تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج الكويتية

almanahj.com/kw

موقع المناهج الكويتية

سلامة علي الركاض

الملف كراسة متابعة الطالب الأعداد المركبة منهاج جديد
موقع المناهج ⇦ ملفات الكويت التعليمية ⇦ الصف الحادي عشر العلمي ⇦ رياضيات ⇦ الفصل الثاني

روابط مواقع التواصل الاجتماعي بحسب الصف الحادي عشر العلمي			
روابط مواد الصف الحادي عشر العلمي على تلغرام			
التربية الاسلامية	اللغة العربية	اللغة الانجليزية	الرياضيات

المزيد من الملفات بحسب الصف الحادي عشر العلمي والمادة رياضيات في الفصل الثاني	
1	النموذج الاول 11 علمي(1)
2	هندسة الفضاء بالحلول في مادة الرياضيات
3	مراجعة هامة ومتوقعة في مادة الرياضيات
4	تحميل كتاب الطالب(تمارين)علمي
5	تحميل كتاب الطالب

رياضيات

الصف الحادي عشر علمي

كراسة متابعة الطالب

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

الفصل الدراسي الثاني

2025 - 2026

الأعداد المركبة

أ : سلامة علي الركاض

الوحدة التخيلية

هي العدد الذي مربعه (-1) ويرمز إليه بالرمز i

$$i = \sqrt{-1} \quad , \quad i^2 = -1$$

الأعداد التخيلية

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

لأي عدد حقيقي موجب m

$$\sqrt{-m} = \sqrt{m}\, i$$

تسمى الأعداد التي على الصورة bi حيث $b \in \mathbb{R}^*$ أعداداً تخيلية

مثال 1

بسط كلاً مما يلي مستخدماً الوحدة التخيلية i

$\sqrt{-8}$

$\sqrt{-4}$

.....

.....

حاول أن تحل 1

بسط كل عدد مما يلي مستخدماً الوحدة التخيلية i

$\sqrt{-36}$

$\sqrt{-12}$

$\sqrt{-2}$

.....

.....

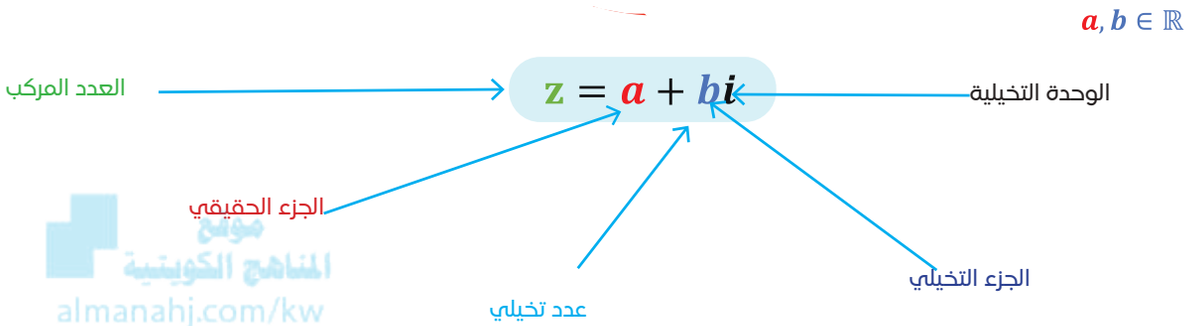
.....

.....

العدد المركب هو عدد على الصورة $z = a + bi$ حيث a, b عددان حقيقيان , i الوحدة التخيلية

نسمى الصورة الجبرية للعدد المركب $a + bi$

$a, b \in \mathbb{R}$



موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

ويرمز لمجموعة الأعداد المركبة بالرمز $\mathbb{C}$

نشاط

العدد المركب	الجزء الحقيقي	الجزء التخيلي
$2 + 3i$	2	3
	4	-5
$i - 1$		
7		
	0	-1

مثال 2

اكتب كلاً من الأعداد المركبة التالية على الصورة الجبرية

$\sqrt{-9} + 6$ .....

$\frac{1 + \sqrt{-25}}{4}$ .....

$1 - \sqrt{-20}$ .....

حاول أن تحل 2

اكتب كلاً من الأعداد المركبة التالية على الصورة الجبرية

$\sqrt{-18}+7$ .....

$\frac{10-\sqrt{-100}}{5}$ .....

$\frac{\sqrt{-9}+5}{7}$ .....

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

كراسة التمارين

بسط كل عدد مما يلي مستخدماً الوحدة التخيلية i

(1) $\sqrt{-16}$

(2) $\sqrt{-15}$

(3) $3\sqrt{-9}$

(4) $-\frac{1}{2}\sqrt{-100}$

.....

.....

.....

اكتب كل عدد في الصورة الجبرية

(5) $2+\sqrt{-3}$

(6) $\sqrt{-1}+2$

(7) $\frac{-\sqrt{-50}-2}{6}$

(8) $\frac{\sqrt{-8}+8}{2}$

.....

.....

.....

.....

.....

ملاحظات

إذا كان $b = 0$، فإن $z = a$ يسمى **عددًا حقيقيًّا**.

إذا كان $b \neq 0$, $a = 0$، فإن $z = bi$ يسمى **عددًا تخيليًّا**.

كل عدد حقيقي هو أيضًا عدد مركب: $a = a + 0i$.

تساوي عددين مركبين

$$z_1 = a_1 + b_1 i$$
$$z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$a_1 = a_2 \ \ and \ \ b_1 = b_2 \longleftrightarrow z_1 = z_2$$

موقع المناهج الكويتية almanahj.com/

مثال 3

أوجد قيم كل من $R \in$ x , y في كل مما يلي

a) $12 + 3i = 4x - 9yi$

b) $x^2 - y^2 i = 9 - 25i$

c) $2x + yi = 1$

حاول أن تحل 3

أوجد قيم كل من x , y $\in R$ في كل مما يلي

a $x + 5i = 7 - 3yi$

b $(x + 3) + y^2 i = 5 - yi$

c $3i = 2x - 5yi$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

كراسة التمارين

في التمرينين (9–11)، حل المعادلات التالية:

(9) $2x + 3yi = -14 + 9i$

(10) $3x + 19i = 16 - 8yi$

(11) $14i^2 - 3i = 2x + (y + 5)i$

ملاحظة

إذا ساوى عدد مركب الصفر فإن جزءه الحقيقي يساوي الصفر وجزءه التخيلي يساوي الصفر أيضًا، والعكس صحيح

$$x + yi = 0 \iff (x = 0 \ , \ y = 0)$$

التمثيل البياني لعدد مركب

يمكن وضع العدد المركب $z = a + bi$ على صورة الزوج المرتب (a, b).

الإحداثي السيني هو الجزء الحقيقي والإحداثي الصادي هو الجزء التخيلي.

الصورة الديكارتية: يمثل كل عدد مركب بنقطة في مستوى أرجاند (المستوى المركب) ونكتب

$M(a, b)$ ⟷ $z = a + bi$

الصورة الديكارتية — الصورة الجبرية

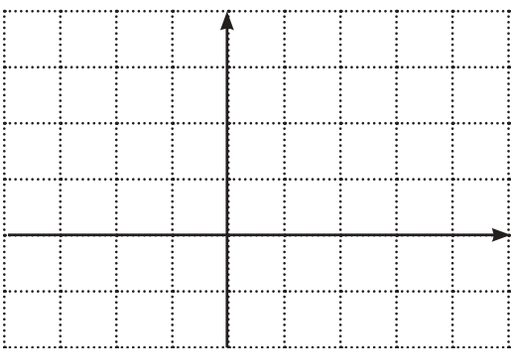
موقع المناهج الكويتية almanahj.com

يسمى محور السينات بالمحور الحقيقي ويسمى محور الصادات بالمحور التخيلي

مثال 4

مثل كلاً مما يلي في المستوى المركب

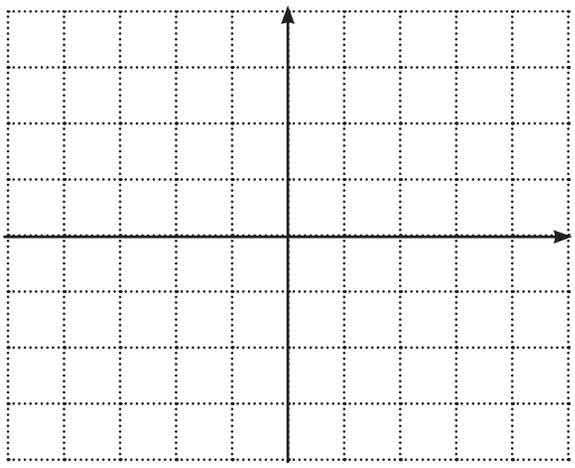
$a)\ z_1 = 3 + 2i$ $\quad b)\ z_2 = -1$ $\quad c)\ z_3 = -i - 2$ $\quad d)\ z_4 = i$



حاول أن تحل 4

مثل كلاً مما يلي في المستوى المركب

a $z_1 = 4 - i$ $\quad$ b $z_2 = -3i$ $\quad$ c $z_3 = -4 - 3i$ $\quad$ d $z_4 = 2$



مثال 5 **اكتب العدد المركب المناظر لكل من النقاط** $M(3,2)$, $L(2,-1)$, $J(0,-5)$.

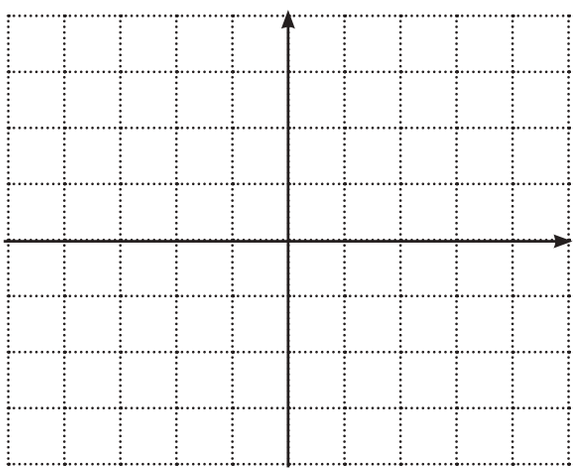
حاول أن تحل 4 **اكتب العدد المركب المناظر لكل من النقاط** $N(-4,1)$, $H(1,-2)$, $K(7,0)$.

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

كراسة التمارين

(12) مثّل كلًّا مما يلي في المستوى المركب:

(a) $z_1 = -2 + 3i$ **(b)** $z_2 = -4$ **(c)** $z_3 = -i$ **(d)** $z_4 = 2(2+i)$



(13) اكتب العدد المركب المناظر لكل من النقاط التالية:

(a) $L(4,5)$ **(b)** $M(-4,-2)$ **(c)** $N(-2,6)$ **(d)** $P(0,-3)$

العمليات على مجموعة الأعداد المركبة

أولاً : جمع وطرح الأعداد المركبة

إذا كان $z_2 = a_2 + b_2 i$, $z_1 = a_1 + b_1 i$ عددين مركبين فإن

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (a_1 + b_2)i$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

ملاحظات

الجمع في z عملية إبدالية وتجميعية.

- الصفر هو العنصر المحايد لعملية الجمع على مجموعة الأعداد المركبة $(0 = 0 + 0i)$.
- المعكوس الجمعي للعدد المركب $z = a + bi$ هو العدد المركب $-z = -a - bi$

مثلًا: إذا كان $z = 2 + 5i$ فإن $-z = -2 - 5i$

- إذا كان مجموع عددين مركبين يساوي صفرًا فإن كلًّا منهما معكوس جمعي للآخر والعكس صحيح.

أي أن: $z_1 + z_2 = 0 \iff z_1 = -z_2$

- لإيجاد ناتج طرح: $z_1 - z_2$ يمكن إضافة المعكوس الجمعي لِـ z_2 إلى z_1 أي $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$

المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

مثال 6

إذا كان: $z_3 = 2i$, $z_2 = 4 - 7i$, $z_1 = 2 + 3i$ فأوجد:

a) $z_1 + z_2$

b) $z_1 - z_2$

c) $z_3 + z_2 + z_1$

حاول أن تحل 6

إذا كان $z_3 = -0.3i$, $z_2 = 3.4 - 1.2i$, $z_1 = -2 + 5i$ فأوجد:

a $z_1 + z_2$ **b** $z_2 - z_1$ **c** $z_3 - z_2 - z_1$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

كراسة التمارين

في التمارين (14–23)، بسّط كل تعبير مما يلي:

(14) $(2 + 4i) + (4 - i)$

(15) $6 - (8 + 3i)$

(16) $(4 + \sqrt{-9}) + (6 - \sqrt{-49})$

(17) $(8 - \sqrt{-1}) - (-3 + \sqrt{-16})$

ثانياً : ضرب الأعداد المركبة

قاعدة الضرب

$$c.z = c.a + c.bi$$
$$c \in \mathbb{R}$$

$$z_1.z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$$

خواص عملية الضرب على C

الضرب في C عملية إبدالية وتجميعية وتقبل التوزيع على الجمع والطرح من اليمين واليسار

العدد **1** هو العنصر المحايد لعملية ضرب الأعداد المركبة $(1 = 1 + 0i)$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

ملاحظة

عند ضرب عددين مركبين نستخدم نفس الخطوات التي تستخدم في عملية ضرب كثيرات الحدود

مع مراعاة أن $i^2 = -1$

مثال 7

أوجد الناتج

a) $(5i)(-4i)$

b) $3(7 + 5i)$

c) $(2 + 3i)(-3 + 5i)$

d) $4i\left(1 - \frac{1}{2}i\right)\left(1 + \frac{1}{2}i\right)$

حاول أن تحل 7

أوجد الناتج

a $(6-5i)(4-3i)$

b $(9+4i)(4-9i)$

c $(12i)(7i)(i+1)$

موقع المناهج الكويتية almanahj.com/kw

كراسة التمارين

بسّط كل تعبير مما يلي:

(18) $(-2i)(5i)$

(19) $(4i)(-9i)^2$

(20) $-5(1+2i)+3i(3-4i)$

(21) $(-6-5i)(1+3i)$

(22) $(-2+\sqrt{-9})(6+\sqrt{-25})$

مثال 8

إذا كان $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 5 - i$ فأوجد:

a $-3\, z_2$

b $z_1 \cdot z_2$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

حاول أن تحل 8

إذا كان $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 1 + 4i$ فأوجد:

a $\frac{1}{2} z_1$

b $z_1 \cdot z_2$

قوى العدد المركب

إذا كان p عدد كلي فإن

$$i^{4p} = 1 \quad , \quad i^{4p+1} = i \quad , \quad i^{4p+2} = -1 \quad , \quad i^{4p+3} = -i$$

لاحظ أنه عند رفع (i) لعدد كلي فإن الناتج يكون أحد عناصر المجموعة $\{-1 , 1 , i , -i\}$

$i^{15} =$ .....

$i^{2013} =$ .....

$i^{29} =$ .....

مثال 9

إذا كان $z_1 = i \ , \ z_2 = -2i \ , \ z_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

فأوجد:

a z_1^{21} .....

b z_2^6 .....

موقع المناهج الكويتية
alminahj.com/kw

c z_3^2 .....

.....

حاول أن تحل 9

أوجد:

a $5(i)^{73}$ .....

كراسة التمارين

بسّط كل تعبير مما يلي:

(23) $i(-6i)^3$

ثالثاً : قسمة الأعداد المركبة

مرافق العدد المركب

مرافق العدد المركب $z = a + bi$ هو العدد المركب $\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$

خواص مرافق العدد المركب

- $z + \bar{z} = 2a$
- $z - \bar{z} = 2bi$
- $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- $\overline{(\overline{z_1})} = z_1$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

مثال 10

إذا كان $z_1 = 3 + 4i \ , \ z_2 = 5 - 2i$ فأوجد:

a $z_1 + \overline{z_1}$

b $z_1 - \overline{z_1}$

c $\overline{(\overline{z_1})}$

d $\overline{z_1 + z_2}$

e $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

f $\overline{z_1 \cdot z_2}$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

حاول أن تحل 10

إذا كان $z_1 = 2 - 7i \ , \ z_2 = 3 + 5i$ فأوجد:

a $\overline{z_1} + \overline{z_2}$

b $\overline{z_1 - z_2}$

a $\overline{z_1} + \overline{z_2}$ **b** $\overline{z_1 - z_2}$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

كراسة التمارين

(25) إذا كان $z_2 = -3 + 4i$, $z_1 = 2 + i$ فأوجد:

(a) $-\frac{1}{3}z_2$ **(b)** $z_1 . z_2$

(e) $\overline{z}_1 - \overline{z}_2$ **(f)** $z_1 . \overline{z}_2$

المعكوس الضربي لعدد مركب غير صفري $z = a + bi$ يرمز له بالرمز z^{-1}:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} \quad <==> \quad z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i \quad <==> \quad z^{-1} = \frac{\overline{z}}{a^2+b^2}$$

نضرب البسط والمقام بمرافق المقام

مثال 11

أوجد المعكوس الضربي لكل من:

a $z_1 = 3 - 5i$ b $z_2 = 2i - 1$ c $z_3 = -7i$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

حاول أن تحل 11

أوجد المعكوس الضربي لكل من:

a $z_1 = -3i - 7$ b $z_2 = 5 + 11i$ c $z_3 = 6i$

كراسة التمارين

أوجد المعكوس الضربي لكل مما يلي:

(a) $-3-2i$ **(b)** $5i$ **(c)** $3i-4$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

ملاحظة

لقسمة عددين مركبين نكتبهما على شكل كسر $\frac{z_1}{z_2}$ ثم نضرب البسط والمقام بمرافق المقام

مثال 12

أوجد ناتج قسمة $5-6i$ على $2+3i$

حاول أن تحل 12

أوجد ناتج قسمة $3-2i$ على $1+2i$

مثال 13

اكتب كلًّا مما يلي في الصورة الجبرية للعدد المركب:

a $\frac{2}{3-i}$

b $\overline{\left(\frac{5+i}{2-3i}\right)}$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

حاول أن تحل 13

اكتب كلًّا مما يلي في الصورة الجبرية:

a $\frac{3+i}{2+5i}$

b $\frac{2-i}{2+i}$

c $\frac{\overline{5+i}}{2-3i}$

كراسة التمارين

(28) إذا كان $z_1 = \sqrt{3} + i \ , \ z_2 = -\sqrt{3} + 2i$ فأوجد: $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$, $\frac{z_1}{\overline{z_2}}$, $\frac{\overline{z_1}}{z_2}$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

تمارين موضوعية

في التمارين (4–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الصورة الجبرية للعدد: $3 + \sqrt{-4}$ هي: $3 + 2i$ (a) (b)

(2) مرافق العدد المركب: $z = 3 + 4i$ هو: $\overline{z} = -3 - 4i$ (a) (b)

(3) المعكوس الجمعي للعدد المركب $z = 3 - 2i$ هو: $-z = 3 + 2i$ (a) (b)

(4) الصورة المبسّطة للتعبير: $(12 + 5i) - (2 - i)$ هي: $10 + 6i$ (a) (b)

في التمارين (14–5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) العدد: $32 + \sqrt{-225}$ يكتب بالصورة الجبرية كما يلي:

(a) $-15 + 6i$ (b) $6 + 15i$ (c) $6 - 15i$ (d) $32 + 15i$

(6) حل المعادلة: $2x + 3yi = -10 - 6i$ هو:

(a) $x = 5 \ , \ y = -2$ (b) $x = -5 \ , \ y = -2$ (c) $x = -5 \ , \ y = 2$ (d) $x = 5 \ , \ y = 2$

(7) إذا كان $z_1 = 5i + 2$ ، $z_2 = -3 - i$ فإنّ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$ تساوي:

(a) $\frac{1}{10} + \frac{17}{10}i$ (b) $\frac{-1}{10} - \frac{17}{10}i$ (c) $\frac{-1}{10} + \frac{17}{10}i$ (d) $\frac{1}{10} - \frac{17}{10}i$

(8) إذا كان: $x\,i^2 + 3\,y\,i = 5 + 3\,i^5$ فإن $(x\ ,\ y)$ تساوي:

(a) $(5,\ 1)$ (b) $(-5,\ -1)$ (c) $(5,\ -1)$ (d) $(-5,\ 1)$

(9) أبسط صورة للتعبير: $(3 + \sqrt{-4})(4 + \sqrt{-9})$ هي:

(a) $18 + 17i$ (b) $18 + 3\sqrt{-9} + 4\sqrt{-4}$

(c) $6 + 17i$ (d) 18

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

(10) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z = (1 + 2i)^2$ هي:

(a) $z = -3 + 4i$ (b) $z = 5 + 4i$ (c) $z = -3$ (d) $z = 5$

(11) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z = (2 - i)^3$ هي:

(a) $z = 14 + 13i$ (b) $z = 14 - 13i$ (c) $z = 2 - 11i$ (d) $z = 2 - 13i$

(12) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z = \frac{i}{i + 2}$ هي:

(a) $z = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$ (b) $z = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$

(c) $z = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$ (d) $z = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$

(13) إذا كان $z = i$ فإنّ z^{250} يساوي:

(a) $-i$ (b) i (c) 1 (d) -1

(14) ليكن $x \in \mathbb{Z}^+$ فإنّ مجموعة قيم x التي تجعل العدد $(5 + i^x)$ عددًا حقيقيًّا هي:

(a) $\mathbb{Z}^+$ (b) $\{0,2,4,6,...\}$ (c) $\{1,3,5,...\}$ (d) $\{2,4,6,...\}$

7 - 2

الإحداثيات القطبية والصورة المثلثية لعدد مركب

مطلق العدد المركب

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

مثال 1

أوجد:

a $|5i|$ b $|3 - 4i|$

حاول أن تحل 1

أوجد:

a $|6 - 4i|$ b $|-2 + 5i|$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

كراسة التمارين

(1) أوجد:

(a) $|5 + 12i|$ **(b)** $|2 - 2i|$ **(c)** $|2i|$

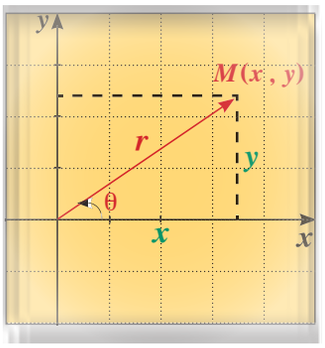
الاحداثيات القطبية

يمكن تمثيل أي نقطة في المستوى باستخدام الإحداثيات القطبية (r, θ) حيث:

r : بعد النقطة عن نقطة الأصل θ: هي الزاوية الموجهة في الوضع القياسي التي يمر ضلعها النهائي بالنقطة

للتحويل من الاحداثيات القطبية إلى الديكارتي: $M(r,\theta) \longrightarrow M(x,y)$

$$x = r.\cos\theta \quad , \quad y = r.\sin\theta$$



مثال 2

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

حوّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية:

a $M\left(5,\frac{\pi}{4}\right)$

b $N\left(\sqrt{2},\frac{5\pi}{6}\right)$

حاول أن تحل 2

أوجد الزوج المرتب (x,y) الذي يمثل الإحداثيات الديكارتية لكل من النقطتين:

a $A(5,300^{o})$

b $B\left(2,\frac{2\pi}{3}\right)$

كراسة التمارين

في التمارين (7–2)، حول الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية:

(2) $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$

(3) $\left(1, \frac{3\pi}{4}\right)$

(4) $\left(1.5, \frac{7\pi}{3}\right)$

موقع المناهج الكويتية almanahj.com/kw

(5) $(2, \pi)$

(6) $(2, 270^\circ)$

(7) $\left(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{6}\right)$

للتحويل من الاحداثيات الديكارتية إلى القطبية: $M(x,y) \longrightarrow M(r,\theta)$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، "زاوية الاسناد" $\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

ثم يتم حساب الزاوية θ حسب الربع:

$\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right|$

$$\theta = \begin{cases} \alpha & x > 0 \ , \quad y > 0 \\ \pi - \alpha & x < 0 \ , \quad y > 0 \\ \pi + \alpha & x < 0 \ , \quad y < 0 \\ 2\pi - \alpha & x > 0 \ , \quad y < 0 \end{cases} \quad ; \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

مثال 3

حوّل من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية (r,θ) لكل مما يلي:

a $L(1,-\sqrt{3})$, $0 \le \theta < 2\pi$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

b $M(-3,-4)$, $0^o \le \theta < 360^o$

حاول أن تحل 3

أوجد الزوج المرتب (r,θ) لكل نقطة مما يلي حيث $0 \leqslant \theta < 2\pi$

a $D(3\sqrt{3},3)$

b $C(4, -2\sqrt{5})$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

كراسة التمارين

في التمارين (8–13)، أوجد الإحداثيات القطبية لكل من النقاط التالية:

(8) $(1, 1)$

(9) $(-2, 5)$

(10) $(-3, 0)$

(11) $(0, 4)$

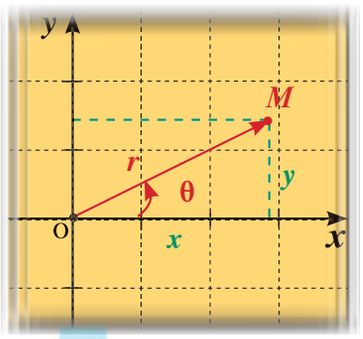
(12) $(-2, -2\sqrt{3})$

(13) $(3\sqrt{3}, -3)$

الصورة المثلثية

الصورة المثلثية $z = r(\cos\theta + i\ \sin\theta)$ $\longleftrightarrow$ الصورة الجبرية $z = x + yi$

حيث r مقياس العدد أو القيمة المطلقة $r = |z|$ و θ سعة العدد المركب



موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

ملاحظات

الصورة المثلثية للعدد المركب ليست وحيدة، لأنه إذا كانت θ سعة العدد المركب $x + yi$ فإن كلًّا مما يلي سعة للعدد نفسه: $\theta + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}$, ... , $\theta + 4\pi$, $\theta + 2\pi$.

إذا كانت $\theta \in [0, 2\pi)$ أو $0^\circ \leqslant \theta < 360^\circ$ فتسمى السعة **بالسعة الأساسية**

إذا كان $z = 0$، فإن: $r = 0$, $y = 0$, $x = 0$ θ غير معيّنة.

الصورة المثلثية في حالات خاصة

العدد	المقياس	السعة الأساسية (راديان)
a	a	0
$-a$	$\lvert -a \rvert = a$	π
bi	b	$\frac{\pi}{2}$
$-bi$	$\lvert -b \rvert = b$	$\frac{3\pi}{2}$

مثال 4

ضع كلًّا مما يلي في الصورة المثلثية:

a $z_1 = 1 + \sqrt{3}\,i$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

b $z_2 = -2 - 2i$

c $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i$

حاول أن تحل 4

ضع كلًّا مما يلي في الصورة المثلثية:

a $z_1 = \frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}}i$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

b $z_2 = -1 - i$

c $z_3 = -2 + 2\sqrt{3}\,i$

كراسة التمارين

في التمارين (14–21)، ضع كلًّا مما يلي في الصورة المثلثية مستخدمًا السعة الأساسية:

(14) $3i$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

(15) $2 + 2i$

(16) $-2 + 2i\sqrt{3}$

(17) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

(18) $-2i$

(19) $\sqrt{3}+i$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

(20) 8

(21) $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

مثال 5

ضع كلًّا مما يلي في الصورة المثلثية: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

a $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

b $z_2 = \sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}$

c $z_3 = -\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

المنهج الكويتية
almanahj.com/kw

d $z_4 = \frac{9}{2}(\cos 30^\circ + i\sin 390^\circ)$

حاول أن تحل 5

ضع كلًّا مما يلي في الصورة المثلثية: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

a $3\left(-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

b $2\left(\sin\frac{\pi}{4} + i\cos\frac{\pi}{4}\right)$

c $-\sqrt{3}\left(-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

d $3(\cos 50^\circ - i\sin(-130^\circ))$

مثال 6

ضع كلًّا مما يلي في الصورة الجبرية:

a $z_1 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

b $z_2 = 3\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)$

حاول أن تحل 6

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

ضع كلًّا مما يلي في الصورة الجبرية:

a $z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

b $z_2 = \left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

كراسة التمارين

في التمارين (29–33)، ضع كلًّا مما يلي في الصورة الجبرية:

(29) $2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

(30) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

(31) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right)$

(32) $7\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

(33) $\sqrt{3}(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ)$

مثال 7

ضع في الصورة المثلثية كلًّا من الأعداد التالية:

(a) $z_1 = 3$ (b) $z_2 = -5$ (c) $z_3 = i$ (d) $z_4 = -3i$

حاول أن تحل 7

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

ضع في الصورة المثلثية كلًّا من الأعداد التالية:

(a) $z_1 = 2i$ (b) $z_2 = 5$ (c) $z_3 = \frac{-3}{4}$ (d) $z_4 = -\frac{5}{2}i$

كراسة التمارين

تمارين موضوعية

في التمارين (1–6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $A\left(4, \frac{7\pi}{6}\right)$ هي: $A(-2\sqrt{3}, 2)$ (a) (b)

(2) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $B(\sqrt{2}, 135^\circ)$ هي: $B(-1, 1)$ (a) (b)

(3) الإحداثيات القطبية للنقطة: $M\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ هي: $M\left(1, \frac{5\pi}{4}\right)$ (a) (b)

(4) العدد المركب: $z = \sqrt{3} - i$ بصورة المثلثية هو: $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ (a) (b)

(5) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$ هي: $z = 1 - i$ (a) (b)

في التمارين (13–7)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $A\left(4,\frac{5\pi}{3}\right)$ هي:

(a) $A(2,2\sqrt{3})$ (b) $A(-2,2\sqrt{3})$ (c) $A(-2,-2\sqrt{3})$ (d) $A(2,-2\sqrt{3})$

(8) الإحداثيات القطبية للنقطة: $B\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ هي:

(a) $B\left(1,\frac{-\pi}{4}\right)$ (b) $B\left(1,\frac{\pi}{4}\right)$ (c) $B\left(1,\frac{3\pi}{4}\right)$ (d) $B\left(1,\frac{-3\pi}{4}\right)$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

(9) الصورة المثلثية للعدد المركب: $z=2-2\sqrt{3}\,i$ حيث $\theta\in[0,2\pi)$ هي:

(a) $z=4\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ (b) $z=4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

(c) $z=4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ (d) $z=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

(10) الصورة المثلثية للعدد المركب: $z=\frac{-4}{1-i}$ حيث $0\leqslant\theta<2\pi$ هي:

(a) $z=4\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$ (b) $z=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

(c) $z=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ (d) $z=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

(11) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=3\left(\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ حيث $0\leqslant\theta<2\pi$ هي:

(a) $z=-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$ (b) $z=-\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i$

(c) $z=-\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$ (d) $z=\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$

(12) $\forall n\in\mathbb{Z}^+$ فإنّ قيمة $(i^{2n+2}+i^{2n+8})$ تساوي:

(a) 1 (b) 0 (c) -1 (d) i^{-2n}

(13) $(6-2i+3i^5)^2$ تساوي:

(a) $35-12i$ (b) $35+12i$ (c) $81-12i$ (d) $81+12i$

7-3

حل معادلات

أولاً : حل معادلات من الدرجة الأولى في C

تحل معادلات الدرجة الأولى في مجموعة الأعداد المركبة بالطريقة نفسها التي تستخدم لحل معادلات الدرجة الأولى في مجموعة الأعداد الحقيقية.

مثال 1

أوجد مجموعة حل المعادلة: $3z + 1 - i = 7 + 3i$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$.

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

حاول أن تحل 1

أوجد مجموعة حل المعادلة: $2z + i = 3 + 2i$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$.

كراسة التمارين

في التمارين (1–4)، أوجد مجموعة حل كلّ من المعادلات التالية:

(1) $3z - 1 + i = 5 - 2i$

مثال 2

أوجد مجموعة حل المعادلة: $2z + i\bar{z} = 5 - 2i$ في $\mathbb{C}$.

حاول أن تحل 2 أوجد مجموعة حل المعادلة: $z + i = 2\overline{z} + 1$ في $\mathbb{C}$.

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

كراسة التمارين

في التمارين (1–4)، أوجد مجموعة حل كلّ من المعادلات التالية:

(2) $z + 2\overline{z} = 4 + i$

(3) $5z - 4 + 2i = 3z + 1 - 4i$

(4) $z + 3(1 + i)z - 8(2 - i) = 0$

ثانياً : حل معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد في C

مثال 3

أوجد مجموعة حل المعادلة: $4x^2 + 100 = 0$ حيث $x \in \mathbb{C}$.

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

حاول أن تحل 3

أوجد مجموعة حل كل معادلة مما يلي حيث $x \in \mathbb{C}$:

(a) $3x^2 + 48 = 0$ (b) $-5x^2 - 150 = 0$ (c) $8x^2 + 2 = 0$

كراسة التمارين

في التمارين (9–5)، أوجد مجموعة حل كلّ من المعادلات التالية:

(5) $16x^2 + 64 = 0$

مثال 4 أوجد مجموعة حل المعادلة: $4z^2 + 16z + 25 = 0$ في $\mathbb{C}$.

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

حاول أن تحل 4 أوجد مجموعة حل المعادلة: $z^2 - 2z + 2 = 0$ في $\mathbb{C}$.

كراسة التمارين

في التمارين (9–5)، أوجد مجموعة حل كلّ من المعادلات التالية:

(6) $x^2 - 5x + 7 = 0$

(7) $x^2 + 6x + 25 = 0$

(8) $z^2 - 2z + 4 = 0$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

(9) $z + \frac{4}{z} = 2$

إذا كان z جذر لمعادلة تربيعية معاملاتها حقيقية فإن $\overline{z}$ هو جذر آخر لها بشرط أن الجزء التخيلي لا يساوي الصفر

الجذر التربيعي لعدد مركب

إذا كان z جذر تربيعي للعدد المركب فإن $-z$ الجذر الآخر.

لإيجاد جذر تربيعي لعدد مركب z نبحث عن عدد w يكون مربعه يساوي z.

ليكن $z = a + bi$

ابحث عن $w = m + ni$، بحيث يكون $w^2 = z$

مثال 6 أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 3 + 4i$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

حاول أن تحل 6 أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = -3 - 4i$

مثال 7 أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 7 - 24i$.

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

حاول أن تحل 7 أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 5 + 12i$.

مثال 8 أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = -21 - 20i$.

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

حاول أن تحل 8 أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 7 + 24i$

كراسة التمارين

(11) أوجد الجذرين التربيعيّين للعدد المركب: $z = -3 + 4i$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

(12) أوجد الجذرين التربيعيّين للعدد المركب: $z = 5 + 12i$

(13) أوجد الجذرين التربيعيّين للعدد المركب: $z = -7 - 24i$

تمارين موضوعية

في التمارين (6–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) حل المعادلة: $z + 2 = 5 - i$ هو: $z = 3 + i$ (a) (b)

(2) حل المعادلة: $2z + \overline{z} - 3 - 5i = 0$ هو: $z = 1 - 5i$ (a) (b)

(3) مجموعة حل المعادلة: $z^2 - 4z + 5 = 0$ هي: $\{-2 - i, 2 + i\}$ (a) (b)

(4) الجذران التربيعيان للعدد -1 هما: $-1, 1$ (a) (b)

(5) الجذران التربيعيان للعدد المركب: $z = 16 + 30i$ هما: $z_1 = 5 + 3i,\ z_2 = -5 - 3i$ (a) (b)

(6) إذا كان z_1, z_2 جذران تربيعيان للعدد z فإن $z_1 + z_2 = 0$ (a) (b)

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

في التمارين (10–7)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) حل المعادلة: $2z - 5 + 6i = -3\overline{z}$ هو:

(a) $z = 1 + 6i$ (b) $z = -1 + 6i$ (c) $z = 1 - 6i$ (d) $z = -1 - 6i$

(8) مجموعة حل المعادلة: $z^2 - 4z + 20 = 0$ هي:

(a) $\{2 - 4i, -2 - 4i\}$ (b) $\{-2 + 4i, -2 - 4i\}$

(c) $\{2 - 4i, -2 + 4i\}$ (d) $\{2 - 4i, 2 + 4i\}$

(9) الجذران التربيعيان للعدد المركب: $z = 33 - 56i$ هما:

(a) $\begin{cases} z_1 = -7 - 4i \\ z_2 = 7 + 4i \end{cases}$ (b) $\begin{cases} z_1 = 7 - 4i \\ z_2 = -7 + 4i \end{cases}$

(c) $\begin{cases} z_1 = 7 + 4i \\ z_2 = 7 - 4i \end{cases}$ (d) $\begin{cases} z_1 = -7 - 4i \\ z_2 = -7 + 4i \end{cases}$

(10) حل المعادلة $(3 - 4i)z = 5 - 2i$ هو:

(a) $\frac{5}{3} + \frac{1}{2}i$ (b) $\frac{5}{3} - \frac{1}{2}i$ (c) $\frac{23}{25} + \frac{14}{25}i$ (d) $\frac{23}{25} - \frac{14}{25}i$