سلامة علي الركاض

| |
|---|
| الملف تطبيقات التكامل المحدد في الهندسة والتحليل من المساحات والحجوم إلى المعادلات التفاضلية |
| موقع المناهج ⇦ ملفات الكويت التعليمية ⇦ الصف الثاني عشر العلمي ⇦ رياضيات ⇦ الفصل الثاني |

# الرياضيات

الفصل الدراسي الثاني

التكامل المحدد+

# تطبيقات التكامل

2025 - 2026

12

علمي




أ : سلامة علي الركاض

## التكامل لمحدد

وفي هذا البند سوف تتعلم التكامل المحدد للدالة $f$ من $a$ إلى $b$ وهو العدد الحقيقي:
$F(b)-F(a)$

حيث:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b$$
$$= [F(x)]_a^b$$
$$= F(b)-F(a)$$

ويسمّى $a, b$ حدّي التكامل، والقواعد التي سبق ذكرها في التكامل غير المحدد تطبق على التكامل المحدد.

### مثال 1

**أوجد التكامل المحدد للدالة:** $f(x) = 3x^2 - x + 4$ من $x = -2$ إلى $x = 3$.

### حاول أن تحل 1

**أوجد:** $\int_2^7 (x^3 - 2x^2 + 2)\,dx$

## خواص التكامل المحدد

إذا كانت $f$ دالة متصلة على الفترة $I$ ، $k \in \mathbb{R}$ ، $a, b, c \in I$ فإن:

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$
2. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
3. $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$
4. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
5. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

لاحظ في خاصية 3 أنه: إذا كان $k = 1$ فإن: $\int_a^b dx = b - a$

### مثال 2

أوجد:

a $\int_{-8}^{-4} dx$

..................................................

..................................................

b $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (2\cos x)dx$

..................................................

..................................................

c $\int_{2}^{-1} (\sqrt{x+1} - 3)dx$

..................................................

..................................................

..................................................

..................................................

..................................................

..................................................

d $\int_{1}^{2}\left(3e^{x}+\frac{e}{x}\right)dx$

حاول أن تحل 2 أوجد:

a $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\sin 2x-\csc^{2}x\right)dx$

b $\int_{2}^{-3} 5\,dx$

c $\int_{3}^{3}(-2x^{3}+x^{2})dx$

**d** $\int_{2}^{4} \frac{dx}{x-1}$

## كراسة التمارين

في التمارين (1—7)، أوجد:

(1) $\int_{-1}^{1} 3x(x-4)\,dx$

(2) $\int_{0}^{2} (x+1)^2\,dx$

(3) $\int_{0}^{4} \frac{x^2-1}{x+1}\,dx$

**(4)** $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 3x \, dx$ **(5)** $\int_1^4 \frac{8-x^4}{2x^2} \, dx$ **(6)** $\int_0^1 x\sqrt{x} \, dx$

**(7)** $\int_1^2 \left(3e^x + \frac{5}{x}\right) dx$

مثال 3

أوجد:

a $\int_{-2}^{3} |x| dx$

b $\int_{0}^{5} |x-3| dx$

حاول أن تحل 3

أوجد:

a $\int_{-3}^{4} |2x-4| dx$

**b** $\int_{1}^{3} |x+2|\,dx$

كراسة التمارين

في التمارين (8–10)، أوجد:

**(8)** $\int_{-1}^{3} |x-2|\,dx$

**(9)** $\int_{-1}^{1} |x^3|\,dx$

**(10)** $\int_{-2}^{3} (x|x|+3)\,dx$

لتكن $f$ دالة متصلة على $[a\,,b]$

6 إذا كانت: $f(x) \geqslant 0 \quad \forall \quad x \in [a\,,b]$

فإن: $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$

7 إذا كانت: $f(x) \leqslant 0 \quad \forall \quad x \in [a\,,b]$

فإن: $\int_a^b f(x)dx \leqslant 0$

**مثال 4**

دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_3^5 (x^2+x)dx \geqslant 0$

.................................................................................................................................

.................................................................................................................................

.................................................................................................................................

.................................................................................................................................

.................................................................................................................................

.................................................................................................................................

.................................................................................................................................

.................................................................................................................................

**حاول أن تحل 4**

دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_{-1}^0 (x^2+x)dx \leqslant 0$

.................................................................................................................................

.................................................................................................................................

.................................................................................................................................

.................................................................................................................................

.................................................................................................................................

.................................................................................................................................

.................................................................................................................................

**8** لتكن الدالتين $f\,,g$ متصلتين على $[a\,,b]$ وكانت: $f(x) \leqslant g(x) \quad \forall\, x \in [a\,,b]$

فإن: $\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$

## كراسة التمارين

**(11)** $\int_{-4}^{2} (x^2+2x-8)\,dx \leq 0$

.......................................................................................................................................................................

.......................................................................................................................................................................

.......................................................................................................................................................................

.......................................................................................................................................................................

.......................................................................................................................................................................

.......................................................................................................................................................................

.......................................................................................................................................................................

## التفسير البياني للتكامل المحدد

في المستوى الإحداثي لتكن $f$ دالة متصلة على $[a\,,b]$،

$A$ تمثل مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ ومحور السينات

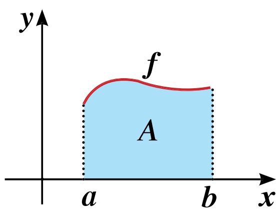
والمستقيمين $x=a \quad , \quad x=b$

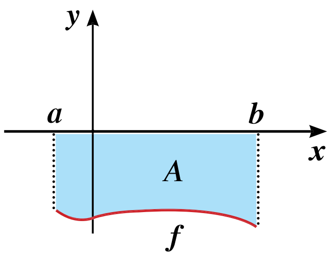
**1** إذا كانت: $f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [a\,,b]$

فإن: $\int_a^b f(x)\,dx = A$

**2** إذا كانت: $f(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in [a\,,b]$

فإن: $\int_a^b f(x)\,dx = -A$

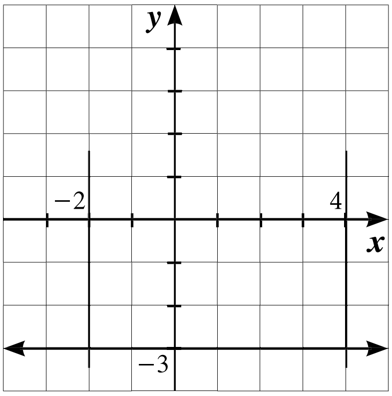


## مثال 6

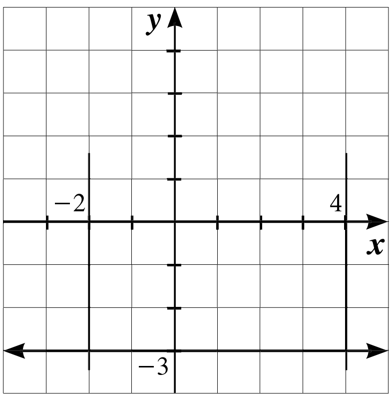
**a** أوجد مساحة المنطقة المحددة بين منحنى الدالة $f(x) = -3$ ، ومحور السينات، والمستقيمين $x = -2$ , $x = 4$.

**b** تحقق بيانيًّا.




## حاول أن تحل 6

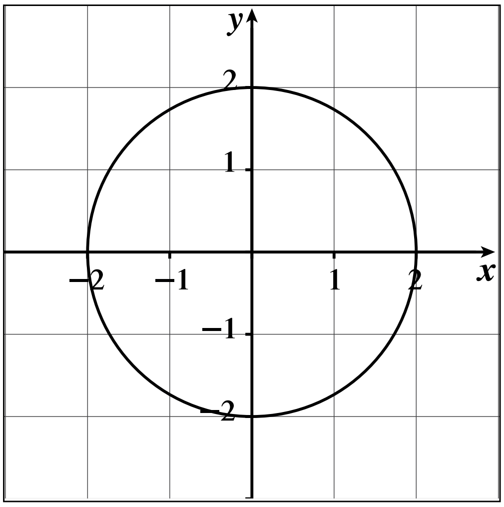
أوجد قيمة $\int_{1}^{5} (2 - 2x)\,dx$ بيانيًّا.



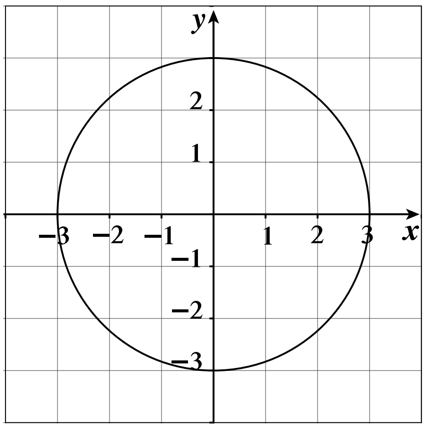
مثال 7

أوجد:

a $\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx$




b $\int_{0}^{3} -\sqrt{9-x^2}\, dx$



حاول ان تحل 7

أوجد:

**a** $\int_{-5}^{5} \sqrt{25 - x^2}\, dx$

**b** $\int_{0}^{4} -\sqrt{16 - x^2}\, dx$

**(14)** $\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\, dx$

**(15)** $\int_{-5}^{0} -\sqrt{25 - x^2}\, dx$

تعلمت في البنود السابقة طرائق عدة لإيجاد التكامل غير المحدد منها التكامل بالتعويض والتكامل بالتجزيء والتكامل بالكسور الجزئية. وتستخدم هذه الطرائق أيضًا في إيجاد التكاملات المحددة.

**مثال 8** أوجد: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x \, dx$

**حاول ان تحل 8**

a هل يمكن حل مثال (8) بطريقة أخرى؟ فسّر إجابتك.

b أوجد: $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x \cos 2x \, dx$

مثال 9

أوجد:

a $\int_{-1}^{1}(x^2+2x-3)^2(x+1)\,dx$

b $\int_{0}^{3} x\sqrt{x+1}\;dx$

حاول ان تحل 9

أوجد:

**a** $\int_{-1}^{1} \left((x+1)\sqrt{x^2+2x+5}\right) dx$

**b** $\int_{2}^{5} x\sqrt{x-1}\, dx$

مثال 10

أوجد: $\int_{-2}^{0} \frac{x}{e^x}\, dx$

حاول ان تحل 10

أوجد: $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} x\sec^2 x\, dx$

مثال 11

أوجد: $\int_{1}^{5} \frac{2x+8}{x^2+4x+3}\,dx$

حاول ان تحل 11

أوجد: $\int_{4}^{7} \frac{3x^2-17}{x^2-x-6}\,dx$

في التمارين (16–19)، استخدم التعويض المناسب لحساب التكامل.

**(16)** $\int_0^3 \frac{dx}{(1+x)^2}$

**(17)** $\int_e^6 \frac{dx}{x\ln x}$

**(18)** $\int_1^e \frac{\ln^6 x}{x}dx$

**(19)** $\int_{-1}^3 \frac{x\,dx}{x^2+1}$

**في التمارين (23–20)، أوجد:**

**(20)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx$

**(21)** $\int_0^{\pi} x \cos 3x \, dx$

**(22)** $\int_1^{3} x^3 \ln x \, dx$

في التمارين (24–26)، أوجد:

**(24)** $\int_{-1}^{1} \frac{4}{x^2 - 4}\,dx$

**(25)** $\int_{-2}^{0} \frac{5x - 1}{x^2 + 2x - 3}\,dx$

(26) $\int_{1}^{3} \frac{x^2}{(x+1)^2}\, dx$

## موضوعي

في التمارين (7–1)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^2 x\, dx = \frac{\pi}{2}$ (a) (b)

(2) $\int_{-3}^{-2} (|x| + x + 5)dx = -2$ (a) (b)

(3) $\int_{-1}^{1} (|x|)^3 dx = -\frac{1}{2}$ (a) (b)

(4) $\int_{0}^{1} 12(3x-2)^3 dx = -15$ (a) (b)

(5) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\pi}\sqrt{1-x^2}\,dx = 1$ — (a) (b)

(6) $\int_{2}^{3} f(x)\,dx + \int_{3}^{5} f(x)\,dx - \int_{5}^{2} f(x)\,dx = 0$ — (a) (b)

(7) $\int_{2}^{4} f(x)\,dx + \int_{4}^{2} g(x)\,dx = 0$ — (a) (b)

**في التمارين (12–8)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.**

**(8)** إذا كان: $\int_{3}^{-1} g(x)\,dx = 2$ ، $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = 4$ فإن $\int_{-1}^{3} (2f(x)+3g(x)+1)\,dx$ تساوي:

(a) 18 (b) $-6$ (c) 6 (d) 12

**(9)** $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{18}} \sqrt{2}\,dx =$

(a) 2 (b) $2\sqrt{2}$ (c) 4 (d) 8

**(10)** $\int_{-1}^{1} (1-|x|)\,dx =$

(a) 1 (b) $-1$ (c) 0 (d) $\frac{1}{2}$

**(11)** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)\,dx =$

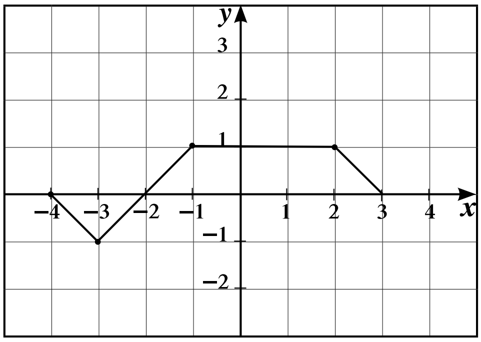
(a) 4 (b) 2 (c) 0 (d) $\pi$

**(12)** لتكن: $f(x) = x^2 + 5$ فإن: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx > 0$ لكل قيم $a$ تنتمي إلى:

(a) $\mathbb{R} - \mathbb{R}^-$ (b) $\mathbb{R} - \mathbb{R}^+$ (c) $\mathbb{R}^-$ (d) $\mathbb{R}^+$

**في التمارين (15–13)، لديك قائمتان، اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين من القائمة (1) لتحصل على عبارة صحيحة.**

إذا كان بيان الدالة $f$ كما في الشكل المقابل، فإن:




| (1) | (2) |
|---|---|
| **(13)** $\int_{-4}^{3} f(x)\,dx$ يساوي: | (a) 6 |
| **(14)** مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ ومحور السينات هي: | (b) 5 |
| | (c) 0 |
| **(15)** $\int_{-4}^{-1} \left(f(x) + \frac{1}{6}\right)dx$ يساوي: | (d) 3 |

# الوحدة السادسة

# تطبيقات التكامل

## المساحات في المستوي

### أولًا: مساحة منطقة محددة بمنحنى الدالة $f$ ومحور السينات في الفترة $[a\,,b]$

علمنا من دراستنا السابقة أنه إذا كانت $f$ دالة متصلة على $[a\,,b]$ فإن مساحة المنطقة $A$ المحددة بمنحنى الدالة $f$ ومحور السينات والمستقيمين $x = a \;,\; x = b$

إذا كانت: $f(x) \geqslant 0 \qquad \forall\, x \in [a\,,b]$

فإن $A = \int_a^b f(x)\,dx$

إذا كانت: $f(x) \leqslant 0 \qquad \forall\, x \in [a\,,b]$

فإن $A = -\int_a^b f(x)\,dx$

**مثال 1**

يبيّن الشكل المقابل بيان الدالة: $f(x) = x^2 + 4 - 4x$

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة ومحور السينات والمستقيمين $x = 2 \;,\; x = 5$

## حاول أن تحل 1

في مثال (1) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ ومحور السينات والمستقيمين $x = 4$ , $x = -1$

## مثال 2

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ : $f(x) = x^2 - 3x$ ومحور السينات.

## حاول أن تحل 2

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ : $f(x) = x^2 + 5x + 4$ ومحور السينات.

لتكن $f$ دالة متصلة على الفترة $[a, b]$ ، $c \in (a, b)$ حيث $f(c) = 0$

فإن مساحة المنطقة المستوية المحددة بمنحنى الدالة $f$ ومحور السينات في الفترة $[a, b]$ هي:

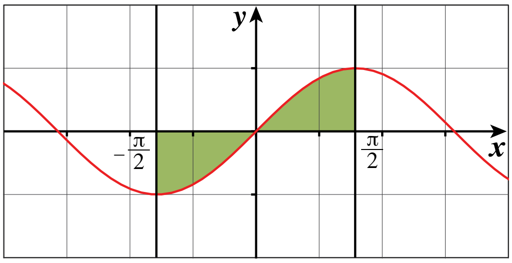
$$A = \left| \int_a^c f(x)\,dx \right| + \left| \int_c^b f(x)\,dx \right|$$

## مثال 3

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ ومحور السينات في الفترة المبينة.

**a** $f(x) = x^3 - 4x \quad , \quad \left[-1 , \frac{3}{2}\right]$

b $f(x) = \sin x \quad , \quad \left[-\frac{\pi}{2} \,,\, \frac{\pi}{2}\right]$




## حاول أن تحل 3

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ ومحور السينات في الفترة المبينة.

a $f(x) = x^3 - 9x \quad , \quad [-2 \,,\, 1]$

b $f(x) = \cos x \quad , \quad [0 \,,\, \pi]$

## ثانيًا: مساحة منطقة محددة بمنحنيي دالتين في الفترة $[a , b]$

**مساحة منطقة محددة بين منحنيين**

إذا كانت كل من $g$ , $f$ متّصلتين على الفترة $[a , b]$، حيث

$$f(x) \geqslant g(x) \quad \forall x \in [a , b]$$

فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين $g$ , $f$ والمستقيمين $x = a$ , $x = b$ هي:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

### مثال 4

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ : $f(x) = x^2 + 2$ ومنحنى الدالة $g$ : $g(x) = \sqrt[3]{x}$ والمستقيمين $x = 1$ , $x = 0$

علمًا بأن: $f(x) > g(x) \quad , \quad \forall x \in [0 , 1]$

## حاول أن تحل 4

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ : $f(x) = x^2 + 3$

ومنحنى الدالة $g$ : $g(x) = x^2 + 1$ والمستقيمين $x = 1$ , $x = -1$

علمًا بأن: $\forall x \in [-1, 1]$ , $f(x) > g(x)$

## مثال 5

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ : $f(x) = e^x$ ومنحنى الدالة $g$ : $g(x) = -1 - x^2$ والمستقيمين $x = 3$ , $x = 0$

علمًا بأن المنحنيين للدالتين $f , g$ غير متقاطعين.

## حاول أن تحل 5

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ : $f(x) = x^2 + 1$

ومنحنى الدالة $g$: $g(x) = -x^2 - 3$ والمستقيمين $x = -1$ , $x = 1$

علمًا بأن المنحنيين للدالتين $f , g$ غير متقاطعين.

عندما تنحصر منطقة بين منحنيات متقاطعة، فإنّ حدود التكامل هي الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع.

## مثال 6

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى القطع المكافئ

$y_1 = 2 - x^2$ والمستقيم $y_2 = -x$

## حاول أن تحل6

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين: $y_1 = x^2 + 2 \quad , \quad y_2 = -2x + 5$

في مثال (6) يمكن إيجاد المساحة $A$ باستخدام القيمة المطلقة دون الحاجة لاستخدام القيمة الاختيارية كالتالي:

$$A = \left| \int_{-1}^{2} (y_1 - y_2)dx \right| = \left| \int_{-1}^{2} (y_2 - y_1)dx \right|$$

## مثال 7

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي: $f(x) = x^2 + 1 \quad , \quad g(x) = -x^2 + 9$

## حاول أن تحل 7

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنيي الدالتين: $f(x) = -2x^2 + 2 \quad , \quad g(x) = x^2 - 1$

## كراسة التمارين

**(1)** أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ : $f(x) = 8x^3$ ومحور السينات والمستقيمين $x = 3$ , $x = 1$

**(2)** أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ : $f(x) = x^2 - 5x$ ومحور السينات.

**(3)** أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ : $f(x) = 12 - x^2$ ومحور السينات.

في التمارين (4—6)، أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ ومحور السينات في الفترة المحددة:

**(4)** $f(x) = x^2 - x - 6 \ , \ [-3, 2]$

**(5)** $f(x) = x^3 - 6x \ , \ [0, 3]$

**(7)** أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ : $f(x) = 4x - x^2$ ومنحنى الدالة $g$ : $g(x) = 5 + x^2$
والمستقيمين $x = 0$ , $x = 2$ علمًا بأن منحنيي الدالتين $g$ , $f$ غير متقاطعين.

**(10)** أوجد مساحة المنطقة بين المنحنى $f(x) = 3 - x^2$ والمستقيم $g(x) = -1$.

في التمارين (11–13)، أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيات التالية:

**(11)** $f(x) = x^2 - 2\ ,\ g(x) = 2$

**(12)** $f(x) = 2x - x^2\ ,\ g(x) = -2x$

(13) $f(x) = 7 - 2x^2 \ , \ g(x) = x^2 + 4$

## كراسة التمارين

**في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.**

(1) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ ومحور السينات والمستقيمين $x = b \ , \ x = a$ هي: $\int_a^b f(x)\,dx$ — (a) (b)

(2) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$: $f(x) = 4 - x^2$ ومحور السينات في $[-2, 2]$ هي: $2\int_0^2 f(x)\,dx$ — (a) (b)

(3) إذا كانت: $\forall x \in [a, b]$ $\quad f(x) \leq 0$ فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ ومحور السينات في $[a, b]$ هي: $\int_b^a f(x)\,dx$ — (a) (b)

(4) إذا كان منحنى الدالة $f$ : $f(x) = x^2 - 2x - 3$ يقطع محور السينات عند $x = -1$ ، $x = 3$. فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ ومحور السينات هي: $A = \int_{-1}^{3} f(x)\,dx$ — (a) (b)

(5) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ : $f(x) = |x|$ ومحور السينات. في الفترة $[-2, 2]$ هي: 2 وحدة مساحة — (a) (b)

**في التمارين (6–10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.**

(6) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ : $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ ومحور السينات هي:

(a) $9\pi$ units$^2$     (b) $6\pi$ units$^2$

(c) $3\pi$ units$^2$     (d) $\frac{9}{2}\pi$ units$^2$

**(7)** مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $g$ : $g(x) = (x-2)^3$ ومحور السينات في الفترة $[0,4]$ بالوحدات المربعة هي:

ⓐ $2\int_0^2 g(x)\,dx$

ⓑ $-2\int_0^2 g(x)\,dx$

ⓒ $\int_0^4 g(x)\,dx$

ⓓ $-2\int_2^4 g(x)\,dx$

**(8)** مساحة المنطقة المحددة بين منحنى الدالة $f(x) = 2$ ومنحنى الدالة $g$ : $g(x) = -\sqrt{x}$ والمستقيمين $x = 0$ ، $x = 4$ هي:

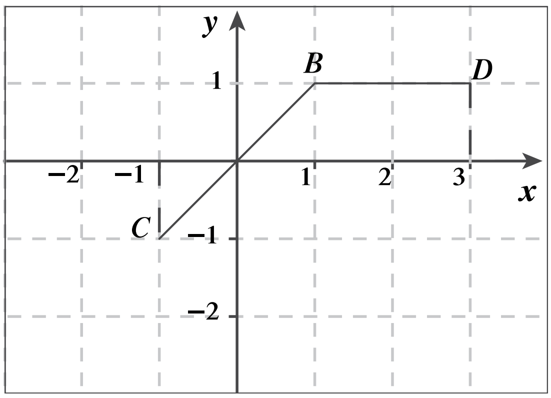
ⓐ $20$ units$^2$

ⓑ $\frac{8}{3}$ units$^2$

ⓒ $\frac{40}{3}$ units$^2$

ⓓ $8$ units$^2$

**(10)** إذا كان بيان الدالة $f$ يمثله $\overline{CB} \cup \overline{BD}$ كما هو موضح بالشكل فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ ومحور السينات والمستقيمين $x = 3$ , $x = -1$ هي:




ⓐ $3$ units$^2$

ⓑ $4$ units$^2$

ⓒ $2$ units$^2$

ⓓ $5$ units$^2$

# حجوم الأجسام الدورانية

$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 \, dx$$

## مثال 1

**أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة $f$ : $f(x) = x^2 + 2$ ومحور السينات في الفترة $[-1, 1]$.**

## حاول أن تحل1

**أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة $f$: $f(x) = \sqrt{x-1}$ ومحور السينات في الفترة $[1, 5]$.**

## مثال 2

**باستخدام التكامل المحدد أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بنصف الدائرة $y = \sqrt{r^2 - x^2}$**

## حاول أن تحل2

**باستخدام التكامل المحدد أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة $f$ : $r \neq 0$ , $f(x) = r$ في الفترة $[0 , h]$**

$$V = \pi \int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2]dx$$

حيث: $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$ أو $f(x) \leqslant g(x) \leqslant 0$

مثال 3

**أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنيي الدالتين $g : g(x) = \sqrt{x}$ , $f(x) = x^2$**

## حاول أن تحل3

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بين منحنيي الدالتين

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + 1 \quad , \quad g(x) = \frac{x}{2} + 2$$

## حاول أن تحل4

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة دورة كاملة حول محور السينات و المحددة

بمنحنيي الدالتين: $y_1 = x + 3 \quad , \quad y_2 = x^2 + 1$

## كراسة التمارين

في التمارين (1–8)، أوجد حجم المجسّم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بكل من المستقيمات والمنحنيات التالية:

**(1)** $y_1 = x^2 \ , \ y_2 = 0 \ , \ x = 2, \ x = 0$

**(2)** $y_1 = \frac{1}{x} \ , \ y_2 = 0 \ , \ x = 1 \ , \ x = 4$

**(3)** $y_1 = \sqrt{1 - x^2}$ , $y_2 = 0$

**(4)** $y_1 = x^2 + 1$ , $y_2 = x + 3$

**(7)** $y_1 = x$ , $y_2 = 1$ , $x = 0$

**(8)** $y_1 = \sqrt{x}\ ,\ y_2 = 0\ ,\ x = 4$

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

..................................................................................................................................

## كراسة التمارين

**في التمارين (4–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.**

**(1)** حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ : $f(x) = \sqrt[3]{x}$ في الفترة $[1,8]$ هو: $V = \pi \int_8^1 (\sqrt[3]{x})^2 dx$

(a) (b)

**(2)** حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ : $f(x) = 2\sqrt{x}$ في الفترة $[1,4]$ هو: $V = \pi \int_0^4 4x dx - \pi \int_0^1 4x dx$

(a) (b)

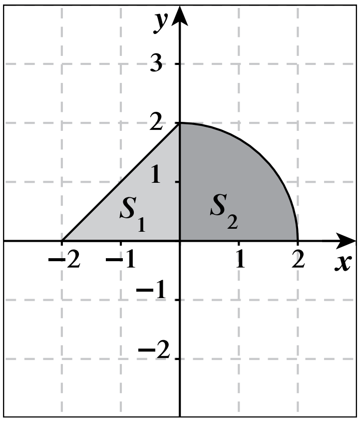
**(3)** حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ : $f(x) = x$ ومنحنى الدالة $g$ : $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ هو: $V = \pi \int_0^2 \left(x - \frac{1}{2}x^2\right) dx$

(a) (b)

**(5)** حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f$ : $f(x) = 3$ ومحور السينات في الفترة $[-1,1]$ بالوحدات المكعبة هو:

(a) $6\pi$ (b) $18$ (c) $18\pi$ (d) $81\pi$

**(6)** المنطقة المظللة $S = S_1 \cup S_2$ حيث $S_1$ منطقة مثلثة، $S_2$ منطقة ربع دائرة كما هو موضح بالشكل.




حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة $S$ بالوحدات المكعبة يساوي:

(a) $\frac{40}{3}\pi$ (b) $4 + 2\pi$ (c) $\frac{16}{3}\pi$ (d) $8\pi$

**(7)** حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة $y = -\sqrt{4 - x^2}$ بالوحدات المكعبة هو:

(a) $4\pi$ (b) $6\pi$ (c) $\frac{16}{3}\pi$ (d) $\frac{32}{3}\pi$

**(8)** حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بين منحنى الدالة $f : f(x) = \frac{1}{x}$ والمستقيمات $x = 1\ ,\ x = 2\ ,\ y = 0$ هو:

(a) $\pi$ units$^3$ (b) $\frac{\pi}{3}$ units$^3$ (c) $\frac{\pi}{2}$ units$^3$ (d) $\frac{\pi}{4}$ units$^3$

**(9)** حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بين منحنى الدالة $f : f(x) = \sqrt{x+1}$ ومحور السينات والمستقيمين $x = 3\ ,\ x = -1$ بالوحدات المكعبة هو:

(a) $8\pi$ (b) $7\pi$ (c) $8$ (d) $\frac{5}{2}\pi$

# طول قوس ومعادلة منحنىدالة

**قاعدة طول القوس**

إذا كانت الدالة $f'$ متصلة على $[a, b]$ فإن طول القوس من منحنى $y = f(x)$ في $[a, b]$ هو:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

**مثال 1** في الشكل، أوجد طول القوس من منحنى الدالة $f$ : $f(x) = \sqrt{x^3}$ في الفترة $[0, 4]$

## حاول أن تحل 1

أوجد طول القوس من منحنى الدالة $f$ : $f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 1$ في الفترة $[3, 8]$

## مثال 2

أوجد طول القوس من منحنى الدالة $f$ : $f(x) = \frac{1}{3}(3 + 2x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[0, 6]$

حاول أن تحل 2

أوجد طول القوس من منحنى الدالة $f$ : $f(x) = \frac{2}{9}(9+3x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[2,5]$

## ثانيًا: إيجاد معادلة منحنى دالة باستخدام التكامل

مثال 3

أوجد معادلة منحنى الدالة $f$ الذي ميله عند أي نقطة $P(x,y)$ يساوي: $3x^2-4x+1$ ويمر بالنقطة $A(1,2)$

## حاول أن تحل 3

أوجد معادلة منحنى الدالة $f$ الذي ميله عند أي نقطة $P(x, y)$ يساوي $3x^2 + x$ ويمر بالنقطة $(2 , 2)$

## مثال 4

أوجد معادلة منحنى الدالة $f$ الذي ميله عند أي نقطة $P(x, y)$ يساوي: $4x^3 + 6x^2 - 2x + 1$ ويمر بالنقطة $B(1 , 0)$

## حاول أن تحل4

أوجد معادلة منحنى الدالة $f$ الذي ميله عند أي نقطة $P(x, y)$ يساوي $-8x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ ويمر بالنقطة $(-1, -5)$

## مثال 5

إذا كان ميل العمودي على منحنى الدالة $f$ عند أي نقطة عليه $(x , y)$ يساوي $\sqrt{5 - 4x}$

فأوجد معادلة المنحنى عندما يمر بالنقطة $A(-5 , 3)$

## حاول أن تحل 5

**إذا كان ميل العمودي لمنحنى الدالة $f$ عند أي نقطة عليه $(x, y)$ هو $2x - 1$**

**فأوجد معادلة المنحنى علمًا بأنه يمر بالنقطة $B(1, 0)$**

## كراسة التمارين

**(1)** أوجد طول القوس من منحنى الدالة $f$ : $f(x) = 5 + 2\sqrt{x^3}$ في الفترة $\left[0, \frac{1}{3}\right]$.

**(2)** أوجد طول القوس من منحنى الدالة $f$ : $f(x)=\frac{1}{3}(7+4x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $\left[1, \frac{5}{4}\right]$.

**(4)** أوجد معادلة منحنى الدالة $f$ الذي ميله عند أي نقطة عليه $(x, y)$ هو: $-x^2+2x-4$ ويمر بالنقطة $A(3,7)$

**(5)** أوجد معادلة منحنى الدالة $f$ الذي ميله عند أي نقطة عليه $(x\,,y)$ هو: $-4x^3+2x+5$ ويمر بالنقطة $A(1,3)$

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

**(6)** أوجد معادلة منحنى الدالة $f$ الذي ميله عند أي نقطة عليه $(x\,,y)$ هو: $\cos 2x$ ويمر بالنقطة $A\left(\frac{-\pi}{4},\frac{5}{2}\right)$

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

........................................................................................................................................................................

**(7)** أوجد معادلة منحنى الدالة $f$ الذي ميله عند أي نقطة عليه $(x , y)$ هو: $\sin 3x$ ويمر بالنقطة $A\left(\frac{2\pi}{9} , \frac{7}{6}\right)$

**(8)** إذا كان ميل العمودي على منحنى الدالة $f$ عند أي نقطة عليه $(x , y)$ هو $2x + 5$ فأوجد معادلة منحنى الدالة $f$ إذا كان يمر بالنقطة $B(-2 , 3)$

**في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.**

**(1)** طول القوس من منحنى الدالة $f$: $f(x)=\frac{1}{3}(1+4x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[0,1]$ هو $L=\frac{2}{3}$ وحدة طول.

(a) (b)

**(2)** منحنى الدالة $f$ الذي ميله عند أي نقطة عليه $(x,y)$ هو: $x^3+2$ ويمر بالنقطة $A(2,6)$ معادلته: $f(x)=\frac{x^4}{4}+2x+2$

(a) (b)

**(3)** منحنى الدالة $f$ الذي ميله عند أي نقطة عليه $(x,y)$ هو: $-\sqrt{x}+x$ ويمر بالنقطة $A(1,1)$ معادلته: $f(x)=-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x^2+\frac{2}{3}$

(a) (b)

**(4)** لتكن $A(1,3)$ نقطة على منحنى الدالة $f$ : $f'(x)=3x^2-12x+9$ فإن معادلة الدالة $f$ هي $f(x)=x^3-6x^2+9x-1$

(a) (b)

**في التمارين (5–9)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.**

**(5)** طول القوس من منحنى الدالة $f$: $f(x)=\frac{1}{3}$ في الفترة $[-2,3]$ هو:

(a) 7 units (b) 6 units (c) 5 units (d) 1 unit

**(6)** طول القوس من منحنى الدالة $f$: $f(x)=x-3$ في الفترة $[0,2]$ هو:

(a) $\sqrt{2}$ units (b) $2\sqrt{2}$ units (c) $3\sqrt{2}$ units (d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ units

**(7)** معادلة منحنى الدالة الذي ميل العمودي عليه عند أي نقطة $(x,y)$ هو: $-x+3$ ويمر بالنقطة $A(2,3)$ هي $y$ تساوي:

(a) $-\frac{x^2}{2}+3x-4$ (b) $\ln|3-x|+3$ (c) $-\frac{x^2}{2}+3x+4$ (d) $3-\ln|3-x|$

**(8)** معادلة منحنى الدالة الذي ميله عند أي نقطة $(x,y)$ هو: $2x-3\sqrt{x}$ ويمر بالنقطة $A(4,-2)$ هي:

(a) $x^2+2\sqrt{x^3}-2$ (b) $x^2-2\sqrt{x^3}$ (c) $x^2-2\sqrt{x^3}-2$ (d) $\frac{x^2}{2}-2\sqrt{x^3}+2$

# المعادلات التفاضلية

**تعريف (1)**

**المعادلات التفاضلية: هي معادلات تحتوي على دالّة مجهولة وبعض مشتقاتها.**

**نستخدم عادة $y$ بدلًا من $f(x)$.**

**تعريف (2)**

**رتبة المعادلة التفاضلية هي أعلى رتبة لمشتقة دالة موجودة في هذه المعادلة.**

**تعريف (3)**

**درجة المعادلة التفاضلية: هي أكبر أس لأعلى المشتقات رتبة.**

**تدريب:**

أكمل الجدول التالي محدّدًا رتبة ودرجة كل معادلة من المعادلات التفاضلية فيه.

| الدرجة | الرتبة | المعادلة التفاضلية |
|---|---|---|
| | | $y' = 5y$ |
| | | $y'^2 = \frac{4x}{y}$ |
| | | $y'' = 5y' + xy$ |
| | | $(y'')^2 = 1 + (y')^3$ |
| | | $y''' = (y')^2 + x^3$ |

**مثال 1**

أثبت أن الدالة: $y = e^{x^2}$ هي حل للمعادلة التفاضلية: $y' - 2xy = 0$

حاول أن تحل 1

أثبت أنّ الدالة: $y = 2e^{3x} + 1$ هي حل للمعادلة: $y' + 3 = 3y$

I المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى التي على الصورة $y' = f(x)$ حلها يكون على الصورة: $y = \int f(x)\,dx$

مثال 2

حل المعادلة: $y' = 3x^2 - 1$

حاول أن تحل 2

حل المعادلة: $y' = 7x^2 + 9x - 1$

**(1)** أثبت أن الدالة: $y = 3e^{x}$ هي حل للمعادلة التفاضلية $y'' - y' + 2x = 2x$

**(2)** أثبت أن الدالة: $y = e^{x}$ هي حل للمعادلة التفاضلية $y + y'' = 2e^{x}$

**في التمارين (3–19)، حلّ المعادلات التفاضلية التالية:**

**(3)** $y' = x^2 + x + 2$ التي تحقق $y = 4$ عند $x = 1$

**(4)** $xy' = 1 - x^2$

SALAMA

مثال 3 حل المعادلة: $y' = 3x^2 - 1$، التي تحقق $y = 2$ عند $x = 1$

حاول أن تحل 3 حل المعادلة: $y' = 8x^3 - 3x^2 + 4$، والتي تحقق $y = 5$ عند $x = 1$

II بعض المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى تحوي المتغيرين: $x , y$ على الصورة: $\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$ يتم حلها بطريقة فصل المتغيرات بالصورة التالية:

$$\frac{1}{h(y)} dy = g(x) dx$$

ونكامل الطرفين وصولًا إلى حل المعادلة التفاضلية وهو إيجاد $y$.

مثال 4

حل المعادلات التفاضلية التالية:

**a** $y' - 2xy = 0$

**b** $y' = 4y$

حاول أن تحل 4

حل المعادلة التفاضلية: $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$

**(5)** $xy' = 4y$ التي تحقق $y = 1$ عند $x = 1$

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

**III المعادلات التفاضلية على الصورة $y' = ay$ حيث $a \neq 0$ حلولها هي $y = k\,e^{ax}$ حيث $k \in \mathbb{R}^*$.**

**مثال 5** أوجد حلًّا للمعادلة: $y' = 4y$ إذا كان $y = 2$ عند $x = 0$

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

**حاول أن تحل 5** أوجد حلًّا للمعادلة: $y' = -2y$ إذا كان $y = 3$ عند $x = 0$

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

..........................................................................................................................

**(6)** $y' = 3y$

**(7)** $y' = 5y$

**(8)** $2y' - 5y = 0$ التي تحقق $y = 4$ عند $x = 2$

**(9)** $\sqrt{2}\,y' + y = 0$ التي تحقق $y = \sqrt{2}$ عند $x = 0$

**IV** المعادلات التفاضلية على الصورة $y' = ay + b$ حيث $b \neq 0$ , $a \neq 0$ تكون حلولها: $y = k\,e^{ax} - \frac{b}{a}$

مثال 6

**a** حلّ المعادلة: $2y' + y = 1$

**b** أوجد الحل الذي يحقق $y = 2$ عند $x = -1$

حاول أن تحل6

حل المعادلة $3y' - 2y = 4$ ، ثم أوجد الحل الذي يحقق $y = 3$ عند $x = 0$

**(10)** $y' = y + 1$

**(11)** $\frac{1}{2}y' + 4y = 1$ التي تحقق $y = \frac{3}{4}$ عند $x = \frac{1}{4}$

**(12)** $2y' + y = 4$ التي تحقق $y = 2$ عند $x = 0$

**V** المعادلات التفاضلية على الصورة: $y'' = f(x)$

يتم حل هذه المعادلات بخطوتين: $y' = \int f(x)dx = F(x) + C_1$

ثم $y = \int (F(x) + C_1)dx$

**مثال 7** حل المعادلة: $y'' = 3x^2 - 2x$

..................................................

..................................................

..................................................

..................................................

**حاول أن تحل 7** حل المعادلة: $y'' = -3x^2 + 6x$

..................................................

..................................................

..................................................

..................................................

## كراسة التمارين

**(13)** $y'' = -4 \sin 4x$

..................................................

..................................................

..................................................

..................................................

**(14)** $y'' = 6x - 8$

**(20)** **(a)** حل المعادلة التفاضلية: $y' + 2y = 0$

**(b)** أوجد الحل الذي يحقق $y = \frac{1}{2}$ عند $x = 0$

## موضوعي

**في التمارين (1–7)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.**

**(1)** المعادلة التفاضلية التالية: $x^2y''' + (y')^2 + y = 0$ من الرتبة الثالثة والدرجة الأولى. (a) (b)

**(2)** المعادلة التفاضلية التالية: $(y')^2 + 2xy = 0$ من الرتبة الثانية والدرجة الأولى. (a) (b)

**(3)** إذا كان $y = \frac{1}{2}$ عند $x = 0$ و $y' + 2y = 0$ فإن $y = \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{4}$ (a) (b)

**(4)** إذا كان $y = 1$ عند $x = 0$ و $y' + y = 2$ فإن $y = 2e^{-x}$ (a) (b)

**في التمارين (8–14)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.**

**(8)** المعادلة التفاضلية التالية: $\frac{(2y'' + x)^2}{xy} = 3$ من:

(a) الرتبة الأولى والدرجة الثانية.
(b) الرتبة الثانية والدرجة الأولى.
(c) الرتبة الثانية والدرجة الثانية.
(d) الرتبة الأولى والدرجة الأولى.

**(9)** حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = 2x$ الذي يحقق $y = -2$ عندما $x = 1$ هو:

(a) $y = x^2 + 3$
(b) $y = x^2 - 3$
(c) $y = \frac{x^2}{2} - 3$
(d) $y = \frac{x^2}{2} + 3$

**(10)** إذا كان $y'' = 2x^2 + 3x$ فإنّ:

(a) $y = \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + c$
(b) $y = \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}$
(c) $y = \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + c_1x + c_2$
(d) $y = \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + c_1x$

**(11)** حل المعادلة التفاضلية $2y' + y = 1$ الذي يحقق $y = 3$ عند $x = 5$ هو:

(a) $y = 2e^{\frac{5}{2}}$
(b) $y = \frac{2}{e^{\frac{5}{2}}}$
(c) $y = 2e^{\left(-\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right)} + 1$
(d) $y = 2e^{\left(-\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\right)} + 1$