سلامة علي الركاض

الملف مراجعة شاملة للاختبار التقويمي الأول في الأعداد المركبة والدوال المثلثية منهاج جديد
موقع المناهج ⇦ ملفات الكويت التعليمية ⇦ الصف الحادي عشر العلمي ⇦ رياضيات ⇦ الفصل الثاني

الرياضيات

الفصل الدراسي الثاني

التقويمي الأول

2025 - 2026

شامل كل تمارين الكتاب والكراسة

7-2

7-3

8-1

8-3

11

علمي

أ : سلامة علي الركاض

7 - 2

الإحداثيات القطبية والصورة المثلثية لعدد مركب

مطلق العدد المركب
$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

مثال 1

أوجد:

a $|5i|$ b $|3 - 4i|$

حاول أن تحل 1

أوجد:

a $|6 - 4i|$ b $|-2 + 5i|$

كراسة التمارين

(1) أوجد:

(a) $|5 + 12i|$ (b) $|2 - 2i|$ (c) $|2i|$

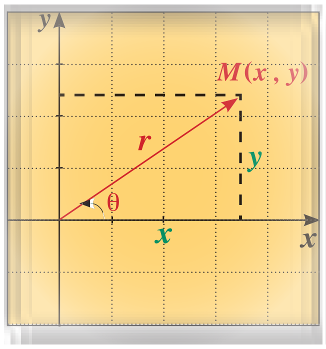
الاحداثيات القطبية

يمكن تمثيل أي نقطة في المستوى باستخدام الإحداثيات القطبية (r,θ) حيث:

r : بعد النقطة عن نقطة الأصل θ: هي الزاوية الموجهة في الوضع القياسي التي يمر ضلعها النهائي بالنقطة

للتحويل من الاحداثيات القطبية إلى الديكارتي: $M(x,y)$ $\longleftarrow$ $M(r,\theta)$

$x = r.\cos\theta$, $y = r.\sin\theta$



مثال 2

حوّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية:

a $M\left(5,\frac{\pi}{4}\right)$ b $N\left(\sqrt{2},\frac{5\pi}{6}\right)$

....

....

....

....

....

حاول أن تحل 2

أوجد الزوج المرتب (x,y) الذي يمثل الإحداثيات الديكارتية لكل من النقطتين:

a $A(5,300^\circ)$ b $B\left(2,\frac{2\pi}{3}\right)$

....

....

....

....

....

كراسة التمارين

في التمارين (2–7)، حول الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية:

(2) $\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ **(3)** $\left(1, \frac{3\pi}{4}\right)$

(4) $\left(1.5, \frac{7\pi}{3}\right)$ **(5)** $(2, \pi)$

(6) $(2, 270^\circ)$ **(7)** $\left(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{6}\right)$

للتحويل من الاحداثيات الديكارتية إلى القطبية: $M(r,\theta) \longleftarrow M(x,y)$

$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$ "زاوية الاسناد" , $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

ثم يتم حساب الزاوية θ حسب الربع:

$$\theta = \begin{cases} \alpha & x > 0, \quad y > 0 \\ \pi - \alpha & x < 0, \quad y > 0 \\ \pi + \alpha & x < 0, \quad y < 0 \\ 2\pi - \alpha & x > 0, \quad y < 0 \end{cases} \quad ; \quad 0 \le \theta < 2\pi$$

مثال 3

حوّل من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية (r , θ) لكل مما يلي:

a $L(1 , -\sqrt{3})$, $0 \leq \theta < 2\pi$

b $M(-3 , -4)$, $0^{\circ} \leq \theta < 360^{\circ}$

حاول أن تحل 3

أوجد الزوج المرتب (r , θ) لكل نقطة مما يلي حيث $0 \leqslant \theta < 2\pi$

a $D(3\sqrt{3} , 3)$

b $C(4, -2\sqrt{5})$

كراسة التمارين

في التمارين (8–13)، أوجد الإحداثيات القطبية لكل من النقاط التالية:

(8) $(1, 1)$

(9) $(-2, 5)$

(10) $(-3, 0)$

(11) $(0, 4)$

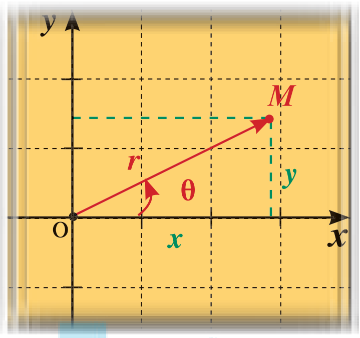
(12) $(-2, -2\sqrt{3})$

(13) $(3\sqrt{3}, -3)$

الصورة المثلثية

الصورة الجبرية $z = x + yi$ ⟷ $z = r(\cos\theta + i\ \sin\theta)$ الصورة المثلثية

حيث r مقياس العدد أو القيمة المطلقة $r = |z|$ و θ سعة العدد المركب



ملاحظات

الصورة المثلثية للعدد المركب ليست وحيدة، لأنه إذا كانت θ سعة العدد المركب $x + yi$ فإن كلًّا مما يلي سعة للعدد نفسه: $\theta + 2\pi\ ,\ \theta + 4\pi, \ldots\ ,\ \theta + 2\pi k\ :\ k \in \mathbb{Z}$.

إذا كانت $\theta \in [0, 2\pi)$ أو $0^\circ \leqslant \theta < 360^\circ$ فتسمى السعة **بالسعة الأساسية**

إذا كان $z = 0$ ، فإن: $r = 0\ , y = 0\ , x = 0$ θ غير معيّنة.

الصورة المثلثية في حالات خاصة

العدد	المقياس	السعة الأساسية (راديان)
a	a	0
$-a$	$\lvert -a \rvert = a$	π
bi	b	$\frac{\pi}{2}$
$-bi$	$\lvert -b \rvert = b$	$\frac{3\pi}{2}$

مثال 4

ضع كلًّا مما يلي في الصورة المثلثية:

a $z_1 = 1 + \sqrt{3}\,i$

b $z_2 = -2 - 2i$

c $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

حاول أن تحل 4

ضع كلًّا مما يلي في الصورة المثلثية:

a $z_1 = \frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}}i$

b $z_2 = -1 - i$

c $z_3 = -2 + 2\sqrt{3}\,i$

كراسة التمارين

في التمارين (14–21)، ضع كلًّا مما يلي في الصورة المثلثية مستخدمًا السعة الأساسية:

(14) $3i$

(15) $2 + 2i$

(16) $-2 + 2i\sqrt{3}$

(17) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

(18) $-2i$

(19) $\sqrt{3}+i$

(20) 8

(21) $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

مثال 6

ضع كلًّا مما يلي في الصورة الجبرية:

a $z_1 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

b $z_2 = 3\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)$

حاول أن تحل 6

ضع كلًّا مما يلي في الصورة الجبرية:

a $z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

b $z_2 = \left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

كراسة التمارين

في التمارين (29–33)، ضع كلًّا مما يلي في الصورة الجبرية:

(29) $2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

(30) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

(31) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right)$

(32) $7\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

(33) $\sqrt{3}(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ)$

مثال 7

ضع في الصورة المثلثية كلًّا من الأعداد التالية:

a $z_1 = 3$ **b** $z_2 = -5$ **c** $z_3 = i$ **d** $z_4 = -3i$

....

....

....

....

حاول أن تحل 7

ضع في الصورة المثلثية كلًّا من الأعداد التالية:

a $z_1 = 2i$ **b** $z_2 = 5$ **c** $z_3 = \frac{-3}{4}$ **d** $z_4 = -\frac{5}{2}i$

....

....

....

....

كراسة التمارين

تمارين موضوعية

في التمارين (1–6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $A\left(4, \frac{7\pi}{6}\right)$ هي: $A(-2\sqrt{3}, 2)$ (a) (b)

(2) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $B(\sqrt{2}, 135^\circ)$ هي: $B(-1, 1)$ (a) (b)

(3) الإحداثيات القطبية للنقطة: $M\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ هي: $M\left(1, \frac{5\pi}{4}\right)$ (a) (b)

(4) العدد المركب: $z = \sqrt{3} - i$ بصورة المثلثية هو: $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ (a) (b)

(5) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$ هي: $z = 1 - i$ (a) (b)

في التمارين (13–7)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $A\left(4,\frac{5\pi}{3}\right)$ هي:

(a) $A(2,2\sqrt{3})$ (b) $A(-2,2\sqrt{3})$ (c) $A(-2,-2\sqrt{3})$ (d) $A(2,-2\sqrt{3})$

(8) الإحداثيات القطبية للنقطة: $B\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ هي:

(a) $B\left(1,\frac{-\pi}{4}\right)$ (b) $B\left(1,\frac{\pi}{4}\right)$ (c) $B\left(1,\frac{3\pi}{4}\right)$ (d) $B\left(1,\frac{-3\pi}{4}\right)$

(9) الصورة المثلثية للعدد المركب: $z=2-2\sqrt{3}i$ حيث $\theta\in[0,2\pi)$ هي:

(a) $z=4\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ (b) $z=4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

(c) $z=4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ (d) $z=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

(10) الصورة المثلثية للعدد المركب: $z=\frac{-4}{1-i}$ حيث $0\leqslant\theta<2\pi$ هي:

(a) $z=4\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$ (b) $z=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

(c) $z=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ (d) $z=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

(11) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=3\left(\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ حيث $0\leqslant\theta<2\pi$ هي:

(a) $z=-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$ (b) $z=-\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i$

(c) $z=-\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$ (d) $z=\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$

(12) $\forall n\in\mathbb{Z}^{+}$ فإنّ قيمة $(i^{2n+2}+i^{2n+8})$ تساوي:

(a) 1 (b) 0 (c) -1 (d) i^{-2n}

(13) $(6-2i+3i^{5})^{2}$ تساوي:

(a) $35-12i$ (b) $35+12i$ (c) $81-12i$ (d) $81+12i$

حل معادلات

أولاً : حل معادلات من الدرجة الأولى في C

تحل معادلات الدرجة الأولى في مجموعة الأعداد المركبة بالطريقة نفسها التي تستخدم لحل معادلات الدرجة الأولى في مجموعة الأعداد الحقيقية.

مثال 1

أوجد مجموعة حل المعادلة: $3z + 1 - i = 7 + 3i$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$.

حاول أن تحل 1

أوجد مجموعة حل المعادلة: $2z + i = 3 + 2i$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$.

كراسة التمارين

في التمارين (1—4)، أوجد مجموعة حل كلّ من المعادلات التالية:

(1) $3z - 1 + i = 5 - 2i$

مثال 2

أوجد مجموعة حل المعادلة: $2z + i\bar{z} = 5 - 2i$ في $\mathbb{C}$.

حاول أن تحل 2

أوجد مجموعة حل المعادلة: $z + i = 2\bar{z} + 1$ في $\mathbb{C}$.

كراسة التمارين

في التمارين (4–1)، أوجد مجموعة حل كلّ من المعادلات التالية:

(2) $z + 2\bar{z} = 4 + i$

(3) $5z - 4 + 2i = 3z + 1 - 4i$

(4) $z + 3(1+i)z - 8(2-i) = 0$

ثانياً : حل معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد في C

مثال 3

أوجد مجموعة حل المعادلة: $4x^2 + 100 = 0$ حيث $x \in \mathbb{C}$.

حاول أن تحل 3

أوجد مجموعة حل كل معادلة مما يلي حيث $x \in \mathbb{C}$:

a $3x^2 + 48 = 0$ b $-5x^2 - 150 = 0$ c $8x^2 + 2 = 0$

كراسة التمارين

في التمارين (5–9)، أوجد مجموعة حل كلّ من المعادلات التالية:

(5) $16x^2 + 64 = 0$

مثال 4

أوجد مجموعة حل المعادلة: $4z^2 + 16z + 25 = 0$ في $\mathbb{C}$.

حاول أن تحل 4

أوجد مجموعة حل المعادلة: $z^2 - 2z + 2 = 0$ في $\mathbb{C}$.

كراسة التمارين

في التمارين (5–9)، أوجد مجموعة حل كلّ من المعادلات التالية:

(6) $x^2 - 5x + 7 = 0$

(7) $x^2 + 6x + 25 = 0$

(8) $z^2 - 2z + 4 = 0$

(9) $z + \frac{4}{z} = 2$

إذا كان z جذر لمعادلة تربيعية معاملاتها حقيقية فإن $\overline{z}$ هو جذر آخر لها بشرط أن الجزء التخيلي لا يساوي الصفر

الجذر التربيعي لعدد مركب

إذا كان z جذر تربيعي للعدد المركب فإن $-z$ الجذر الآخر.

لإيجاد جذر تربيعي لعدد مركب z نبحث عن عدد w يكون مربعه يساوي z.

ليكن $z = a + bi$

ابحث عن $w = m + ni$، بحيث يكون $w^2 = z$

مثال 6 أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 3 + 4i$

حاول أن تحل 6 أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = -3 - 4i$

مثال 7

أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 7 - 24i$.

حاول أن تحل 7

أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 5 + 12i$.

مثال 8

أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = -21 - 20i$.

حاول أن تحل 8

أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 7 + 24i$

كراسة التمارين

(11) أوجد الجذرين التربيعيّين للعدد المركب: $z = -3 + 4i$

(12) أوجد الجذرين التربيعيّين للعدد المركب: $z = 5 + 12i$

(13) أوجد الجذرين التربيعيّين للعدد المركب: $z = -7 - 24i$

تمارين موضوعية

في التمارين (1–6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) حل المعادلة: $\overline{z}+2=5-i$ هو: $z=3+i$ — (a) (b)

(2) حل المعادلة: $2z+\overline{z}-3-5i=0$ هو: $z=1-5i$ — (a) (b)

(3) مجموعة حل المعادلة: $z^2-4z+5=0$ هي: $\{-2-i, 2+i\}$ — (a) (b)

(4) الجذران التربيعيان للعدد -1 هما: $-1, 1$ — (a) (b)

(5) الجذران التربيعيان للعدد المركب: $z=16+30i$ هما: $z_1=5+3i,\ z_2=-5-3i$ — (a) (b)

(6) إذا كان z_1, z_2 جذران تربيعيان للعدد z فإن $z_1+z_2=0$ — (a) (b)

في التمارين (7–10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) حل المعادلة: $2z-5+6i=-3\overline{z}$ هو:

(a) $z=1+6i$ (b) $z=-1+6i$ (c) $z=1-6i$ (d) $z=-1-6i$

(8) مجموعة حل المعادلة: $z^2-4z+20=0$ هي:

(a) $\{2-4i, -2-4i\}$ (b) $\{-2+4i, -2-4i\}$

(c) $\{2-4i, -2+4i\}$ (d) $\{2-4i, 2+4i\}$

(9) الجذران التربيعيان للعدد المركب: $z=33-56i$ هما:

(a) $\begin{cases} z_1=-7-4i \\ z_2=7+4i \end{cases}$ (b) $\begin{cases} z_1=7-4i \\ z_2=-7+4i \end{cases}$

(c) $\begin{cases} z_1=7+4i \\ z_2=7-4i \end{cases}$ (d) $\begin{cases} z_1=-7-4i \\ z_2=-7+4i \end{cases}$

(10) حل المعادلة $(3-4i)z=5-2i$ هو:

(a) $\frac{5}{3}+\frac{1}{2}i$ (b) $\frac{5}{3}-\frac{1}{2}i$ (c) $\frac{23}{25}+\frac{14}{25}i$ (d) $\frac{23}{25}-\frac{14}{25}i$

التمثيل البياني للدوال المثلثية (الجيب , جيب التمام , الظل)

الدوال الجيبية

تسمّى الدالة على الصورة $y = a\sin bx$ **دالة الجيب** والدالة على الصورة $y = a\cos bx$ **دالة جيب التمام** حيث $b \neq 0$, $a \neq 0$ وهما دالتان جيبيتان وكل منهما دورية.

1. تسمى $|a|$ سعة الدالة الجيبية.
2. $|b|$ تمثل عدد الدورات في الفترة $[0 , 2\pi]$
3. $\frac{2\pi}{|b|}$ تمثل دورة الدالة.

مثال 1 أوجد الدورة والسعة لكل دالة مما يلي:

a) $y = 2\cos x$

....

....

....

....

b) $y = -5\cos\frac{x}{3}$

....

....

....

....

حاول أن تحل 1 أوجد الدورة والسعة لكل دالة مما يلي:

a $y = -2\cos 5x$

b $y = \frac{1}{2}\cos(-x)$

مثال 2 اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a\sin bx$ إذا كانت:

a الدورة هي $\frac{\pi}{2}$ ، $a = 3$

b الدورة هي 2π ، $a = -\frac{1}{2}$

c الدورة هي 3 ، $a = 1.5$

حاول أن تحل 2

اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a\cos bx$ إذا كانت:

a الدورة هي $\frac{\pi}{3}$ ، $a = -2$

b الدورة هي π ، $a = 0.25$

c الدورة هي 2 ، $a = 1$

كراسة التمارين

(1) حدّد دورة كل دالة مما يلي وسعتها:

(a) $y = 3\cos x$

(b) $y = \sin 2x$

(c) $y = 3\sin\frac{x}{3}$

(d) $y = \frac{1}{3}\cos\frac{x}{2}$

(2) اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a\sin(bx)$ في كل من الحالات التالية:

(a) الدورة $\frac{2\pi}{3}$, $a = 1$

(b) الدورة π , $a = \frac{1}{3}$

(c) الدورة 4π , $a = -4$

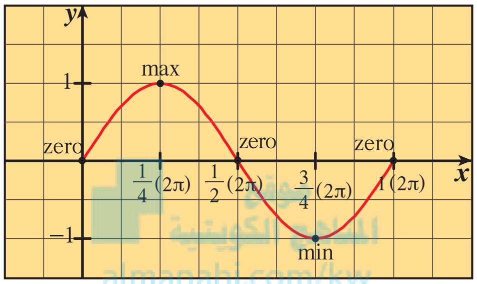
التمثيل البياني للدوال الجيبية

أولاً : دالة الجيب

$y = \sin x$ هي دالة مثلثية مجالها $\mathbb{R}$ ومداها $[-1,1]$، وهي دالة دورية ذات دورة 2π وسعتها تساوي واحد.

للحصول على التمثيل البياني لِـ $y = \sin x$ في دورة واحدة، تقسم الدورة الواحدة إلى أرباع، ثم نكوّن الجدول في الفترة $[0, 2\pi]$ كالتالي:

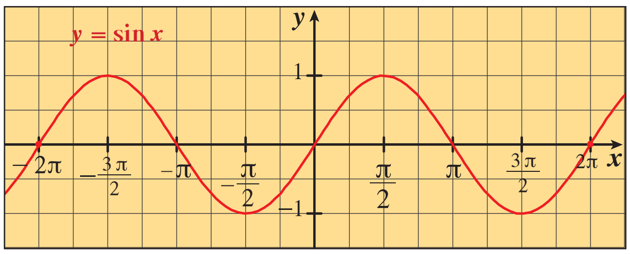
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0



وحيث إنها دالة دورية، دورتها 2π فإنها تكرر قيمها ومن ذلك يمكن رسم بيان الدالة: $f(x) = \sin x \ , \ x \in \mathbb{R}$

يمكنك التحقق باستخدام آلة حاسبة.

من بيان دالة الجيب نلاحظ:



1. لأي عدد صحيح n فإن $\sin(n\pi) = 0$
2. لأي عدد صحيح n فإن للدالة $f(x) = \sin x$ قيمة عظمى تساوي (1) عند $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ وقيمة صغرى تساوي (-1) عند $x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$
3. دالة الجيب دالة فردية لأنّ: $\sin(-x) = -\sin x \, , \forall x \in \mathbb{R}$
4. منحنى الدالة متناظر حول نقطة الأصل.
5. سعة الدالة هي: $\frac{\max f - \min f}{2}$

مثال 3

أوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها:

a $y = 3\sin 2x$

السعة

الدورة

ربع الدورة

b $y = -2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$, $-4\pi \le x \le 4\pi$

السعة

الدورة

ربع الدورة

حاول أن تحل 3

أوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها:

a $y = \frac{1}{2} \sin 4x$

السعة

الدورة

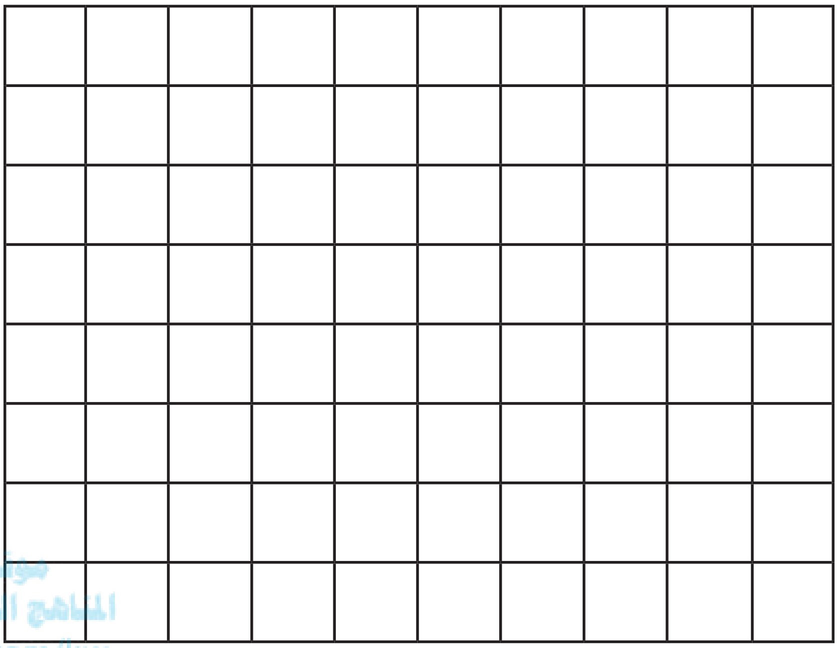
ربع الدورة

b $y = -4 \sin x \ , \ x \in [-\pi \ , \ 2\pi]$

السعة

الدورة

ربع الدورة

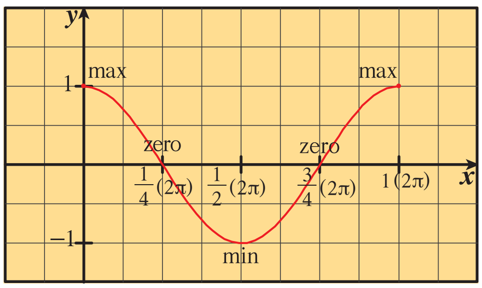


ثانياً : دالة جيب التمام

$y = \cos x$ هي دالة مثلثية مجالها هو أيضًا $\mathbb{R}$ ومداها هو $[-1,1]$، وهي دالة دورية ذات دورة 2π وسعتها تساوي واحد.
ونستطيع الحصول على التمثيل البياني للدالة $y = \cos x$ على مجالها عن طريق رسمها على الفترة $[0, 2\pi]$ تمامًا مثلما فعلنا في دالة الجيب.

وتكرر نفسها ونحصل على البيان التالي:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1



يمكنك التحقق باستخدام الآلة الحاسبة.

من بيان دالة جيب التمام نلاحظ أن:

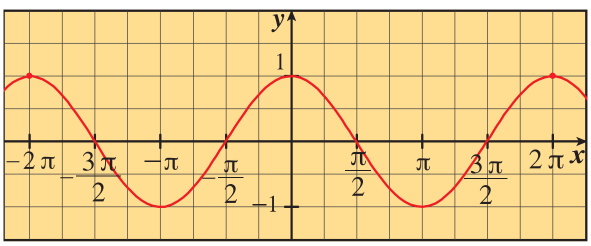
1 لأي عدد صحيح n فإن $\cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = 0$

2 لأي عدد صحيح n فإن للدالة $f(x) = \cos x$ قيمة عظمى تساوي (1) عند $x = 2n\pi$ وقيمة صغرى تساوي (-1) عند $x = \pi + 2n\pi$

3 دالة جيب التمام دالة زوجية لأن: $\cos(-x) = \cos x \quad , \forall x \in \mathbb{R}$

4 محور الصادات هو خط تناظر لمنحنى الدالة.

5 سعة الدالة هي: $\frac{\max f - \min f}{2}$



مثال 4

أوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها:

a $y = 2\cos 4x$

السعة

الدورة

ربع الدورة

b $y = -5\cos\left(\frac{2}{3}x\right)\ ,\ x \in [-3\pi\ ,\ 3\pi]$

السعة

الدورة

ربع الدورة

حاول أن تحل 4 أوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها:

a $y = 3\cos 2x$

السعة

الدورة

ربع الدورة

b $y = -2\cos\left(\frac{3}{4}x\right)\ ,\ 0 \leq x \leq 2\pi$

السعة

الدورة

ربع الدورة

ثالثاً : دالة الظل

هي الدالة المثلثية على الصورة $y = \tan x$ وتكتب:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \;:\; \cos x \neq 0$$

مجالها: $D = \mathbb{R} - \left\{x : x = \frac{\pi}{2} + n\pi \;,\; n \in \mathbb{Z}\right\}$

ومداها: $\mathbb{R}$

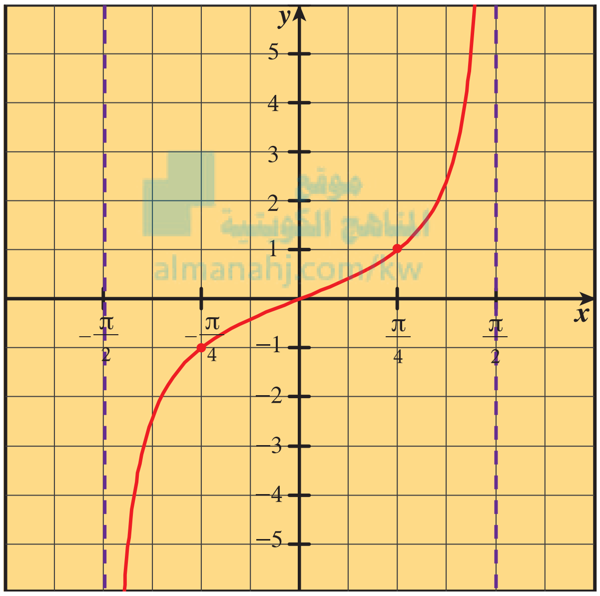
وهي دالة دورية ذات دورة π

وللحصول على التمثيل البياني لـ: $y = \tan x$

في دورة واحدة $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

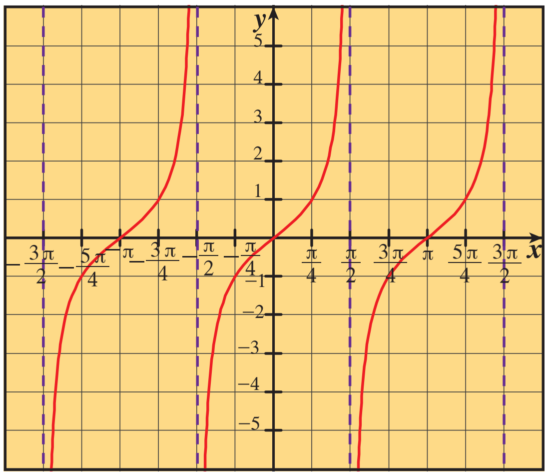
نقسم الدورة إلى أرباع كما هو في الجدول التالي:

x	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	غير معرف	-1	0	1	غير معرف



وحيث إنها دالة دورية دورتها π فإنها تكرر قيمتها.

ومن ذلك يمكننا رسم الدالة $y = \tan x$ على مجالها.



من بيان دالة الظل نلاحظ أن دالة الظل:

1. ليس لها سعة.
2. لأي عدد صحيح n فإن $\tan(n\pi) = 0$
3. لأي عدد صحيح n فإن $\tan\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$ غير معرف.
   وتسمى المستقيمات $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ محاذيات رأسية لبيان الدالة $y = \tan x$
4. دالة فردية لأن: $\tan(-x) = -\tan x \;,\; \forall x \in D$
5. منحناها متناظر حول نقطة الأصل.

وبصفة عامة: الدالة $y = a\tan bx$،

دورتها: $\frac{\pi}{|b|}$ أي في الفترة $\left(\frac{-\pi}{2b} \;,\; \frac{\pi}{2b}\right)$ وتكرر منحناها على مجالها.

مثال 5 أوجد الدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها.

a $y = \tan 2x \;,\; x \in \left(\frac{-\pi}{4} \;,\; \frac{3\pi}{4}\right)$

الدورة

ربع الدورة

b $y = 2\tan\left(\frac{1}{2}x\right)$

الدورة

ربع الدورة

حاول أن تحل 5 أوجد الدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها:

a $y = -\tan x$

الدورة

ربع الدورة

b $y = \frac{1}{2}\tan x$

الدورة

ربع الدورة

خصائص الدوال المثلثية باعتبار $n \in Z$

الخاصية	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
الدورة	2π	2π	π
المجال	$(-\infty\ ,\ \infty)$	$(-\infty\ ,\ \infty)$	$\mathbb{R}-\left\{x, x=\frac{\pi}{2}+n\pi\right\}$
المدى	$[-1\ ,\ 1]$	$[-1\ ,\ 1]$	$(-\infty\ ,\ \infty)$
الأصفار	$x = n\pi$	$x=\frac{\pi}{2}+n\pi$	$x = n\pi$
زوجية أو فردية	فردية	زوجية	فردية

بنود موضوعية

في التمارين (1—7)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) معادلة الدالة المثلثية $y = a\sin(b\theta)$ حيث السعة 5 والدورة 3π هي $y = 5\sin\left(\frac{2}{3}\theta\right)$ — (a) (b)

(2) الدالة التي دورتها $\frac{\pi}{2}$ وسعتها 3 يمكن أن تكون $y = 3\sin\left(\frac{\pi\theta}{2}\right)$ — (a) (b)

(3) الدال $y = 3\tan\left(\frac{3}{4}x\right)$ دورتها $\frac{4}{3}\pi$ — (a) (b)

(4) الدالة التي دورتها $\frac{\pi}{3}$ وسعتها 4 يمكن أن تكون $y = -4\cos(6x)$ — (a) (b)

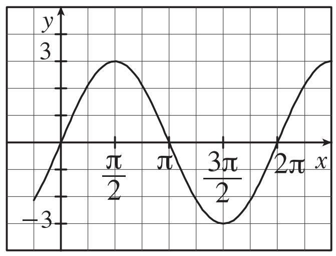
(5) سعة الدالة $y = -5\cos 2x$ هي -5 — (a) (b)

(6) في الدالة f حيث $f(x) = a\cos bx$ يكون: $2|a| = \max f + \min f$ — (a) (b)

(7) الدالتان f, g حيث $g(x) = \tan 4x$ ، $f(x) = \cos 8x$ لهما نفس الدورة. — (a) (b)

في التمارين (8—17)، ظلّل رمز الدائرة الدالّ على الإجابة الصحيحة.

(8) البيان التالي يمثل بيان الدالة:



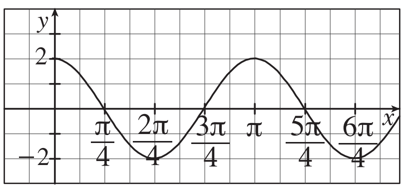
(a) $f(x) = 3\cos x$ (b) $f(x) = 3\sin x$

(c) $f(x) = -3\sin x$ (d) $f(x) = \sin 3x$

(9) لتكن $f(x) = 3\tan 2x$ فإن:

(a) السعة $= 1$ (b) السعة $= 2$ (c) السعة $= 3$ (d) f ليس لها سعة

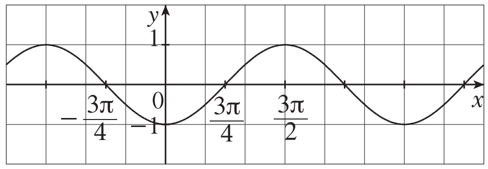
(10) ليكن بيان f كما في الشكل التالي:



فإن f يمكن أن تكون:

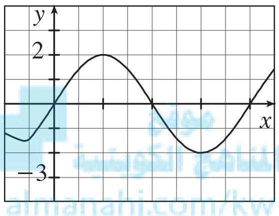
(a) $2\cos 2x$ (b) $\cos 2x$ (c) $\cos \frac{x}{2}$ (d) $\sin 2x$

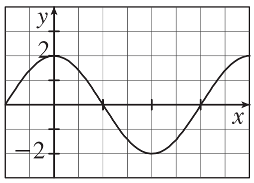
(11) ليكن g دالة دورية بيانها كما في الشكل التالي فإن الدورة تساوي:

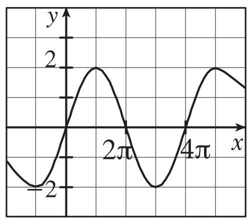


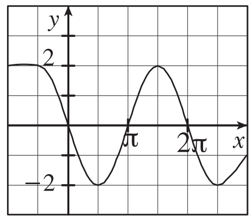
a π **b** 2π **c** 3π **d** $\frac{6\pi}{4}$

(12) لتكن الدالة g حيث: $g(x) = a \sin bx$ فإن بيان g لا يمكن أن يكون:

a


b


c


d


(13) معادلة الدالة المثلثية $y = a\cos(bx)$ حيث السعة 4 والدورة 6 يمكن أن تكون:

a $y = \frac{1}{4}\cos\left(\frac{x}{3}\right)$ **b** $y = -4\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$

c $y = -4\cos\left(\frac{3}{\pi}x\right)$ **d** $y = 4\cos\left(\frac{x}{3}\right)$

(14) الدالة $y = a\cos(bx)$ حيث $a = 2$ ودورتها $\frac{\pi}{4}$ يمكن أن تكون:

a $y = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ **b** $y = 8\cos(8x)$

c $y = 2\cos(8x)$ **d** $y = 8\cos\left(\frac{x}{4}\right)$

(15) معادلة الدالة المثلثية $y = a\sin(bx)$ حيث السعة 3 والدورة $\frac{\pi}{2}$ يمكن أن تكون:

a $y = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ أو $y = -3\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ **b** $y = 3\sin\left(\frac{2}{\pi}x\right)$ أو $y = -3\sin\left(\frac{2}{\pi}x\right)$

c $y = 3\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ أو $y = -3\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ **d** $y = 3\sin(4x)$ أو $y = -3\sin(4x)$

(16) معادلة الدالة المثلثية $y = \tan(bx)$ حيث الدورة $\frac{3}{4}$ يمكن أن تكون:

a $y = \tan\left(\frac{4}{3}\pi x\right)$ **b** $y = \tan\left(\frac{3}{4}x\right)$

c $y = \tan\left(\frac{4}{3}x\right)$ **d** $y = \tan\left(\frac{3}{4}\pi x\right)$

(17) في الدالة المثلثية $y = -2\sin\left(\frac{3}{5}x\right)$ السعة والدورة هما:

a $-2\ ,\ \frac{3\pi}{5}$ **b** $2\ ,\ \frac{10\pi}{3}$

c $2\ ,\ \frac{3\pi}{5}$ **d** $2\ ,\ \frac{2\pi}{15}$

قانون الجيب

في أي مثلث ABC: فإن

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$$

ملاحظات

١) يستخدم قانون الجيب عند وجود زاوية وضلع متقابلين معلومين.

٢) إذا علمنا زاويتين في مثلث يمكن دائماً حساب الزاوية الثالثة من قانون مجموع زوايا المثلث ١٨٠°

٣) إذا علمنا ضلعين وزاوية مقابلة لأحدهما في مثلث فإن الزاوية الثانية يمكن أن تكون حادة أو منفرجة وتكون الزاوية المنفرجة مقبولة إذا كان مجموع الزاويتين أقل من $180°$.

مثال ١

حل ΔABC حيث: $\alpha=40°$, $\beta=60°$, $a=4\,\text{cm}$

....

....

....

....

....

....

....

....

حاول أن تحل ١

حل ΔABC حيث: $\alpha=36°$, $\beta=48°$, $a=8\,\text{cm}$

....

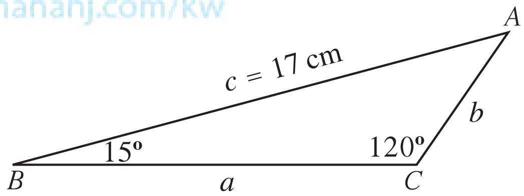
....

....

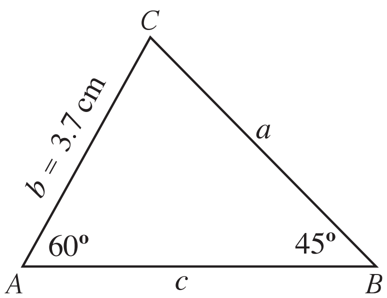
كراسة التمارين

(2–1)، حلّ كلًّا من المثلثين التاليين:

(1)



(2)



مثال 2

حل ΔABC حيث: $\alpha = 40^{\circ}$, $b = 2\text{ cm}$, $a = 3\text{ cm}$

حاول أن تحل 2

حل ΔABC حيث: $\alpha = 26.3^{\circ}$, $b = 6\text{ cm}$, $a = 7\text{ cm}$

مثال 3

حل ΔABC حيث: $a = 5\text{ cm}\ ,\ b = 8\text{ cm}\ ,\ \alpha = 30^{\circ}$

حاول أن تحل 3

حل ΔABC حيث: $a = 6\text{ cm}\ ,\ b = 7\text{ cm}\ ,\ \alpha = 45^{\circ}$

كراسة التمارين

في التمرينين (3–4)، حلّ المثلث ABC:

(3) $m(\widehat{A}) = 32^{o}\,, a = 17\,\text{cm}\,, b = 11\,\text{cm}$

(4) $m(\widehat{A}) = 43^{o}\,, a = 32\,\text{cm}\,, b = 28\,\text{cm}$

بنود موضوعية

في التمارين (1–3)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) في المثلث ABC: $m(\widehat{A}) = 100^\circ$, $m(\widehat{B}) = 30^\circ$, $BC = 20\text{ cm}$ فإنّ: $AC = 10.154\text{ cm}$ (a) (b)

(2) في المثلث ABC: $m(\widehat{B}) = 80^\circ$, $AB = 12\text{ cm}$, $AC = 16\text{ cm}$ فإنّ: $m(\widehat{C}) = 50^\circ$ (a) (b)

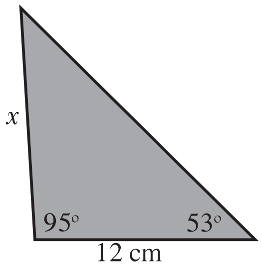
(3) في كل مثلث ABC يكون: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{\sin\gamma}{c}$ (a) (b)

في التمارين (4–9)، ظلّل رمز الدائرة الدالّ على الإجابة الصحيحة.

(4) في المثلث ABC: $m(\widehat{A}) = 80^\circ$, $m(\widehat{B}) = 40^\circ$, $AC = 10\text{ cm}$ فإنّ طولي $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ يساويان:

(a) 7.43 cm , 15.32 cm
(b) 6.53 cm , 13.47 cm
(c) 13.47 cm , 15.32 cm
(d) 7.43 cm , 6.53 cm

(5) في المثلث المقابل، x تساوي حوالى:



(a) 8.6 cm
(b) 15 cm
(c) 18.1 cm
(d) 19.2 cm

(6) مثلث قياسات زواياه: $70^\circ, 60^\circ, 50^\circ$، طول أصغر ضلع فيه هو 9 cm
طول أطول ضلع حوالى:

(a) 11 cm
(b) 11.5 cm
(c) 12 cm
(d) 12.5 cm

(7) القياسات المعطاة في المثلث ABC: $m(\widehat{A}) = 56^\circ$, $AC = 23\text{ cm}$, $AB = 19\text{ cm}$، طول $\overline{BC}$ يساوي:

(a) 12 cm
(b) 18 cm
(c) 19 cm
(d) لا يمكن استخدام قانون الجيب