) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{1 + \sin x}\right) = \frac{(1 + \sin x) \frac{d}{dx}(\cos x) - (\cos x) \frac{d}{dx}(1 + \sin x)}{(1 + \sin x)^2}$
 $= \frac{(1 + \sin x)(-\sin x) - (\cos x)(\cos x)}{(1 + \sin x)^2}$
 $= \frac{-\sin x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(1 + \sin x)^2} = \frac{-(1 + \sin x)}{(1 + \sin x)^2}$
 $= -\frac{1}{1 + \sin x}$
- (5) $y'(x) = \frac{x \frac{d}{dx}(\tan x) - \tan x \frac{d}{dx}(x)}{x^2}$

$$= \frac{x \sec^2 x - \tan x}{x^2}$$

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{\pi}{4}(\sqrt{2})^2 - 1}{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2} = \frac{8\pi - 16}{\pi^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \frac{1}{\cos x} \tan x \quad (6)$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x \quad \text{تساوي 0 عند } x = 0, \text{ ميل خط المماس هو 0.}$$

$$\begin{aligned} (7) \quad y'(x) &= \frac{d}{dx} (1 + \sqrt{2} \csc x + \cot x) \\ &= 0 + \sqrt{2}(-\csc x \cot x) + (-\csc^2 x) \\ &= -\sqrt{2} \csc x \cot x - \csc^2 x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -\sqrt{2} \csc \frac{\pi}{4} \cot \frac{\pi}{4} - \csc^2 \frac{\pi}{4} \\ &= -\sqrt{2}(\sqrt{2})(1) - (\sqrt{2})^2 \\ &= -2 - 2 = -4 \end{aligned}$$

ميل خط المماس -4 ويمر هذا الخط عبر $P\left(\frac{\pi}{4}, 4\right)$
المعادلة هي: $y = -4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 4$ أو $y = -4x + \pi + 4$

المجموعة B تمارين موضوعية

- (1) (a) (2) (b) (3) (b) (4) (a) (5) (c)
(6) (d) (7) (d) (8) (a) (9) (c)

تمرن 2-5

قاعدة السلسلة

المجموعة A تمارين مقالية

$$(1) \quad (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = (2)(6x) = 12x$$

$$(2) \quad (f \circ g)'(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2} \times 2x = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$(3) \quad (f \circ g)'(x) = 10(x^{15}) \times 15(x^{14}) = 150x^{29}$$

$$(4) \quad (f \circ g)'(1) = f'(g(1)) \cdot g'(1) = (5)(1)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$(5) \quad (f \circ g)'(x) = \left(1 + \frac{2 \sin \frac{\pi x}{4}}{\cos^3 \frac{\pi x}{4}}\right) \times \pi \quad ; \quad (f \circ g)' \left(\frac{1}{4}\right) = \left(1 + \frac{2 \sin \left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^3 \left(\frac{\pi}{4}\right)}\right) \times \pi = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{4}}\right) \times \pi = 5\pi$$

$$(6) (f \circ g)'(x) = \frac{2(-(10x^2 + x + 1)^2 + 1)}{((10x^2 + x + 1)^2 + 1)^2} \times (20x + 1) ; (f \circ g)'(0) = 0$$

$$(7) (a) \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= (-\sin u)(6)$$

$$= -6 \sin u = -6 \sin(6x + 2)$$

$$(b) \frac{dy}{dx} = 15u^2 \times 6x = 90(3x^2 + 1)^2 \times x$$

$$(8) \frac{ds}{dt} = \frac{3\pi}{2} \times \cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right) - \frac{7\pi}{4} \times \sin\left(\frac{7\pi}{4}t\right)$$

$$(9) \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \tan(2x - x^3) = [\sec^2(2x - x^3)] \frac{d}{dx} (2x - x^3)$$

$$= [\sec^2(2x - x^3)](2 - 3x^2) = (2 - 3x^2) \sec^2(2x - x^3)$$

$$(10) \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \sin(3x + 1) = [\cos(3x + 1)] \frac{d}{dx} (3x + 1)$$

$$= [\cos(3x + 1)](3) = 3 \cos(3x + 1)$$

$$(11) \frac{dy}{dx} = 2(\tan x + \sec x)(\sec^2 x + \sec x \times \tan x)$$

$$(12) \frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\left(\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}\right) = \frac{4(x-1)}{(x+1)^3}$$

$$(13) \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (1 - 6x)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} (1 - 6x)^{\left(\frac{2}{3}-1\right)} \frac{d}{dx} (1 - 6x)$$

$$= \frac{2}{3} (-6)(1 - 6x)^{-\frac{1}{3}}$$

$$= -4(1 - 6x)^{-\frac{1}{3}}$$

$$(14) \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)$$

$$= \frac{(\sqrt{1+x^2}) \frac{d}{dx} (x) - x \frac{d}{dx} (\sqrt{1+x^2})}{(\sqrt{1+x^2})^2}$$

$$= \frac{(\sqrt{1+x^2})(1) - x \left(\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \right) \frac{d}{dx} (1+x^2)}{1+x^2} = \frac{\sqrt{1+x^2} - x \left(\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \right) (2x)}{1+x^2}$$

$$= \frac{(1+x^2) - x^2}{(1+x^2)(\sqrt{1+x^2})} = (1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

(15) تستخدم في الخطوة الأخيرة المتطابقة $2 \sin a \cos a = \sin 2a$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (\sin^2(3x - 2))$$

$$= 2 \sin(3x - 2) \frac{d}{dx} \sin(3x - 2) = 2 \sin(3x - 2) \cos(3x - 2) \frac{d}{dx} (3x - 2)$$

$$= 2 \sin(3x - 2) \cos(3x - 2) (3) = 6 \sin(3x - 2) \cos(3x - 2)$$

(16) (a) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$; $f'(2) = \frac{2}{3}$

معادلة المماس عند النقطة (2,3) هي: $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$

(b) معادلة الناظم: $y = -\frac{3}{2}x + 6$

(17) (a) $g'(x) = 24x^2(x^3+1)^7$

$g'(0) = 0$

معادلة المماس عند النقطة (0,1) هي: $y = 1$

(b) معادل الناظم: $x = 0$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b) (2) (a) (3) (b) (4) (a) (5) (d)

(6) (b) (7) (d) (8) (b) (9) (c)

تمرن 2-6

المشتقات ذات الرتب العليا والاشتقاق الضمني

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $\frac{dy}{dx} = 8x^3 - 3x^2 + 2x - 3$; $\frac{d^2y}{dx^2} = 24x^2 - 6x + 2$; $\frac{d^3y}{dx^3} = 48x - 6$

(2) $\frac{dy}{dx} = -5x^4 + 6x^2 - 4$; $\frac{d^2y}{dx^2} = -20x^3 + 12x$; $\frac{d^3y}{dx^3} = -60x^2 + 12$

(3) $\frac{dy}{dx} = \frac{-3}{(x-2)^2}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6}{(x-2)^3}$; $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{-18}{(x-2)^4}$

(4) $\frac{dy}{dx} = 2 \cos 2x$; $\frac{d^2y}{dx^2} = -4 \sin 2x$; $\frac{d^3y}{dx^3} = -8 \cos 2x$

(5) $\frac{dy}{dx} = -4 \sin 4x$; $\frac{d^2y}{dx^2} = -16 \cos 4x$; $\frac{d^3y}{dx^3} = 64 \sin 4x$

(6) $\frac{dy}{dx} = 2 \sin x \cos x$; $\frac{d^2y}{dx^2} = 2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x$; $\frac{d^3y}{dx^3} = -4 \cos x \sin x - 4 \sin x \cos x$

(7) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+4}{2y} = \frac{x+2}{y}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y - y'(x+2)}{y^2} = \frac{y^2 - (x+2)^2}{y^3}$

(8) $2ydy - 4dy = dx$; $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y-4}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2}{(2y-4)^3}$

(9) $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y' = 0$; $\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}$

$$(10) \quad 2x + 2y + 2xy' - 2yy' = 0 ; \quad y' = 5$$

معادلة المماس: $y = 5x - 7$

معادلة الناطم: $y = -\frac{1}{5}x + \frac{17}{5}$

$$(11) \quad y' = -\frac{6}{5}$$

معادلة المماس: $y = -\frac{6}{5}x - \frac{6}{5}$

معادلة الناطم: $y = \frac{5}{6}x + \frac{5}{6}$

$$(12) \quad y' = -\frac{\pi}{2}$$

معادلة المماس: $y = -\frac{\pi}{2}x + \pi$

معادلة الناطم: $y = \frac{2}{\pi}x + \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}$

$$(13) \quad y' = A \cos x - B \sin x$$

$$y'' = -A \sin x - B \cos x$$

$$y'' - y = -2A \sin x - 2B \cos x = \sin x \implies A = -\frac{1}{2} ; B = 0$$

$$(14) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-(\sin x + \sec x) - \sin x \tan x}{(1 + \tan x)^2} ; \quad y = -x + 1$$

$$(15) \quad f'(x) = \frac{-1}{2x\sqrt{x}} ; \quad f''(x) = \frac{3}{4x^2\sqrt{x}}$$

$$4x^2 f''(x) - 3f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{x}} = 0$$

$$(16) \quad f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2} ; \quad f''(x) = \frac{2(3x^2+1)}{(1-x^2)^3} ; \quad f'''(x) = \frac{24x(1+x^2)}{(1-x^2)^4}$$

$$(1-x^2) f'''(x) - 6x f''(x) - 6f'(x) = \frac{24x + 24x^3 - 36x^3 - 12x - 12x + 12x^3}{(1-x^2)^3} = 0$$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)

(2) (a)

(3) (a)

(4) (c)

(5) (d)

(6) (a)

(7) (c)

اختبار الوحدة الثانية

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(x^5 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x \right) = 5x^4 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$$

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (3 - 7x^3 + 3x^7) = -21x^2 + 21x^6$$

$$(3) \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2 \sin x \cos x)$$

$$= 2(\sin x) \frac{d}{dx}(\cos x) + 2(\cos x) \frac{d}{dx}(\sin x) = -2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x$$

حل بدیل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2 \sin x \cos x) = \frac{d}{dx} \sin 2x = (\cos 2x)(2)$$

$$= 2 \cos 2x$$

$$(4) \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right) = \frac{(2x-1)(2) - (2x+1)(2)}{(2x-1)^2} = -\frac{4}{(2x-1)^2}$$

$$(5) \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} [\cos(1-2t)] = -\sin(1-2t)(-2) = 2 \sin(1-2t)$$

$$(6) \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\cot \left(\frac{2}{t} \right) \right] = -\csc^2 \left(\frac{2}{t} \right) \frac{d}{dt} \left(\frac{2}{t} \right) = -\csc^2 \left(\frac{2}{t} \right) \left(-\frac{2}{t^2} \right) = \frac{2}{t^2} \csc^2 \left(\frac{2}{t} \right)$$

$$(7) \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\sqrt{x} + 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = \frac{d}{dx} \left(x^{\frac{1}{2}} + 1 + x^{-\frac{1}{2}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$$

$$(8) \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (x\sqrt{2x+1}) = (x) \left(\frac{1}{2\sqrt{2x+1}} \right) (2) + (\sqrt{2x+1})(1)$$

$$= \frac{x + (2x+1)}{\sqrt{2x+1}} = \frac{3x+1}{\sqrt{2x+1}}$$

$$(9) \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{\sin(5x)} \right) = \frac{d}{dx} (x^2 \csc 5x)$$

$$= (x^2)(-\csc 5x \cot 5x)(5) + (\csc 5x)(2x) = -5x^2 \csc 5x \cot 5x + 2x \csc 5x$$

$$(10) (a) \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \sqrt{x^2 - 2x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 2x}} (2x - 2) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3-1}{\sqrt{3^2 - 2(3)}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad , \quad y = \sqrt{3^2 - 2(3)} = \sqrt{3} \quad \text{عند } x=3 \text{ نحصل على:}$$

$$y = \frac{2}{\sqrt{3}}x - \sqrt{3} \quad \text{أو} \quad y = \frac{2}{\sqrt{3}}(x-3) + \sqrt{3} \quad \text{خط المماس:}$$

$$(b) \text{ الخط العمودي (الناظم): } y = -\frac{\sqrt{3}}{2}(x-3) + \sqrt{3} \quad \text{أو} \quad y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$(11) (a) \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (4 + \cot x - 2 \csc x) = -\csc^2 x + 2 \csc x \cot x$$

$$y = 4 + \cot \frac{\pi}{2} - 2 \csc \frac{\pi}{2} = 4 + 0 - 2 = 2 \quad \text{عند } x = \frac{\pi}{2} \text{ نحصل على:}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\csc^2 \frac{\pi}{2} + 2 \csc \frac{\pi}{2} \cot \frac{\pi}{2} = -1 + 2(1)(0) = -1$$

$$y = -x + \frac{\pi}{2} + 2 \quad \text{أو} \quad y = -1 \left(x - \frac{\pi}{2} \right) + 2 \quad \text{خط المماس:}$$

(b) الخط العمودي (الناظم): $y = 1\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$ أو $y = x - \frac{\pi}{2} + 2$

$$(12) f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1}{x - 1} = 1$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2 - x - 1}{x - 1} = -1$$

$$\therefore f'_-(1) \neq f'_+(1)$$

$\therefore f$ غير قابلة للاشتقاق عند $x = 1$

$$(13) \frac{dy}{dx} = 12x^3 - 10x + 2 ; \frac{d^2y}{dx^2} = 36x^2 - 10 ; \frac{d^3y}{dx^3} = 72x$$

$$(14) \frac{dy}{dx} = 3 \cos 3x ; \frac{d^2y}{dx^2} = -9 \sin 3x ; \frac{d^3y}{dx^3} = -27 \cos 3x$$

$$(15) \frac{dy}{dx} = -2 \sin 4x ; \frac{d^2y}{dx^2} = -8 \cos 4x ; \frac{d^3y}{dx^3} = 32 \sin 4x$$

$$(16) \frac{dy}{dx} = 9x^2 - 16x + 5 ; \frac{d^2y}{dx^2} = 18x - 16 ; \frac{d^3y}{dx^3} = 18$$

$$(17) \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{6y - 1}$$

$$(18) \frac{dy}{dx} = -\frac{y^2 + 2x + 2}{2xy - 3}$$

$$(19) y' = -2$$

معادلة المماس: $y = -2x + 3$

معادلة الناظم: $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

تمارين إثرائية

(1) يتقاطع منحنى الدالة مع محور السينات إذا $-x^2 + 5x - 6 = 0$ ، فنحصل على $x = 2$ أو $x = 3$ ، عند $x = 2$

الميل = 1، عند $x = 3$ الميل = -1

$$(2) s(t) = t^3 - 3t^2$$

السرعة المتجهة: $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t$

$$v(2) = 12 - 12 = 0 \text{ m/s}$$

$$a(t) = V'(t) = 6t - 6$$

$$a(2) = 6(2) - 6 = 6 \text{ m/s}^2$$

$$(3) \frac{dy}{dx} = \frac{2x\sqrt{4-x^2} + \frac{2x}{2\sqrt{4-x^2}} \times x^2}{4-x^2} = \frac{2x(4-x^2) + x^3}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}} = \frac{8x - 2x^3 + x^3}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{8x - x^3}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(4) يتقاطع منحنى الدالة مع محور الصادات عند النقاط $y = 4$ ، $y = 0$ ، $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y-4}$ ، عند النقطة $(0, 0)$ يكون الميل $-\frac{1}{4}$ ، عند النقطة $(0, 4)$ يكون الميل $\frac{1}{4}$.

$$(5) \frac{du}{dx} = \frac{2x}{3(x^2+2)^{\frac{2}{3}}} , \frac{dy}{du} = \frac{4u}{(u^2+1)^2}$$

أي $\frac{du}{dx} = \frac{2x}{3u^2}$ باستخدام قاعدة السلسلة:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \frac{4u}{(u^2+1)^2} \times \frac{2x}{3u^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8x}{3u(u^2+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8x}{3(x^2+2)^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{(x^2+2)^2} + 3\sqrt[3]{x^2+2} + 6x^2 + 12}$$

$$(6) \frac{dy}{dx} = -\frac{2y \sin 2x + \sin 2y}{2x \cos 2y - \cos 2x}$$

معادلة المماس: $y = 2x$

معادلة النظم: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5\pi}{8}$

(7) الدالة g متصلة عند $x = 0$ $\therefore b = 1$

$$g'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + 1 - 1}{x} = 1$$

$$g'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

$$\therefore g'_-(1) \neq g'_+(1)$$

$\therefore g$ غير قابلة للاشتقاق عند $x = 0$.

$$(8) \begin{aligned} y' &= 2 \cos x \cos x - 2 \sin x \sin x \\ &= 2(\cos^2 x - \sin^2 x) \\ &= 2 \cos 2x \end{aligned}$$

$$(9) AC = \sqrt{x^2 + 1600} \quad x \in (0, 50)$$

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + 1600}}{45} + \frac{50 - x}{75}$$

$$t' = \frac{x}{45 \times \sqrt{x^2 + 1600}} - \frac{1}{75}$$

$$t' = 0 : 5x = 3\sqrt{x^2 + 1600}$$

$$25x^2 = 9(x^2 + 1600)$$

$$16x^2 = 9 \times 1600$$

$$x^2 = 900$$

$$x = 30$$

$$t(30) = \frac{\sqrt{900 + 1600}}{45} + \frac{50 - 30}{75} \simeq 83 \text{ min}$$

$$t(0) = \frac{\sqrt{0 + 1600}}{45} + \frac{50 - 0}{75} \simeq 93 \text{ min}$$

$$t(50) = \frac{\sqrt{2500 + 1600}}{45} + \frac{50 - 50}{75} \simeq 85 \text{ min}$$

يستطيع السائق الوصول إلى الموقع D بأقل وقت ممكن إذا سار بخط مستقيم في الصحراء من نقطة A إلى نقطة C على الطريق الرملي (التي تبعد 30 km عن نقطة B)، ثم يسير على الطريق المعبد من C إلى D فيصل بحوالي 83 دقيقة وبالتالي أقل من 85 دقيقة ويستطيع الحصول على الجائزة.

$$(10) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2x + 5y}{5x - 5y^4}$$

$$(11) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2y - 3}{2x - 4}$$

$$-\frac{11}{2} = \text{الميل}$$

$$y = \frac{2}{11}x - \frac{46}{11} \quad \text{معادلة الناظم}$$

$$(12) \quad \frac{dc}{dt} = \frac{dc}{dp} \times \frac{dp}{dt} = \left(\frac{1}{2} (0.5p^2 + 17)^{-\frac{1}{2}} (0.5)(2p) \right) (0.2t)$$

$$(a) \quad \text{إذا كان } t = 3 \text{ فإن } P(3) = 3.1 + 0.1 \times 3^2 = 4$$

$$\left. \frac{dc}{dt} \right|_{t=3} = 0.24 \quad \text{معدل التغير يصبح}$$

إن معدل التغير بعد مرور 3 سنوات لأول أكسيد الكربون هو 0.24 جزء من مليون وهو يتزايد لأن إشارة $\frac{dc}{dt}$ موجبة.

$$(b) \quad \text{عدد السكان 8 000 يعني أن } p = 8 \text{ وبالتالي } 8 = 3.1 + 0.1t^2 \text{ نحصل على } t = 7$$

$$\left. \frac{dc}{dt} \right|_{t=7} = 0.8$$

إن معدل التغير بعد مرور 7 سنوات لعدد سكان 8 000 هو 0.8 جزء من مليون.

(13) لتكن $A(t, 9 - t^2)$ نقطة على منحنى الدالة.

$$y'_A = -2t$$

$$\text{معادلة المماس عند } A: y = -2tx + t^2 + 9$$

$$\text{يمر هذا المماس بالنقطة } (1, 12) \text{ عندما } 12 = -2t(1) + t^2 + 9$$

$$t^2 + 9t - 14 = 0$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$t = -1, \quad t = 3$$

يمر مماسان بالنقطة $(1, 12)$.

المجموعة A تمارين مقالية

- (1) قيمة عظمى مطلقة عند $(0, 5)$ ، لا توجد قيم صغرى.
- (2) قيمة عظمى مطلقة عند $(1, 2)$ ، قيمة صغرى مطلقة عند $(0, -1)$
- (3) القيمة العظمى عند $x = b$ والقيمة الصغرى عند $x = c_2$
- تطبق نظرية القيمة القصوى لأن f متصلة على الفترة $[a, b]$ ، إذاً كلتا القيمتين العظمى والصغرى موجودتان.
- (4) لا توجد قيمة عظمى أو صغرى، لا تطبق نظرية القيمة القصوى لأن الدالة غير متصلة.
- (5) قيمة عظمى عند $x = c$ وقيمة صغرى عند $x = a$ ، لا تطبق نظرية القيمة القصوى لأن الدالة غير متصلة.
- (6) قيمة عظمى عند $x = a$ وقيمة صغرى عند $x = c$ ، لا تطبق نظرية القيمة القصوى لأن الدالة غير متصلة على فترة مغلقة.
- (7) النقاط الحرجة: $(0, 0)$ ، $(-\frac{4}{3}, \frac{32}{27})$
- (8) النقطة الحرجة: $(2, 2)$
- (9) النقاط الحرجة: $(0, 3)$ ، $(1, 4)$
- (10) قيمة عظمى مطلقة عند هي 9 وقيمة صغرى مطلقة هي 1
- (11) قيمة عظمى مطلقة هي 1.933 تقريباً وقيمة صغرى مطلقة هي -1.515 تقريباً
- (12) قيمة عظمى مطلقة هي 0 وقيمة صغرى مطلقة هي $-\frac{1}{2}$
- (13) قيمة عظمى مطلقة هي 2 وقيمة صغرى مطلقة هي 0
- (14) قيمة عظمى مطلقة هي $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ وقيمة صغرى مطلقة هي 1

المجموعة B تمارين موضوعية

- | | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| (1) (b) | (2) (b) | (3) (a) | (4) (b) | (5) (b) | (6) (b) |
| (7) (c) | (8) (b) | (9) (d) | (10) (c) | (11) (a) | (12) (d) |
| (13) (c) | (14) (b) | (15) (d) | (16) (a) | | |

المجموعة A تمارين مقالية

- (1) f متصلة على الفترة $[0, 1]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة $(0, 1)$

$$2c + 2 = \frac{2 - (-1)}{1} ; c = \frac{1}{2}$$

يوجد مماس لمنحنى الدالة f عند $x = \frac{1}{2}$ يوازي القاطع المار بالنقطتين $(0, -1)$, $(1, 2)$

(2) f متصلة على الفترة $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

$$1 - \frac{1}{c^2} = 0 ; c = 1$$

يوجد مماس لمنحنى الدالة f عند $x = 1$ يوازي القاطع المار بالنقطتين $\left(2, \frac{5}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ وأيضاً يوازي محور السينات.

(3) متزايدة على الفترة $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$ ومتناقصة على الفترة $\left(\frac{5}{2}, \infty\right)$

(4) متزايدة على كل من الفترتين $(-\infty, 0)$, $(6, \infty)$ ومتناقصة على الفترة $(0, 6)$

(5) متناقصة على الفترة $(0, \infty)$ ومتزايدة على الفترة $(-\infty, 0)$

(6) متزايدة على كل من الفترتين $(-\infty, -2)$, $(2, \infty)$ ومتناقصة على الفترة $(-2, 2)$

(7) متزايدة على كل من الفترتين $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$ ومتناقصة على كل من الفترتين $(-1, 0)$, $(0, 1)$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (b)

(2) (b)

(3) (a)

(4) (a)

(5) (b)

(6) (c)

(7) (b)

(8) (d)

تمرّن 3-3

ربط المشتقة الأولى f' والمشتقة الثانية f'' بمنحنى الدالة f

المجموعة A تمارين مقالية

(1) $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 = 3(x-2)(x-4)$

النقاط الحرجة هي: $(2, 20)$, $(4, 16)$

جدول التغير:

	$-\infty$	2	4	∞
الفترات	$(-\infty, 2)$	$(2, 4)$	$(4, \infty)$	
إشارة f'	++	--	++	
سلوك الدالة f	↗	↘	↗	




القيمة العظمى المحلية هي: $f(2) = 20$

القيمة الصغرى المحلية هي: $f(4) = 16$

الدالة تتزايد على الفترة $(-\infty, 2)$ والفترة $(4, \infty)$ وتتناقص على الفترة $(2, 4)$

$$(2) \quad g'(x) = -6x^2 + 12x = -6x(x-2)$$

النقاط الحرجة هي: $(0, -3)$, $(2, 5)$
جدول التغير:

	$-\infty$	0	2	∞
الفترات	$(-\infty, 0)$		$(0, 2)$	$(2, \infty)$
إشارة g'	--		++	--
سلوك الدالة g				





القيمة العظمى المحلية هي: $g(2) = 5$

القيمة الصغرى المحلية هي: $g(0) = -3$

الدالة تتزايد على الفترة $(0, 2)$ وتتناقص على الفترة $(-\infty, 0)$ والفترة $(2, \infty)$.

$$(3) \quad h'(x) = -4x^3 - 12x^2 - 8x = -4x(x+1)(x+2)$$

النقاط الحرجة هي: $(-2, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$
جدول التغير:

	$-\infty$	-2	-1	0	∞
الفترات	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, \infty)$	
إشارة h'	++	--	++	--	
سلوك الدالة h					




القيمة العظمى المحلية هي: $h(-2) = 1$, $h(0) = 1$

القيمة الصغرى المحلية هي: $h(-1) = 0$

الدالة تتزايد على الفترة $(-\infty, -2)$ والفترة $(-1, 0)$ وتتناقص على الفترة $(-2, -1)$ والفترة $(0, \infty)$

$$(4) \quad g'(x) = 6x^3 + 6x^2 - 6x - 6 = 6(x+1)^2(x-1)$$

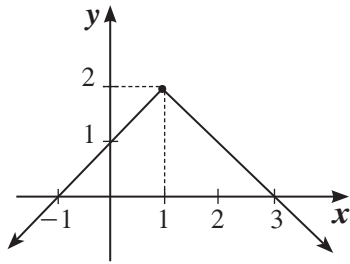
النقاط الحرجة هي: $(-1, 7)$, $(1, -1)$
جدول التغير:

	$-\infty$	-1	1	∞
الفترات	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$	
إشارة g'	--	--	++	
سلوك الدالة g				

القيمة الصغرى المحلية هي: $g(1) = -1$

الدالة تتزايد على الفترة $(1, \infty)$ وتتناقص على الفترة $(-\infty, 1)$

$$(5) \quad h(x) = 2 - |x - 1| = \begin{cases} x + 1 & : x < 1 \\ -x + 3 & : x \geq 1 \end{cases}$$



النقطة الحرجة هي: $(1, 2)$

القيمة العظمى المحلية هي: $h(1) = 2$

الدالة تتزايد على الفترة $(-\infty, 1)$ وتتناقص على الفترة $(1, \infty)$

$$(6) \quad f'(x) = \frac{-2}{(x-2)^2}$$

لا نقاط حرجة.

جدول التغير:

	$-\infty$	2	∞
الفترات	$(-\infty, 2)$		$(2, \infty)$
إشارة f'	--		--
سلوك الدالة f			

لا يوجد قيم قصوى.

الدالة تتناقص على الفترة $(-\infty, 2)$ والفترة $(2, \infty)$

(7) (a) لا يوجد قيمة عظمى محلية.

(b) القيمة الصغرى المحلية عند $x = 2$.

جدول إشارة y' :

	$-\infty$	1	2	∞
الفترات	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$		$(2, \infty)$
إشارة y'	-	-		+
سلوك الدالة y				





$$(c) \quad y'' = (x-1)(3x-5)$$

نقطة انعطاف عند $x = 1$, $x = \frac{5}{3}$

(8) (a) قيمة عظمى محلية عند $x = 2$

(b) قيمة صغرى محلية عند $x = 4$

جدول التغير:

	$-\infty$	1	2	4	∞
الفترات	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, 4)$	$(4, \infty)$	
إشارة g'	+	+	-	+	
سلوك الدالة g					

(c) $y'' = 2(x-1)(2x^2 - 10x + 11)$

نقطة انعطاف عند $x = 1$ ، $x = \frac{5-\sqrt{3}}{2} \approx 1.634$ ، $x = \frac{5+\sqrt{3}}{2} \approx 3.366$

(9) كلاً، للدالة f مماس أفقي عند هذه النقطة ولكن يمكن أن تكون متزايدة (أو متناقصة) على كل من الفترتين (a, c)

و (c, b) ولا يوجد قيمة قصوى محلية عند $x = c$



مثال: $f(x) = x^3$ حيث $f'(0) = 0$ ولا قيمة عظمى أو صغرى محلية عند $x = 0$

(10) $f'(x) = 6x - 6x^2$

$f'' = 6 - 12x = 6(1 - 2x)$

$f''\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ ، $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

جدول التغير:

	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	∞
الفترات	$(-\infty, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, \infty)$	
إشارة f''	++	--	
تقعر الدالة f	 تقعر لأعلى	 تقعر لأسفل	

بيان الدالة f يكون مقعراً لأعلى على الفترة $(-\infty, \frac{1}{2})$ ومقعراً لأسفل على الفترة $(\frac{1}{2}, \infty)$ ، نقطة الانعطاف $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

(11) $g'(x) = x^2 - 4x + 1$

$g''(x) = 2x - 4$

$g''(2) = 0$ ، $g(2) = -\frac{25}{3}$

جدول التغير:

	$-\infty$	2	∞
الفترات	$(-\infty, 2)$		$(2, \infty)$
إشارة g''	$- -$		$+ +$
تقعر الدالة g	تقعر لأسفل		تقعر لأعلى

بيان الدالة f يكون مقعراً لأعلى على الفترة $(2, \infty)$ ومقعراً لأسفل على الفترة $(-\infty, 2)$ ، نقطة الانعطاف $(2, -\frac{25}{3})$

$$(12) \quad f'(x) = -4x^3$$

$$f''(x) = -12x^2$$

$f''(x) = 0$ عند $x = 0$ ولكن بيان f لا يغير تقعره على جانبي 0 (بيان f مقعر لأسفل على جانبي 0).
 \therefore منحنى f ليس له نقطة انعطاف.

$$(13) \quad f(0) = 0 \quad \therefore \quad c = 0$$

$$f(4) = 16 \implies 4^3 + a(4)^2 + b(4) + c = 16$$

$$4a + b = -12 \quad (1)$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f'(4) = 0 \implies 48 + 8a + b = 0$$

$$8a + b = -48 \quad (2)$$

من (1)، (2) نحصل على: $b = 24$ ، $a = -9$

$$\therefore a = -9, \quad b = 24, \quad c = 0$$

$$(14) \quad f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f'(2) = 0 \implies 12 + 4a + b = 0$$

$$4a + b = -12 \quad (1)$$

$$f''(x) = 6x + 2a$$

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \implies 6\left(\frac{1}{2}\right) + 2a = 0$$

$$a = -\frac{3}{2}$$

وبالتعويض في (1) نحصل على: $b = -6$

$$\therefore a = -\frac{3}{2}, \quad b = -6$$

(15) $f'(x) = 2x - 6$

$f'(3) = 0$

$f''(x) = 2$

$f''(3) = 2 > 0$

$f(3) = (3)^2 - 6(3) + 11 = 2$

فتكون للدالة f قيمة صغرى محلية 2 عند $x = 3$

(16) $f'(x) = 4x^3 - 36x = 4x(x^2 - 9) = 4x(x - 3)(x + 3)$

$f''(x) = 12x^2 - 36$

$f''(0) = -36$; $-36 < 0$; $f(0) = 0$

للدالة f قيمة عظمى محلية 0 عند $x = 0$

$f''(3) = 72$; $f''(-3) = 72$

$f(3) = f(-3) = -81$

للدالة f قيمة صغرى محلية -81 عند كل من $x = 3$, $x = -3$

المجموعة B تمارين موضوعية

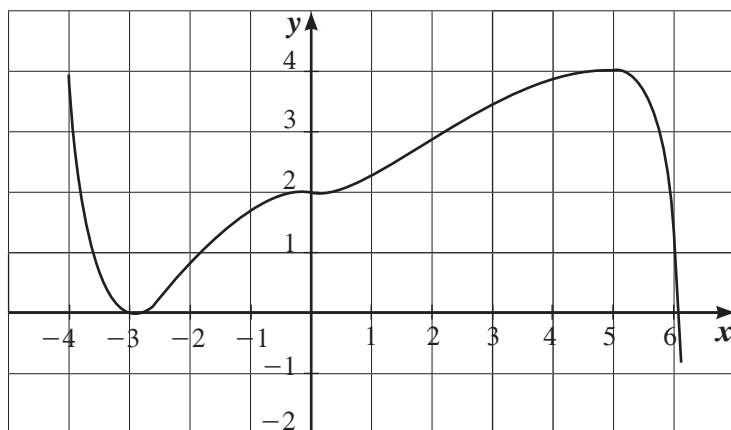
- | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| (1) (b) | (2) (b) | (3) (b) | (4) (b) | (5) (a) |
| (6) (b) | (7) (b) | (8) (a) | (9) (d) | (10) (a) |
| (11) (d) | (12) (b) | (13) (c) | (14) (a) | (15) (b) |

تمرن 3-4

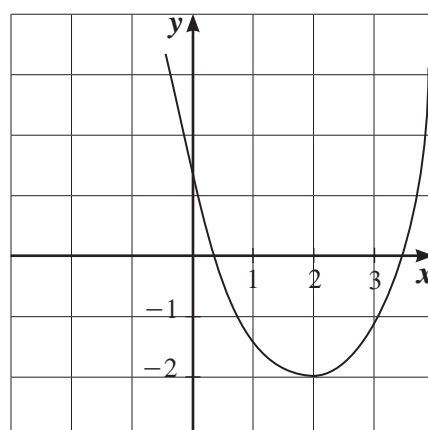
رسم بيان دوال كثيرات الحدود

المجموعة A تمارين مقالية

(2) مجال $f = (-\infty, \infty)$



(1) مجال $f = (-\infty, \infty)$



(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ \mathbb{R} دالة كثيرة الحدود مجالها




نوجد النقاط الحرجة:

f دالة كثيرة حدود قابلة للاشتقاق على مجالها.

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$$



$$f'(x) = 0 \implies x = 2 ; x = -\frac{2}{3}$$

$$f(2) = -1 , f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{229}{27} \therefore (2, -1) , \left(-\frac{2}{3}, \frac{229}{27}\right) \text{ نقاط حرجة:}$$

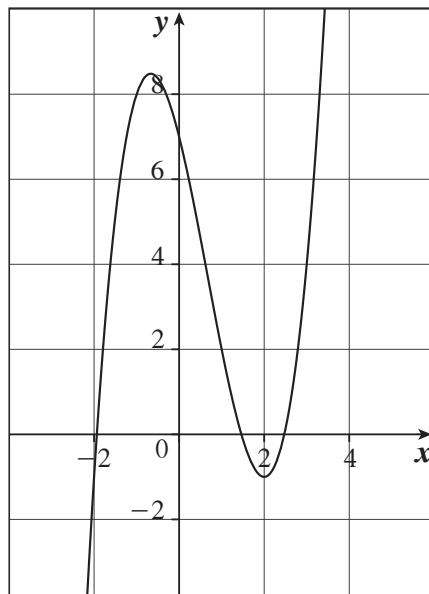
	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	2	∞
الفترات	$(-\infty, -\frac{2}{3})$	$(-\frac{2}{3}, 2)$	$(2, \infty)$	
إشارة f'	++	--	++	
سلوك الدالة f				

$$f''(x) = 6x - 4$$

$$f''(x) = 0 \implies x = \frac{2}{3}$$

	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	∞
الفترات	$(-\infty, \frac{2}{3})$	$(\frac{2}{3}, \infty)$	
إشارة f''	--	++	
التقعر			

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{101}{27} , I\left(\frac{2}{3}, \frac{101}{27}\right) \text{ نقطة انعطاف:}$$



$$(4) \therefore g \text{ دالة كثيرة الحدود مجالها } \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{4} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{4} = \infty$$

$$g'(x) = x^3 - 4x = x(x-2)(x+2)$$

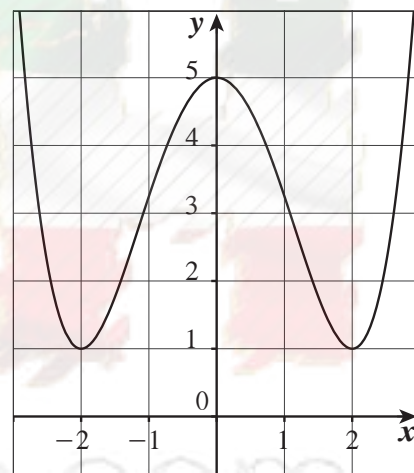
النقاط الحرجة: $(0, 5)$, $(2, 1)$, $(-2, 1)$

جدول التغير:

	$-\infty$	-2	0	2	∞
الفترات	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$	
إشارة g'	$--$	$++$	$--$	$++$	
سلوك الدالة g	\searrow	\nearrow	\searrow	\nearrow	

$$g''(x) = 3x^2 - 4$$

نقاط الانعطاف: $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{25}{9}\right)$, $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{25}{9}\right)$



$$(5) \therefore h \text{ دالة كثيرة الحدود مجالها } \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} -x^4 = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^4 = -\infty$$

$$h'(x) = -4x(x-2)(x+2)$$

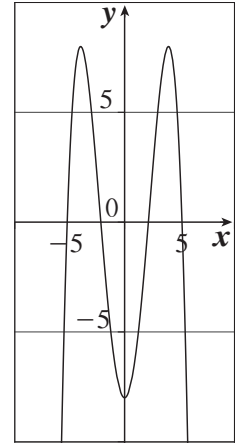
النقاط الحرجة: $(-2, 8)$, $(0, -8)$, $(2, 8)$

جدول التغير:

	$-\infty$	-2	0	2	∞
الفترات	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$	
إشارة h'	$++$	$--$	$++$	$--$	
سلوك الدالة h	\nearrow	\searrow	\nearrow	\searrow	

$$h''(x) = 4(4 - 3x^2)$$

نقاط الانعطاف: $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{8}{9}\right)$, $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{8}{9}\right)$



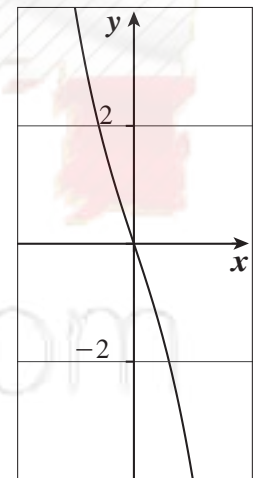
(6) $\therefore f$ دالة كثيرة الحدود مجالها \mathbb{R}
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} -x^3 = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 = \infty$
 $f'(x) = -3x^2 - 3 < 0$

لا نقاط حرجية.

f دالة مطردة متناقصة.




$$f''(x) = -6x$$

نقطة الانعطاف: $(0, 0)$



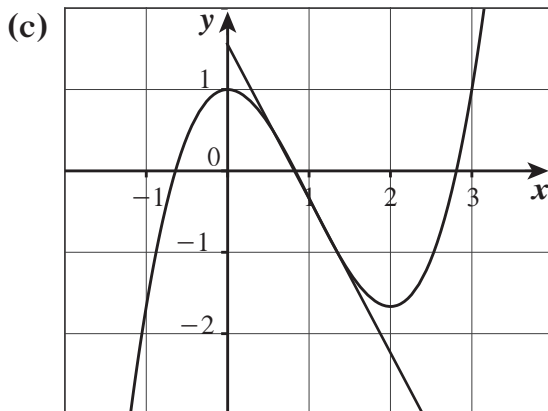
(7) $f'(x) = 2x^2 - 4x = 2x(x - 2)$

(a) جدول التغير:

	$-\infty$	0	2	∞
الفترات	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$	
إشارة f'	++	--	++	
سلوك الدالة f				

(b) $A\left(1, -\frac{1}{3}\right)$; $f'(1) = -2$

معادلة (1) : $y = -2x + \frac{5}{3}$



(8) (a) $f'(x) = -4x^3 + 4x + 1$

$f''(x) = -12x^2 + 4$

نقاط الانعطاف: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -0.02\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1.13\right)$

جدول التغير:

	$-\infty$	-0.838	-0.269	1.1	∞
الفترات	$(-\infty, -0.838)$	$(-0.838, -0.269)$	$(-0.269, 1.1)$	$(1.1, \infty)$	
إشارة f'	++	--	++	--	
سلوك الدالة f	↗	↘	↗	↘	

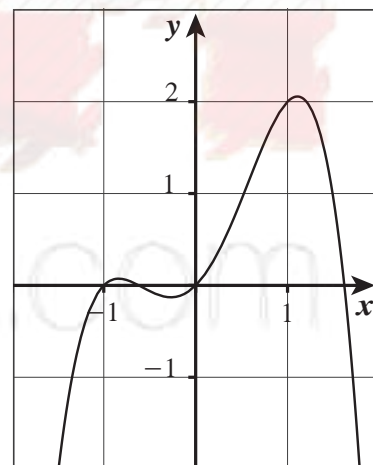
(b) $f'(x) = 1 \Rightarrow -4x^3 + 4x + 1 = 1$

$-4x(x^2 - 1) = 0$

$x = 0, x = 1, x = -1$

$f(0) = 0, f(1) = 2, f(-1) = 0$

النقاط: $(0, 0), (1, 2), (-1, 0)$



(c) معادلة المماس عند كل من النقطتين $(-1, 0), (1, 2)$: $y = x + 1$

(9) $f(0) = 1 \Rightarrow d = 1$

$f(-2) = 5 \Rightarrow -8a + 4b - 2c + 1 = 5$

$-8a + 4b - 2c = 4$




$-4a + 2b - c = 2 \quad (1)$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f'(-2) = 0 \Rightarrow 12a - 4b + c = 0 \quad (2)$

$f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0 \quad (3)$

من (1)، (2)، (3) نحصل على $a = 1, b = 3$

	$-\infty$	-1	1	∞
الفترات	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$	
إشارة f'	$- -$	$+ +$	$- -$	
سلوك الدالة f				

المجموعة B تمارين موضوعية

- (1) (b) (2) (a) (3) (a) (4) (a) (5) (a)
 (6) (c) (7) (c) (8) (c) (9) (a) (10) (b)
 (11) (d) (12) (d) (13) (b) (14) (a)

تمرن 3-5

تطبيقات على القيم القصوى

المجموعة A تمارين مقالية

(1) لتكن الأعداد x و $20 - x$ حيث $0 \leq x \leq 20$ (a) مجموع مربعيهما هو: $f(x) = x^2 + (20 - x)^2 = 2x^2 - 40x + 400$ ، ثم $f'(x) = 4x - 40$ النقطة الحرجة والنقاط الطرفية تحدث عند $x = 0$ و $x = 10$ و $x = 20$ ، ثم $f(0) = 400$ و $f(10) = 200$ و $f(20) = 400$ مجموع المربعين هو أصغر ما يمكن للأعداد 10 و 10(b) يعطى مجموع عدد واحد مع الجذر التربيعي للعدد لآخر بالدالة $g(x) = x + \sqrt{20 - x}$ ، ثم $g'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{20 - x}}$ تحدث النقطة الحرجة عندما $2\sqrt{20 - x} = 1$ ، إذاً $20 - x = \frac{1}{4}$ و $x = \frac{79}{4}$ ، بعد التدقيق في النقاط الطرفيةوالنقطة الحرجة، نجد أن: $g(0) = \sqrt{20} \approx 4.47$ و $g\left(\frac{79}{4}\right) = \frac{81}{4} = 20.25$ و $g(20) = 20$ الجمع هو أكبر ما يمكن عند الأعداد $\frac{79}{4}$ و $\frac{1}{4}$ (2) ترمز x و y إلى ضلعي القائمة في المثلث ولاحظ أن $0 < x < 6$ ، ثم $x^2 + y^2 = 36$ ، إذاً $y = \sqrt{36 - x^2}$ (حيث إن $y > 0$)المساحة هي: $A = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}x\sqrt{36 - x^2}$ ، إذاً $\frac{dA}{dx} = \frac{1}{2}x \frac{1}{2\sqrt{36 - x^2}}(-2x) + \frac{1}{2}\sqrt{36 - x^2} = \frac{36 - 2x^2}{2\sqrt{36 - x^2}}$ تحدث النقطة الحرجة عند $36 - 2x^2 = 0$ مما يعني أن $x = 3\sqrt{2}$ (حيث إن $x > 0$) تعود هذه القيمة إلى أكبرمساحة ممكنة حيث إن $\frac{dA}{dx} > 0$ لـ $0 < x < 3\sqrt{2}$ و $\frac{dA}{dx} < 0$ لـ $3\sqrt{2} < x < 6$ حيث $x = 3\sqrt{2}$ ، لدينا:لذا، المساحة الأكبر الممكنة هي 9 cm^2 وبعدا الضلعين $A = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}(3\sqrt{2})^2 = 9$ و $y = \sqrt{36 - (3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}$ هما: $3\sqrt{2} \text{ cm} \times 3\sqrt{2} \text{ cm}$

(3) ترمز x إلى طول المستطيل بالمتري ($0 < x < 4$). ثم العرض هو: $4 - x$ والمساحة هي: $A(x) = x(4 - x) = 4x - x^2$.
حيث إن $A'(x) = 4 - 2x$ ، تحدث النقطة الحرجة عند $x = 2$ حيث إن $A'(x) > 0$ لـ $0 < x < 2$ و $A'(x) < 0$ لـ $2 < x < 4$. هذه النقطة الحرجة تعود إلى المساحة العظمى.

مقياس المستطيل حسب الأطوال الكبيرة هو $2\text{ m} \times 2\text{ m}$ ، إذاً إنه مربع ومساحته العظمى هي 4 m^2 .
(4) لاحظ أن القيمتين a و b يجب أن تحققاً $a^2 + b^2 = 20^2$ وهكذا، تعطى المساحة بـ: $A = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}a\sqrt{400 - a^2}$

$$\frac{dA}{da} = \frac{1}{2}a \left(\frac{1}{2\sqrt{400 - a^2}} \right) (-2a) + \frac{1}{2}\sqrt{400 - a^2} = \frac{-a^2 + (400 - a^2)}{2\sqrt{400 - a^2}} = \frac{200 - a^2}{\sqrt{400 - a^2}} \quad 0 < a < 20$$

تحدث النقطة الحرجة عندما $a^2 = 200$ حيث $\frac{dA}{da} > 0$ لـ $0 < a < \sqrt{200}$ و $\frac{dA}{da} < 0$ لـ $\sqrt{200} < a < 20$

تناظر هذه النقطة الحرجة المساحة العظمى، بالتالي $a = \sqrt{200}$ ، ثم $b = \sqrt{400 - a^2} = \sqrt{200}$

إذاً المساحة العظمى عند $a = b = 10\sqrt{2}$

(5) x هي الطول بالأمتار للجهة العمودية للنهر فيكون قياس الجهة الموازية للنهر هو $(800 - 2x)\text{ m}$ والمساحة هي $A(x) = x(800 - 2x) = 800x - 2x^2$ لـ $0 < x < 400$. بالتالي، $A'(x) = 800 - 4x$ وتحدث النقطة الحرجة عند $x = 200$ حيث إن النقطة الحرجة تناظر المساحة العظمى. المساحة الأكبر الممكنة هي $A(200) = 80\,000\text{ m}^2$ والأطوال هي 200 m (عمودية على النهر) بـ 400 m (الموازية للنهر).

(6) لتكن x طول كل جهة من قاعدة المربع بالمتري، الارتفاع $\frac{500}{x^2}\text{ m}$ والمساحة الإجمالية للخزان (باستثناء الفتحة)

هي: $S(x) = x^2 + 4x\left(\frac{500}{x^2}\right) = x^2 + 2000x^{-1}$ ، بالتالي $S'(x) = 2x - 2000x^{-2} = \frac{2(x^3 - 1000)}{x^2}$ وتحدث النقطة

الحرجة عند $x = 10$ حيث إن $S'(x) < 0$ لـ $0 < x < 10$ و $S'(x) > 0$ لـ $x > 10$ تناظر النقطة الحرجة أقل كمية مستخدمة من الحديد يجب أن تكون الأبعاد $10\text{ m} \times 10\text{ m} \times 5\text{ m}$ حيث الارتفاع 5 m

أكد أن الوزن ينخفض عندما ينخفض مجموع المساحة المكوّن من مساحة القاعدة ومساحات الجوانب الأربعة.

(7) بافتراض أن a و b ثابتان، ثم $A(\theta) = \frac{1}{2}ab \sin \theta$ و $A'(\theta) = \frac{1}{2}ab \cos \theta$ تحدث النقطة الحرجة (في $0 < \theta < \pi$)

عند $\theta = \frac{\pi}{2}$ حيث $A'(\theta) > 0$ لـ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ و $A'(\theta) < 0$ لـ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ فإن النقطة الحرجة تناظر المساحة العظمى. الزاوية التي تجعل مساحة المثلث أكبر هي: $\theta = \frac{\pi}{2}$ (أو 90°)

(8) نصف قطر العلبة r هو بالـ cm وارتفاعها h هو بالـ cm، ثم $\pi r^2 h = 1000$ إذاً $h = \frac{1000}{\pi r^2}$

مساحة المعدن المستخدم هي: $A = \pi r^2 + 2\pi rh = \pi r^2 + \frac{2000}{r}$ إذاً $\frac{dA}{dr} = 2\pi r - 2000r^{-2} = \frac{2\pi r^3 - 2000}{r^2}$

تحدث النقطة الحرجة عند $r = \sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}} = 10\pi^{-\frac{1}{3}}\text{ cm}$ حيث $\frac{dA}{dr} < 0$ لـ $0 < r < 10\pi^{-\frac{1}{3}}$ و $\frac{dA}{dr} > 0$ لـ $r > 10\pi^{-\frac{1}{3}}$

تناظر النقطة الحرجة أقل كمية من المواد المستخدمة لصنع العلبة الأقل سماكة.

الأبعاد هي: $r = 10\pi^{-\frac{1}{3}} \approx 6.83\text{ cm}$ و $h = 10\pi^{-\frac{1}{3}} \approx 6.83\text{ cm}$

(9) لتكن x طول نصف قطر قاعدة المخروط وارتفاعه $y + 3$. بالعودة إلى مقدمة المسألة، حيث $x^2 + y^2 = 9$ لدينا $x = \sqrt{9 - y^2}$ حجم المخروط يعطى حسب:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi x^2 (y + 3) = \frac{1}{3}\pi (9 - y^2)(y + 3) = \frac{\pi}{3}(-y^3 - 3y^2 + 9y + 27)$$

إذاً النقطة على الفترة $(0, 3)$ هي $y = 1$ حيث $\frac{dV}{dy} = \frac{\pi}{3}(-3y^2 - 6y + 9) = -\pi(y^2 + 2y - 3) = -\pi(y + 3)(y - 1)$

$$\frac{dV}{dy} < 0 \quad 0 < y < 1 \quad \text{و} \quad \frac{dV}{dy} < 0 \quad 1 < y < 3 \quad \text{تناظر النقطة الحرجة القيمة العظمى، التي تساوي}$$

$$V(1) = \frac{32\pi}{3} (\text{units}^3)$$

$$(10) \text{ تربيع المسافة هو: } D(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (\sqrt{x} + 0)^2 = x^2 - 2x + \frac{9}{4} \text{، إذا } D'(x) = 2x - 2 \text{ وتحديث النقطة الحرجة}$$

$$\text{عند } x = 1 \text{ حيث } D'(x) < 0 \quad x < 1 \text{ و } D'(x) > 0 \quad x > 1 \text{ تناظر النقطة الحرجة المسافة الأصغر، التي هي}$$

$$\sqrt{D(1)} = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ units}$$

المجموعة B تمارين موضوعية

- (1) (a) (2) (b) (3) (c) (4) (d) (5) (a) (6) (b)

اختبار الوحدة الثالثة

$$(1) f' = 3x^2 - 18x - 21 = 3(x+1)(x-7)$$

$$f(-1) = 0 \quad , \quad f(-2) = -13 \quad , \quad f(0) = -11$$

0 قيمة عظمى مطلقة عند $x = -1$

-13 قيمة صغرى مطلقة عند $x = -2$

$$(2) f'(x) = \frac{-10x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f(0) = 5 \quad , \quad f(-2) = 1 \quad , \quad f(3) = \frac{1}{2}$$

5 قيمة عظمى مطلقة عند $x = 0$

$\frac{1}{2}$ قيمة صغرى مطلقة عند $x = 3$

$$(3) f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x-2)(x+2)$$

جدول التغير:

	$-\infty$	-2	2	∞
الفترات	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$	
إشارة f'	++	--	++	
سلوك الدالة f	\nearrow	\searrow	\nearrow	

$$f(2) = -10$$

$$f(-2) = 22$$




(a) فترات التزايد: $(-\infty, -2)$ ، $(2, \infty)$

فترة التناقص: $(-2, 2)$

(b) القيم القصوى المحلية: قيمة عظمى محلية 22 عند $x = -2$ ؛ قيمة صغرى محلية -10 عند $x = 2$

$$(4) \quad g'(x) = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-(x-1)(x+1)}{(x^2 + 1)^2}$$

جدول التغير:

	$-\infty$	-1	1	∞
الفترات	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$	
إشارة f'	- -	+ +	- -	
سلوك الدالة f				

$$f(1) = \frac{1}{2}$$

$$f(-1) = -\frac{1}{2}$$




(a) فترة التزايد: $(-1, 1)$

فترات التناقص: $(-\infty, -1)$ ، $(1, \infty)$

(b) القيم القصوى المحلية: قيمة عظمى محلية $\frac{1}{2}$ عند $x = 1$ ؛
قيمة صغرى محلية $-\frac{1}{2}$ عند $x = -1$

$$(5) \quad h'(x) = \frac{-x^2 + 9}{(x^2 + 2x + 9)^2} = \frac{-(x-3)(x+3)}{(x^2 + 2x + 9)^2}$$

جدول التغير:

	$-\infty$	-3	3	∞
الفترات	$(-\infty, -3)$	$(-3, 3)$	$(3, \infty)$	
إشارة f'	- -	+ +	- -	
سلوك الدالة f				

$$f(3) = \frac{1}{8}$$

$$f(-3) = -\frac{1}{4}$$

(a) فترة التزايد: $(-3, 3)$

فترات التناقص: $(-\infty, -3)$ ، $(3, \infty)$



(b) القيم القصوى المحلية: قيمة عظمى محلية $\frac{1}{8}$ عند $x = 3$ ؛
قيمة صغرى محلية $-\frac{1}{4}$ عند $x = -3$

$$(6) \quad f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3$$

$$f'(x) = 6x^2 - 12x$$

$$f''(x) = 12x - 12 = 12(x - 1)$$

جدول التقعر:

	$-\infty$	1	∞
الفترات	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$	
إشارة f''	- -	+ +	
تقعر الدالة f			

$$f(1) = -1$$

(a) فترات التقعر: مقعرة لأعلى على الفترة $(1, \infty)$

مقعرة لأسفل على الفترة $(-\infty, 1)$




(b) نقطة الانعطاف: $(1, -1)$

$$(7) \quad g(x) = x^4 - 2x^3 + 5x - 6$$

$$g'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 5$$

$$g''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x - 1)$$

جدول التقعر:

	$-\infty$	0	1	∞
الفترات	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$	
إشارة g''	+ +	- -	+ +	
تقعر الدالة g				

$$g(1) = -2$$

$$g(0) = -6$$

(a) فترات التقعر: مقعرة لأعلى على الفترة $(-\infty, 0)$ والفترة $(1, \infty)$

مقعرة لأسفل على الفترة $(0, 1)$



(b) نقاط الانعطاف: $(0, -6)$, $(1, -2)$

$$(8) \quad h(x) = \frac{3}{x-1}$$

$$h'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

$$h''(x) = \frac{6}{(x-1)^3}$$

جدول التقعر:

	$-\infty$	1	∞
الفترات	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$	
إشارة h''	- -	+ +	
تقعر الدالة h			

(a) فترات التغير: مقعرة لأعلى على الفترة $(1, \infty)$ ، مقعرة لأسفل على الفترة $(-\infty, 1)$.

(b) لا نقاط انعطاف.

(9) $y'' = 6(2x - 1)$

(a) $x = -1$ $x = 2$ قيم x

(b) $x > \frac{1}{2}$ $y'' > 0$

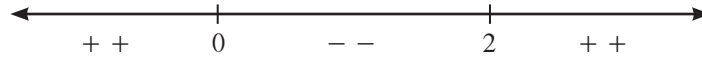
فترة التغير لأعلى: $(\frac{1}{2}, \infty)$

(c) $x < \frac{1}{2}$ $y'' < 0$

فترة التغير لأسفل: $(-\infty, \frac{1}{2})$

(10) $y'' = 18x(x - 2)$

(a) $x = -1$



(b) مقعر لأعلى على الفترة $(-\infty, 0)$ والفترة $(2, \infty)$

(c) مقعر لأسفل على الفترة $(0, 2)$

(11) ليس للدالة نقطة انعطاف عند $x = 3$ ، وهناك نقطة انعطاف عند $x = 0$

(12) $f(x) = x^3 + 8$

$f'(x) = 3x^2$

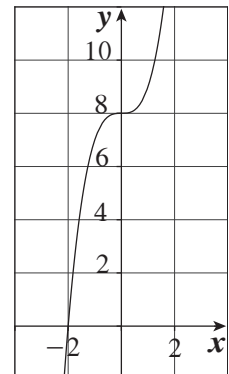
$f'(0) = 8$

جدول التغير:

	$-\infty$	0	∞
الفترات	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$	
إشارة f'	++	++	
سلوك الدالة f			





$f''(x) = 6x$; $f(0) = 8$

النقطة $(0, 8)$ نقطة انعطاف.



(13) $g'(x) = 4x^3 - 12x = 4x(x^2 - 3)$

جدول التغير:

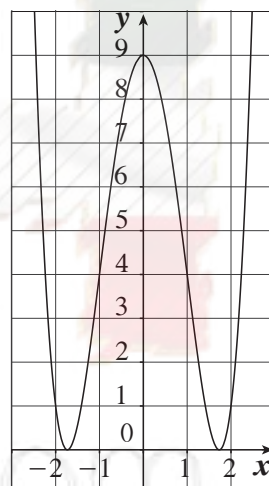
	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	∞
الفترات	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, -0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$	
إشارة g'	--	++	--	++	
سلوك الدالة g					

$g(0) = 9 \quad g(-\sqrt{3}) = g(\sqrt{3}) = 0$

$g''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1) = 12(x - 1)(x + 1)$



$g(-1) = 4 \quad g(1) = 4$

نقاط الانعطاف: $(-1, 4)$, $(1, 4)$



(14) $h'(x) = 2(x^2 + 4x + 4)(2x + 4) = 4(x + 2)^3$

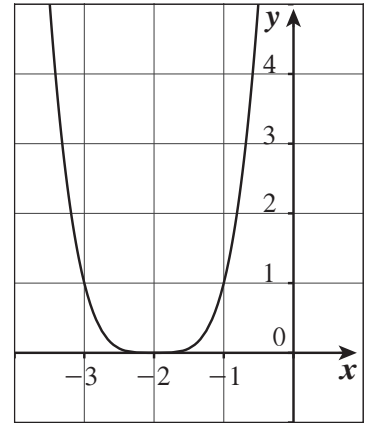
جدول التغير:

	$-\infty$	-2	∞
الفترات	$(-\infty, -2)$	$(-2, \infty)$	
إشارة h'	--	++	
سلوك الدالة h			

$h(-2) = 0$

$h''(x) = 12(x + 2)^2$

النقطة $(-2, 0)$ ليست نقطة انعطاف.



(15) (a) دالة كثيرة حدود متصلة على الفترة $[0, 3]$ ، قابلة للاشتقاق على الفترة $(0, 3)$ f .
 \therefore شروط نظرية القيمة المتوسطة محققة على الفترة $[0, 3]$.

(b) $f'(x) = 3x^2 - 6x$

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0}$$

$$3c^2 - 6c = \frac{5 - 5}{3} = 0$$

$$3c(c - 2) = 0$$

$$c = 2, \quad c = 0 \notin (0, 3)$$

(16) $f(-2) = -1 \implies 4 - 2b + c = -1$

$$-2b + c = -5 \quad (1)$$

$$f'(x) = 2x + b$$

$$f'(-2) = 0 \implies 2(-2) + b = 0 \quad ; \quad b = 4$$

من (1) نحصل على $-2(4) + c = -5$
 $c = 3$

تمارين إثرائية

(1) (a) عند $t = \frac{\pi}{3} s$ أو عند $t = \frac{4\pi}{3} s$

(b) المسافة القصوى بين الجسمين A والجسم B. نحصل عليها من:

$$f(t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right) - \sin t$$

$$f(t) = \sin t \times \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \times \cos t - \sin t$$

$$f(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos t - \frac{1}{2} \sin t$$

$$f'(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin t - \frac{1}{2} \cos t$$

$$f'(t) = 0 \implies \tan t = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$t = \frac{5\pi}{6} \text{ أو } t = \frac{11\pi}{6}$$

وبالتالي أبعد مسافة هي 1 m

(c) نوجد $f''(t)$ عند $t = \frac{\pi}{3} s$ أو $t = \frac{4\pi}{3} s$

(2) (a) نرسم القطعة RS كما هو موضح، ونجعل y طول QR . $PB = 22 - x$.

$$QB = \sqrt{x^2 - (22 - x)^2} = \sqrt{22(2x - 22)}$$

إن المثلثين QRS ، PQB متشابهان إذًا:

$$\frac{y}{x} = \frac{22}{\sqrt{22(2x - 22)}}$$

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{22^2}{22(2x - 22)}$$

$$y^2 = \frac{22x^2}{2x - 22}$$

$$y^2 = \frac{11x^2}{x - 11}$$

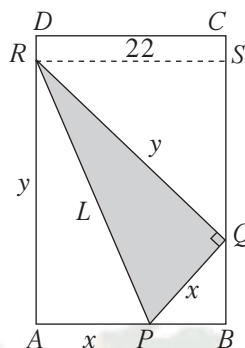
$$L^2 = x^2 + y^2$$

$$L^2 = x^2 + \frac{11x^2}{x - 11}$$

$$L^2 = \frac{x^2(x - 11) + 11x^2}{x - 11}$$

$$L^2 = \frac{x^3}{x - 11}$$

نظرية فيثاغورث



$$L^2 = \frac{x^3}{x - 11} \quad \text{نوجد مشتقة } L^2 \quad (b)$$

$$\frac{d(L^2)}{dx} = \frac{3x^2(x - 11) - 1(x^3)}{(x - 11)^2} = \frac{2x^3 - 33x^2}{(x - 11)^2}$$

$$= \frac{x^2(2x - 33)}{(x - 11)^2} ; x^2 > 0$$

$$\frac{d(L^2)}{dx} = 0 \Rightarrow 2x - 33 = 0 \Rightarrow x = \frac{33}{2}$$

$$(c) L^2\left(\frac{33}{2}\right) = \frac{\left(\frac{33}{2}\right)^3}{\frac{33}{2} - 11} = \frac{3 \times (33)^2}{4}$$

$$L = \frac{33\sqrt{3}}{2} \approx 28.5788 \text{ cm}$$

$$(3) \text{ قيمة مبيع السلعة: } nx = \frac{ax}{x - 10} + bx(100 - x)$$

$$\text{كلفة الإنتاج: } 10n = \frac{10a}{x - 10} + 10b(100 - x)$$

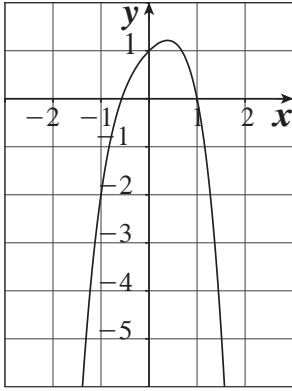
$$\text{الربح: } P(x) = nx - 10n$$

$$P(x) = \frac{ax}{x - 10} + bx(100 - x) - \frac{10a}{x - 10} - 10b(100 - x)$$

$$P'(x) = \frac{a(x - 10) - ax}{(x - 10)^2} + b(100 - x) - bx + \frac{10a}{(x - 10)^2} + 10b$$

$$P'(x) = 110b - 2bx$$

يحدث الربح الأكبر إذا $P'(x) = 0$ أي (دينارًا كويتيًّا) $x = 55$



(4) $y' = 1 - 2x - 4x^3$ تكون الدالة y' صفرًا عند $x \approx 0.385$

الفترات	$x < 0.385$	$x > 0.385$
إشارة y'	+	-
سلوك y	متزايدة	متناقصة

المشتقة الثانية هي دائمًا سالبة إذا هي مقعرة لأسفل لكل قيم x .

(a) $[-\infty, 0.385]$ تقريبًا.

(b) $[0.385, \infty)$ تقريبًا.

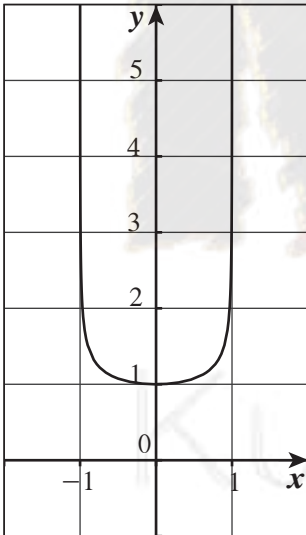
(c) غير موجودة.

(d) $(-\infty, \infty)$

(e) عظمى مطلقة عند $(0.385, 1.215)$

(f) غير موجودة.

(5) لاحظ أن المجال هو $(-1, 1)$



$$y = (1 - x^2)^{-\frac{1}{4}}$$

$$y' = -\frac{1}{4}(1 - x^2)^{-\frac{5}{4}}(-2x) = \frac{x}{2(1 - x^2)^{\frac{5}{4}}}$$

الفترات	$(-1, 0)$	$(0, 1)$
إشارة y'	-	+
سلوك y	متناقصة	متزايدة

$$y'' = \frac{2(1 - x^2)^{\frac{5}{4}}(1) - (x)(2)\left(\frac{5}{4}\right)(1 - x^2)^{\frac{1}{4}}(-2x)}{4(1 - x^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$= \frac{(1 - x^2)^{\frac{1}{4}}[2 - 2x^2 + 5x^2]}{4(1 - x^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{3x^2 + 2}{4(1 - x^2)^{\frac{9}{4}}}$$

المشتقة الثانية هي دائمًا موجبة، إذا الدالة هي مقعرة لأعلى في مجالها $(-1, 1)$

(b) $(-1, 0]$

(a) $[0, 1)$

(d) غير موجودة

(c) $(-1, 1)$

(f) غير موجودة

(e) صغرى مطلقة عند $(0, 1)$

$$(6) y = 2x^{\frac{4}{5}} - x^{\frac{9}{5}}$$

$$y' = \frac{8}{5}x^{-\frac{1}{5}} - \frac{9}{5}x^{\frac{4}{5}} = \frac{8-9x}{5\sqrt[5]{x}}$$

الفترات	$(-\infty, 0)$	$(0, \frac{8}{9})$	$(\frac{8}{9}, \infty)$
إشارة y'	-	+	-
سلوك y	متناقصة	متزايدة	متناقصة

$$y'' = -\frac{8}{25}x^{-\frac{6}{5}} - \frac{36}{25}x^{-\frac{1}{5}} = -\frac{4(2+9x)}{25x^{\frac{6}{5}}}$$

الفترات	$(-\infty, -\frac{2}{9})$	$(-\frac{2}{9}, 0)$	$(0, \infty)$
إشارة y''	+	-	-
سلوك y	مقعرة لأعلى	مقعرة لأسفل	مقعرة لأسفل

$$(a) [0, \frac{8}{9}]$$

$$(b) (-\infty, 0) \text{ و } (\frac{8}{9}, \infty)$$

$$(c) (-\infty, -\frac{2}{9})$$

$$(d) (-\frac{2}{9}, 0) \text{ و } (0, \infty)$$

$$(e) \text{ قيمة عظمى محلية عند } (\frac{8}{9}, \frac{10}{9} \times (\frac{8}{9})^{\frac{4}{5}}) \approx (0.889, 1.011)$$

$$\text{قيمة صغرى محلية عند } (0, 0)$$

$$(f) (-\frac{2}{9}, \frac{20}{9} \times (-\frac{2}{9})^{\frac{4}{5}}) \approx (-\frac{2}{9}, 0.667)$$

(7) (a) كلتا قيم y' و y'' هي سالبة حيث يتناقص المنحنى ومقعراً لأسفل، عند T .

(b) قيمة y' سالبة هي وقيمة y'' موجبة بحيث يتناقص المنحنى ومقعراً لأعلى، عند P .

$$(8) f(0) = 3 \implies d = 3$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f'(0) = 0 \implies c = 0$$

$$f(1) = 1 \implies a + b + 3 = 1$$

$$a + b = -2 \quad (1)$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$$f''(1) = 0 \implies 6a + 2b = 0$$

$$3a + b = 0 \quad (2)$$

من (1) و (2) نحصل على $a = 1$, $b = -3$

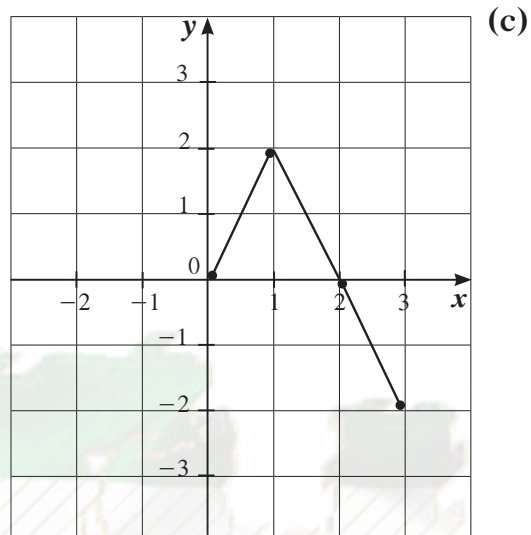
(9) (a) f تتزايد على الفترة $[0,1]$ وتتناقص على الفترة $[1,3]$. تحدث القيم العظمى المطلقة عند $x = 1$

وتحدث القيم الصغرى المطلقة عند النقاط الطرفية.

حيث إن $f(0) = 0$, $f(1) = 2$, $f(3) = -2$ لذا القيمة العظمى المطلقة هي 2 عند $x = 1$

والقيمة الصغرى المطلقة هي -2 عند $x = 3$

(b) لا يتغير تقعر المنحنى لذا ما من نقاط انعطاف.



(10) (a) $y = 2$ مقارب أفقي $\therefore \frac{a}{c} = 2$, $a = 2c$ (1)

(b) $x = \frac{1}{2}$ مقارب رأسي $\therefore c\left(\frac{1}{2}\right) + d = 0$, $d = -\frac{1}{2}c$ (2)

(c) $A(-1, 1) \therefore 1 = \frac{-a+b}{-c+d}$, $-c+d = -a+b$

إذاً من (1), (2) نجد أن $c = \frac{1}{2}b$

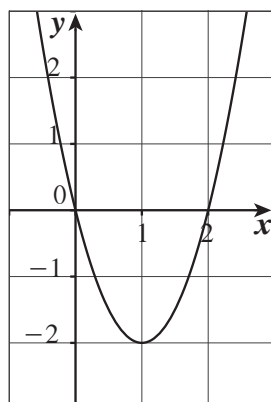
لتكن $c = 2$ إذاً $y = \frac{4x+1}{2x-1}$

(11) $f(x) = 2x^2 - 4x$

(a) $f'(x) = 4x - 4$

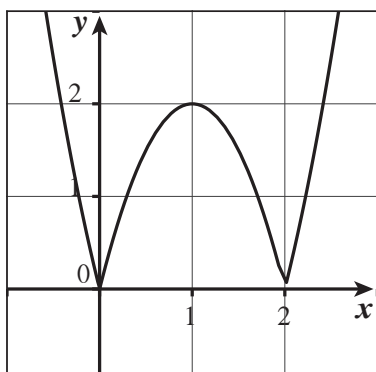
$f'(1) = 0$ $f(1) = -2$

جدول التغير:



	$-\infty$	1	∞
الفترات	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$	
إشارة f''	- -	+ +	
تقعر الدالة f			

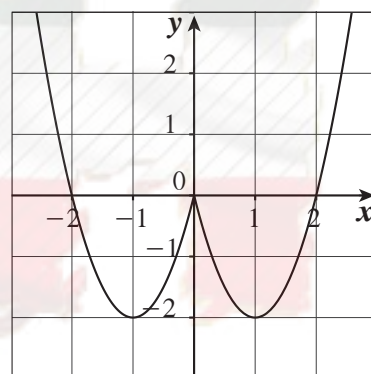
$$(b) \quad g(x) = |2x^2 - 4x| = \begin{cases} 2x^2 - 4x = f(x) & : x \leq 0 \\ -2x^2 + 4x = -f(x) & : 0 < x < 2 \\ 2x^2 - 4x = f(x) & : x \geq 2 \end{cases}$$



$$(c) \quad h(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4x & : x \geq 0 \\ 2x^2 + 4x & : x < 0 \end{cases} = \begin{cases} f(x) & : x \geq 0 \\ f(-x) & : x < 0 \end{cases}$$

بيان h على الفترة $[0, \infty)$ هو نفسه بيان f .

بيان h على الفترة $(-\infty, 0)$ هو انعكاس في المحور الرأسي لبيان h على الفترة $(0, \infty)$



$$(12) (a) \quad f'(x) = 3x^2 + 4$$

$$3x^2 + 4 = 7 \implies x = 1 \quad \text{أو} \quad x = -1$$




$$(b) \quad f(1) = 16 \quad f(-1) = 6$$

$$y(1) = 16 \quad y(-1) = 2$$

النقطة $(1, 16)$ هي نقطة مماس.

$$(13) (a) \quad f'(x) = x^2 - 2x = x(x - 2)$$

$$f(0) = 0 \quad f(2) = \frac{8}{3} - 4 = -\frac{4}{3}$$

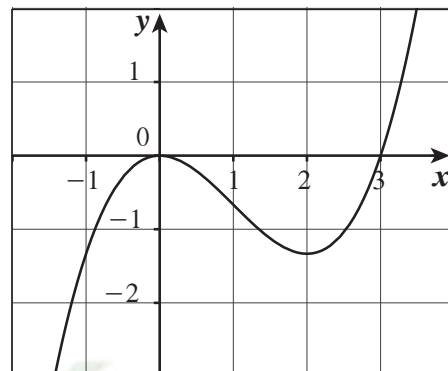
	$-\infty$	0	2	∞
الفترات	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$	
إشارة f'	++	--	++	
سلوك الدالة f				

$$f'(x) = 2x - 2 = 2(x - 1)$$

$$f(1) = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$$

النقاط الحرجة: $(0, 0)$ ، $(2, -\frac{4}{3})$

نقطة الانعطاف: $(1, -\frac{2}{3})$



$$(b) \quad f'(x) = 3 \implies x^2 - 2x = 3$$

$$x = -1 \quad x = 3$$

$$f(-1) = -\frac{4}{3} \quad f(3) = 0$$

النقطتان $(-1, -\frac{4}{3})$ ، $(3, 0)$

$$(14) (a) \quad f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$$

	$-\infty$	-1	1	∞
الفترات	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$	
إشارة f'	$++$	$--$	$++$	
سلوك الدالة f				

$$f(-1) = 4 \quad f(1) = 0$$

$$g'(x) = 2x - 3$$

	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	∞
الفترات	$(-\infty, \frac{3}{2})$	$(\frac{3}{2}, \infty)$	
إشارة g'	$--$	$++$	
سلوك الدالة g			

$$g\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4}$$

(b) $f(x) = g(x)$

$$x^3 - 3x + 2 = x^2 - 3x$$

$$x^3 - x^2 + 2 = 0$$

$$x = -1$$

$$f(-1) = 4$$

النقطة المشتركة $(-1, 4)$

(c) مماس على (C)

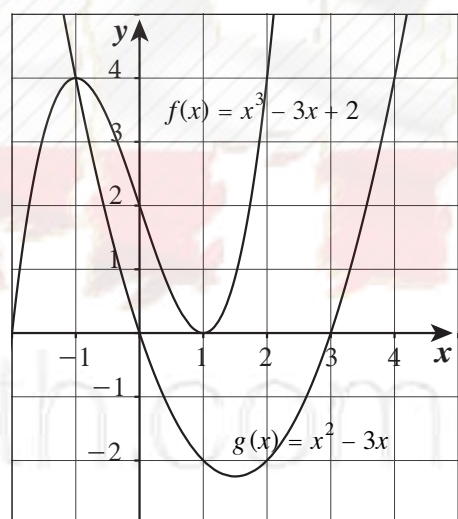
$$f'(-1) = 0$$

$$y = 4$$

مماس على (C')

$$g'(-1) = -5$$

$$y = -5x + 9$$



المجموعة A تمارين مقالية

(1) من جدول التوزيع الطبيعي:

(a) $\frac{0.97}{2} = 0.485 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.17$

(b) $\frac{0.992}{2} = 0.496 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.65$

(2) درجة الثقة 0.95 لذا القيمة الحرجة: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$, $\sigma = 0.5$

$$E = 1.96 \times \frac{0.5}{\sqrt{1000}} \approx 0.03$$
 هامش الخطأ:

فترة الثقة: (4.97 , 5.03)

(3) درجة الثقة = 0.95 لذا القيمة الحرجة: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$, $\sigma = 3.5$

$$E = 1.96 \times \frac{3.5}{\sqrt{13}} \approx 1.9$$
 هامش الخطأ:

فترة الثقة: (28.1 , 31.9)

عند اختيار 100 عينة عشوائية ذات الحجم نفسه ($n = 13$) وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة عشوائية فإننا نتوقع أن 95 فترة تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي.(4) درجة الثقة = 0.95 لذا القيمة الحرجة: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$, $\sigma = 119.5$

$$E = 1.96 \times \frac{119.5}{\sqrt{40}} \approx 37.0338$$
 هامش الخطأ:

فترة الثقة: (135.4662 , 209.5338)

(5) درجة الثقة: 0.95 لذا القيمة الحرجة: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$, $S = 2.2$

$$E = 1.96 \times \frac{2.2}{\sqrt{80}} \approx 0.48$$
 هامش الخطأ:

فترة الثقة: (4.32 , 5.28)

(6) درجة الثقة: 0.95 , $n = 16 < 30$, درجات الحرية = 15 , $S = \sqrt{15}$

$$t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.132$$
 القيمة الحرجة:

$$E = 2.132 \times \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{16}} \approx 2.0643$$
 هامش الخطأ:

فترة الثقة: (10.9357 , 15.0643)

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)

(2) (b)

(3) (a)

(4) (c)

(5) (d)

(6) (d)

(7) (b)

(8) (b)

(9) (a)

المجموعة A تمارين مقالية

(1) صياغة الفروض: فرض العدم: $H_0: \mu = 16$ مقابل الفرض البديل: $H_1: \mu \neq 16$

$\sigma = 1.4$ معلومة، $n = 25$ ، $\bar{x} = 15$

$$Z = \frac{15 - 16}{\frac{1.4}{\sqrt{25}}} \approx -3.57 \quad \text{الاختبار الإحصائي:}$$

درجة الثقة = 0.95

فتكون $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ ومنطقة القبول: $(-1.96, 1.96)$

بما أن: $-3.57 \notin (-1.96, 1.96)$

القرار: نرفض فرض العدم: $\mu = 16$ ونقبل الفرض البديل: $\mu \neq 16$

(2) صياغة الفروض: فرض العدم: $H_0: \mu = 300$ مقابل الفرض البديل: $H_1: \mu \neq 300$

$\sigma = 40$ معلومة، $n = 49$ ، $\bar{x} = 280$

$$Z = \frac{280 - 300}{\frac{40}{\sqrt{49}}} = -3.5 \quad \text{الاختبار الإحصائي:}$$

درجة الثقة = 0.95

فتكون $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ ومنطقة القبول: $(-1.96, 1.96)$

بما أن: $-3.5 \notin (-1.96, 1.96)$

القرار: نرفض فرض العدم: $\mu = 300$ ونقبل الفرض البديل: $\mu \neq 300$

(3) (a) $n = 50$. صياغة الفروض: فرض العدم: $H_0: \mu = 35$ مقابل الفرض البديل: $H_1: \mu \neq 35$

σ غير معلومة، $n = 50$ ، $\bar{x} = 40$

$$Z = \frac{40 - 35}{\frac{7}{\sqrt{50}}} \approx 5.0508 \quad \text{الاختبار الإحصائي:}$$

درجة الثقة = 0.95

فتكون: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ ومنطقة القبول: $(-1.96, 1.96)$

بما أن $5.0508 \notin (-1.96, 1.96)$

القرار: نرفض فرض العدم: $H_0: \mu = 35$ ونقبل الفرض البديل: $H_1: \mu \neq 35$

(b) $n = 20$ ، صياغة الفروض: فرض العدم: $H_0: \mu = 35$ مقابل الفرض البديل: $H_1: \mu \neq 35$

σ غير معلومة، $n = 20 < 30$ ، $\bar{x} = 280$

$$t = \frac{40 - 35}{\frac{7}{\sqrt{20}}} \approx 3.1944 \quad \text{الاختبار الإحصائي:}$$

درجات الحرية: $20 - 1 = 19$

درجة الثقة: 0.95، مستوى المعنوية: $\alpha = 0.05$ ، $\frac{\alpha}{2} = \frac{0.05}{2} = 0.025$

من جدول التوزيع t نجد $t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.093$

منطقة القبول: $(-2.093, 2.093)$

بما أن: $3.1944 \notin (-2.093, 2.093)$

القرار: نرفض فرض العدم: $H_0: \mu = 35$ ونقبل الفرض البديل: $H_1: \mu \neq 35$

(4) صياغة الفروض: فرض العدم: $H_0: \mu = 5$ مقابل الفرض البديل: $H_1: \mu \neq 5$

$$\bar{x} = 4.5, S = 1, n = 100$$

$$Z = \frac{4.5 - 5}{\frac{1}{\sqrt{100}}} = -5 \quad \text{الاختبار الإحصائي:}$$

درجة الثقة = 0.95 فتكون $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ منطقة القبول: $(-1.96, 1.96)$

بما أن $-5 \notin (-1.96, 1.96)$

القرار: نرفض فرض العدم: $H_0: \mu = 5$ ونقبل الفرض البديل: $H_1: \mu \neq 5$

(5) صياغة الفروض: فرض العدم: $H_0: \mu = 30$ مقابل الفرض البديل: $H_1: \mu \neq 30$

$$\bar{x} = 30.3, n = 150, S = 6.5$$

$$Z = \frac{30.3 - 30}{\frac{6.5}{\sqrt{150}}} \approx 0.565 \quad \text{الاختبار الإحصائي:}$$

درجة الثقة = 0.95

فتكون $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ منطقة القبول: $(-1.96, 1.96)$

بما أن $0.565 \in (-1.96, 1.96)$

لذا نقبل فرض العدم: $H_0: \mu = 30$

(6) صياغة الفروض: فرض العدم: $H_0: \mu = 9600$ مقابل الفرض البديل: $H_1: \mu \neq 9600$

$$\bar{x} = 9480, n = 64, S = 640$$

$$Z = \frac{9480 - 9600}{\frac{640}{\sqrt{64}}} = -1.5 \quad \text{الاختبار الإحصائي:}$$

درجة الثقة = 0.95 فتكون $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ ومنطقة القبول: $(-1.96, 1.96)$

بما أن $-1.5 \in (-1.96, 1.96)$

القرار: نقبل فرض العدم: $H_0: \mu = 9600$

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) (a)

(2) (b)

(3) (a)

(4) (b)

(5) (b)

(6) (b)

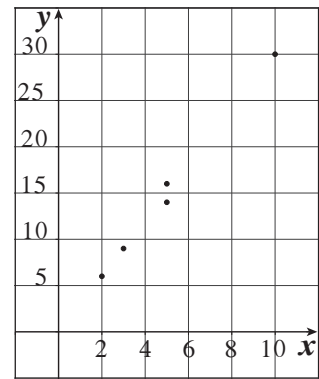
(7) (b)

(8) (c)

(9) (a)

(10) (c)

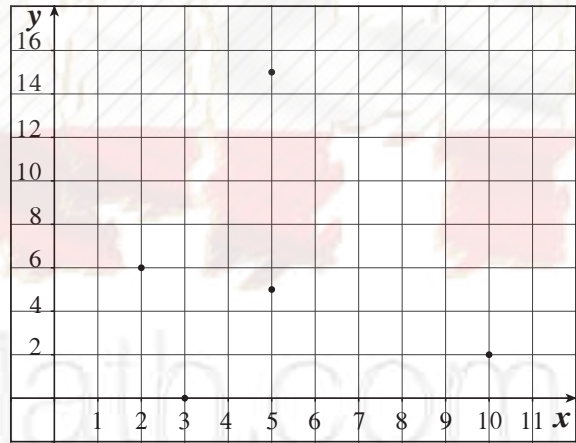
المجموعة A تمارين مقالية



(a) (1)

يوجد ارتباط خطي واضح بين x و y .

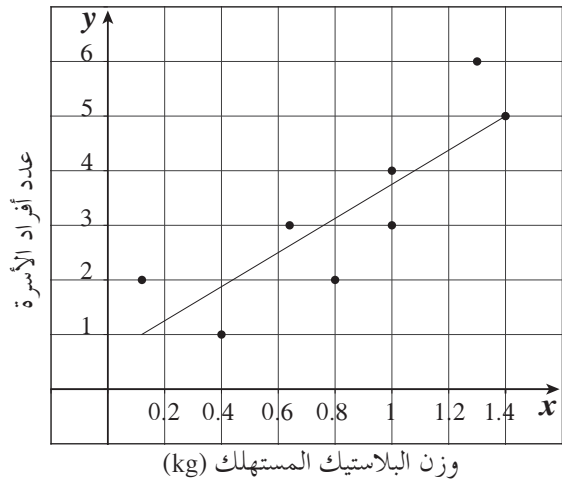
(b) $n = 5$, $\sum x = 25$, $\sum x^2 = 163$,
 $(\sum x)^2 = 625$, $\sum xy = 489$, $r = 0.997$



(a) (2)

لا يوجد ارتباط خطي واضح بين x و y .

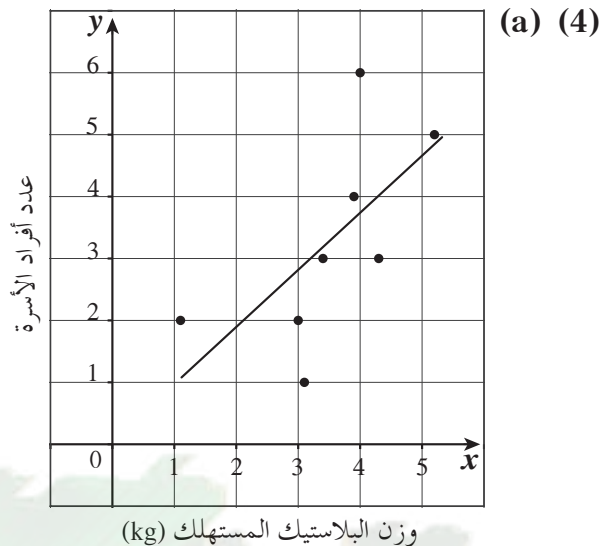
(b) $n = 5$, $\sum x = 25$, $\sum x^2 = 163$,
 $(\sum x)^2 = 625$, $\sum xy = 132$, $r = -0.112$



(a) (3)

(b) قيمة مُعامل الارتباط الخطي هي: $r = 0.847$

(c) القيمة الحرجة لمُعامل ارتباط بيرسون إذا كان $n = 8$ و $\alpha = 0.05$ هي $r = \pm 0.707$ إذاً يوجد ارتباط خطي وثيق بين المتغيرين.



(b) قيمة مُعامل الارتباط الخطي هي: $r = 0.6344$

(c) القيمة الحرجة لمُعامل ارتباط بيرسون إذا كان $n = 8$ و $\alpha = 0.05$ هي $r = \pm 0.707$ إذاً لا يوجد ارتباط خطي وثيق بين المتغيرين.

(5) (a) $\hat{y} = 2x + 1$

(b) $\hat{y}_7 = 2 \times 7 + 1 = 15$

(c) $\hat{y}_2 = 2 \times 2 + 1 = 5$

مقدار الخطأ عند $x = 2$

$$|5 - 5| = 0$$

(6) (a) $\hat{y} = -x + 3$

(b) $\hat{y}_8 = -8 + 3 = -5$

(c) $\hat{y}_5 = -5 + 3 = -2$

مقدار الخطأ عند $x = 5$

$$|-2 + 2| = 0$$

(7) (a) $\hat{y} = 3.246x + 0.55$

(b) $\hat{y} = 3.246 \times 0.2 + 0.55$

$$\approx 1.2$$

أي واحد فقط من أفراد الأسرة.

(8) (a) $\hat{y} = 0.89x + 0.137$

(b) $\hat{y} = 0.89x \times 4.5 + 0.137$

$= 4.142$

أي 4 من أفراد الأسرة.

المجموعة B تمارين موضوعية

- | | | | |
|----------|----------|----------|----------|
| (1) (a) | (2) (b) | (3) (a) | (4) (a) |
| (5) (a) | (6) (d) | (7) (b) | (8) (d) |
| (9) (a) | (10) (b) | (11) (c) | (12) (a) |
| (13) (b) | (14) (d) | (15) (c) | |

اختبار الوحدة الرابعة

(1) (a) درجة الثقة 93% تناظر مستوى المعنوية $\alpha = 0.07$ أي أن $\frac{\alpha}{2} = 0.035$ باستخدام جدول التوزيع الطبيعي

القياسي عند $0.93 \div 2 = 0.465$ فنحصل على $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.815$

(b) درجة الثقة 0.95، $n = 324$ ، $\bar{x} = 68.5$ ، $S = 11$ ، $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ عندها $\bar{x} - E < \mu < \bar{x} + E$

$$68.5 - 1.96\left(\frac{11}{\sqrt{324}}\right) < \mu < 68.5 + 1.96\left(\frac{11}{\sqrt{324}}\right)$$

$$67.302 < \mu < 69.698$$

يمكننا القول إننا واثقون بنسبة 95% أن المتوسط الحسابي لكلفة النقل للموظف الحكومي من منزله إلى العمل وبالعكس بسيارته الخاصة هو بين 67.302 ديناراً كويتيًّا و 69.698 ديناراً كويتيًّا أي $67.302 < \mu < 69.698$

(c) بما أن $n = 324 > 30$ ، أي أنه يمكننا استخدام $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ كقيمة حرجة، لمستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ ، وبما أن

$\mu = 69.6$ يقع داخل فترة الثقة (67.302 ، 69.698) فإن قرارنا هو عدم رفض فرضية

(ديناراً كويتيًّا) $\mu = 69.6$ متوسط كلفة شهرية.

(d) $E < 1$ ، $\sigma = 9.5$ ، $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ عندها نستخدم القاعدة: $E = Z_{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

$$1 > 1.96\left(\frac{9.5}{\sqrt{n}}\right)، \sqrt{n} > 1.96(9.5)$$

$n > 346.7$ أي 347 موظفاً وأكثر.

(2) (a) درجة الثقة 95% أي أن $1 - \alpha = 0.95$ حيث $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{هامش الخطأ:}$$

$$E = \frac{1.96(8.16)}{\sqrt{n}} < 2$$

$$n > \left(\frac{1.96(8.16)}{2}\right)^2 > 63.95$$

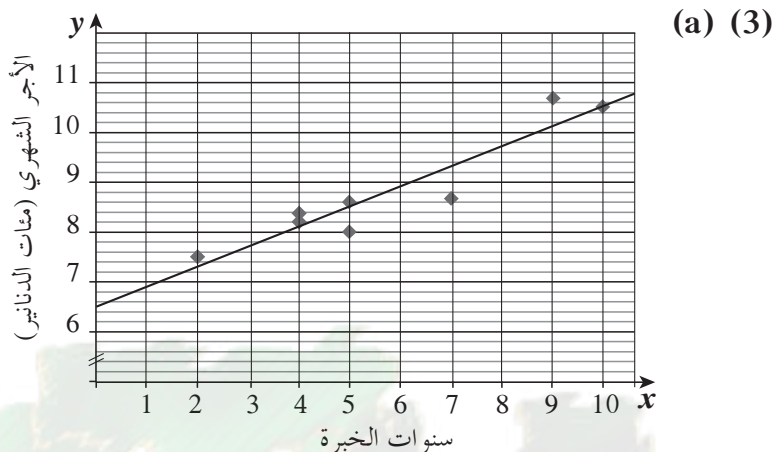
أي 64 زائداً وأكثر

(b) $E = 2$, $\bar{x} = 25.5$, $n = 64$

عندها $\bar{x} - E < \mu < \bar{x} + E$

$23.5 < \mu < 27.5$

يمكننا القول إننا واثقون بنسبة 95% أن المتوسط الحسابي μ لما ينفقه كل زائر للمجمع التجاري في زيارة واحدة هو بين 23.5 و 27.5 دينارًا كويتيًّا، أي أن: $23.5 < \mu < 27.5$



$\sum xy = 426.6$, $(\sum x)^2 = 2116$, $\sum x^2 = 316$, $\sum x = 46$, $n = 8$ (b)

(c) $r = 0.9388$ ، القيمة الحرجة عند $\alpha = 0.05$ هي $\mu = \pm 0.707$ مما يعني أن هناك ارتباط خطي إيجابي قوي بين x, y

(d) معادلة خط الانحدار: $\hat{y} = 0.4x + 6.525$

(e) التنبؤ لراتب موظف لديه 8 سنوات خبرة هو $\hat{y} = 0.4(8) + 6.525$ أي 9.725 مئة دينار أو 973 (دينارًا كويتيًّا).

(a) (4) معادلة خط الانحدار: $\hat{y} = -0.1513x + 5.0196$

(b) أفضل تنبؤ لعدد أفراد الأسرة هو: 3 أفراد

(5) $E = 1.96 \times \frac{1.2}{\sqrt{9}} = 0.784$

فترة الثقة: (19.216 , 20.784)

تمارين إثرائية

(1) $n = 36$, $\bar{x} = 11.6$, $S = 2.5$, $1 - \alpha = 0.9$ أي $\alpha = 0.1$ مما يعطينا $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.645$ كقيمة حرجة أي أن:

$\bar{x} - E < \mu < \bar{x} + E$

$11.6 - 1.645\left(\frac{2.5}{\sqrt{36}}\right) < \mu < 11.6 + 1.645\left(\frac{2.5}{\sqrt{36}}\right)$

$11.6 - 0.685 < \mu < 11.6 + 0.685$

$10.915 < \mu < 12.285$

يمكننا القول إننا واثقون بنسبة 90% أن المتوسط الحسابي μ لمعدل الطالب في امتحان الرياضيات بين 10.915 و 12.285

$$(2) E = 150, \sigma = 800, Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.575$$

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$150 = (2.575) \left(\frac{800}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\sqrt{n} = (2.575) \times \frac{800}{150} = 13.733$$

$$n = (13.733)^2 = 188.6 \approx 189 \text{ (مريضاً)}$$

إذاً حجم العينة المناسب هو 189 مريضاً.

(3) صياغة الفروض: فرض العدم: $H_0: \mu = 4.325$ مقابل الفرض البديل: $H_1: \mu \neq 4.325$
 $\therefore \alpha = 0.05$. درجة الثقة 0.95 فتكون $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ ومنطقة القبول: $(-1.96, 1.96)$

$$n = 64, \bar{x} = 4.101, n > 30$$

$$Z = \frac{4.101 - 4.325}{\frac{0.842}{\sqrt{64}}} = -\frac{0.224}{0.10524} \approx -2.1283$$

بما أن $-2.1283 \notin (-1.96, 1.96)$

القرار: نرفض فرض العدم $\mu = 4.325$ ونقبل الفرض البديل $\mu \neq 4.325$

$$(4) (a) \hat{y} = 0.7x - 0.1$$

(b) 4.5 تمثل 4 500 دينار

$$\hat{y} = 0.7(4.5) - 0.1 = 3.05$$

حجم المبيعات هو حوالي 30 500 دينار.

(5) التقدير بنقطة للمعلمة المجهولة μ هو المتوسط الحسابي للعينة العشوائية $\bar{x} = 17$

(6) درجة الثقة = 0.95 فيكون مستوى الثقة: $\alpha = 0.05$ والقيمة الحرجة 1.96

$$E = 1.96 \times \frac{3}{\sqrt{130}}$$

$$E \approx 0.516$$

فترة الثقة للمعلمة المجهولة μ هي: (27.484 , 28.516)

(7) درجة الثقة 0.95 فيكون مستوى الثقة: $\alpha = 0.05$ أي $\frac{\alpha}{2} = 0.025$

وبما أن $n = 25 < 30$ لذا درجات الحرية $24 = 25 - 1$ والقيمة الحرجة: $t_{\frac{\alpha}{2}} = 2.064$

$$E = 2.064 \times \frac{6}{5} = 2.4768$$

فترة الثقة للمعلمة μ هي: (19.5232 , 24.4768)

(8) صياغة الفروض: فرض العدم: $H_0: \mu = 290\,000$ مقابل الفرض البديل $H_1: \mu \neq 290\,000$

$$Z = \frac{300\,000 - 290\,000}{\frac{70\,000}{\sqrt{1500}}}$$

$$Z \approx 5.533$$

مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ فتكون منطقة القبول: $(-1.96, 1.96)$ $\therefore 5.533 \notin (-1.96, 1.96)$

\therefore القرار هو رفض فرض العدم وقبول الفرض البديل $H_1: \mu \neq 290\,000$

(9) صياغة الفروض: فرض العدم: $H_0: \mu = 10$ مقابل الفرض البديل $H_1: \mu \neq 10$

$$Z = \frac{9 - 10}{\frac{4}{\sqrt{40}}} \approx -1.58$$

مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ فتكون منطقة القبول: $(-1.96, 1.96)$

$$\therefore -1.58 \in (-1.96, 1.96)$$

\therefore القرار هو قبول فرض العدم: $H_0: \mu = 10$

(10) (a) صياغة الفروض: فرض العدم: $H_0: \mu = 150$ مقابل الفرض البديل $H_1: \mu \neq 150$

$$Z = \frac{143 - 150}{\frac{10}{\sqrt{40}}}$$

$$\approx -4.427$$

مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ فتكون منطقة القبول: $(-1.96, 1.96)$

$$\therefore -4.427 \notin (-1.96, 1.96)$$

\therefore القرار هو رفض فرض العدم وقبول الفرض البديل $H_1: \mu \neq 150$

(b) $\frac{\alpha}{2} = \frac{0.05}{2} = 0.025$ ، بما أن $n = 7$ فتكون درجات الحرية $6 = 7 - 1$ ، ومنطقة القبول: $(-2.447, 2.447)$

$$t = \frac{143 - 150}{\frac{8}{\sqrt{7}}}$$

$$\approx -2.315$$

$$\therefore -2.315 \in (-2.447, 2.447)$$

\therefore القرار هو قبول فرض العدم $H_0: \mu = 150$

(11) درجة الثقة 0.90 فتكون القيمة الحرجة: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.645$

$$E = 1.645 \times \frac{2.5}{6}$$

$$\approx 0.6854$$

فترة الثقة: $(10.9146, 12.2854)$

$$(12) \quad r = \frac{n \sum xy - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{n \sum x^2 - (\sum x)^2} \times \sqrt{n \sum y^2 - (\sum y)^2}}$$

$r \approx -0.243$ سلبي ضعيف

موجب قوي.

$$r \approx 0.825 \quad (13)$$

موجب متوسط.

$$r \approx 0.612 \quad (14)$$

موجب ضعيف.

$$r \approx 0.4286 \quad (15)$$



KuwaitMath.com