سلامة علي الركاض

الملف دليل شامل للتكامل من المشتقة العكسية إلى الكسور الجزئية منهاج جديد
موقع المناهج ⇦ ملفات الكويت التعليمية ⇦ الصف الثاني عشر العلمي ⇦ رياضيات ⇦ الفصل الثاني

الرياضيات

الفصل الدراسي الثاني

التكامل

2025 - 2026

12

علمي

أ : سلامة علي الركاض

تعريف المشتقة العكسية

تسمى الدالة F مشتقة عكسية للدالة f المعرفة على مجالها I.

إذا كان: $\forall x \in I \qquad F'(x) = f(x)$

نظرية 1

إذا كانت F مشتقّة عكسيّة للدالّة f على الفترة I، G مشتقّة عكسيّة أيضًا للدالّة f على الفترة I فإنّ:

$$G(x) = F(x) + C \qquad \forall x \in I$$

حيث C ثابت.

نظرية 2

إذا كانت F مشتقة عكسية لِـ f على الفترة I فإن الصورة العامة للمشتقة العكسية لِـ f على الفترة I هي:

$$F(x) + C$$

حيث C ثابت اختياري

مثال 1

أثبت أن: $F(x) = x^3 + 5x + 3$ هي مشتقة عكسية للدالة: $f(x) = 3x^2 + 5$

ثم اكتب الصورة العامة للمشتقة العكسية.

حاول أن تحل 1

أثبت أن: $F(x) = 5 - \frac{1}{3}x^3$ هي مشتقة عكسية للدالة $f(x) = -x^2$

ثم اكتب مشتقة عكسية أخرى لها.

مثال 2 أثبت أن: $F(x) = x^2 - \frac{1}{x}$ هي مشتقة عكسية للدالة: $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$

حاول أن تحل 2 أثبت أن: $F(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2}$ هي مشتقة عكسية للدالة: $f(x) = 1 - \frac{2}{x^3}$

كراسة التمارين

(1) أثبت أن: $F(x) = (3x+2)^5 + 7$ هي مشتقة عكسية للدالة $f(x) = 15(3x+2)^4$.

في التمرينين (3–2)، تحقّق من أن F هي مشتقّة عكسيّة للدالّة f حيث:

(2) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - 10$

$f(x) = x^2 - 2x + 1$

(3) $F(x) = \sqrt{1 + x^4}$

$f(x) = \frac{2x^3}{\sqrt{1 + x^4}}$

تعريف التكامل غير المحدد

التكامل غير المحدد للدالّة f بالنسبة إلى x هو مجموعة كل المشتقّات العكسيّة F ، ويكتب على الصورة:

$$\int f(x)\,dx$$

الدّالة التي يجري تكاملها

$$\int f(x)\,dx$$

رمز التكامل

x متغيّر التكامل

وتقرأ:

التكامل غير المحدد للدالّة f بالنسبة إلى x هو $F(x)+C$.

حيث $F(x)+C$ هي مجموعة كل المشتقات العكسية F.

الثابت C هو **ثابت التكامل** وهو **ثابت اختياريّ**، وعندما نحصل على $F(x)+C$ نقول إنّنا **كاملنا** f أو **أوجدنا تكامل** f.

قواعد التكامل غير المحدد

1. $\int k\,dx = kx + C$ عدد ثابت k
2. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad , \quad n \in Q - \{-1\}$ قاعدة القوى

خواص التكامل غير المحدد

1. $\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx \quad , \quad k \neq 0$ خاصية الضرب بعدد ثابت
2. $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$ خاصية الجمع والطرح

ملاحظات

a. $\int -f(x)\,dx = -\int f(x)\,dx$

b. $\int (f(x)+k)\,dx = \int f(x)\,dx + \int k\,dx$

مثال 3 أوجد:

a $\int 5dx$ b $\int 4x^3\, dx$

حاول أن تحل 3 أوجد:

a $\int 15\, dx$ b $\int 5x^4\, dx$

مثال 4 احسب: $\int (x^2 - 2x + 5)dx$

حاول أن تحل 4 احسب: $\int (3x^2 - 4x - 1)dx$

كراسة التمارين

في التمارين (4—14)، احسب التكامل.

(4) $\int (x^5 - 6x + 3)dx$

(5) $\int (3 - 6x^2)dx$

مثال 5 أوجد التكاملات غير المحددة التالية:

a $\int \frac{1}{x^2} dx$

b $\int \frac{x^2-4x+3}{x-1}dx$

c $\int \left(\frac{x^2-2}{x^2}\right)^2 dx$

حاول أن تحل 5 أوجد التكاملات غير المحددة التالية:

a $\int (2x-3)(x+4)dx$

b $\int \frac{x^2+5x+4}{x+1}dx$

c $\int \left(\frac{3x^2-x}{x}\right)^2 dx$

(6) $\int \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\,dx$

(7) $\int \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)dx$

(8) $\int \frac{x^4 - 27x}{x^2 - 3x}\,dx$

(9) $\int (x-2)(2x+3)\,dx$

مثال 6 أوجد:

a $\int \sqrt{x}\,dx$

b $\int \sqrt[5]{x^2}\,dx$

c $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx$

حاول أن تحل 6 أوجد:

a $\int x\sqrt{x}\,dx$

b $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ ....

....

....

c $\int \frac{x^2 - 3x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ ....

....

....

....

كراسة التمارين

احسب التكامل.

(10) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}\,dx$

....

....

....

....

....

(11) $\int \frac{x-\sqrt{x}}{x}\,dx$

....

....

....

(12) $\int \frac{5+2x}{\sqrt{x}}\,dx$

....

....

....

....

(13) $\int \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$

(14) $\int (\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[4]{x^3})dx$

يمكن تحديد واحدة من المشتقات العكسية عندما يتوفر شرط يمكننا من إيجاد قيمة الثابت C.

مثال 7

إن كان: $F(x)=\int(2x-3)dx$ ، $F(3)=2$ فأوجد $F(x)$

حاول أن تحل 7

إذا كان: $F(x)=\int(2x+5)dx$ ، $F(-1)=0$ فأوجد $F(x)$

كراسة التمارين

(15) إذا كان $F(x) = \int (3x^2 - 5)dx$ و كان $F(2) = 3$، فأوجد $F(x)$.

(16) إذا كان $F(x) = \int (9x^2 - 4x + 5)dx$ و كان $F(-1) = 0$، فأوجد $F(x)$.

موضوعي

في التمارين (1–5)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $F(x) = x^{-3}$ هي مشتقة عكسية للدالة: $f(x) = -3x^{-4}$ (a) (b)

(2) $\int (-x^{-3} + x - 1)dx = \frac{1}{2}x^{-2} + \frac{1}{2}x^2 - x + C$ (a) (b)

(3) $\int \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{x} + C$ (a) (b)

(4) إذا كانت: $f'(x) = \frac{1}{x^2} + x$ ، $f(2) = 1$، فإن: $f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ (a) (b)

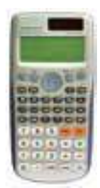
(5) إذا كانت: $F(x) = \int (3x^2 - 12x + 15)dx$, $F(0) = 400$، فإن: $F(x) = x^3 + 6x^2 + 15x + 400$ (a) (b)

في التمارين (6–12)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\int \frac{4}{3}\sqrt[3]{t^2}\,dt =$

(a) $\frac{3t^{\frac{5}{3}}}{5} + C$ (b) $\frac{4t^{\frac{5}{3}}}{5} + C$

(c) $\frac{4}{3}\sqrt[3]{t^5} + C$ (d) $4\sqrt[3]{t^5} + C$



(7) $\int \left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx =$

ⓐ $\frac{3}{5}\sqrt[3]{x}(x^{\frac{4}{3}} + 5) + C$

ⓑ $\frac{3}{5}x^{\frac{2}{3}}(x^{-\frac{2}{3}} + 5) + C$

ⓒ $\frac{5}{3}\sqrt[3]{x}(x^{\frac{4}{3}} + 5) + C$

ⓓ $\frac{5}{3}x^{\frac{4}{3}}(x^{\frac{2}{3}} + 5) + C$

(8) إذا كان: $x = -1$, $y = -5$, $\frac{dy}{dx} = x^{-\frac{2}{3}}$ فإنّ y تساوي:

ⓐ $-\frac{x^2}{3} - \frac{14}{3}$

ⓑ $3x^{\frac{1}{3}} + 2$

ⓒ $3x^{\frac{1}{3}} - 2$

ⓓ $3x^{\frac{1}{3}}$

(9) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x}}dx =$

ⓐ $\frac{3}{4}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + C$

ⓑ $\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}} + C$

ⓒ $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}} + C$

ⓓ $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{6}x^{\frac{1}{2}} + C$

(10) $\int \sqrt{x}(2 + x^2)dx =$

ⓐ $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + C$

ⓑ $\frac{3}{4}x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}} + C$

ⓒ $\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}} + C$

ⓓ $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}} + C$

(11) $\int \frac{2 + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}dx =$

ⓐ $x^{\frac{1}{2}} + \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + C$

ⓑ $4x^{\frac{1}{2}} + \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + C$

ⓒ $x^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{6}x^{\frac{7}{6}} + C$

ⓓ $4x^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{6}x^{\frac{7}{6}} + C$

(12) $\int \left(\frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} + 2\right)^2 dx =$

ⓐ $x^2 + C$

ⓑ $2x + C$

ⓒ $\frac{x^2}{2} + 2x + C$

ⓓ $\frac{1}{3}x^3 + C$

التكامل بالتعويض

إذا كانت F هي مشتقة عكسية للدالة f فإن:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

وإذا كان $u = g(x)$ ، $du = g'(x)dx$ فإن:

$$\int f(u)du = F(u) + C$$

مثال 1

أوجد:

a $\int (x^2 + 2x + 5)^3 (2x + 2)dx$ ....

....

....

....

b $\int \frac{\left(\frac{1}{x} + 4\right)^5}{x^2} dx$ ....

....

....

....

....

....

حاول أن تحل 1

أوجد:

a $\int (x^3 + 4x^2 + x)^7 (3x^2 + 8x + 1)dx$

....

....

....

....

....

b $\int \sqrt[3]{x^2 - 5x + 2} \quad (2x - 5)\,dx$

$$\int (g(x))^n g'(x)\,dx = \frac{(g(x))^{n+1}}{n+1} \quad C \quad , \quad n \in \mathrm{Q} \quad \{ \quad 1\}$$

مثال 2

a $\int \sqrt{4x - 5}\,dx$

b $\int \frac{5}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)^3}\,dx$

حاول أن تحل 2

أوجد:

a $\int \sqrt[5]{(3x+7)}\,dx$

b $\int \frac{3(\sqrt[3]{x}-5)dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

كراسة التمارين

في التمارين (1—12)، استخدم التعويض المناسب لإيجاد التكامل.

(1) $\int (2x-3)\sqrt{x^2-3x+5}\,dx$

(2) $\int (4x-5)^8\,dx$

(3) $\int (x+2)\sqrt[3]{x^2+4x-1}\,dx$

(4) $\int (x^2-1)\sqrt{x^3-3x+5}\,dx$

(5) $\int (x^2-2x)(x^3-3x^2+4)^5\,dx$

(6) $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{4+x^3}}dx$

(7) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-3x}}$

مثال 3 أوجد: $\int x(x+1)^5\,dx$

حاول أن تحل 3 أوجد: $\int x(2x-1)^3\,dx$

مثال 4 أوجد: $\int x^5 \sqrt{4 - x^2}\, dx$

حاول أن تحل 4 أوجد: $\int x^5 \sqrt{3 + x^2}\, dx$

كراسة التمارين

في التمارين (12–1)، استخدم التعويض المناسب لإيجاد التكامل.

(8) $\int x(3x+2)^6 \, dx$

(9) $\int \frac{x}{\sqrt{1+3x}} \, dx$

(10) $\int x^2 \sqrt{x-1} \, dx$

(11) $\int x^3 \sqrt{x^2-2} \, dx$

(12) $\int x^5 \sqrt[3]{x^3+1}\, dx$

موضوعي

في التمارين (5—1)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int x(x^2-1)^{10} dx = \frac{1}{18}(x^2-1)^9 + C$ (a) (b)

(2) $\int (x+1)\sqrt[3]{x^2+2x+3}\, dx = \frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^4} + C$ (a) (b)

(3) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-2}} = 2\sqrt{3x-2} + C$ (a) (b)

(4) $\int (2x^2-1)(2x^3-3x+4)^5 dx = \frac{1}{18}(2x^3-3x+4)^6 + C$ (a) (b)

(5) $\int x\sqrt[3]{x+2}\, dx = \frac{3}{7}(x+2)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{2}(x+2)^{\frac{4}{3}} + C$ (a) (b)

في التمارين (12—6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\int x(x^2+2)^7 dx =$

(a) $\frac{1}{16}(x^2+2)^8 + C$

(b) $\frac{1}{4}(x^2+2)^8 + C$

(c) $\frac{1}{12}(x^2+2)^6 + C$

(d) $\frac{1}{3}(x^2+2)^6 + C$

(7) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}dx =$

ⓐ $\frac{1}{3}(x-1)^{\frac{2}{3}}+C$

ⓑ $\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+C$

ⓒ $\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{2}{3}}+C$

ⓓ $\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}}+C$

(8) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}} =$

ⓐ $\frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{2}{3}}+C$

ⓑ $\frac{2}{3}(3x+1)^{\frac{2}{3}}+C$

ⓒ $2(3x+1)^{\frac{2}{3}}+C$

ⓓ $\frac{1}{2}(3x+1)^{\frac{2}{3}}+C$

(9) $\int \frac{(2+\sqrt{x})^{12}}{\sqrt{x}}dx =$

ⓐ $\frac{13}{2}(2+\sqrt{x})^{13}+C$

ⓑ $\frac{2}{13}(2+\sqrt{x})^{13}+C$

ⓒ $\frac{1}{26}(2+\sqrt{x})^{13}+C$

ⓓ $\frac{1}{22}(2+\sqrt{x})^{11}+C$

(10) $\int \frac{(x+1)}{\sqrt[3]{x^2+2x+3}}dx =$

ⓐ $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^2}+C$

ⓑ $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^2}+C$

ⓒ $3\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^2}+C$

ⓓ $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^2+2x+3}+C$

(11) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx =$

ⓐ $\frac{3}{2}\sqrt{(x+1)^3}-2\sqrt{x+1}+C$

ⓑ $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-\frac{1}{2}\sqrt{x+1}+C$

ⓒ $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-2\sqrt{x+1}+C$

ⓓ $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}+2\sqrt{x+1}+C$

(12) إذا كانت: $F(x)=\int (x+1)(2x^2+4x-1)dx$ ، $F(-2)=\frac{9}{8}$، فإن: $F(x)$ تساوي:

ⓐ $\frac{1}{8}(2x^2+4x-1)^2+\frac{5}{4}$

ⓑ $\frac{1}{8}(2x^2+4x-1)^2+1$

ⓒ $\frac{1}{4}(2x^2+4x-1)^2+1$

ⓓ $4(2x^2+4x-1)^2-1$

تكامل الدوال المثلثية

	التكامل غير المحدد
1	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
2	$\int \sin kx\,dx = -\dfrac{\cos kx}{k} + C$
3	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$
4	$\int \cos kx\,dx = \dfrac{\sin kx}{k} + C$
5	$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$
6	$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$
7	$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$
8	$\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$

مثال 1

أوجد التكاملات غير المحددة التالية:

a $\int (\sin x + \sec^2 x)\,dx$

....

b $\int \csc x(\cot x + \csc x)\,dx$

....

....

....

c $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x}$

....

....

حاول أن تحل 1

أوجد التكاملات غير المحددة التالية:

a $\int (\cos x + \csc^2 x)dx$

b $\int \sec x(\tan x + \sec x)dx$

c $\int \frac{dx}{\sin^2 x}$

مثال 2

أوجد:

a $\int \cos 4x\, dx$

b $\int (2x - \sin 3x)dx$

c $\int x \csc^2(x^2 - 1)dx$

حاول أن تحل2

أوجد:

a $\int \sin 5x\, dx$

b $\int (x^2 + \cos 2x)dx$

c $\int x\sec^2(x^2+2)dx$

مثال 3 أوجد:

a $\int \cos^4 t \cdot \sin t \, dt$

b $\int \sec^2 x \cdot \tan x \, dx$

حاول أن تحل3 أوجد:

a $\int \sin^3 x \cdot \cos x \, dx$

b $\int \csc^2 x \cdot \cot x \, dx$

كراسة التمارين

في التمارين (1—14)، أوجد قيمة التكامل.

(1) $\int (\sec x \tan x + \sin x) dx$

(2) $\int (\csc x \cot x + \sec^2 x) dx$

(3) $\int \left(\frac{-1}{x^2} + 5 \sin 3x \right) dx$

(4) $\int \sin^4 x \cos x \, dx$

(5) $\int \cos^5 x \sin x \, dx$

(6) $\int x^2 \sin(x^3+1)dx$

(7) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$

مثال 4 أوجد:

a $\int \sin^5(x+1) \cdot \cos(x+1)\, dx$

b $\int x^3 \cdot \cos(x^4+5)dx$

c $\int (1+\cos x)^6 \sin x\, dx$

حاول أن تحل4 أوجد:

a $\int \cos^3(2x-3)\cdot \sin(2x-3)dx$

b $\int x^2\cdot \sin(x^3-1)dx$

c $\int (3+\sin 2x)^5 \cos 2x\, dx$

مثال 5 أوجد: $\int \sec^4 x \tan x\, dx$

حاول أن تحل5 أوجد: $\int \csc^5 x \cot x \, dx$

كراسة التمارين

(8) $\int \sec^3 x \tan x \, dx$

(9) $\int \csc^3 x \cot x \, dx$

(10) $\int \sqrt{\cot x} \csc^2 x \, dx$

(11) $\int \sqrt{\tan x}\,\sec^2 x\,dx$

(12) $\int \sqrt{1+\sin x}\,\cos x\,dx$

(13) $\int \frac{dx}{(\sin^2 x)\sqrt{1+\cot x}}$

(14) $\int \frac{dx}{(\cos^2 x)\sqrt{1+\tan x}}$

موضوعي

في التمارين (1–5)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$ (a) (b)

(2) $\int \csc^2 x \, dx = \cot x + C$ (a) (b)

(3) $\left(F'(x) = \sec^2 x \;,\; F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1\right) \Longrightarrow F(x) = \tan x + 2$ (a) (b)

(4) $(F'(x) = \cos x + \sin x \;,\; F(\pi) = 1) \Longrightarrow F(x) = \sin x - \cos x$ (a) (b)

(5) $(F'(x) = \sec x \, \tan x \;,\; F(0) = 4) \Longrightarrow F(x) = \sec x + 3$ (a) (b)

في التمارين (6–12)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) الصورة العامة للمشتقة العكسية للدالة f حيث $f(x) = 8 + \csc x \cot x$ هي:

(a) $F(x) = 8x + \csc x + C$

(b) $F(x) = 8x - \cot x + C$

(c) $F(x) = 8x - \csc x + C$

(d) $F(x) = 8x + \cot x + C$

(7) $\int \csc(5x)\cot(5x)\, dx =$

(a) $\frac{1}{5}\csc(5x) + C$

(b) $\csc(5x) + C$

(c) $\frac{1}{5}\cot(5x) + C$

(d) $-\frac{1}{5}\csc(5x) + C$

(8) $\int \sqrt[3]{\cot x}\, \csc^2 x \, dx =$

(a) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(\cot x)^4} + C$

(b) $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(\cot x)^4} + C$

(9) إذاكانت $y_{\theta=0} = -3$, $\frac{dy}{d\theta} = \sin\theta$ فإنّ y تساوي:

ⓐ $-\cos\theta$

ⓑ $2 - \cos\theta$

ⓒ $-2 - \cos\theta$

ⓓ $4 - \cos\theta$

(10) $\int \sec^5 x \tan x \, dx =$

ⓐ $\frac{5}{3}\sec^5 x + C$

ⓑ $\frac{1}{5}\sec^6 x + C$

ⓒ $\frac{1}{5}\sec^5 x + C$

ⓓ $-\frac{5}{3}\sec^5 x + C$

(11) $\int \frac{\csc^2 x}{\sqrt[3]{2+\cot x}} dx =$

ⓐ $\frac{3}{2}(2+\cot x)^{\frac{2}{3}} + C$

ⓑ $-\frac{3}{2}(2+\cot x)^{\frac{2}{3}} + C$

ⓒ $-2\sqrt{2+\cot x} + C$

ⓓ $\frac{4}{3}(2+\cot x)^{\frac{4}{3}} + C$

(12) $\int \frac{\sin(4x)}{\cos^5(4x)} dx =$

ⓐ $-\frac{1}{16}\cos^{-4}(4x) + C$

ⓑ $\frac{1}{16}\cos^{-4}(4x) + C$

ⓒ $-\cos^{-4}(4x) + C$

ⓓ $\cos^{-4}(4x) + C$

الدوال الأسية واللوغاريتمية

اشتقاق الدوال الأسية

قاعدة 1

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$$

إذا كانت u دالة في x قابلة للاشتقاق فإن:

$$\frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$$

في القاعدة (1) وبوضع $a = e$ نحصل على القاعدة التالية:

قاعدة 2

قاعدة (2)

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

وفي حالة u دالة في x قابلة للاشتقاق فإن:

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$$

مثال 1 أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

a $f(x) = 3^x$ ....

b $f(x) = 6^{\sqrt{x}}$ ....

c $f(x) = 10^{\sin x}$ ....

حاول أن تحل1 أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

a $f(x) = 10^x$ ....

b $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$ ....

c $f(x) = 5^{\cos x}$ ....

كراسة التمارين

في التمارين (1–15)، أوجد $\frac{dy}{dx}$.

(1) $y = 7^x$ (2) $y = 5^{\sqrt{x+1}}$ (3) $y = 8^{\tan x}$

مثال 2 أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

a $f(x) = e^{\frac{2x}{3}}$

b $g(x) = e^{x^2+3x-1}$

c $h(x) = e^{\sec x}$

حاول أن تحل 2 أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

a $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

b $g(x) = e^{x^2-4}$

c $h(x) = e^{\tan x}$

كراسة التمارين

(4) $y = 2e^{x}$

(5) $y = e^{-x}$

(6) $y = 3e^{\frac{x}{5}}$

(7) $y = e^{x^2-x+1}$

(8) $y = e^{2\sqrt{x}+3}$

(9) $y = e^{\csc x}$

(10) $y = e^{x^4-5}$

اشتقاق دوال اللوغاريتمات الطبيعية

قاعدة 3

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

إذا كانت u دالة في x قابلة للاشتقاق:

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

لاحظ أن:

$$\frac{d}{dx}(\ln g(x)) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

مثال 3

أوجد مشتقات كل من الدوال التالية:

a $f(x) = \ln x^2$

b $g(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

c $h(x) = \ln\sqrt{x}$

d $k(x) = \ln(\cos x)$

حاول أن تحل 3

أوجد مشتقات كلّ من الدوال التالية:

a $f(x) = \ln(2x + x^3)$

b $g(x) = \ln\frac{1}{2x+1}$

c $h(x) = \ln(1 + \sqrt{3}x)$

d $h(x) = \ln(\sin x)$

كراسة التمارين

(11) $y = \ln(x^3)$ **(12)** $y = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$

(13) $y = \ln(x+2)$ **(14)** $y = \ln(2-\cos x)$ **(15)** $y = \ln(\ln x)$

قاعدة 4

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}$$

تكامل بعض الدوال الأسية واللوغاريتمية

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

والجدول التالي يبيّن تكامل بعض الدوال الأسية واللوغاريتمية حيث: $u = g(x)$

التكامل غير المحدد	قاعدة المشتقة
$\int e^x\,dx = e^x + C$	$\frac{d}{dx}e^x = e^x$
$\int u'e^u\,dx = e^u + C$	$\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx} = u'e^u$
$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\frac{d}{dx}\ln\lvert x\rvert = \frac{1}{x}$
$\int \frac{u'}{u}dx = \ln\lvert u\rvert + C$	$\frac{d}{dx}\ln\lvert u\rvert = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{u'}{u}$

لاحظ أن: $\int \frac{g'(x)dx}{g(x)} = \ln|g(x)| + C$

مثال 4 أوجد:

a $\int 2e^{x}\,dx$

b $\int 2x \cdot e^{x^2+3}\,dx$

حاول أن تحل 4 أوجد:

a $\int e^{3x}\,dx$

b $\int (2x-1)e^{x^2-x+3}\,dx$

كراسة التمارين

في التمارين (16–27)، أوجد التكامل غير المحدد في كل مما يلي:

(16) $\int e^{0.1x}\,dx$

(17) $\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\, dx$

(18) $\int (2x+1)e^{x^2+x+4}\, dx$

(19) $\int (x^2-2)e^{x^3-6x}\, dx$

(20) $\int \left(e^{0.5x} + \frac{0.5}{x}\right)dx$

مثال 5 أوجد:

a $\int \frac{3}{2x+5}dx$

b $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+7}dx$

c $\int \frac{x^2-5x+6}{x}dx$

حاول أن تحل 5 أوجد:

a $\int \frac{-5}{3x-2}dx$

b $\int \frac{3t^2 - 6t}{t^3 - 3t^2 + 8} dt$

c $\int \frac{x^3 + 4}{x} dx$

كراسة التمارين

(21) $\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$

(22) $\int \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 5} dx$

(23) $\int \frac{x^3 - x}{x^4 - 2x^2} dx$

(24) $\int \frac{x^2 + 1}{x} dx$

(25) $\int \frac{2}{3x + 1} dx$

مثال 6 أوجد: $\int \tan x \, dx$

حاول أن تحل 6

أوجد: $\int \cot x \, dx$

كراسة التمارين

(26) $\int (2\tan x - \csc^2 x)\,dx$

(27) $\int (\cot x + x^2)\,dx$

موضوعي

في التمارين (1–6)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت: $y = 4^{x-2}$ فإن: $\frac{dy}{dx} = 4x$ (a) (b)

(2) إذا كانت: $f(x) = e^{x^2}$ فإن: $f'(x) = 2xe^{2x}$ (a) (b)

(3) إذا كانت: $g(x) = \ln(2x+2)$ فإن: $g'(x) = \frac{1}{2x+2}$ (a) (b)

(4) إذا كانت: $y = x\ln x - x$ فإن: $y' = \ln x$ (a) (b)

(5) $\int \frac{1}{2x}dx = \frac{\ln x}{2} + C$ (a) (b)

(6) $\int \frac{1}{3x+1}dx = \ln(3x+1) + C$ (a) (b)

في التمارين (7–14)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) إذا كانت $y = e^{-5x}$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) e^{-5x} (b) $-e^{-5x}$

(c) $-5e^{-5x}$ (d) $5e^{-5x}$

(8) إذا كانت $y = x^2e^x - x\,e^x$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $e^x(x^2+x-1)$ (b) $e^x(x^2-x)$

(c) $2x\,e^x - e^x$ (d) $e^x(x^2+2x+1)$

(9) إذا كانت $y = (\ln x)^2$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $\frac{\ln x}{x}$ (b) $\frac{2\ln x}{x}$

(c) $\frac{x\ln x}{2}$ (d) $\frac{2\ln^2 x}{x}$

(10) إذا كانت $y = \ln\left(\frac{10}{x}\right)$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $-\frac{10}{x}$ (b) $\frac{10}{x}$

(c) $\frac{1}{x}$ (d) $-\frac{1}{x}$

(11) إذا كانت $y = \ln(x^2+1)$ ، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

ⓐ $\frac{x}{x^2+1}$

ⓑ $\frac{2}{x^2+1}$

ⓒ $\frac{2x}{x^2+1}$

ⓓ $-\frac{2x}{x^2+1}$

(12) $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx =$

ⓐ $2\ln(x^2+1)+C$

ⓑ $\ln(x^2+1)+C$

ⓒ $\frac{x^2}{x^2+1}+C$

ⓓ $\frac{x}{\frac{1}{3}x^2+1}+C$

(13) $\int \frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx =$

ⓐ $\frac{e^x-e^{-x}}{2}+C$

ⓑ $\frac{e^x+e^{-x}}{2}+C$

ⓒ $\frac{e^{-x}-e^x}{2}+C$

ⓓ $\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}+C$

(14) $\int \frac{e^x}{e^x-4}\,dx =$

ⓐ $-\frac{1}{2}(e^x-4)+C$

ⓑ $\ln|e^x-4|+C$

ⓒ $-\ln|e^x-4|+C$

ⓓ $\frac{1}{2}\ln|e^x-4|+C$

التكامل بالتجزيء

قاعدة التكامل بالتجزيء

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$u = \square \ , \ dv = \square$

$du = \square \ , \ v = \square$

مثال 1

أوجد: $\int x \sin x \, dx$

حاول أن تحل 1

أوجد: $\int x \cos x \, dx$

كراسة التمارين

في التمارين (14–1)، أوجد التكامل.

(1) $\int x\cos(3x)\,dx$

(2) $\int x\sin(5x)\,dx$

مثال 2

أوجد:

a $\int x\,e^{x}\,dx$

b $\int 3x\, e^{2x+1}\, dx$

حاول أن تحل 2

أوجد:

a $\int (x-3)e^{x-3}\, dx$

b $\int 4x\, e^{-5x}\, dx$

(3) $\int x\, e^{x-3} dx$

(4) $\int (x-5)e^{x-5}\, dx$

حاول أن تحل 3 أوجد: $\int \ln x \, dx$

مثال 4

أوجد: $\int x \ln x \, dx$

كراسة التمارين

(5) $\int \ln \sqrt[4]{x} \, dx$

(8) $\int \frac{\ln(x)}{x^2} dx$

(9) $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx$

(10) $\int x^2 \ln x^2 dx$

يمكن حساب التكامل بالتجزيء أكثر من مرة.

مثال 5

أوجد: $\int x^2 \cos x \, dx$

حاول أن تحل 5

أوجد: $\int x^2 \sin x \, dx$

كراسة التمارين

(11) $\int (x^2 - 2x)\cos x \, dx$

(12) $\int (x^2 + 3x)\sin x \, dx$

مثال 6

أوجد: $\int x^2 e^x \, dx$

حاول أن تحل 6

أوجد: $\int x^2 e^{x+2} \, dx$

كراسة التمارين

(13) $\int x^2 e^{x+1} dx$

(14) $\int x^2 e^{2x-3}\, dx$

موضوعي

في التمارين (1–5)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int x\cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}x\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos 2x + C$ (a) (b)

(2) $\int x\sin(\pi x)\,dx = -\frac{x}{\pi}\cos(\pi x) + \frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x) + C$ (a) (b)

(3) $\int x e^{6x}\,dx = \frac{1}{6}x e^{6x} - \frac{1}{36}e^{6x} + C$ (a) (b)

(4) $\int x e^{-x}\,dx = -x e^{-x} + e^{-x} + C$ (a) (b)

(5) $\int x\sec^2 x\,dx = x\tan x - \ln|\sec x| + C$ (a) (b)

في التمارين (6–11)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\int (2x+1)\sin x\, dx$

(a) $(2x+1)\cos x + 2\sin x + C$

(b) $-(2x+1)\cos x + 2\sin x + C$

(c) $-(x+1)\cos x - 2\sin x + C$

(d) $(2x+1)\cos x - \sin x + C$

(7) $\int x^2 \ln(x)\, dx =$

(a) $\frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{x^3}{3} + C$

(b) $\frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{x^3}{9} + C$

(c) $\frac{1}{3}x^3\ln(x) + \frac{x^3}{9} + C$

(d) $-\frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{x^3}{9} + C$

في التمرينين (8–9)، إذا كان $\int (2x+1)\ln x\, dx = uv - \int v du$ فإن:

(8) $uv =$

(a) $(2x+1)\ln x$

(b) $2x\ln x$

(c) $\frac{2x+1}{2}\ln x$

(d) $x(x+1)\ln x$

(9) $\int v du =$

(a) $\frac{1}{2}x\ln x + C$

(b) $\frac{1}{2}x^2 + x + C$

(c) $(2x+1)\ln x + C$

(d) $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$

في التمرينين (10–11)، إذا كان $\int (3x-1)e^{3x+2}\, dx = uv - \int v du$ فإن:

(10) $uv =$

(a) $(3x-1)e^{3x+2}$

(b) $\frac{1}{3}(3x-1)e^{3x+2}$

(c) $(3x-1)e^{x+2}$

(d) $\frac{1}{3}(x-1)e^{3x+2}$

(11) $\int v du =$

(a) $-\frac{1}{3}e^{3x+2} + C$

(b) $-e^{3x+2} + C$

(c) $\frac{1}{3}e^{3x+2} + C$

(d) $e^{3x+2} + C$

التكامل باستخدام الكسور الجزئية

أولاً : المقام يمكن تحليله إلى عوامل خطية (عوامل من الدرجة الأولى) غير مكررة

المقام $h(x)$ عبارة عن ناتج ضرب عوامل خطية غير مكررة.

لتكن $f(x) = \frac{r(x)}{h(x)}$ حيث المقام $h(x)$ على الصورة:

$$h(x) = (a_1 x + b_1)(a_2 x + b_2)\dots(a_k x + b_k)$$

حيث لا يوجد عوامل مكررة ولا يوجد عامل ثابت مضروب بآخر.

في هذه الحالة تكون الدالة f على صورة كسور جزئية كالتالي:

$$\frac{r(x)}{h(x)} = \frac{A_1}{a_1 x + b_1} + \frac{A_2}{a_2 x + b_2} + \dots + \frac{A_k}{a_k x + b_k}$$

مثال 1

لتكن الدالة f : $f(x) = \frac{5x - 1}{x^2 - 2x - 15}$

فأوجد:

a الكسور الجزئية

b $\int f(x)\, dx$

حاول أن تحل 1

لتكن الدالة f : $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2 - 4x + 3}$

فأوجد:

a الكسور الجزئية

b $\int f(x)\, dx$

كراسة التمارين

في التمارين (1–4)، أوجد الكسور الجزئيّة لكل دالة f مما يلي ثم أوجد $\int f(x)dx$

(1) $f(x) = \dfrac{2}{(x-5)(x-3)}$

(2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x}$

(3) $f(x) = \dfrac{-x+10}{x^2+x-12}$

مثال2 أوجد: $\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx$

حاول أن تحل 2

أوجد: $\int \frac{x^2 - 2}{2x^3 - 5x^2 - 3x}\, dx$

(4) $f(x) = \dfrac{12}{x^3 + 2x^2 - 3x}$

ثانياً : المقام يمكن تحليله إلى عوامل خطية بعضها متكرر

المقام $h(x)$ عبارة عن ناتج ضرب عوامل خطية بعضها متكرر. لكل عامل من عوامل $h(x)$ على الصورة $(mx+n)^k$، يجب أن يحتوي التفكيك إلى كسور جزئية على مجموع حدود عددها k:

$$\frac{A_1}{mx+n}+\frac{A_2}{(mx+n)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(mx+n)^k}$$

مثال3 أوجد: $\int \frac{-x^2+2x+4}{x^3-4x^2+4x}\,dx$

حاول أن تحل 3

أوجد: $\int \frac{4x^2 - 4x + 1}{x^3 - 2x^2 + x}\,dx$

مثال4

أوجد: $\int \frac{3+x+x^2}{x^3+2x^2}\,dx$

حاول أن تحل 4

أوجد: $\int \frac{x^2+1}{x^3+4x^2}\,dx$

عندما تكون درجة البسط في الحدودية النسبية $f(x) = \frac{r(x)}{h(x)}$ مساوية أو أكبر من درجة المقام، نوجد أولًا ناتج القسمة $q(x)$ باستخدام القسمة المطولة ثم نكتب الدالة على الصورة: $f(x) = q(x) + \frac{p(x)}{h(x)}$ حيث $p(x)$ هو الباقي.

مثال5 أوجد: $\int \frac{x^2 - 3x + 7}{x^2 - 4x + 4}\,dx$

حاول أن تحل 5

a هل يمكن حل مثال (5) بطريقة أخرى.

b أوجد: $\int \frac{x^3 - 2x^2 - 4}{x^3 - 2x^2} dx$

كراسة التمارين

في التمارين (11—5)، أوجد:

(5) $\int \frac{x+17}{2x^2+5x-3}\,dx$

(6) $\int \frac{-6x+25}{x^3-6x^2+9x}\,dx$

(7) $\int \frac{3x^2 - 4x + 3}{x^3 - 3x^2}\, dx$

(8) $\int \frac{x^2 + 3x + 2}{(x-3)^2}\, dx$

(9) $\int \frac{2x^2 + x + 3}{x^2 - 1}\, dx$

موضوعي

في التمارين (1–4)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int \frac{4dx}{(x+3)(x+7)} = \ln|x+3| + \ln|x+7| + C$ (a) (b)

(2) $\int \frac{-6dx}{x^2+3x} = -2\ln|x+3| + 2\ln|x| + C$ (a) (b)

(3) الدالة: $f(x) = \frac{4x-11}{2x^2-x-3}$ على صورة كسور جزئية هي: $f(x) = \frac{3}{x+1} - \frac{2}{2x-3}$ (a) (b)

(4) للحدودية النسبية: $\frac{x^2-x+2}{x^3-2x^2+x}$ ثلاثة كسور جزئية. (a) (b)

في التمارين (5–10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) $\int \frac{6}{x^2-9}dx =$

(a) $\ln|x+3| - \ln|x-3| + C$
(b) $\ln(x-3) - \ln(x+3) + C$
(c) $\ln|x+3| + \ln|x-3| + C$
(d) $\ln|x-3| - \ln|x+3| + C$

(6) $\int \frac{7x-7}{x^2-3x-10}dx =$

(a) $4\ln|x+2| + 3\ln|x-5| + C$
(b) $3\ln|x+2| + 2\ln|x-5| + C$
(c) $4\ln|x-5| + 3\ln|x+2| + C$
(d) $4\ln|x-5| - 3\ln|x+2| + C$

(7) الدالة النسبية: $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$ على صورة كسور جزئية هي $f(x)$ تساوي:

(a) $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2}$
(b) $\frac{1}{2(x-2)} + \frac{1}{2(x+2)}$
(c) $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$
(d) $\frac{1}{2(x-2)} - \frac{1}{2(x+2)}$

(8) $\int \frac{2x^2-4x+3}{x^2-1}dx =$

(a) $2 + 2\ln|x-1| - \frac{9}{2}\ln|x+1| + C$
(b) $\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{9}{2}\ln|x+1| + C$
(c) $2x + \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{9}{2}\ln|x+1| + C$
(d) $x + \frac{1}{2}\ln|x-1| - 9\ln|x+1| + C$

(9) $\int \frac{3x^2+2x}{x^2-4}dx =$

(a) $4\ln|x-2| - 2\ln|x+2| + C$
(b) $3x + 2\ln|x-2| - 2\ln|x-2| + C$
(c) $3x + 4\ln|x-2| - 2\ln|x+2| + C$
(d) $3x + 4\ln|x-2| + 2\ln|x+2| + C$