

تم تحميل هذا الملف من موقع ملفات الكويت التعليمية



[com.kwedufiles.www//:https](https://www.kwedufiles.com)

\*للحصول على أوراق عمل لجميع الصفوف وجميع المواد اضغط هنا

\* للحصول على أوراق عمل لجميع مواد الصف الحادي عشر العلمي اضغط هنا

<https://kwedufiles.com/13>

\* للحصول على جميع أوراق الصف الحادي عشر العلمي في مادة رياضيات وجميع الفصول, اضغط هنا

<https://kwedufiles.com/13math>

\* للحصول على أوراق عمل لجميع مواد الصف الحادي عشر العلمي في مادة رياضيات الخاصة بـ الفصل الثاني اضغط هنا

<https://www.kwedufiles.com/13math2>

\* لتحميل كتب جميع المواد في جميع الفصول للـ الصف الحادي عشر العلمي اضغط هنا

<https://www.kwedufiles.com/grade13>

\* لتحميل جميع ملفات المدرس علا اضغط هنا

[bot\\_kwlinks/me.t//:https](https://t.me/bot_kwlinks)

للحصول على جميع روابط الصفوف على تلغرام وفيسبوك من قنوات وصفحات: اضغط هنا

الروابط التالية هي روابط الصف الحادي عشر العلمي على مواقع التواصل الاجتماعي

مجموعة الفيسبوك

صفحة الفيسبوك

مجموعة التلغرام

بوت التلغرام

قناة التلغرام

رياضيات على التلغرام



UULA

# الرياضيات

الكورس الثاني

11

2021 - 2020

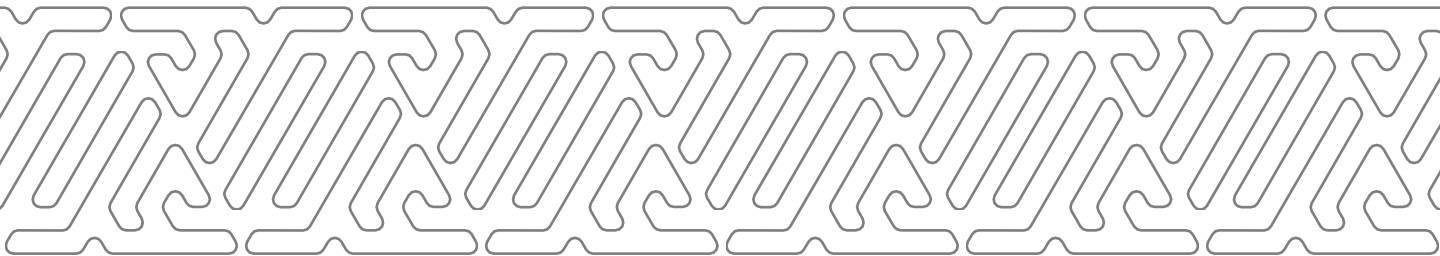
UULA.COM



# الرياضيات

الكورس الثاني

11



2021 - 2020

UULA.COM

## قائمة المحتوى

## 01

## الأعداد المركبة

الأعداد المركبة	4
الإحداثيات القطبية والصورة المثلثية لعدد مركب	21
حل معادلات	31

## 02

## حساب المثلثات

الدوال الجيبية	40
قانون الجيب	50
قانون جيب التمام	54
مساحة المثلث	58

## 03

## تطبيقات على حساب المثلثات

المتطابقات المثلثية	60
حل معادلات مثلثية	65
متطابقات مجموع وفرق زاويتين	73
متطابقات ضعف الزاوية ونصفها	76

## 04

## هندسة الفضاء

المستقيمات والمستويات في الفضاء	83
المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء	89
تعامد مستقيم مع مستوٍ	100
الزاوية الزوجية	112
المستويات المتعامدة	120

مبدأ العد والتباديل والتوافيق	126
نظرية ذات الحدين	141
الاحتمال	146

### الوحدة التخيلية

هي العدد الذي مربعه  $(-1)$  ويرمز له بالرمز  $i$   
 $i = \sqrt{-1}$  ,  $i^2 = -1$

### الأعداد التخيلية

▪ لأي عدد حقيقي موجب  $m$  ،

$$\sqrt{-m} = \sqrt{m} i$$

▪ تسمى الأعداد الحقيقية التي على الصورة  $bi$  حيث  $b \in \mathbb{R}^*$  أعداد تخيلية

**س** بسط كل مما يلي مستخدماً الوحدة التخيلية  $i$ :

▪  $\sqrt{-4}$

▪  $\sqrt{-8}$



▪  $\sqrt{-2}$



▪  $-\sqrt{-12}$



▪  $\sqrt{-36}$

## تعريف: العدد المركب

العدد المركب هو عدد على الصورة  $a + bi$  حيث  $a, b$  عددان حقيقيان،  $i$  الوحدة التخيلية.

$$z = a + bi$$

↓                      ↓  
الجزء                      الجزء  
الحقيقي                      التخيلي

**س** أكتب كلاً من الأعداد المركبة التالية على الصورة الجبرية:

▪  $\sqrt{-9} + 6$

▪  $\frac{1 + \sqrt{-25}}{4}$

▪  $1 - \sqrt{-20}$

**س** أكتب كلاً من الأعداد المركبة التالية على الصورة الجبرية:

▪  $\sqrt{-18} + 6$

▪  $\frac{10 - \sqrt{-100}}{5}$

▪  $\frac{\sqrt{-9} + 5}{7}$

# تساوی عددین مرکبین

تساوی عددان مرکبان إذا فقط تساوی جزءاهما الحقیقیان وتساوی جزءاهما التخیلیان.  
لیکن:

$$z_1 = a_1 + b_1i, z_2 = a_2 + b_2i$$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$$

**س** أوجد قیم کل من  $x, y \in \mathbb{R}$  فی کل مما یلی:

- $12 + 3i = 4x - 9yi$

- $x^2 - y^2i = 9 - 25i$

- $2x + yi = 1$

**س** أوجد قيم كل من  $x, y \in \mathbb{R}$  في كل مما يلي:

- $x + 5i = 7 - 3yi$

- $(x + 3) + y^2i = 5 - yi$

- $3i = 2x - 5yi$



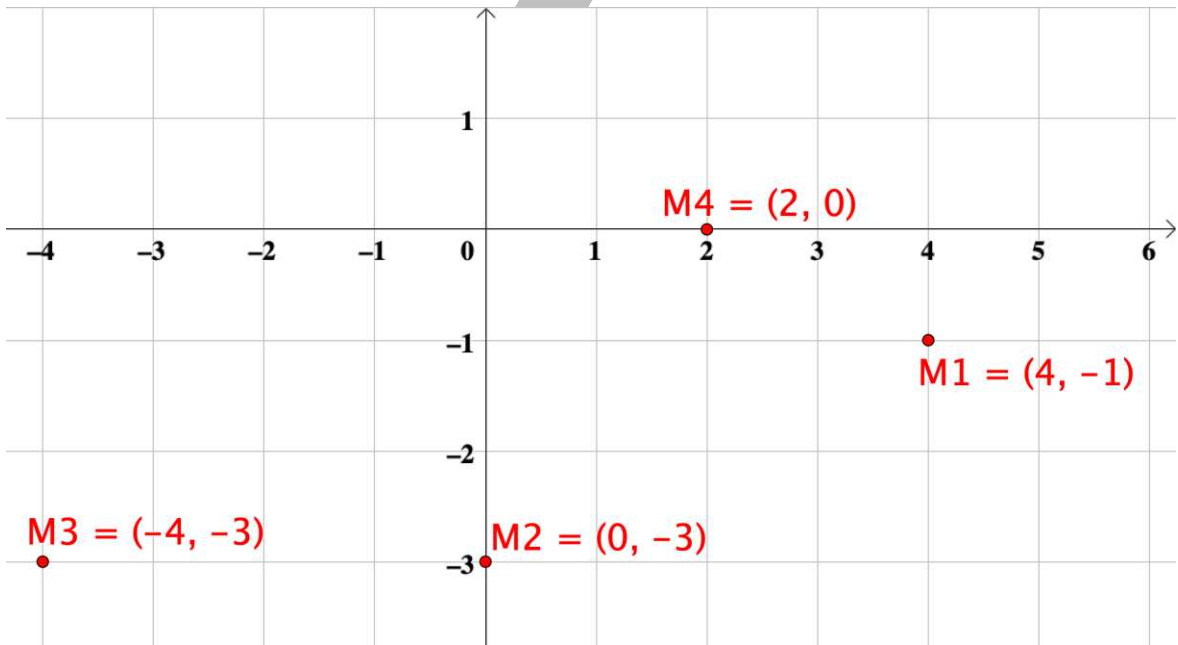
# التمثيل البياني لعدد مركب

$$M(a, b) \longleftrightarrow z = a + bi$$

الصورة الديكارتية      الصورة الجبرية

**س** مثل كلاً مما يلي في المستوي المركب:

- $z_1 = 4 - i$
- $z_2 = -3i$
- $z_3 = -4 - 3i$
- $z_4 = 2$



**س** أكتب العدد المركب المناظر لكل من النقاط:

- $K(7, 0)$       ▪  $H(1, -2)$       ▪  $N(4, 1)$
- $Z_1 = 7$        $Z_2 = 1 - 2i$        $Z_3 = 4 + i$

# العمليات على مجموعة الأعداد المركبة

## أولاً: جمع وطرح الأعداد المركبة

س إذا كان  $z_1 = -2 + 5i$  ,  $z_2 = 3.4 - 1.2i$  ,  $z_3 = -0.3i$  فأوجد:

■  $z_1 + z_2$

■  $z_2 - z_1$

■  $z_3 - z_2 - z_1$



س إذا كان  $z_1 = 2 + 3i$  ,  $z_2 = 4 - 7i$  ,  $z_3 = 2i$  فأوجد:

■  $z_1 + z_2$

■  $z_1 - z_2$

■  $z_3 + z_2 + z_1$

## ثانياً: ضرب الأعداد المركبة

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{R}$  إذا كان

$z_1 = a_1 + b_1i, z_2 = a_2 + b_2i$  حيث

- $cz_1 = ca_1 + cb_1i$
- $z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$

- $(6 - 5i)(4 - 3i)$

س أوجد الناتج:

- $(9 + 4i)(4 - 9i)$

- $(12i)(7i)(i + 1)$

▪  $(5i)(-4i)$

▪  $3(7 + 5i)$

▪  $(4i)(1 - \frac{1}{2}i)(1 + \frac{1}{2}i)$

س إذا كان  $z_1 = 2 + 3i$  ,  $z_2 = 5 - i$  فأوجد:

▪  $-3z_2$

▪  $z_1 \cdot z_2$

س إذا كان  $z_1 = 2 - 3i$  ,  $z_2 = 1 + 4i$  فأوجد:

■  $\frac{1}{2}z_1$

■  $z_1 \cdot z_2$



■  $5(i)^{73}$

■  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^3$



■  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^4$



س إذا كان:  $z_1 = i, z_2 = -2i, z_3 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$  فأوجد:

■  $(z_1)^{21}$

■  $(z_2)^6$

■  $(z_3)^2$



## ثالثاً: قسمة الأعداد المركبة

### مرافق العدد المركب

مرافق العدد المركب

مرافق العدد المركب

$$\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi \text{ هو } z = a + bi$$

**س** إذا كان  $z_1 = 2 - 7i$  ,  $z_2 = 3 + 5i$  فأوجد:

■  $\bar{z}_1 + \bar{z}_2$

■  $\overline{z_1 - z_2}$

■  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

س إذا كان  $z_1 = 3 + 4i$  ,  $z_2 = 5 - 2i$  فأوجد:

▪  $z_1 + \overline{z_2}$

▪  $z_1 - \overline{z_2}$

▪  $\overline{(\overline{z_1})}$

▪  $\overline{z_1 + z_2}$

▪  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

المعكوس الضربي لعدد مركب غير صفري  $z = a + bi$   
ويرمز له بالرمز  $z^{-1}$

ويكون:  $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} \times \frac{a-bi}{a-bi}$

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{a^2 + b^2}$$

**س** أوجد المعكوس الضربي لكل من:

▪  $z_1 = -3i - 7$



▪  $z_2 = 5 + 11i$



▪  $z_3 = 6i$

س أوجد ناتج قسمة  $5 - 6i$  على  $2 + 3i$

س أوجد ناتج قسمة  $2i - 3$  على  $1 + 2i$

U U L A

■  $\frac{3+i}{2+5i}$

■  $\frac{2-i}{2+i}$



■  $\frac{\overline{5+i}}{2-3i}$

U U L A

س أكتب كلاً مما يلي في الصورة الجبرية للعدد المركب:

■  $\frac{2}{3-i}$

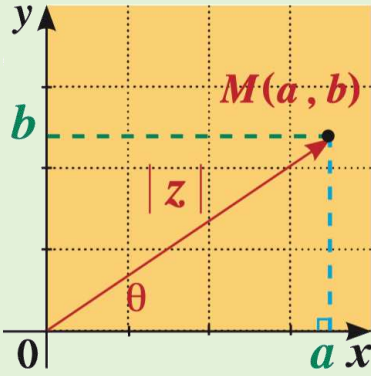
■  $\overline{\left(\frac{5+i}{2-3i}\right)}$



U U L A

# الإحداثيات القطبية والصورة المثلثية لعدد مركب

## القيمة المطلقة لعدد مركب



$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

س أوجد:

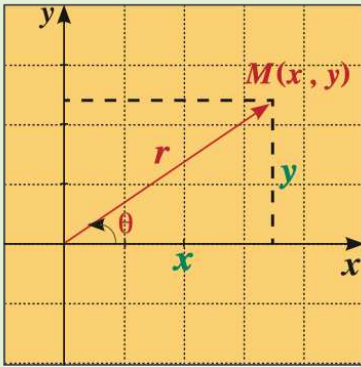
- $|6 - 4i|$

- $|-2 + 5i|$

- $|5i|$

- $|3 - 4i|$

# الاحداثيات القطبية



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

**س** أوجد الزوج المرتب  $(x, y)$  الذي يمثل الإحداثيات الديكارتية لكل من النقطتين:

- $A(5, 300^\circ)$

- $B(2, \frac{2\pi}{3})$

- $A(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{6})$

- $B(5, \frac{\pi}{4})$

س حول من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية  $(r, \theta)$  لكل مما يلي:

- $D(3\sqrt{3}, 3) : 0 \leq \theta \leq 2\pi$

- $C(-2, 5)$



**س** حول من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية  $(r, \theta)$  لكل مما يلي:

- $M(-3, -4) : 0^\circ \leq \theta < 360^\circ$



- $C(4, -2\sqrt{5}) : 0 \leq \theta \leq 2\pi$



# الصورة المثلثية

يمكن كتابة العدد المركب  $z = x + yi$  على الصورة:  
 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  وتعرف **بالصورة المثلثية** للعدد  
المركب  $z$ .

**س** ضع كلاً مما يلي في الصورة المثلثية:

▪  $z_1 = \frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}}i$



▪  $z_2 = -1 - i$



س ضع كلاً مما يلي في الصورة المثلثية:

▪  $z_3 = -2 + 2\sqrt{3}i$

▪  $z_2 = -2 - 2i$

▪  $z_3 = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

س ضع كلاً مما يلي في الصورة المثلثية  $z=r(\cos\theta + i \sin \theta)$ :

- $2\left(\sin\frac{\pi}{4} + i \cos\frac{\pi}{4}\right)$

- $\left(\sin\frac{\pi}{6} + i \cos\frac{\pi}{6}\right)$

- $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i \sin\frac{\pi}{4}\right)$

- $-\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right)$

س ضع كلاً مما يلي في الصورة المثلثية  $z=r(\cos\theta + i \sin \theta)$  :

- $\frac{9}{2}(\cos 30^\circ + i \sin 390^\circ)$

- $3\left(-\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right)$

- $-\sqrt{3}\left(-\cos\frac{\pi}{4} - i \sin\frac{\pi}{4}\right)$

س ضع كلاً مما يلي في الصورة المثلثية :  $z=r(\cos\theta + i \sin \theta)$

- $3(\cos 50^\circ - i \sin(-130^\circ))$

س ضع كلاً مما يلي في الصورة الجبرية :

- $4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)$

- $\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i \sin\frac{5\pi}{3}\right)$

- $2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i \sin\frac{7\pi}{6}\right)$

- $3\left(\cos\frac{-\pi}{6} + i \sin\frac{-\pi}{6}\right)$

# الصورة المثلثية في حالات خاصة

**س** ضع كلاً مما يلي في الصورة المثلثية :

- $z_1 = 2i$

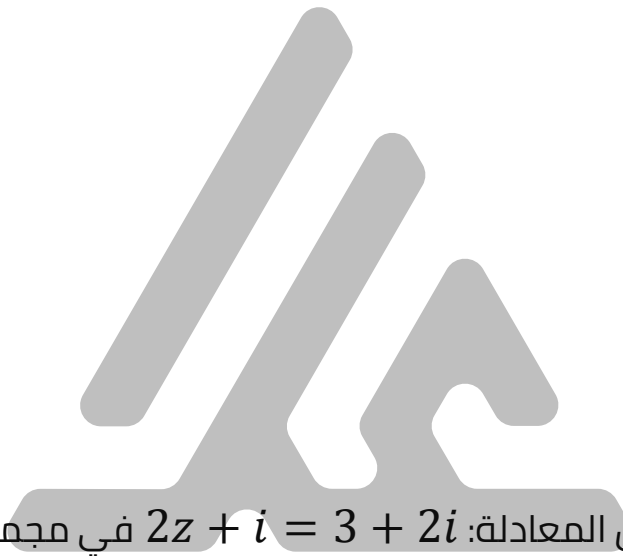
- $z_2 = 5$

- $z_3 = \frac{-3}{4}$



- $z_4 = -\frac{5}{2}i$

س أوجد مجموعة حل المعادلة:  $3z + 1 - i = 7 + 3i$  في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$



س أوجد مجموعة حل المعادلة:  $2z + i = 3 + 2i$  في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$



**س** أوجد مجموعة حل المعادلة:  $2z + i\bar{z} = 5 - 2i$  في  $\mathbb{C}$ .



**س** أوجد مجموعة حل المعادلة:  $z + i = 2\bar{z} + 1$  في  $\mathbb{C}$ .



**س** أوجد مجموعة حل المعادلة:  $4x^2 + 100 = 0$  حيث  $x \in \mathbb{C}$ .

**س** أوجد مجموعة حل كل معادلة ما يلي:

▪  $3x^2 + 48 = 0$     ▪  $-5x^2 - 150 = 0$     ▪  $8x^2 + 2 = 0$

U U L A

**س** أوجد مجموعة حل المعادلة:  $4z^2 + 16z + 25 = 0$  في  $\mathbb{C}$ .

**س** أوجد مجموعة حل المعادلة:  $z^2 - 2z + 2 = 0$  في  $\mathbb{C}$ .

U U L A

**س** لتكن المعادلة:  $2z^2 - 6z + 5 = 0$

- أثبت أن العدد المركب  $z_1 = \frac{3-i}{2}$  هو جذر لهذه المعادلة.



- أوجد الجذر الثاني.



س لتكن المعادلة:  $z^2 + z + 1 = 0$

- بدون حل المعادلة: أثبت أن المركب  $z_1 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$  هو جذر لهذه المعادلة.



- أوجد الجذر الثاني.



# الجذر التربيعي لعدد مركب

**س** أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب  $z = -3 - 4i$



U U L A

**س** أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب  $z = 5 + 12i$



U U L A

س أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب  $z = 7 + 24i$



U U L A

$$y = a \cos bx \quad y = a \sin bx \quad a \neq 0, b \neq 0$$

- تسمى  $|a|$  سعة الدالة الجيبية.
- $|b|$  تمثل عدد الدورات في الفترة  $[0, 2\pi]$
- $\frac{2\pi}{|b|}$  تمثل دورة الدالة.

**س** أوجد الدورة و السعة لكل دالة مما يلي:

- $y = -5 \cos \frac{x}{3}$

- $y = 2 \cos x$

- $y = -2 \cos 5x$

- $y = \frac{1}{2} \cos(-x)$

س اكتب معادلة الدالة على الصورة  $y = a \cos bx$  إذا كانت :

الدورة:  $\frac{\pi}{3}, a = -2$



الدورة:  $\pi, a = 0.25$



الدورة:  $2, a = 1$

س اكتب معادلة الدالة على الصورة  $y = a \sin bx$  إذا كانت :

الدورة:  $3, \frac{\pi}{2}$   $a =$

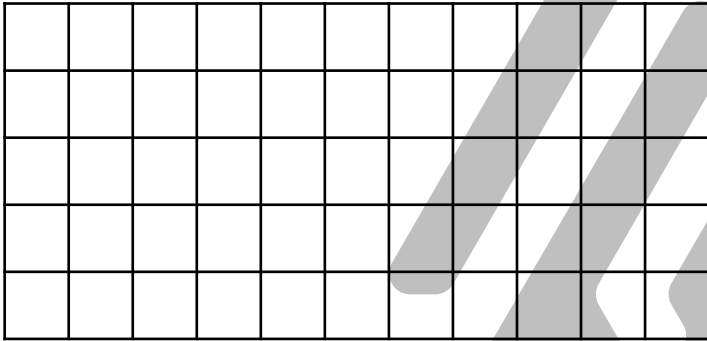


الدورة:  $2\pi, -\frac{1}{2}$   $a =$

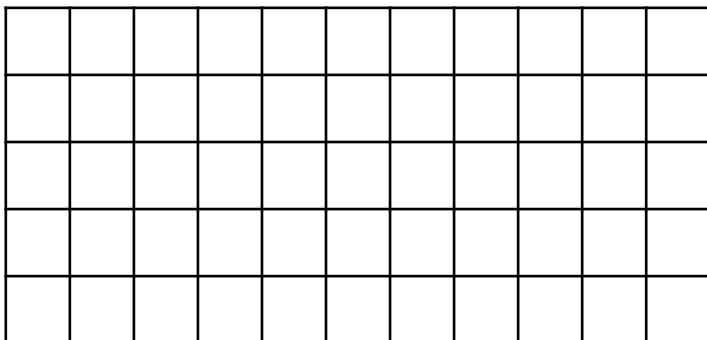


س أوجد الدورة و السعة لكل دالة مما يلي ثم أرسم بيانها:

▪  $y = \frac{1}{2} \sin 4x$

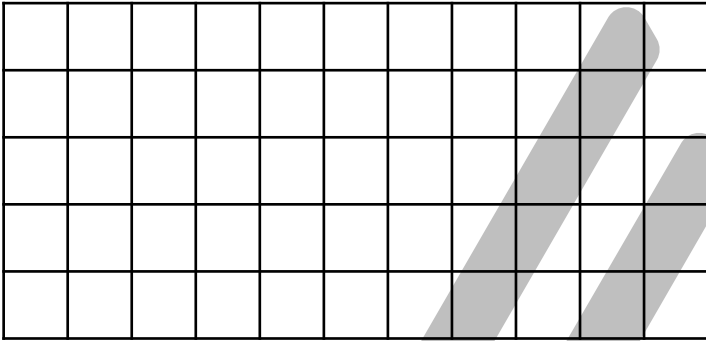


▪  $y = -4 \sin x, x \in [-\pi, 2\pi]$

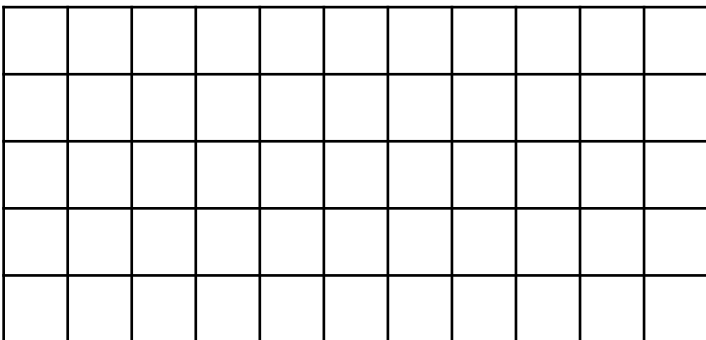


س أوجد الدورة و السعة لكل دالة مما يلي ثم أرسم بيانها:

▪  $y = 3\sin 2x$

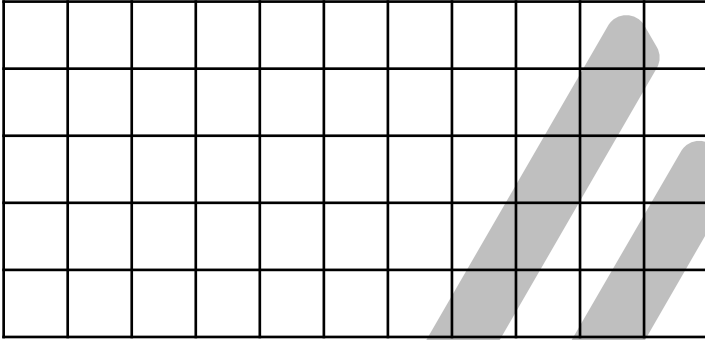


▪  $y = -2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) : -4\pi \leq x \leq 4\pi$

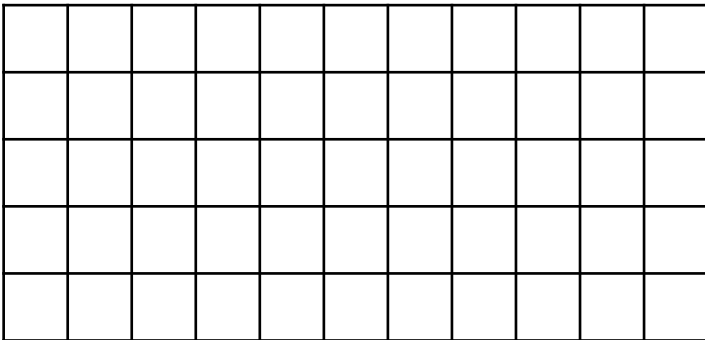


س أوجد الدورة و السعة لكل دالة مما يلي ثم أرسم بيانها:

▪  $y = 3 \cos 2x$

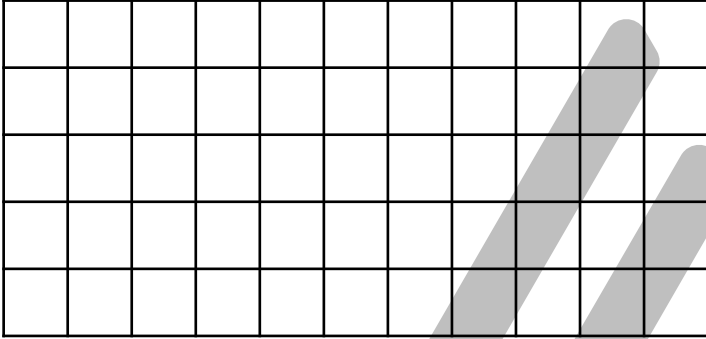


▪  $y = -2 \cos \left( \frac{3}{4}x \right), 0 \leq x \leq 2\pi$

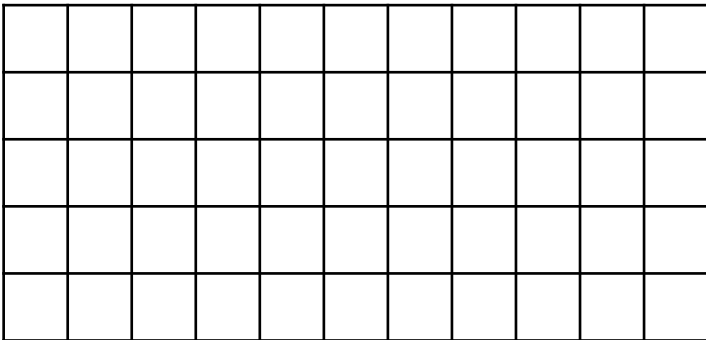


س أوجد الدورة و السعة لكل دالة مما يلي ثم أرسم بيانها:

▪  $y = 2 \cos 4x$

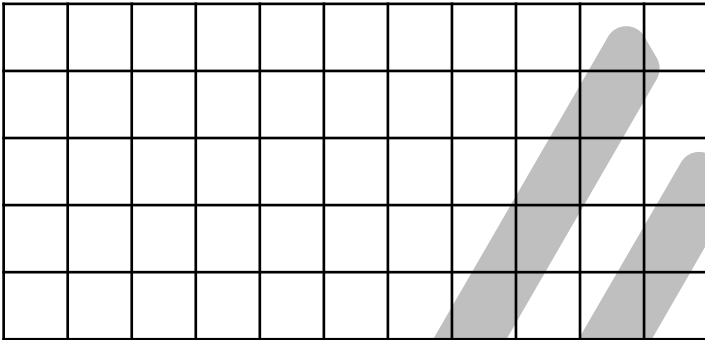


▪  $y = -5 \cos \left( \frac{2}{3} x \right) : x \in [-3\pi, 3\pi]$

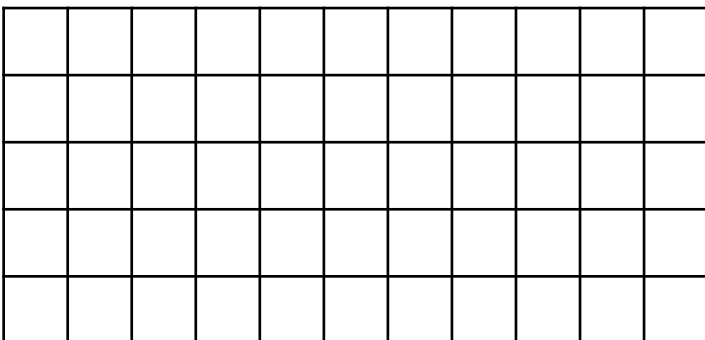
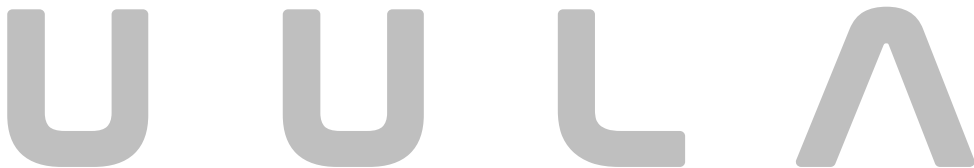
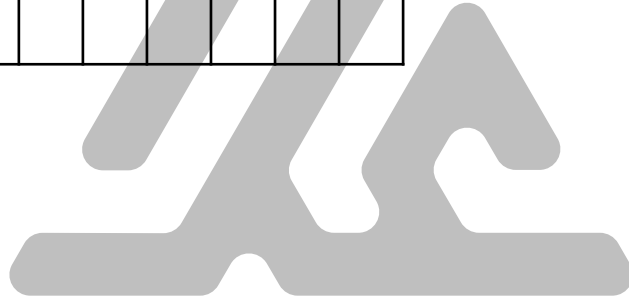


س أوجد الدورة لكل دالة مما يلي ثم أرسم بيانها:

▪  $y = -\tan x$

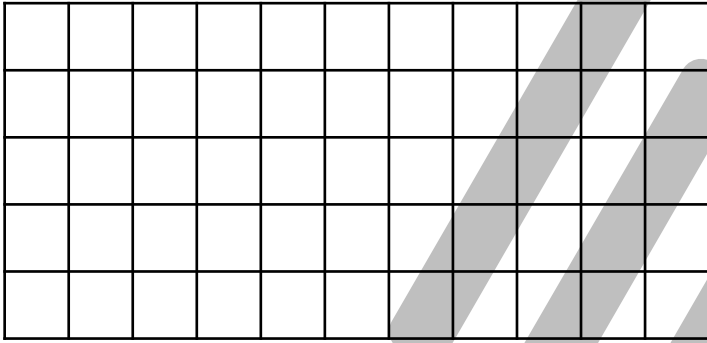


▪  $y = \frac{1}{2} \tan x$

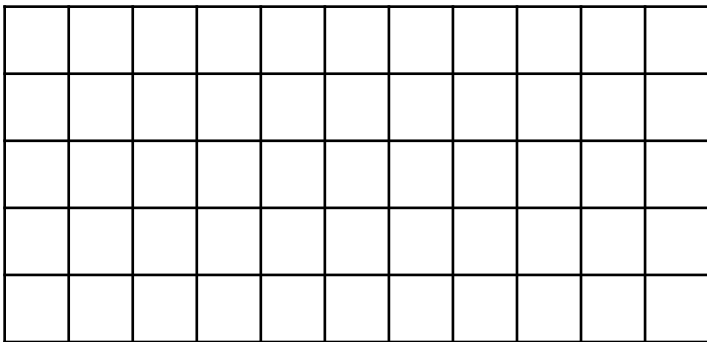


س أوجد الدورة لكل دالة مما يلي ثم أرسم بيانها:

▪  $y = \tan 2x, x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$



▪  $y = 2 \tan \left(\frac{1}{2}x\right)$

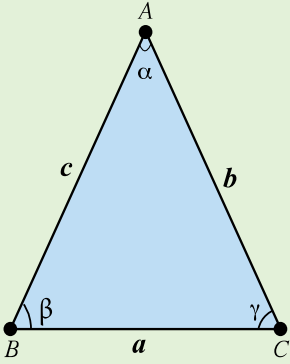


## خصائص الدوال المثلثية باعتبار $n \in \mathbb{Z}$

$\tan x$	$\cos x$	$\sin x$	الخاصية
$\pi$	$2\pi$	$2\pi$	الدورة
$\mathbb{R} - \{x, x = \frac{\pi}{2} + n\pi\}$	$(-\infty, \infty)$	$(-\infty, \infty)$	المجال
$(-\infty, \infty)$	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	المدى
$x = n\pi$	$x = \frac{\pi}{2} + n\pi$	$x = n\pi$	الأصفار
فردية	زوجية	فردية	زوجية أو فردية



# حساب المثلثات قانون الجيب



$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

س حل  $\Delta ABC$  حيث :  $\alpha = 36^\circ$  ,  $\beta = 48^\circ$  ,  $a = 8cm$

س حل  $\Delta ABC$  حیث :  $\alpha = 40^\circ$  ,  $\beta = 60^\circ$  ,  $a = 4cm$



U U L A

س حل  $\Delta ABC$  حیث :  $a = 7 \text{ cm}$  ,  $b = 6 \text{ cm}$  ,  $\alpha = 26.3^\circ$



س حل  $\Delta ABC$  حیث :  $a = 3 \text{ cm}$  ,  $b = 2 \text{ cm}$  ,  $\alpha = 40^\circ$



س حل  $\Delta ABC$  حیث :  $a = 6 \text{ cm}$  ,  $b = 7 \text{ cm}$  ,  $\alpha = 30^\circ$



س حل  $\Delta ABC$  حیث :  $a = 6 \text{ cm}$  ,  $b = 8 \text{ cm}$  ,  $\alpha = 35^\circ$



## قانون جيب التمام

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

س حل  $\Delta ABC$  حيث :  $a = 11 \text{ cm}$  ,  $b = 5 \text{ cm}$  ,  $\gamma = 20^\circ$

س حل  $\Delta ABC$  حيث :  $a = 2 \text{ cm}$  ,  $b = 3 \text{ cm}$  ,  $\gamma = 60^\circ$

س في  $\Delta ABC$  حيث :  $a = 9 \text{ cm}$  ,  $b = 7 \text{ cm}$  ,  $c = 5 \text{ cm}$   
أوجد قياس الزاوية الأكبر.

س حل  $\Delta ABC$  حيث :  $a = 4 \text{ cm}$  ,  $b = 3 \text{ cm}$  ,  $c = 6 \text{ cm}$



س حل  $\Delta ABC$  حیث :  $a = 6 \text{ cm}$  ,  $b = 7 \text{ cm}$  ,  $\alpha = 30^\circ$



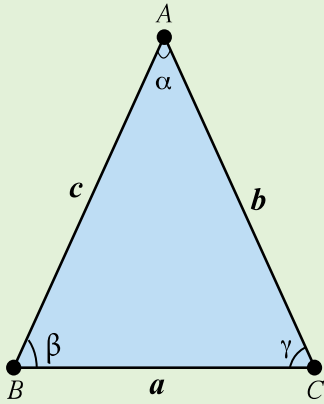
U U L A

س حل  $\Delta ABC$  حیث :  $a = 5 \text{ cm}$  ,  $b = 6.5 \text{ cm}$  ,  $\alpha = 25^\circ$



U U L A

## حساب المثلثات مساحة المثلث



$$\begin{aligned} \text{Area}(ABC) &= \frac{1}{2} bc \sin \alpha \\ &= \frac{1}{2} ac \sin \beta \\ &= \frac{1}{2} ab \sin \gamma \end{aligned}$$

**س** أوجد مساحة المثلث  $ABC$  حيث:  
 $a = 5 \text{ cm}$  ,  $b = 6 \text{ cm}$  ,  $c = 8 \text{ cm}$

$$Area(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \text{حيث: (نصف محيط المثلث)}$$

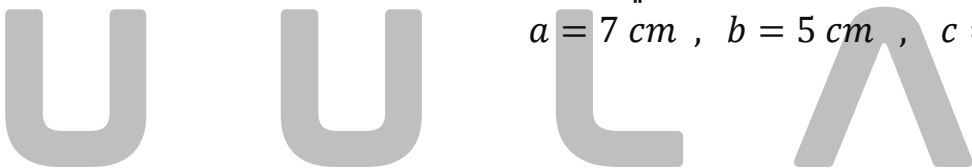
**س** أوجد مساحة المثلث  $ABC$  حيث:

$$a = 4 \text{ cm} , b = 4 \text{ cm} , c = 3 \text{ cm}$$



**س** أوجد مساحة المثلث  $ABC$  حيث:

$$a = 7 \text{ cm} , b = 5 \text{ cm} , c = 8 \text{ cm}$$



## المتطابقات المثلثية الأساسية

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} , \quad \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} , \quad \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} , \quad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 , \quad 1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta , \quad 1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$

**س** أثبت صحة المتطابقة التالية:

$$\frac{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}{\cos^2 \theta} = \tan^2 \theta$$



س أثبت صحة المتطابقة التالية:

$$\frac{\sin \theta}{1+\cos \theta} + \frac{1+\cos \theta}{\sin \theta} = 2 \csc \theta$$

س أثبت صحة المتطابقة التالية:

$$2 \cot x \csc x = \frac{1}{\sec x-1} + \frac{1}{\sec x+1}$$

U U L A

■  $\frac{1+\sin x}{1-\sin x} - \frac{1-\sin x}{1+\sin x} = 4 \tan x \cdot \sec x$  **س** أثبت صحة المتطابقة التالية:

■  $\frac{\cos x}{1-\sin x} = \frac{1+\sin x}{\cos x}$  **س** أثبت صحة المتطابقة التالية:



س أثبت صحة المتطابقة التالية:

$$\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = (\csc x - \cot x)^2$$

س أثبت صحة المتطابقة التالية:

$$\frac{\cot^2 \theta}{1 + \csc \theta} = \cot \theta (\sec \theta - \tan \theta)$$

- $\frac{\sec x + \tan x}{\cot x + \cos x} = \sin x + \sin x \tan^2 x$     **س** أثبت صحة المتطابقة التالية:

**س** أثبت صحة المتطابقة التالية:

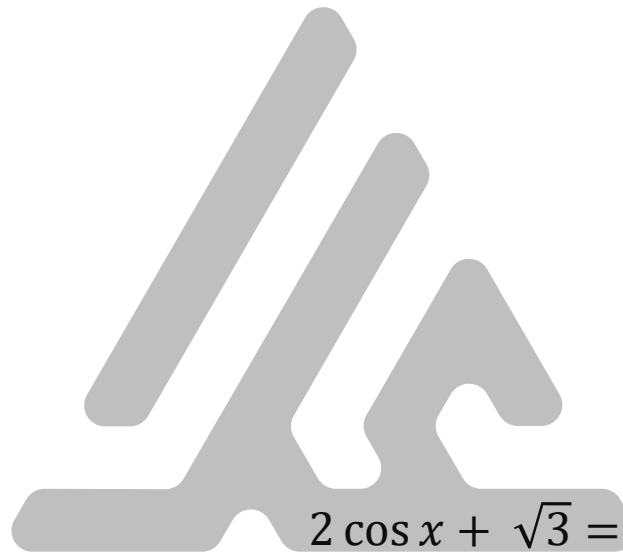
- $\sin^2 x \cos^5 x = (\sin^2 x - 2 \sin^4 x + \sin^6 x) \cos x$

U U L A

تطبيقات على حساب المثلثات

# حل معادلات مثلثية

**س** حل المعادلة:  $\sqrt{2} \cos x = 1$



**س** حل المعادلة:  $2 \cos x + \sqrt{3} = 0$

U U L A

**س** حل المعادلة:  $5\sin\theta - 3 = \sin\theta$

**س** حل المعادلة:  $4\sin\theta + 1 = \sin\theta$  , حيث  $0 \leq \theta < 2\pi$

U U L A

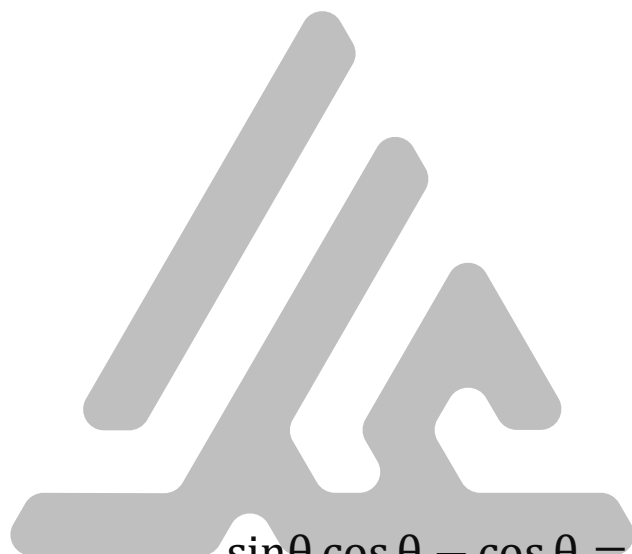
س حل المعادلة:  $\tan x = \sqrt{3}$



س حل المعادلة:  $\tan = 1$

U U L A

**س** حل المعادلة:  $2 \cos \theta \sin \theta = -\sin \theta$



**س** حل المعادلة:  $\sin \theta \cos \theta - \cos \theta = 0$

U U L A

س حل المعادلة:  $4 \sin^2 x - 8 \sin x + 3 = 0$



U U L A

س حل المعادلة:  $\cos^2 x + 3 \cos x + 2 = 0$



U U L A

# معادلات تحتوي على مضاعفات الزوايا

**س** حل المعادلة:  $2 \cos 3x = \sqrt{2}$  حيث  $0 \leq x < \pi$



U U L A

س حل المعادلة:  $4 \cos 2x = 2$  حيث  $0^\circ \leq x < 360^\circ$



U U L A

## متطابقات مجموع وفرق زاويتين

## متطابقات الدوال المتكافئة:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \sin \theta & \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \cot \theta & \sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \csc \theta \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \cos \theta & \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \tan \theta & \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \sec \theta \end{aligned}$$

**س** أثبت أن:  $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \theta$

**س** أثبت أن:  $\sec\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \csc \theta$

## متطابقات المجموع والفرق:

$$\cos(\beta + \alpha) = \cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha$$

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha$$

$$\sin(\beta + \alpha) = \sin \beta \cos \alpha + \cos \beta \sin \alpha$$

$$\sin(\beta - \alpha) = \sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha$$

$$\tan(\beta + \alpha) = \frac{\tan \beta + \tan \alpha}{1 - \tan \beta \tan \alpha}$$

$$\tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha}$$

**س** أوجد دون استخدام الآلة الحاسبة:

- $\sin 15^\circ$



- $\cos 75^\circ$

- $\tan 105^\circ$

**س** إذا كان:  $\sin \alpha = \frac{4}{5}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$   $\cos \beta = \frac{-12}{13}, \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$

**س** أوجد كلا مما يلي:

$\cos(\alpha + \beta) =$  

$\tan(\alpha + \beta) =$  

$\sin(\beta - \alpha) =$

# متطابقات ضعف الزاوية ونصفها

## متطابقات ضعف الزاوية

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

**س** إذا كان  $\cos x = \frac{3}{5}$  أستخدم متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية لإيجاد:  $\cos 2x$

**س** إذا كان  $\sin x = \frac{5}{13}$  أستخدم متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية لإيجاد:  $\cos 2x$

**س** إذا كان  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  ،  $\cos \theta = \frac{3}{5}$  فأوجد:  $\sin 2\theta$  .

**س** إذا كان  $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$  ،  $\sin \theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$  فأوجد:  $\sin 2\theta$  .

**س** إذا كان:  $\tan \theta = \sqrt{3}$  ،  
استخدم متطابقة ظل ضعف الزاوية لإيجاد  $\tan 2\theta$

**س** إذا كان:  $\tan \theta = -1 + \sqrt{2}$  ،  
استخدم متطابقة ظل ضعف الزاوية لإيجاد  $\tan 2\theta$

**س** أثبت صحة المتطابقة:  $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$

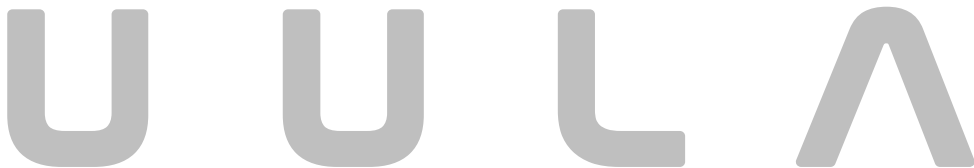
**س** أثبت صحة المتطابقة:  $\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$

**س** أثبت صحة المتطابقة:  $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$

**س** أثبت صحة المتطابقة:  $\cos 2\theta = \frac{1-\tan^2 \theta}{1+\tan^2 \theta}$



**س** أثبت صحة المتطابقة:  $2\cos 2\theta = 4\cos^2 \theta - 2$



**س** أثبت صحة المتطابقة:  $\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$

**س** أثبت صحة المتطابقة:  $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$



## متطابقات نصف الزاوية

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

**س** استخدم متطابقات نصف الزاوية لإيجاد  $\sin 15^\circ$

**س** استخدم متطابقات نصف الزاوية لإيجاد  $\cos 15^\circ$

س إذا كانت:  $180^\circ < \theta < 270^\circ$  ,  $\sin \theta = \frac{-24}{25}$  , فأوجد:

$$\cos \frac{\theta}{2} , \tan \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}$$



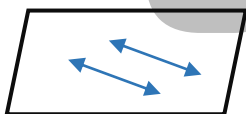
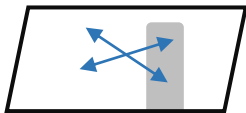
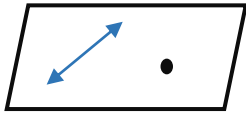
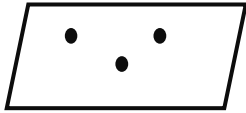
U U L A

# المستقيمات والمستويات في الفضاء

## مسلمات (موضوعات) الفضاء

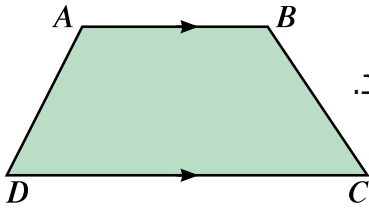
- من نقطة واحدة يمر عدد لا نهائي من المستقيمات.
- أي نقطتين مختلفتين في الفضاء يمر بهما مستقيم وحيد.
- كل مستقيم يحوي على الأقل نقطتين مختلفتين.
- من نقطة خارج مستقيم يوجد مستقيم وحيد يمر بالنقطة ويكون موازاً للمستقيم المعطى.
- في كل مستوي يوجد على الأقل ٣ نقاط ليست على استقامة واحدة.
- أي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تعين مستويًا وحيداً

## حالات تعيين المستوي في الفضاء



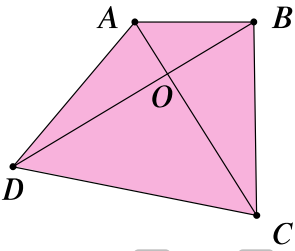
- أي ثلاث نقاط مختلفة ليست على استقامة واحدة تعين مستويًا واحد فقط
- أي مستقيم ونقطة خارجة عنه يعينان مستويًا واحدًا فقط
- أي مستقيمان متقاطعان يعينان مستويًا واحدًا فقط
- أي مستقيمان متوازيان مختلفان يعينان مستويًا واحدًا فقط

س



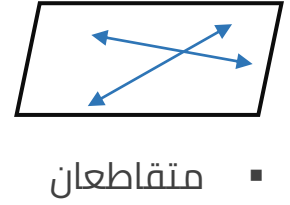
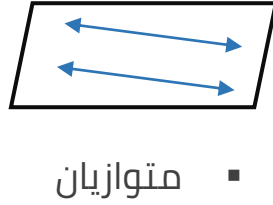
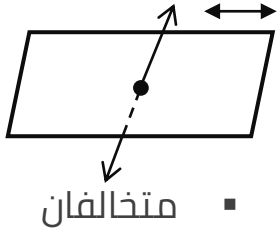
أثبت أن أضلاع أي شبه منحرف تقع جميعها في مستو واحد.

س

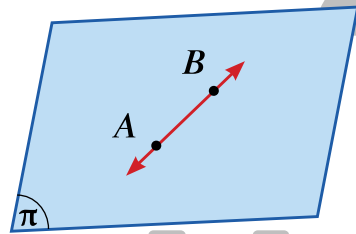
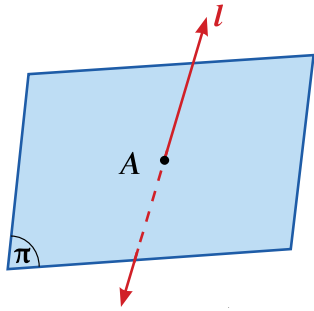
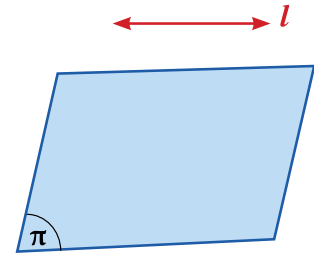


في الشكل المقابل  $\overline{AC}, \overline{BD}$  يتقاطعان في  $O$  ،  
أثبت أن أضلاع الرباعي  $ABCD$  تقع جميعها في مستو واحد.

## أوضاع المستقيمت في الفضاء



## أوضاع مستقيم ومستوى في الفضاء



- صفر نقطة مشتركة ( المستقيم مواز المستوى )

$$\vec{l} \cap \pi = \emptyset \Rightarrow \vec{l} \parallel \pi$$

- نقطة مشتركة واحدة ( المستقيم يقطع المستوى )

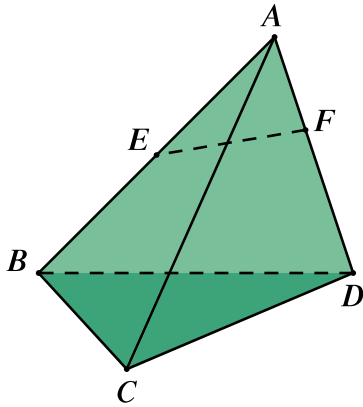
$$\vec{l} \cap \pi = \{A\}$$

- نقطتان مختلفتان مشتركتان على الأقل ( المستقيم يقع بكامله في المستوى )

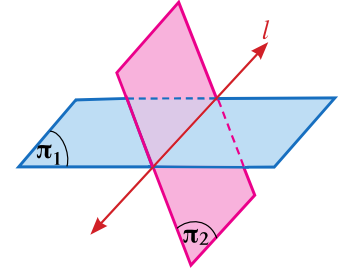
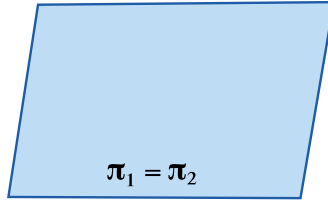
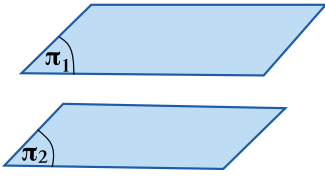
$$\vec{AB} \cap \pi = \vec{AB} \Rightarrow \vec{AB} \subset \pi \quad \therefore \vec{AB} \parallel \pi$$

إذا كان  $ABCD$  هرم ثلاثي القاعدة.  
 النقطة  $E$  تنتمي إلى  $\overline{AB}$  , النقطة  $F$  تنتمي إلى  $\overline{AD}$   
 $\overline{EF}$  لايوازي  $\overline{BD}$  . أثبت أن:

- $\overleftrightarrow{EF} \subseteq (ABD)$
- $\overleftrightarrow{EF}$  يقطع  $(ACD)$



# أوضاع مستويين في الفضاء



المستويان متوازيان:  
لا يشتركان في أي  
نقطة

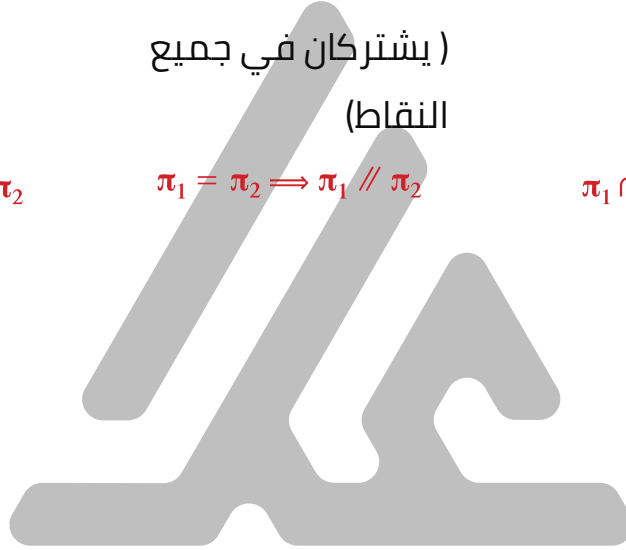
$$\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset \Rightarrow \pi_1 \parallel \pi_2$$

المستويان منطبقان  
( يشتركان في جميع  
النقاط )

$$\pi_1 = \pi_2 \Rightarrow \pi_1 \parallel \pi_2$$

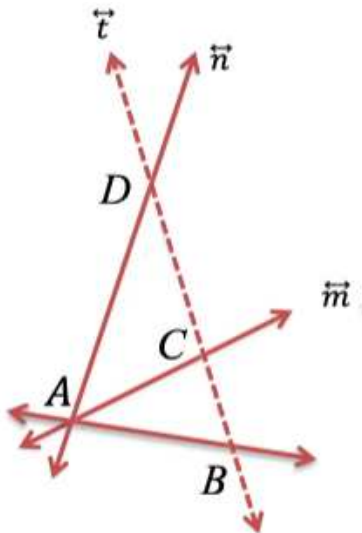
المستويان متقاطعان  
في مستقيم

$$\pi_1 \cap \pi_2 \neq \emptyset \Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 = \vec{l}$$

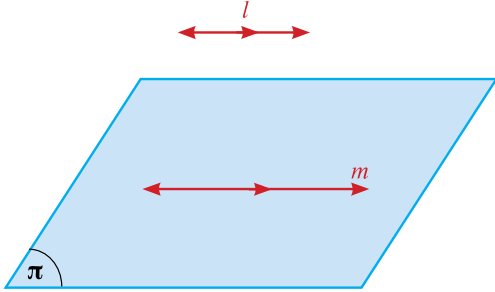


$l, m, n$  ثلاثة مستقيمات لا تقع في مستو واحد تتقاطع مثنى مثنى  
أثبت أن المستقيمات الثلاثة تتقاطع في نقطة واحدة.

$\vec{l}, \vec{m}, \vec{n}$  ثلاثة مستقيمات مختلفة تتقاطع في  $A$   
المستقيم  $t$  يقطع المستقيمات الثلاثة في  $B, C, D$  على الترتيب  
أثبت أن المستقيمات  $l, m, n, t$  تقع في مستو واحد.



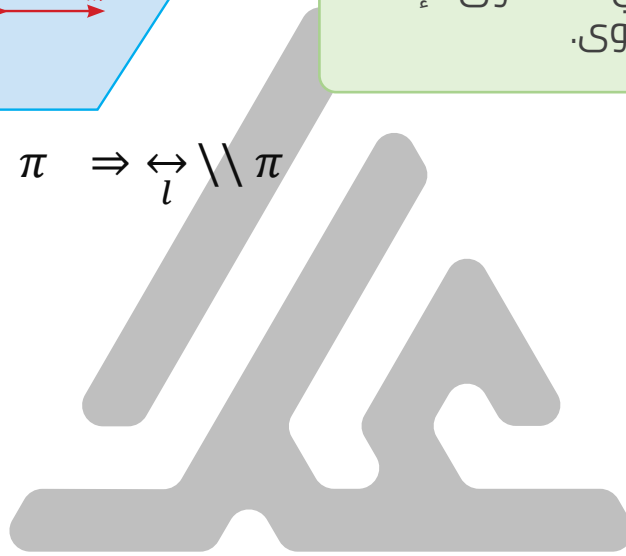
# المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء



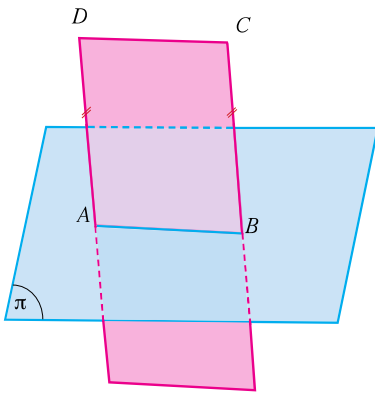
## نظرية ١:

إذا وازى مستقيم خارج مستو مستقيماً في المستوي فإنه يوازي المستوي.

$$\vec{l} \parallel \vec{m}, \vec{m} \subset \pi \Rightarrow \vec{l} \parallel \pi$$

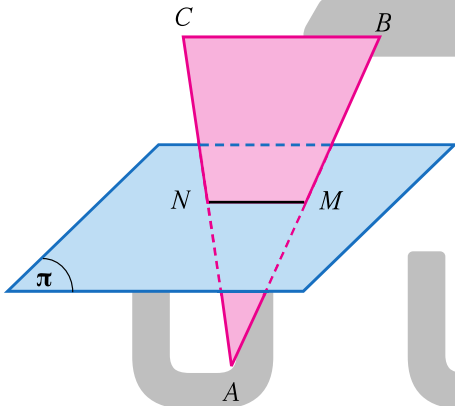


س

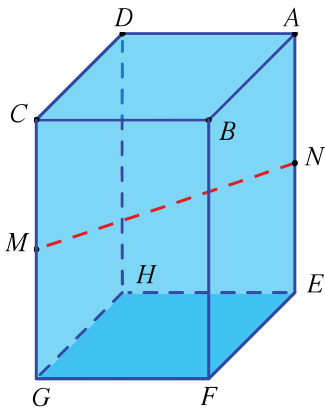


فى الشكل المقابل:  $AD = BC$  ,  $\overrightarrow{AD} // \overrightarrow{BC}$  ,  $\overrightarrow{AB} \subset \pi$  , أثبت أن:  $\overrightarrow{CD} // \pi$

س



فى لشكل المقابل: المثلث  $ABC$  فيه  $M$  منتصف  $\overline{AB}$  ,  $N$  منتصف  $\overline{AC}$  ,  $M, N$  تنتميان الى المستوى  $\pi$  اثبت أن  $\overrightarrow{BC} // \pi$



$ABCDEFGH$  شبه مکعب.

$M$  منتصف  $\overline{CG}$  ,  $N$  منتصف  $\overline{AE}$

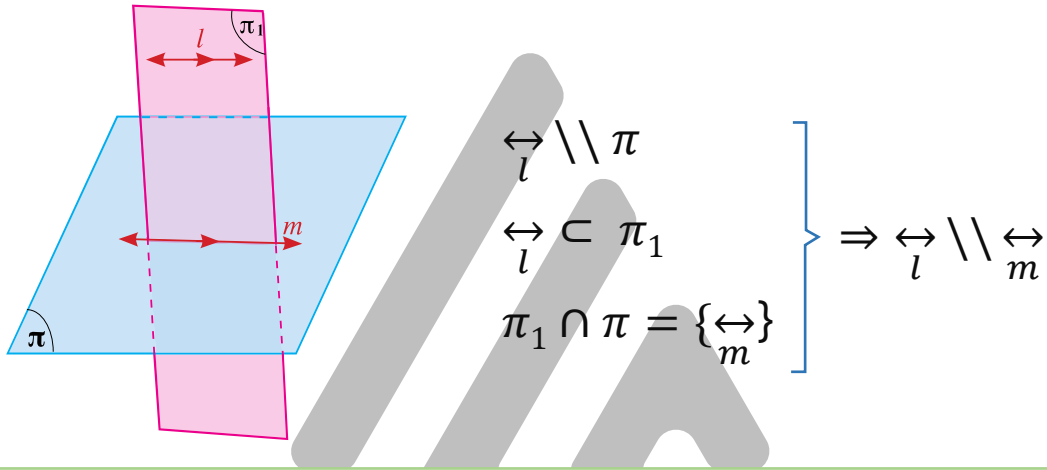
أثبت أن  $(EFGH)$  يوازي  $\overleftrightarrow{MN}$



## نظرية 2 - نظرية 3

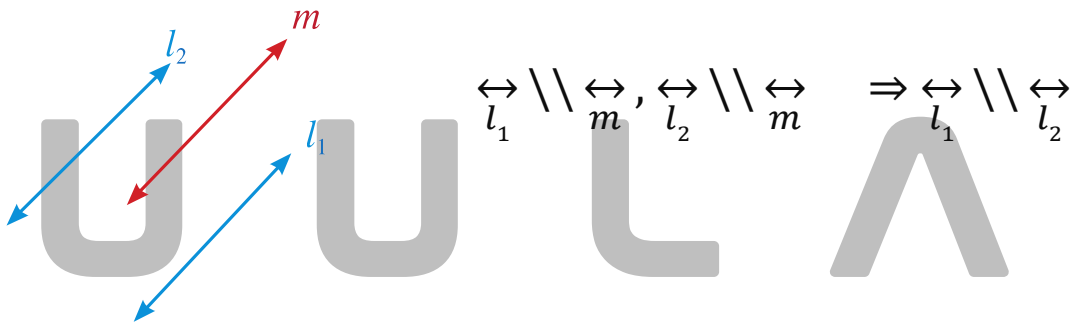
### نظرية 2:

إذا وازى مستقيم مستويًا، فكل مستو مار بالمستقيم ويقطع المستوي، يقطعه في مستقيم مواز للمستقيم المعلوم.



### نظرية 3:

المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث في الفضاء متوازيان.



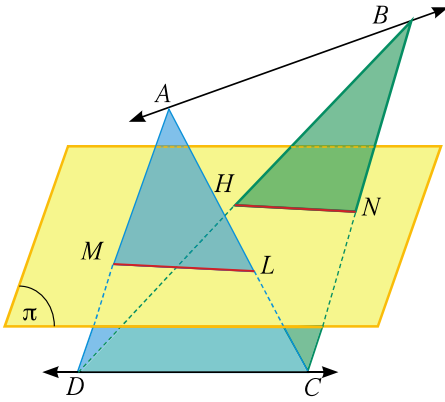
س

في الشكل المقابل: اذا كان  $\vec{AB}, \vec{CD}$  متخالفان  $\vec{CD} // \pi$

$\vec{AD}$  تقطع  $\pi$  في  $M$ ,  $\vec{AC}$  تقطع  $\pi$  في  $L$

$\vec{BD}$  تقطع  $\pi$  في  $H$ ,  $\vec{BC}$  تقطع  $\pi$  في  $N$

أثبت أن:  $\vec{LM} // \vec{NH}$

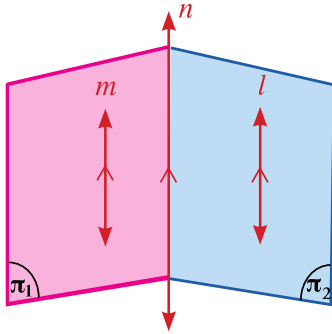


س إذا كان  $\vec{AB} // \pi$  فأثبت أن  $LMHN$  متوازي أضلاع



## نتيجة ا:

إذا توازي مستقيمان ومر بهما مستويان متقاطعان، فإن خط تقاطعهما هو مستقيم يوازي كلا من هذين المستقيمين.

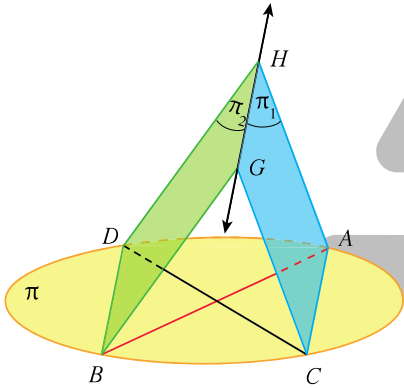


$$\left. \begin{array}{l} \vec{l} \parallel \vec{m} \\ \vec{m} \subset \pi_1, \vec{l} \subset \pi_2 \\ \pi_1 \cap \pi_2 = \{\vec{n}\} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{l} \parallel \vec{m} \parallel \vec{n}$$

**س** في الشكل المقابل:  $\overline{AB}$  ,  $\overline{CD}$  قطران في مستوى الدائرة  $\pi$

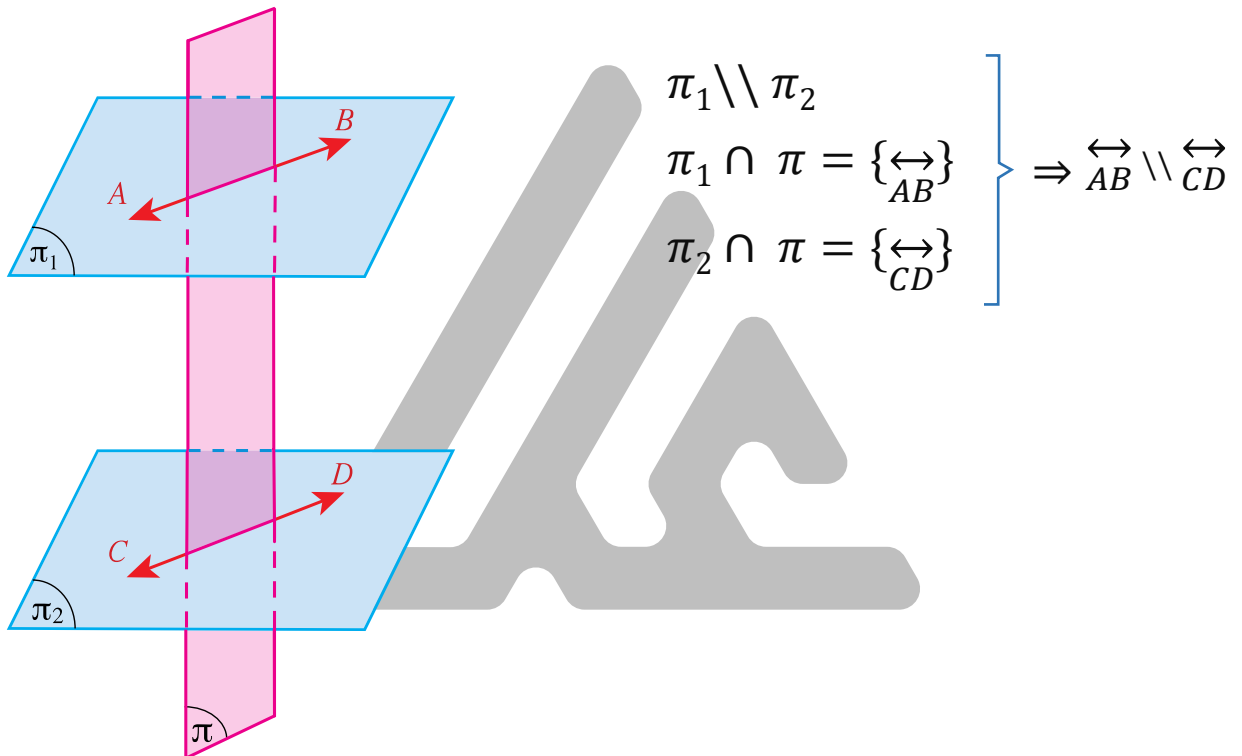
$$\pi_1 \cap \pi_2 = \vec{GH}$$

أثبت أن مستوي الدائرة  $\pi$  يوازي  $\vec{GH}$



## نظرية 4:

إذا قطع مستويان متوازيين فإن خطي تقاطعه معهما يكونان متوازيين.

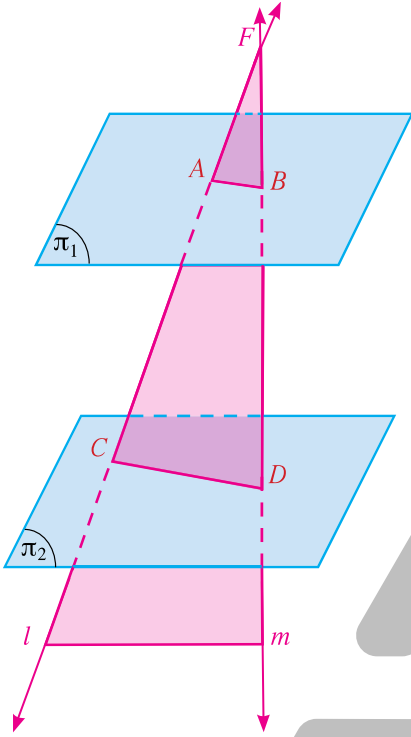


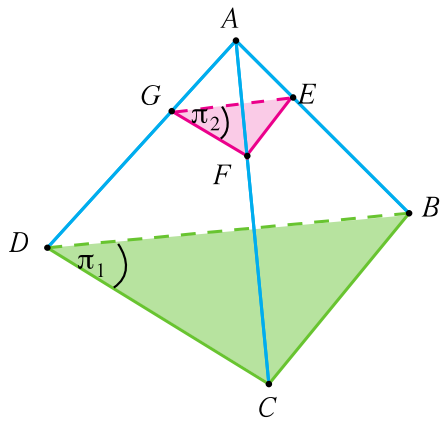
في الشكل المقابل:  $\pi_1$  ,  $\pi_2$  مستويين متوازيين

$\vec{l}$  ,  $\vec{m}$  مستقيمان متقاطعان في  $F$  ويقطعان كلا من  $\pi_1$  في  $A, B$  في  $\pi_2$  في  $C, D$

إذا  $FB = 5cm$  ,  $CD = 9cm$  ,  $AC = 6cm$  ,  $BD = 4cm$

فأوجد محيط المثلثات  $FAB$





في الشكل المقابل: هرم ثلاثي.  
المستويان  $\pi_1$  ,  $\pi_2$  متوازيان.

إذا كان  $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$  ,  $FG = 6cm$   
فأوجد  $DC$



## بعض التمارين من كراسة التمارين

**س** ليكن  $\pi_1, \pi_2$  مستويان متقاطعان في  $\overleftrightarrow{MN}$  حيث:

$$\overleftrightarrow{AB} \subset \pi_1, \overleftrightarrow{AB} \not\subset \pi_2$$

$$\overleftrightarrow{CD} \subset \pi_2, \overleftrightarrow{CD} \not\subset \pi_1$$

أثبت أن:  $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$



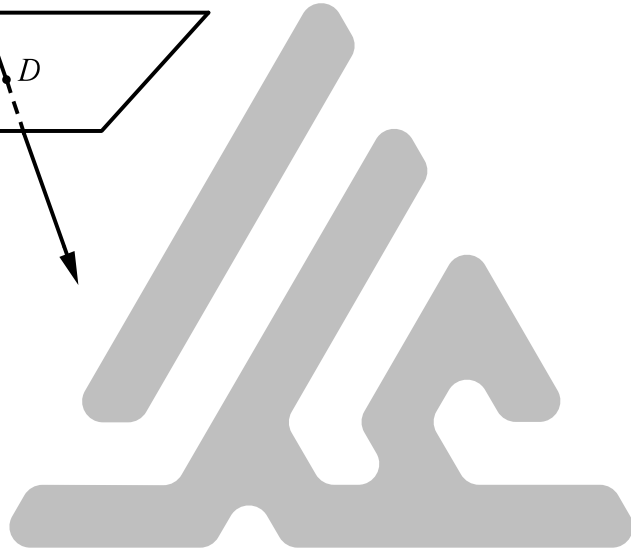
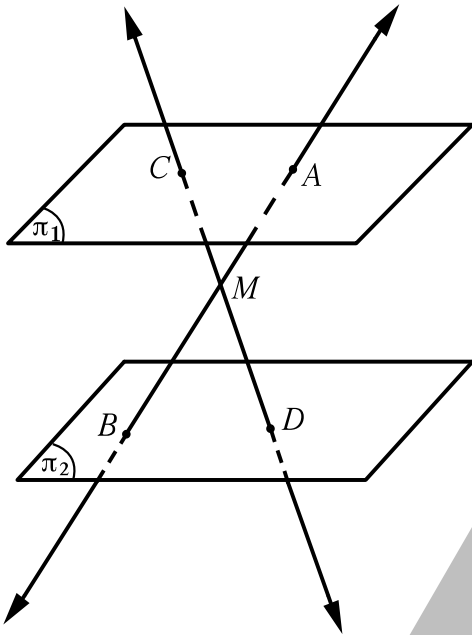
**س**  $ABCD, ABEF$  متوازي أضلاع غير مستويين معاً ويتقاطعان في  $\overleftrightarrow{AB}$   
أثبت أن:  $CDEF$  متوازي أضلاع



**س** في الشكل المقابل  $\pi_1$  ,  $\pi_2$  مستويان متوازيان,  $M$  نقطة واقعة بينهما,

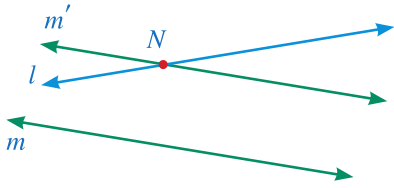
حيث  $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{M\}$

أثبت أن:  $\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BD}$



# تعامد مستقيم مع مستوي

## تعريف



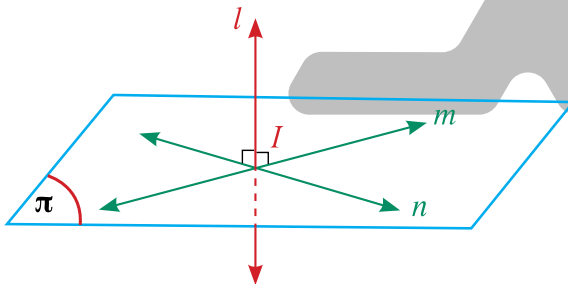
الزاوية بين مستقيمين متخالفين: هي الزاوية التي يصنعها أحدهما مع أي مستقيم قاطع له و مواز للآخر.

## تعريف

يكون المستقيم عمودي على المستوي، إذا كان عمودياً على كل المستقيمتين الواقعتين في هذا المستوي.  $\vec{l} \perp \pi$

## نظرية 5:

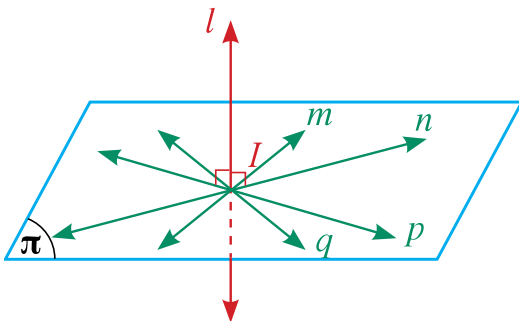
المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين يكون عمودياً على مستويهما.



$$\vec{l} \perp \vec{m}, \vec{l} \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{l} \perp \pi$$

## نتيجة 2:

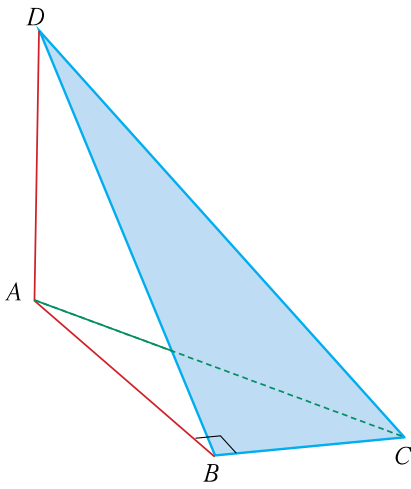
جميع المستقيمت العمودية على مستقيم معلوم من نقطة تنتمي إلى هذا المستقيم تكون محتواه في مستوي واحد عمودياً على المستقيم المعلوم.

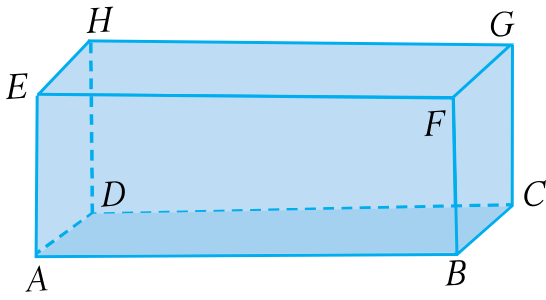


في الشكل المقابل، المثلث  $ABC$  قائم في  $\hat{B}$

$$\overleftrightarrow{AD} \perp (ABC)$$

أثبت أن المثلث  $DBC$  قائم في  $\hat{B}$





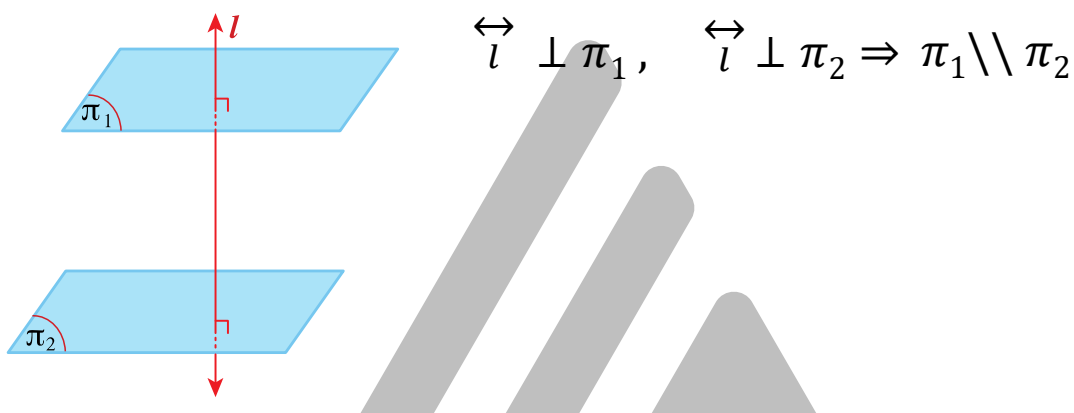
في شبه المكعب المقابل ،  
أثبت أن المثلث  $BEH$  قائم في  $\hat{E}$



## نظرية 6 - نظرية 7

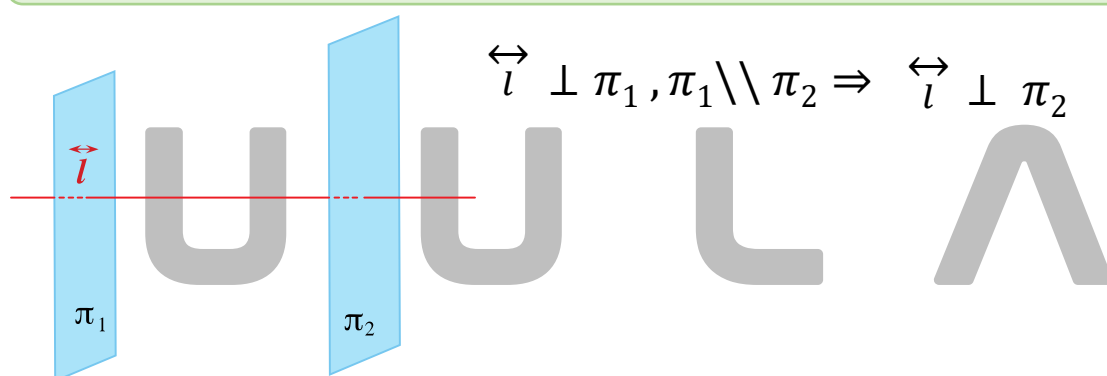
### نظرية 6:

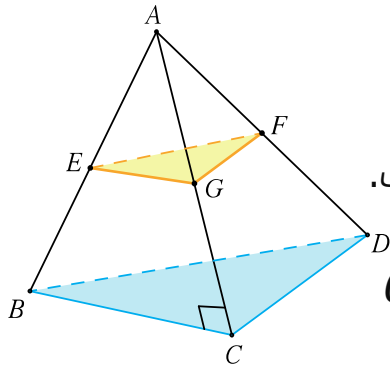
إذا كان مستقيم عمودياً على كل من مستويين مختلفين فإنهما يكونان متوازيين.



### نظرية 7:

إذا كان مستقيم عمودياً على أحد مستويين متوازيين فإنه يكون عمودياً على المستوى الآخر

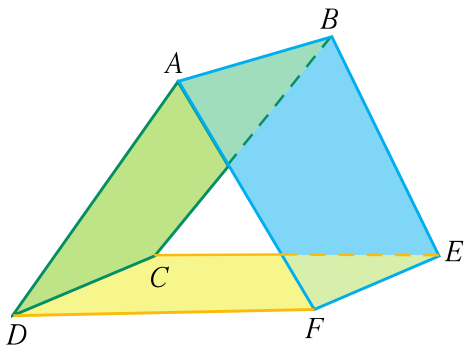




فى الشكل المقابل :  
 $A$  نقطه خارج المستوى  $BCD$ ،  
 والنقاط  $E, G, F$  منتصفات  $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$  على الترتيب.  
 اذا كان  $\overline{AC} \perp \overline{CB}$   
 وكان  $CD = 5CM, AC = 12CM, AD = 13CM$   
 فأثبت أن:  $(EGF) \parallel (BCD)$

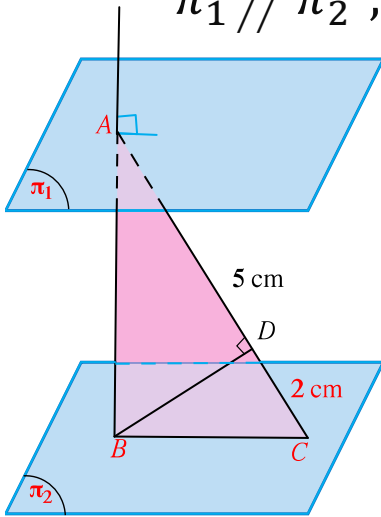


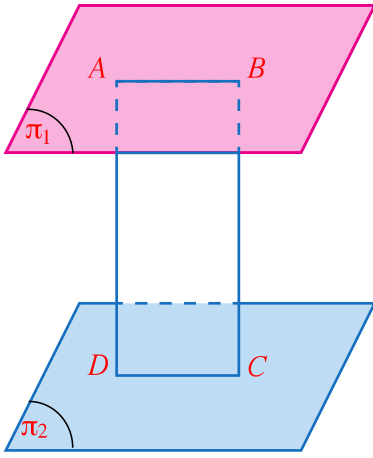
فى الشكل المقابل :  
 $ABEF, ABCD$  مستطيلان  
 أثبت أن:  $(AFD) // (BEC)$



في الشكل المقابل،  $\pi_1 \parallel \pi_2$ ،  $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$ ،  $A \in \pi_1$ ،  $\overleftrightarrow{BC} \subset \pi_2$ ،  
رسم:  $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$  في المستوى  $ABC$

إذا كان  $AD = 5\text{ cm}$ ،  $DC = 2\text{ cm}$   
أوجد:  $BD$





في الشكل المقابل :  $\pi_1 // \pi_2$   
 $A, B$  نقطتان في  $\pi_1$   
 $C, D$  نقطتان في  $\pi_2$  حيث :  $A, B, C, D$  في مستوى واحد  
 $\overline{AD} \perp \pi_2$  ,  $\overline{BC} \perp \pi_2$   
 أثبت أن  $ABCD$  مستطيل



## نظرية 8 - نظرية 9

### نظرية 8:

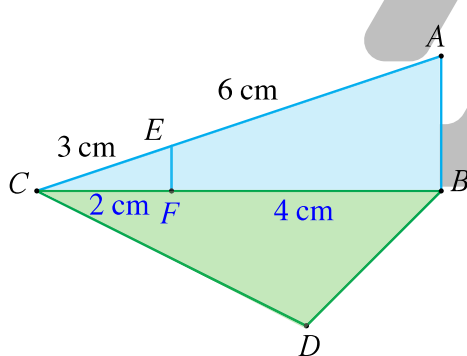
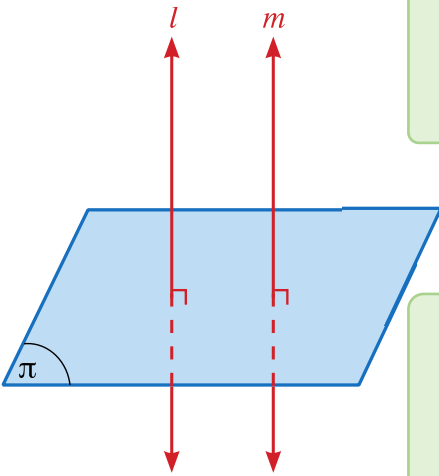
المستقيمان العموديان على مستو متوازيان

$$\Leftrightarrow_l \perp \pi, \Leftrightarrow_m \perp \pi \Rightarrow \Leftrightarrow_l \parallel \Leftrightarrow_m$$

### نظرية 9:

إذا وازى مستقيمان أحدهما عمودياً على مستو كان المستقيم الآخر عمودياً على المستوى أيضاً

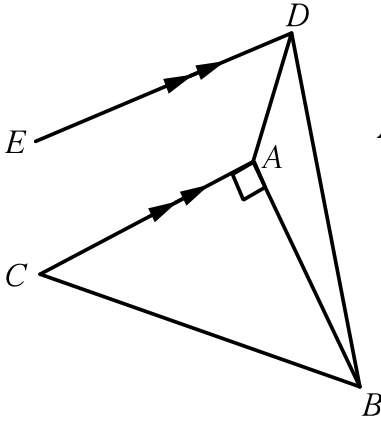
$$\Leftrightarrow_l \perp \pi, \Leftrightarrow_l \parallel \Leftrightarrow_m \Rightarrow \Leftrightarrow_m \perp \pi$$



**س** في الشكل المقابل إذا كان  $\overline{AB} \perp (BCD)$  وكان  $CF = 2CM, FB = 4CM$  و  $CE = 3CM, EA = 6CM$  أثبت ان:  $\overline{EF} \perp \overline{DB}$



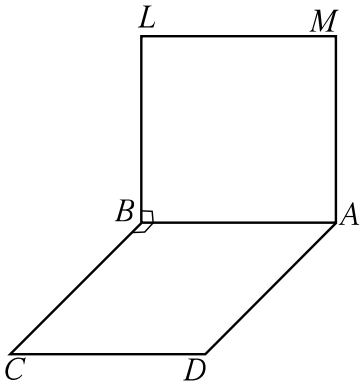
## بعض أسئلة التدريبات



**س** في الشكل المقابل ، مثلث قائم الزاوية في  $A$   
رسم  $\overleftrightarrow{AD}$  عمودي على مستوى المثلث  $ABC$  ،

ورسم  $\overleftrightarrow{ED} \parallel \overleftrightarrow{CA}$  أثبت أن :  $\overleftrightarrow{ED} \perp \overleftrightarrow{AB}$

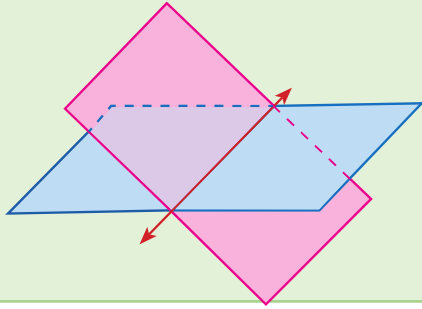




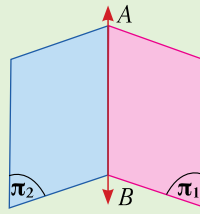
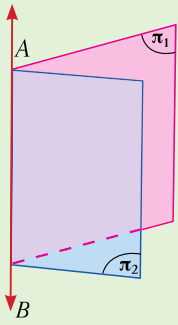
**س** ABCD , ABLM مربعان ليسا فى مستو واحد,  
 لهما ضلع مشترك  $\overleftrightarrow{AB}$  ,  
 أثبت أن :  $\overleftrightarrow{LM} \perp (LBC)$



# الزاوية الزوجية:

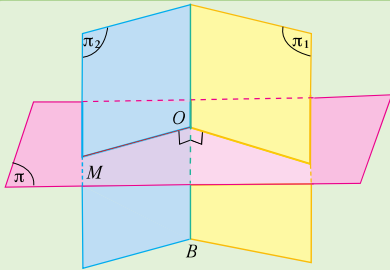


إذا تقاطع مستويان مختلفان في الفضاء فإنهما يتقاطعان في مستقيم وينتج من هذا التقاطع أربع زوايا زوجية

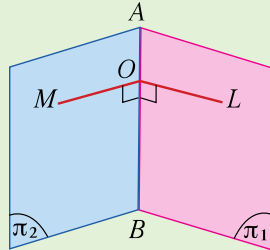
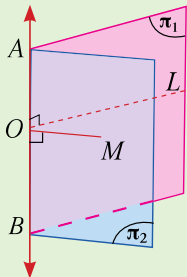


يقسم المستقيم المشترك كل مستوى إلى نصفين ويسمى المستقيم المشترك **حافه الزاويه الزوجية** أو **الفاصل المشترك**, و يسمى كل من نصفي المستويين **وجه الزاوية الزوجية**

$$\pi_1, \overleftrightarrow{AB}, \pi_2$$



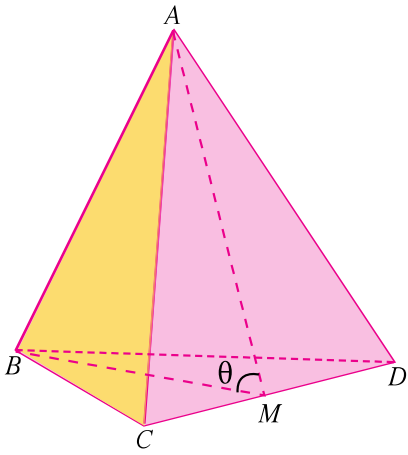
**الزاوية المستوية للزاوية الزوجية :**  
هي الزاوية التي تنشأ من تقاطع الزاوية الزوجية مع مستو عمودي على حافتها

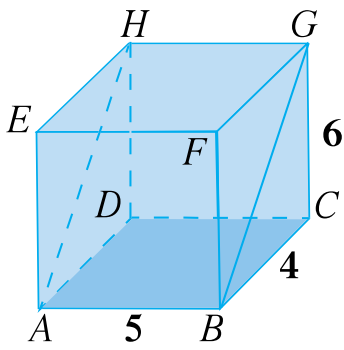


**قياس الزاوية الزوجية :**  
هو قياس إحدى زواياها المستوية ودائماً نأخذ قياس الزاوية الحادة

يبين الشكل المقابل هرمًا ثلاثي القاعدة أوجهه مثلثات  
متطابقة الأضلاع طول حرفه  $8\text{cm}$   
 $M$  منتصف  $\overline{DC}$

- حدد الزاوية المستوية بين المستويين  $ADC, BDC$
- أوجد قياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية  $\overleftrightarrow{DC}$





فى شبه المكعب المقابل ، أثبت أن الزاوية  $GBC$  هى الزاوية المستوية للزاوية الزوجية للمستويين  $(ABCD)$  ,  $(ABGH)$  ثم أوجد قياسها .



في الشكل المقابل  $D$  نقطة خارج مستوى المثلث  $ABC$  ،

$$DB = 5cm , AB = 10cm , m(\widehat{BAC}) = \frac{\pi}{6}$$

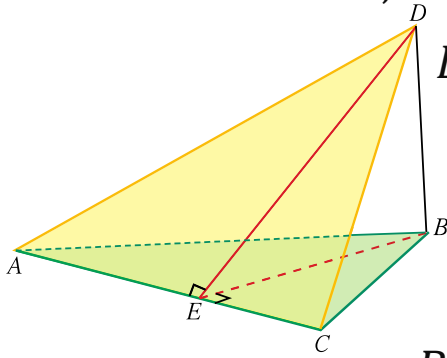
$$\overline{DB} \perp (ABC)$$

$$\overline{BE} \perp \overline{AC} , \overline{DE} \perp \overline{AC}$$

أوجد:

$$BE, DE$$

■ قياس الزاوية الزوجية بين المستويين  $BAC , DAC$



مثال (٣) + حاول ص ١٤٢:

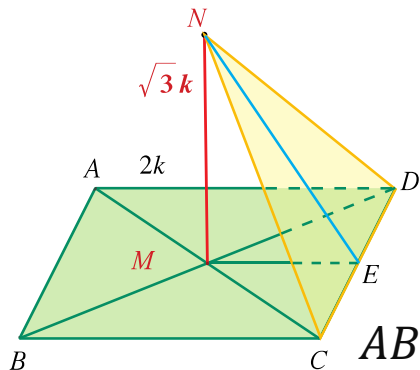
$ABCD$  مستطيل تقاطع قطراه في  $M$

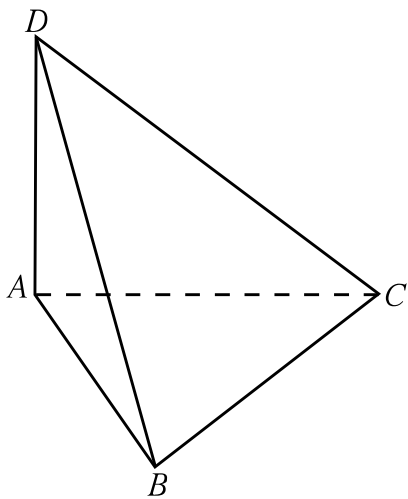
و فيه  $AD = 2K$

أقيم  $\overline{NM}$  عموداً على  $(ABCD)$

حيث  $N$  خارج مستواه بحيث  $MN = \sqrt{3} k$

أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين  $ABCD$  ,  $NCD$





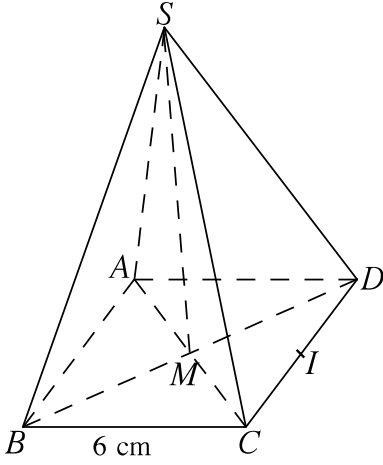
س  $ABC$  مثلث متطابق الأضلاع.  
 $\overleftrightarrow{DA}$  متعامد مع المستوى  $ABC$   
 أوجد قياس الزاوية الزوجية  $(DAB, \overleftrightarrow{DA}, DAC)$

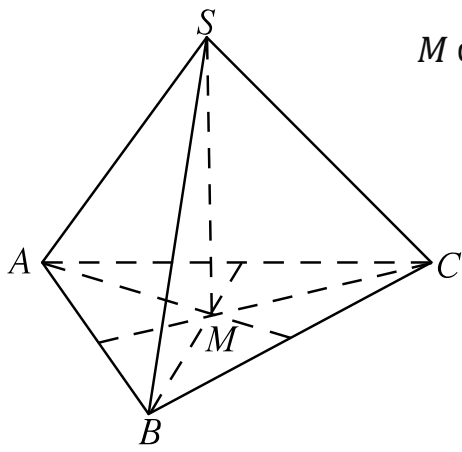


س هرم  $SABCD$  مربع القاعدة طول ضلعها  $6\text{cm}$  ومركزها  $M$

بحيث أن  $\overrightarrow{SM} \perp (ABCD)$  ،  $I$  منتصف  $\overline{CD}$

- أثبت أن:  $(M\hat{I}S)$  هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية  $(ABCD, \overleftrightarrow{CD}, SCD)$
- أوجد:  $m(M\hat{I}S)$  إذا كان  $SM = \sqrt{3}\text{cm}$





**س** هرم  $SABC$  قاعدته مثلث متطابق الأضلاع مركزه  $M$

بحيث أن  $\vec{SM} \perp (ABC)$

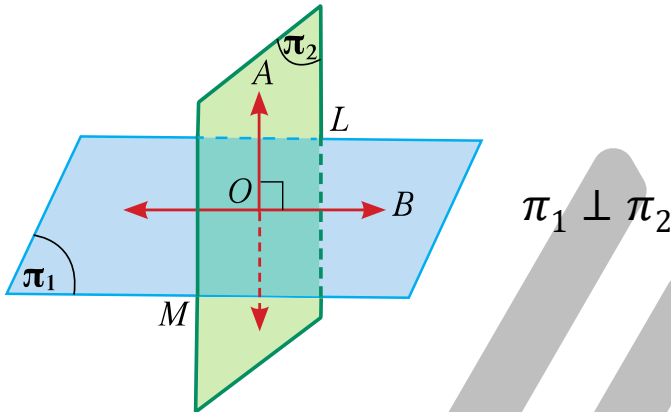
أوجد قياس الزاوية الزوجية  $(SMB, \vec{SM}, SMC)$



# المستويات المتعامدة

## تعريف

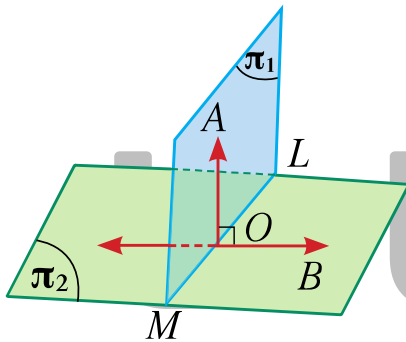
يكون المستويان متعامدان إذا كانت الزاوية المستوية بينهما زاوية قائمة (قياس الزاوية الزوجية بين المستويين  $90^\circ$ )



$$\pi_1 \perp \pi_2$$

## نظرية 10:

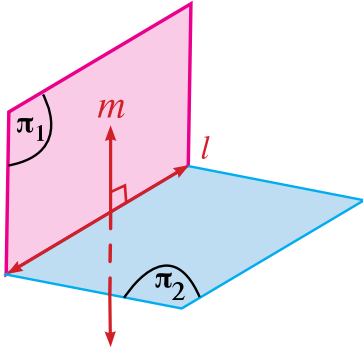
إذا كان مستقيم عمودياً على مستو فكل مستو يمر بذلك المستقيم يكون عمودياً على المستوي.



$$\begin{aligned} \vec{OA} &\perp \pi_2, \quad \vec{OA} \subset \pi_1, \\ \Rightarrow \pi_1 &\perp \pi_2, \end{aligned}$$

### نتيجة ٣:

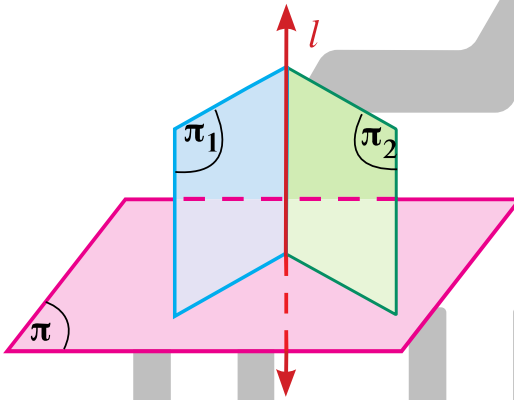
إذا تعامد مستويان ورسم في أحدهما مستقيم عمودي على خط تقاطعهما فإنه يكون عمودياً على المستوى الآخر.



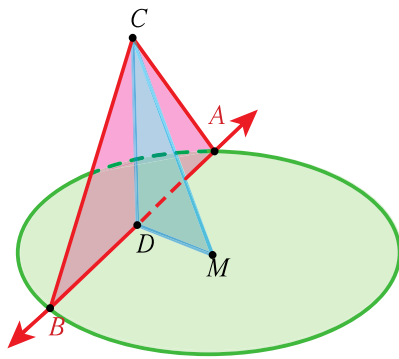
$$\begin{aligned} \pi_1 \perp \pi_2, \quad \pi_1 \cap \pi_2 = \vec{l} \\ \vec{m} \subset \pi_1, \quad \vec{m} \perp \vec{l} \\ \Rightarrow \vec{m} \perp \pi_2, \end{aligned}$$

### نتيجة ٤:

إذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودي على مستوي ثالث فإن خط تقاطع المستويين يكون عمودياً على هذا المستوي الثالث.



$$\begin{aligned} \pi_1 \perp \pi, \quad \pi_2 \perp \pi \\ \pi_1 \cap \pi_2 = \vec{l} \\ \Rightarrow \vec{l} \perp \pi \end{aligned}$$



في الشكل المقابل:  $C$  نقطة خارج مستوي الدائرة  
التي مركزها  $M$ ,  $D$  منتصف  $\overline{AB}$   
 $CA = CB$  مثلث فيه  
إذا كان  $DM = DC = 5\text{cm}$ ,  $MC = \sqrt{50}\text{cm}$   
أثبت أن:

- $\overline{MC} \perp \overline{AB}$
- مستوي الدائرة  $\perp (ACB)$

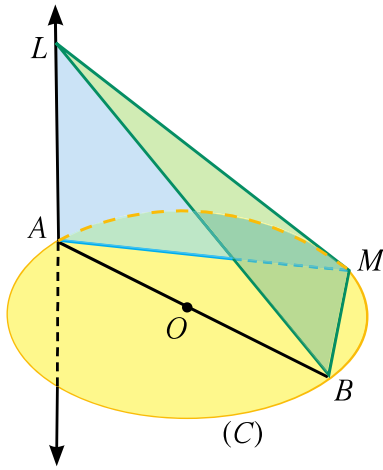


س

في الشكل المقابل: دائرة مركزها  $O$  ،  $\overline{AB}$  قطر.  
 $M$  نقطة تنتمي إلى الدائرة.  
 $\overleftrightarrow{LA}$  متعامدة مع مستوي الدائرة.

أثبت أن:

- $\overleftrightarrow{BM} \perp (LAM)$
- $(LBM) \perp (LAM)$



$A, B, C, D$  أربع نقاط ليست مستوية معاً.

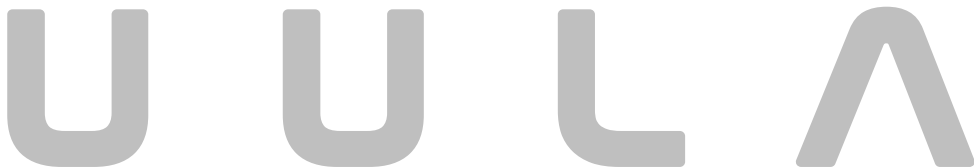
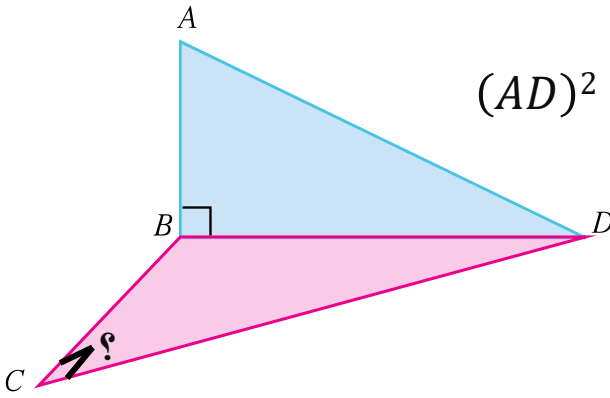
إذا كان  $\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$

وكان  $(AD)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 + (CD)^2$

أثبت أن:

$$\overline{BC} \perp \overline{DC} \quad \blacksquare$$

$$(ABD) \perp (CBD) \quad \blacksquare$$



في شبه المكعب  $ABCDEFGH$  المقابل.

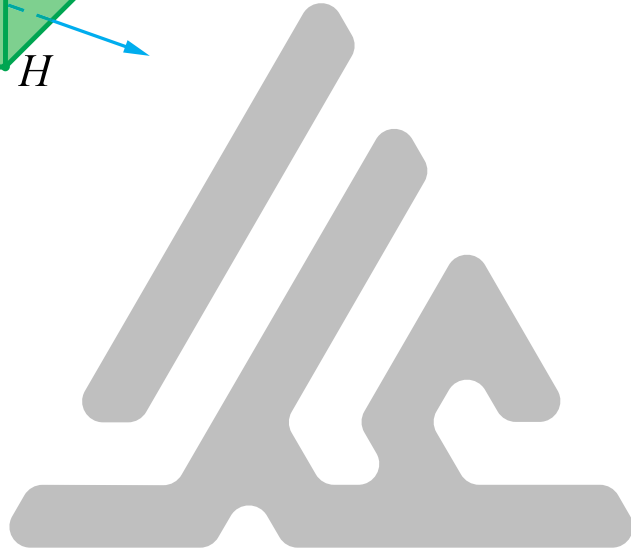
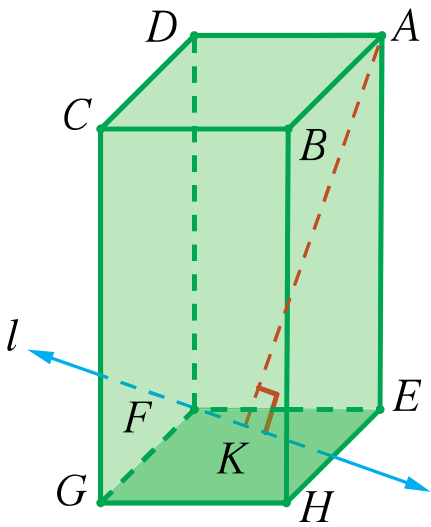
$\vec{l}$  مستقيم في  $(EFGH)$  يمر في  $F$

$$\overline{AK} \perp \vec{l}$$

أثبت أن:

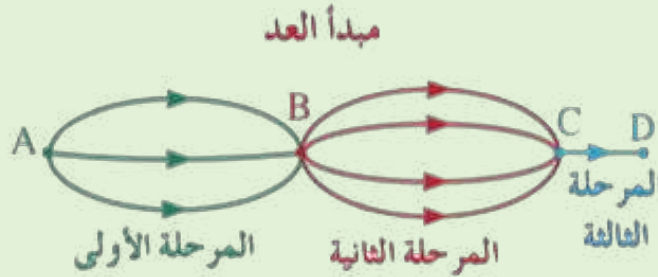
$$\overline{EK} \perp \vec{l} \quad \blacksquare$$

$$(FDK) \perp (AEK) \quad \blacksquare$$



# مبدأ العد و التباديل و التوافيق

## مبدأ العد:



لإجراء عملية على عدد من المراحل المتتالية كما يلي:

المرحلة الأولى بـ  $r_1$  طريقة مختلفة,

المرحلة الثانية بـ  $r_2$  طريقة مختلفة,

المرحلة الثالثة بـ  $r_3$  طريقة مختلفة,

..... وهكذا حتى المرحلة  $n$  بـ  $r_n$  طريقة مختلفة

فإن عدد طرائق إجراء هذه العملية هو:  $r_1 \times r_2 \times r_3 \times \dots \times r_n$

U U L A

س لتكن:  $A = \{1,2,4,5,6\}$

يراد تكوين أعداد ذات ثلاث منازل باستخدام عناصر  $A$   
أوجد :

▪ عدد الأعداد الممكن تكوينها

▪ عدد الأعداد الفردية مختلفة الأرقام الممكن تكوينها.

▪ عدد الأعداد مختلفة الأرقام الممكن تكوينها.

▪ عدد الأعداد الزوجية المختلفة الأرقام الممكن تكوينها.

▪ عدد الأعداد الزوجية الممكن تكوينها.

س لتكن:  $B = \{0,3,4,5,7,9\}$

يراد تكوين أعداد ذات أربعة منازل باستخدام عناصر  $B$   
أوجد :

- عدد الأعداد الممكن تكوينها
- عدد الأعداد المختلفة الأرقام الممكن تكوينها والمحصورة بين 4000, 7000 .

- عدد الأعداد التي تقبل القسمة على 10 الممكن تكوينها.
- عدد الأعداد التي تقبل القسمة على 5 الممكن تكوينها.

- عدد الأعداد المختلفة الأرقام والأكبر من 5000 الممكن تكوينها.

$$n! = n(n-1)(n-2) \dots 3 \times 2 \times 1, n \in \mathbb{Z}^+ \text{ س}$$

- $4! =$
- $5! =$
- $0! =$
- $1! =$



# مسائل نحلها باستخدام المضروب

**س** بكم طريقة يمكن ترتيب 3 طلاب على 3 مقاعد ؟

**س** كم عدد مؤلف من 4 منازل **مختلفة** يمكن تشكيله من {2,3,5,6}

**س** كم كلمة مؤلفة من 3 حروف **مختلفة** يمكن تشكيلها من الأحرف {A,B,C}



## التباديل

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)$$

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$${}_nP_0 =$$

$${}_nP_1 =$$

$${}_nP_n =$$

$${}_7P_3 =$$

$${}_5P_2 =$$

$${}_5P_0 =$$

$${}_6P_6 =$$

$${}_8P_1 =$$

س اشتر كت 7 يخوت فى سباق

- بكم طريقة مختلفة يمكن توقع وصول اليخوت الثلاثة الأوائل بالترتيب ؟

- ما عدد الطرائق المختلفة لوصول اليخوت الثلاثة الأوائل إذا اشترك فى السباق 10 يخوت ؟



- بكم طريقة مختلفة يمكن ثلاثة طلاب الجلوس فى صف واحد يحوى 8 مقاعد؟

- كم عدد مؤلف من 3 منازل مختلفة يمكن تشكيله من  $\{2,3,5,6,7,8\}$



- كم كلمة مؤلفة من 4 حروف مختلفة يمكن تشكيلها من الأحرف  $\{A,B,C,D,E,F\}$

▪  ${}_nP_5 = 6 \times {}nP_4, n \geq 5$

▪  ${}_nP_4 = 5 \times {}nP_3, n \geq 4$

$${}_6P_r = 4 \times {}_6P_{r-1}$$

$$\frac{{}_{2n}P_{n+2}}{{}_{2n}P_{n-1}} = 60$$



U U L A

- ${}_nP_7 = 12 \times {}_nP_5$

- ${}_8P_r = 4 \times {}_8P_{r-1}$

U U L A

- ${}_5P_r = 12 \times {}_5P_{r-2}$

- $\frac{{}_nP_{n-2}}{{}_nP_{n-4}} = \frac{n^2}{12}$



$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}$$

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

▪  ${}_nC_0 = 1$        ${}_nC_1 = n$        ${}_nC_n = 1$

**س** بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار مجموعة من 4 عناصر من مجموعة مؤلفة من 300 عنصر؟

**س** في مكتبة المدرسة 15 كتابا مختلفا من مجموعة روايات التاريخ الإسلامي. بكم طريقة يمكنك اختيار 4 كتب منها للمطالعة؟

**س** يتكون فريق كرة القدم في المدرسة من 18 لاعبا. يريد المدرب تشكيل فريق من 11 لاعبا.

▪ أوجد عدد الفرق المختلفة الممكن تكوينها.

▪ أوجد عدد الفرق المختلفة الممكن تكوينها إذا أراد المدرب أن يتضمن الفريق اللاعب عبد العزيز.

**س** أوجد قيمة  $n$  في كل مما يلي:

▪  ${}_nC_3 = {}nC_4$

▪  ${}_nC_4 = {}nC_5$

**س** أوجد قيمة  $n$  فى كل مما يلى:

▪  ${}_nC_2 = 105$

**س** أوجد قيمة  $n$  فى كل مما يلى:

▪  $\frac{{}_nC_7}{(n-1){}_nC_6} = \frac{8}{7}$

- ${}_nC_3 + {}nC_2 = 3n(n-1)$

- ${}_nC_4 = {}nC_{n-2}$

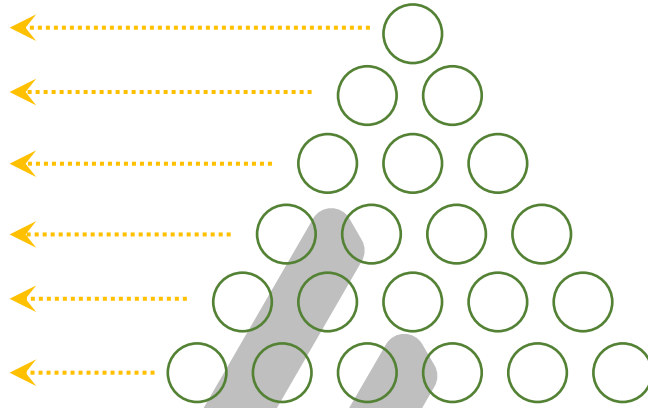


- $${}_{2n}C_4 = \frac{1}{2} {}_{2n}C_5$$



U U L A

## مثلث باسكال



## نظرية ذات الحدين

$$(x + y)^n = {}_n C_0 x^n + {}_n C_1 x^{n-1} y + {}_n C_2 x^{n-2} y^2 + \dots + {}_n C_r x^{n-r} y^r + \dots + {}_n C_{n-1} x y^{n-1} + {}_n C_n y^n$$

**س** استخدم نظرية ذات الحدين لفك كل من:

- $(x + y)^2$

- $(a - b)^4$

- $(2x - y^2)^5$



U U L A

- $(x + y)^5$



U U L A

**س** في مفكوك:  $(3x^2 - y)^{15}$  أوجد معامل  $T_{12}$

**س** أوجد الحد الذي يحتوي علي  $x^3y^4$  في مفكوك  $(2x + 3y)^7$

U U L A

**س** أوجد الحد الذي يحتوي علي  $x^2y^3$  فى مفكوك  $(3x - y)^5$



U U L A

## التجربة العشوائية

### التجربة العشوائية:

هي تجربة لها عدة نواتج مختلفة ممكنة ولكن لا يمكن التأكد مسبقا من أي ناتج منها سوف يتحقق عند إجراء التجربة.

**س** في تجربة رمي حجر نرد مرة واحدة و ملاحظة الوجه العلوي.  
أكتب وحدد نوع كل من الأحداث التالية:

- A ظهور عدد أكبر من 5
- B ظهور عدد فردي
- C ظهور عدد زوجي
- D ظهور عدد أصغر من 7
- أثبت أن  $B, C$  حدثان متتامان.
- بين فيما إذا كان الحدثان  $C, D$  متنافيان أم لا.



وسيلة النقل	الشعبة A	الشعبة B	المجموع
الحافلة المدرسية	16	15	31
مع الأهل	6	8	14
سيارة نقل عام	2	5	7
المجموع	24	28	52

**س** اختير طالب عشوائياً من بين طلاب شعبتي الصف الحادي عشرة

- ما احتمال أن يكون هذا الطالب من الذين يستقلون الحافلة المدرسية

- ما احتمال أن يكون هذا الطالب من الذين يقلونهم أهلهم الى المدرسة؟

- ما احتمال أن يكون هذا الطالب من الشعبة B؟

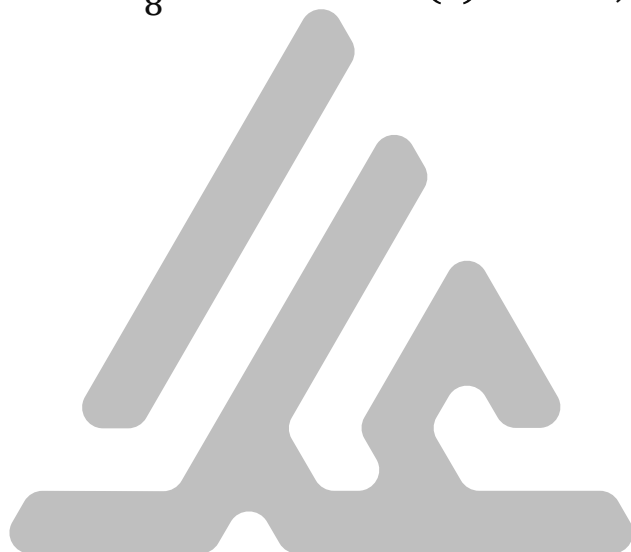
**س** الطلاب: مصطفى , محمد , طه , أحمد , أمين  
أراد مدير المدرسة اختيار 3 منهم لتمثيل المدرسة في مسابقة ثقافية.  
ما احتمال اختيار (محمد)؟

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	حدثان $B, A$ فإن
$P(A \cap B) = 0$	$\Leftrightarrow$ حدثان متنافيان
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$	$\Leftrightarrow$ حدثان مستقلان
$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$	$\Leftrightarrow \bar{A}$ هو الحدث المتمم للحدث $A$

**س** إذا كان الحدثان  $t, r$  متنافيان . أوجد  $P(t \cup r)$ .

□  $P(t) = \frac{5}{8}, P(r) = \frac{1}{8}$

□  $P(t)=12\%, P(r)=27\%$



إذا كان الحدثان  $m, n$  مستقلان . أوجد  $P(m \cap n)$ .

□  $P(m) = \frac{1}{4} ; P(n) = \frac{2}{3}$

□  $P(m)=0.6 ; P(n) = 0.9$



**س** رمي حجر نرد منتظم . فما احتمال الحصول على أحد مضاعفات العدد 3 أو عدد زوجي؟

▪ ما احتمال الحصول على عدد زوجي أو عدد أولي؟

U U L A

**س** في أحد البلدان , 30% من السكان هم تحت سن العشرين , 17% فوق الستين .  
اختير شخص من السكان عشوائيا . فما احتمال أن يكون تحت سن العشرين أو  
فوق الستين؟

## احتمال ذات الحدين

$$\begin{aligned} P(E) &= {}_n C_k \cdot P(H)^k \cdot P(T)^{n-k} \\ &= {}_n C_k \cdot m^k (1-m)^{n-k} \end{aligned}$$

**س** تفوز 40% من البطاقات بجوائز مع راشد 3 بطاقات . ما احتمال أن يفوز راشد  
بجائزتين؟



**س** ما احتمال أن يفوز راشد بجائزة واحدة فقط؟

**س** في إحدى الآلات الحاسبة 4 بطاريات . احتمال أن تخدم كل بطارية مدة عام كامل يساوي 90% ما احتمال أن تخدم كل من البطاريات الأربع مدة عام؟

**س** ما احتمال أن تخدم 3 بطاريات فقط مدة عام كامل؟

**س** في إحدى المدن , وافق 40% من السكان على مرور القطار السريع في الغابة قرب مدينتهم . اختير 10 أشخاص عشوائيا من سكان المدينة , فما احتمال أن يكون 4 منهم قد وافقوا على مرور القطار السريع؟

**س** يستخدم حوالي 11% من الطلاب اليد اليسرى للكتابة . يوجد في أحد الصفوف 30 طالبا . فما احتمال أن يكون 4 طلاب من هذا الصف يستخدمون اليد اليسرى للكتابة؟