السيد فخرى

الملف دفتر متابعة يشمل الهندسة التحليلية والمصفوفات والدوال المثلثية والاحتمالات
موقع المناهج ⇦ ملفات الكويت التعليمية ⇦ الصف العاشر ⇦ رياضيات ⇦ الفصل الثاني

وزارة التربية

منطقة الجهراء التعليمية

دفتر متابعة

مادة الرياضيات

للصف العاشر

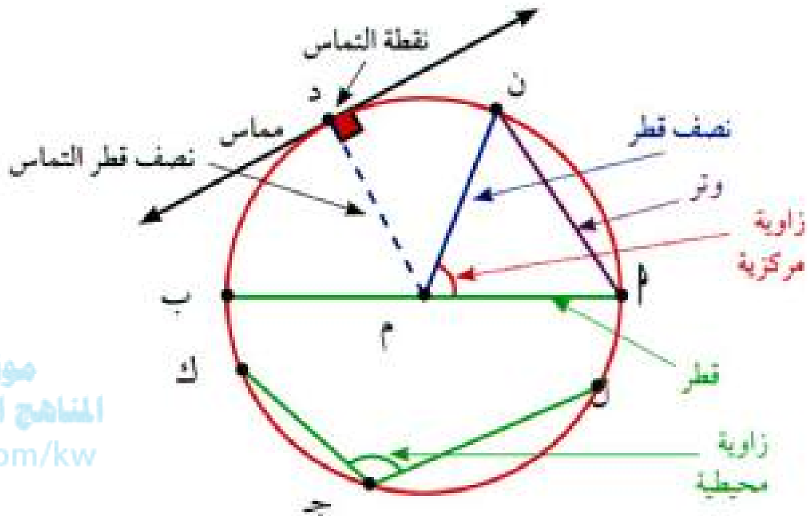
الفصل الدراسي الثانى

اعداد أ / السيد فخرى

اسم الطالب :

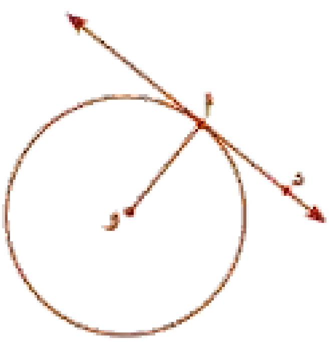
الصف :

٦ – ١ (أ) الدائرة



نظرية (١) كل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة واحدة.

مماس الدائرة



المماس للدائرة هو مستقيم في المستوي يتقاطع مع الدائرة في نقطة واحدة.

نقطة التقاطع تسمى نقطة التماس.

$\overleftrightarrow{\text{أد}}$ مماس.

$\overrightarrow{\text{أد}}$ شعاع مماس.

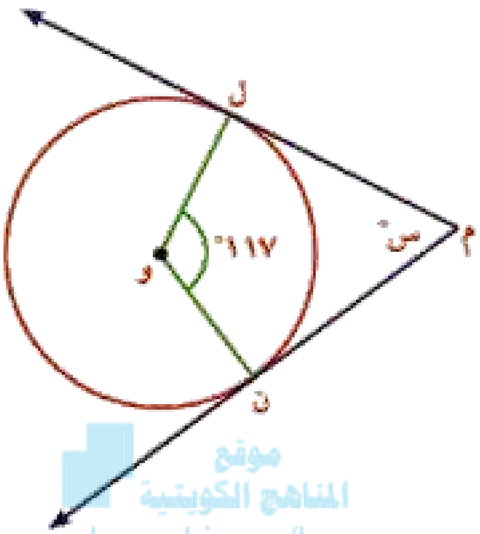
$\overline{\text{أد}}$ قطعة مماسية

$\overline{\text{أو}}$ نصف قطر التماس

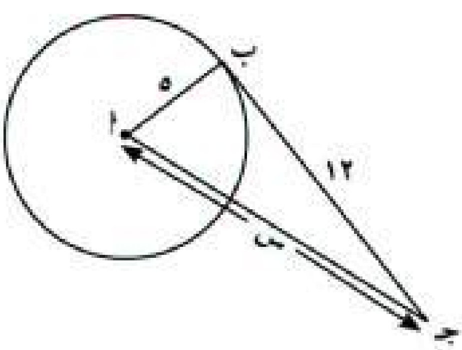
نظرية (٢)   المماس عمودي على نصف قطر التماس.

في الشكل المقابل $\overleftrightarrow{\text{مل}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{من}}$ مماسان للدائرة التي مركزها و.

أوجد قياس الزاوية ل م̂ ن.

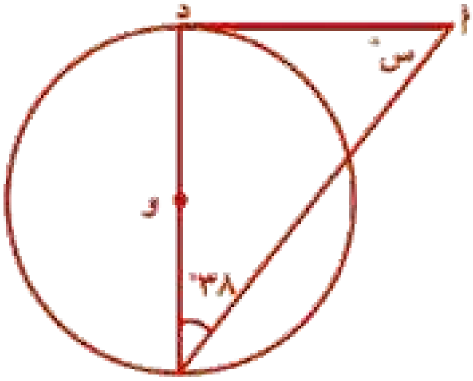


$\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ مماس للدائرة. أوجد قيمة س.



في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{\text{أد}}$ مماس للدائرة التي مركزها و.

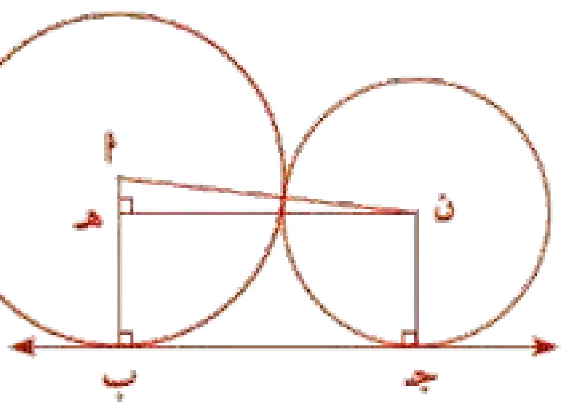
أوجد قيمة س°.



يمثل الشكل المقابل مقطعًا لأسطوانتين في معمل الورق.

أوجد طول $\overline{\text{ب جـ}}$ إذا كانت الدائرتان متماستين

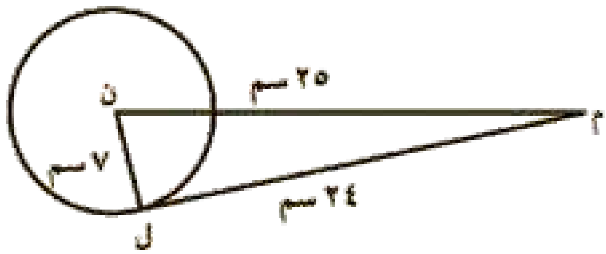
وطول نصف قطريهما ٥٠ سم، ٤٠ سم على الترتيب.



نظرية (٣) المستقيم العمودي على نصف قطر دائرة عند نهايته التي تنتمي إلى الدائرة يكون مماسًا لهذه الدائرة عند هذه النقطة.

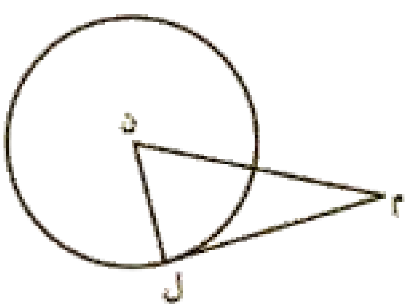
في الشكل المقابل، ن ل = ٧ سم ، ل م = ٢٤ سم ، ن م = ٢٥ سم.

أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ مماس للدائرة التي مركزها ن.



في الشكل المقابل، إذا كان ن ل = ٤ ، ل م = ٧ ، ن م = ٨،

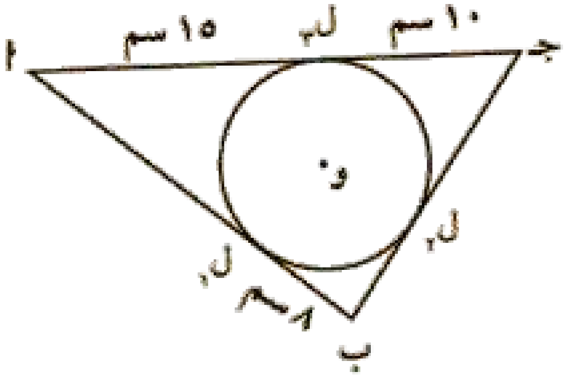
فهل $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ مماس للدائرة؟ فسّر إجابتك.



نظرية (٤)

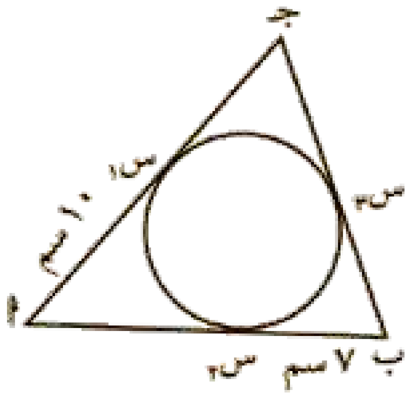
القطعتان المماستان لدائرة والمرسومتان من نقطة خارجها متطابقتان.

في الشكل المقابل، أوجد محيط المثلث أب جـ.

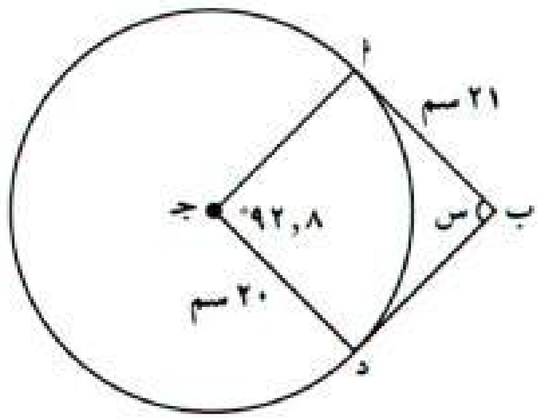


في الشكل المقابل إذا كان محيط المثلث أ ب جـ = ٥٠ سم،

فأوجد طول $\overline{\text{ب جـ}}$.



$\overleftrightarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب د}}$ مماسان للدائرة.

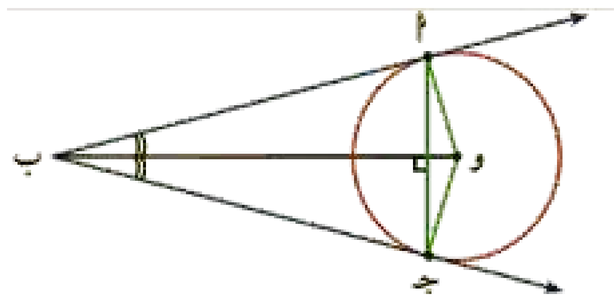


(أ) أوجد قيمة س.

(ب) أوجد محيط الشكل الرباعي ب أ جـ د.

(جـ) أوجد ب جـ.

نتائج النظرية

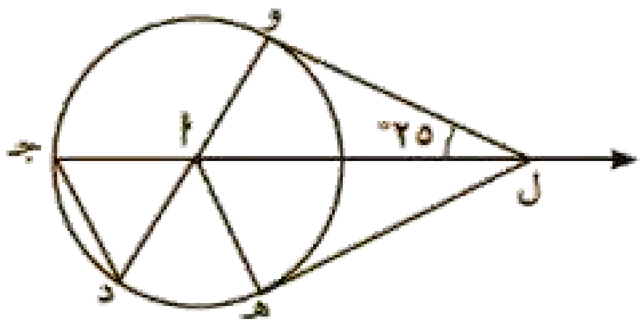


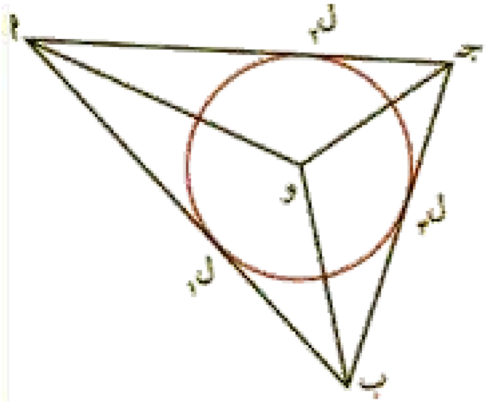
Δب أجـ متطابق الضلعين من النظرية السابقة.

1. $\overleftarrow{\text{ب و}}$ منصف الزاوية أ$\hat{\text{ب}}$جـ
2. $\overleftarrow{\text{و ب}}$ منصف الزاوية أ$\hat{\text{و}}$جـ
3. $\overline{\text{و ب}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$

في الشكل المقابل، أوجد ق(أ$\hat{\text{د}}$جـ)، ق(هـ$\hat{\text{أ}}$د)

إذا كانت $\overline{\text{ل و}}$ ، $\overline{\text{ل هـ}}$ تمسان الدائرة حيث $\overline{\text{و د}}$ قطر للدائرة.





الدائرة المحاطة بمثلث (الداخلة)

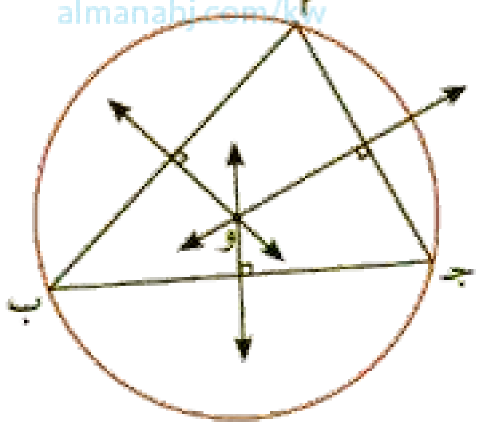
هي دائرة مماسة لأضلاع المثلث الثلاثة من الداخل.

مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي منصفات الزوايا الداخلية للمثلث

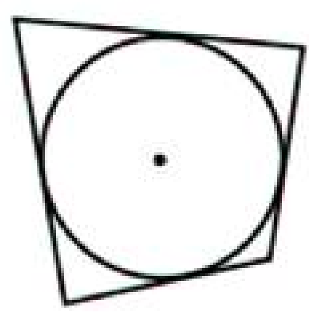
الدائرة المحيطة لمثلث (الخارجة)

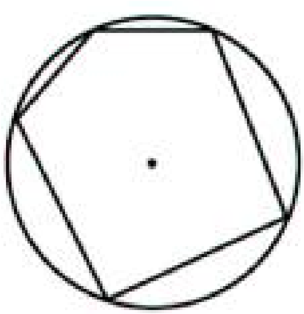
هي دائرة تمر برؤوس المثلث الثلاثة.

مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي المحاور الثلاثة لأضلاع المثلث (نقطة تلاقي المنصفات العمودية لأضلاع المثلث).



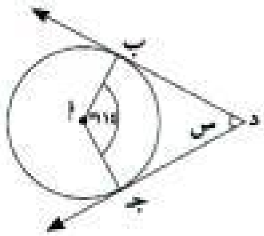
حدّد ما إذا كانت الدائرة محاطة بمضلع (داخلة) أو محيطة بمضلع (خارجة).





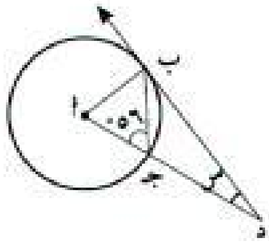
في التمارين (٨–١١)، اختر الإجابة الصحيحة:

(٨) إذا كان دب، دجـ مماسان للدائرة. فإن س =



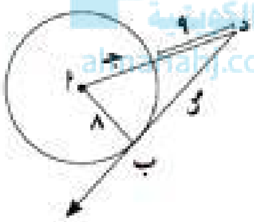
(أ) ٢٦° (ب) ٥٧° (ج) ٦٦° (د) ١١٤°

(٩) إذا كان دب مماس للدائرة. فإن س =



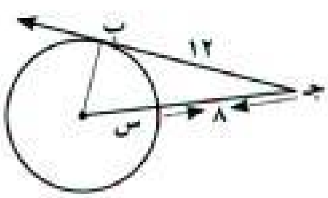
(أ) ٢٢° (ب) ٢٨° (ج) ٣٤° (د) ٤٠°

(١٠) إذا كان دب مماس للدائرة. فإن س =



(أ) ٨ (ب) ٩ (ج) ١٥ (د) ١٧

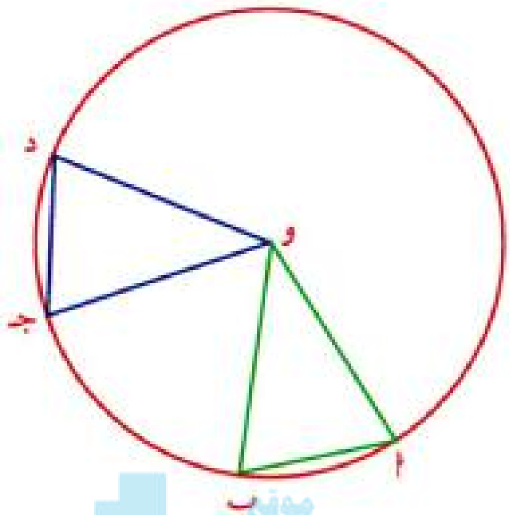
(١١) إذا كان جـب مماس للدائرة. فإن س =



(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٥

٦ – ٢ الأوتار والأقواس

نظرية (١)



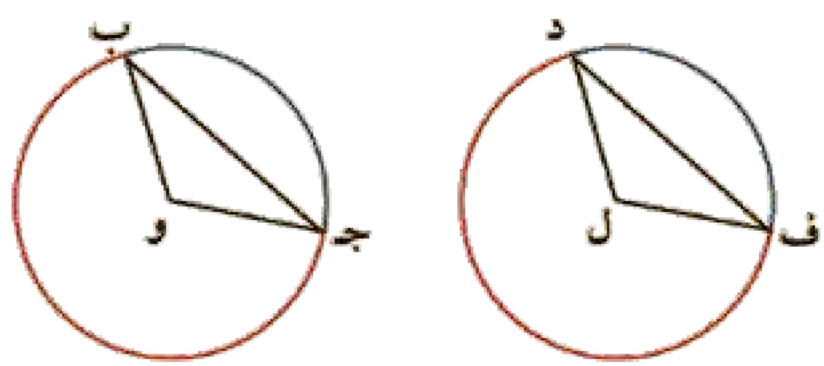
في دائرة أو في دوائر متطابقة:

١ للزوايا المركزية المتطابقة أوتار متطابقة.

٢ الأوتار المتطابقة تقابل أقواسًا متطابقة.

٣ للأقواس المتطابقة زوايا مركزية متطابقة.

في الشكل المقابل الدائرتان متطابقتان، $\overset{\frown}{\text{بجـ}} \cong \overset{\frown}{\text{دف}}$. ماذا تستنتج؟

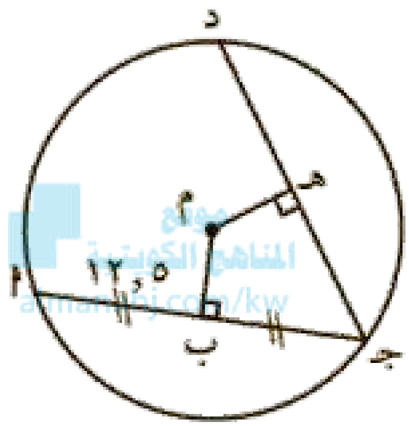


نظرية (٢)

١ الأوتار المتطابقة في دائرة على أبعاد متساوية من مركز الدائرة.

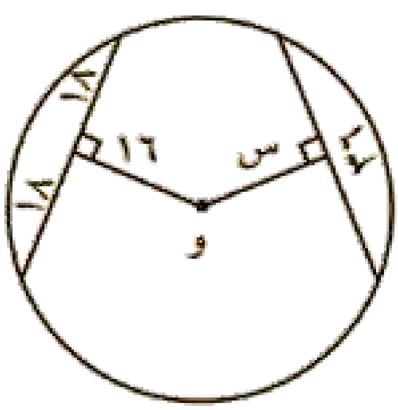
٢ الأوتار التي على أبعاد متساوية من مركز دائرة تكون متطابقة.

في الشكل المقابل ليكن م مركز الدائرة. م ب = م هـ ، أوجد طول جـ د. فسّر.



دائرة مركزها و.

أوجد قيمة س في الشكل المقابل، وفسّر إجابتك.



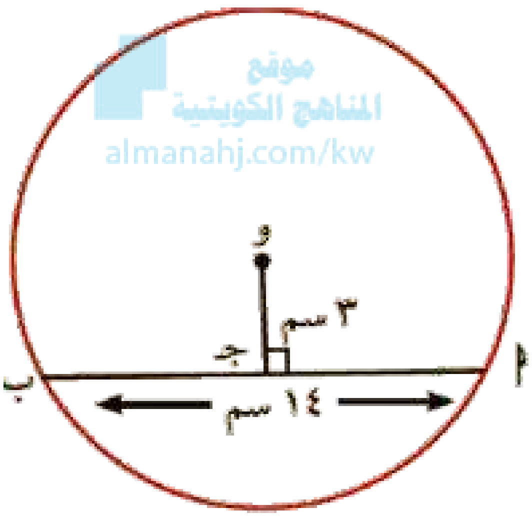
نظرية (٣)

١ القطر العمودي على وتر في دائرة ينصفه وينصف كلًّا من قوسيه.

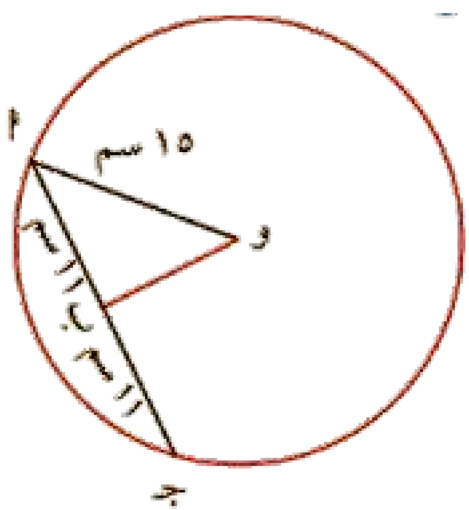
٢ القطر الذي ينصف وترًا (ليس قطرًا) في دائرة يكون عموديًا على هذا الوتر.

٣ العمود المنصف لوتر في دائرة يمر بمركز الدائرة.

في الشكل المقابل، أوجد طول نصف قطر الدائرة التي مركزها و.



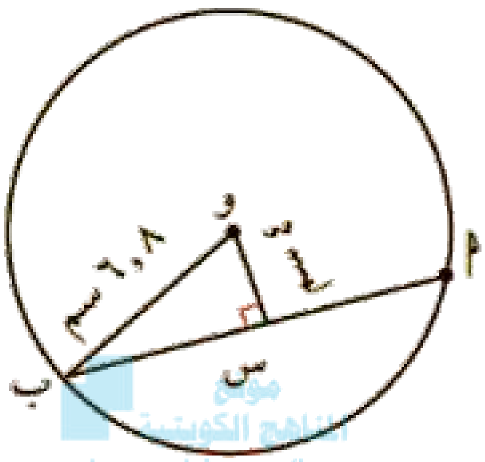
في الشكل المقابل أوجد البعد بين مركز الدائرة والوتر.



استخدم الشكل المقابل لإيجاد:

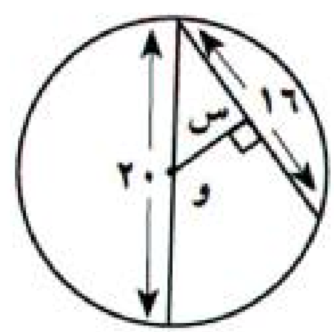
(أ) طول الوتر $\overline{\text{أب}}$.

(ب) المسافة من منتصف الوتر إلى منتصف القوس الأصغر $\overset{\frown}{\text{أب}}$.

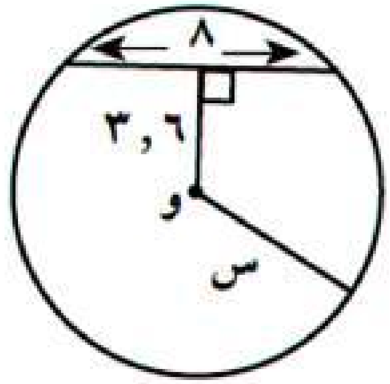


أوجد قيمة س في الأشكال التالية:

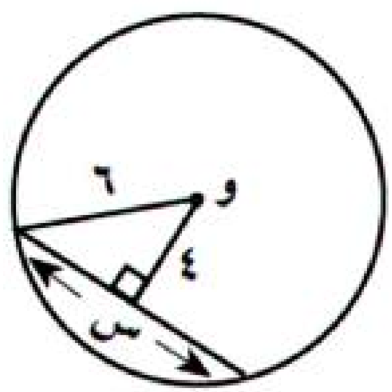
(أ)



(ب)

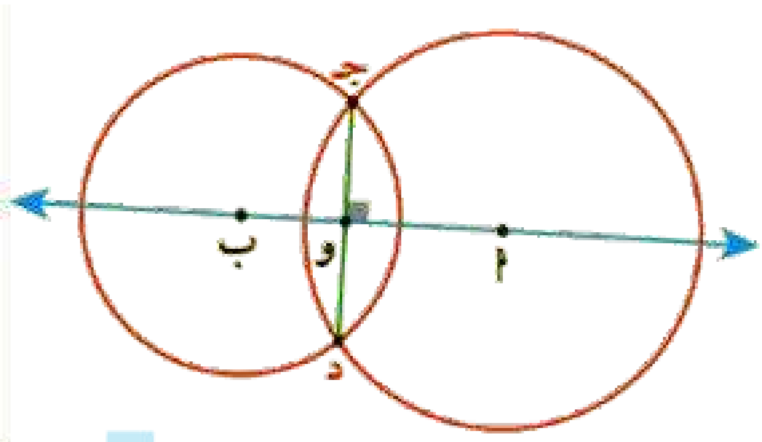


(جـ)



نتيجة

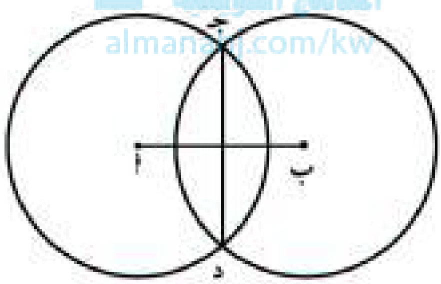
خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديًّا على الوتر المشترك بينهما وينصفه.



دائرتان مركزاهما على الترتيب أ، ب تتقاطعان بالنقطتين جـ ، د.

وطول نصف قطر كل دائرة ٦ سم.

أوجد طول جـ د إذا كان طول أب يساوي ٨ سم.



٦ ـ ٣ الزوايا المركزية والزوايا المحيطية

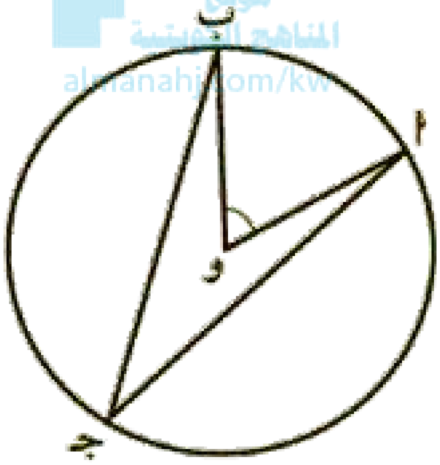
تعريف:

١ الزاوية التي رأسها مركز الدائرة وضلعاها يقطعان الدائرة تسمى بالزاوية المركزية.

٢ الزاوية التي رأسها إحدى نقاط الدائرة وضلعاها يقطعان الدائرة تسمى بالزاوية المحيطية.

نظرية (١)

قياس الزاوية المركزية يساوي قياس القوس المحصور بين ضلعيها على الدائرة.

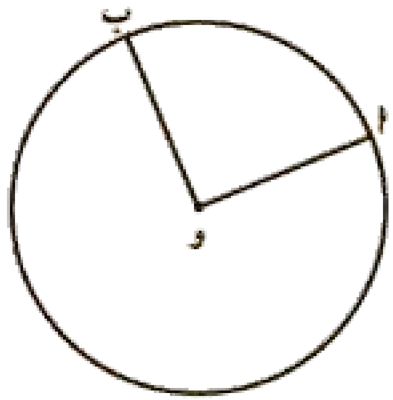


نظرية (٢)

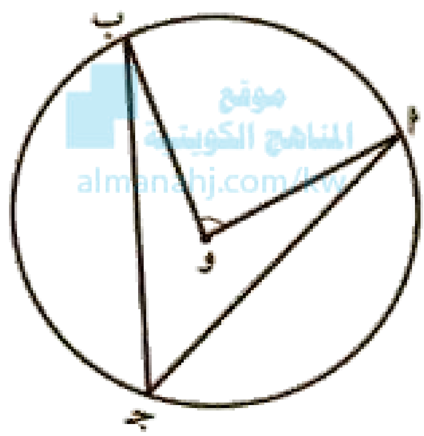
في الدائرة قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها.

قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس نفسه.

في الشكل المقابل دائرة مركزها و. إذا كان ق(⌒أب) = ٩٠°.

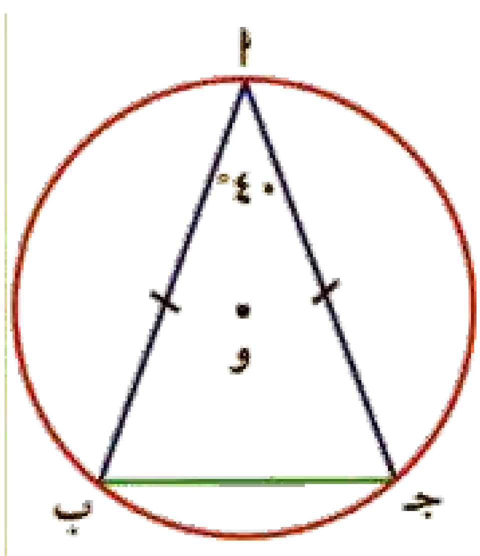


في الشكل المقابل: إذا كان ق(⌒أب) = ٨٠° فأوجد ق(أ^جب).

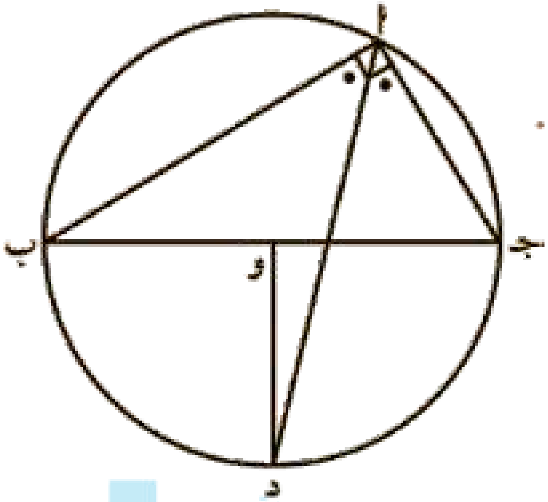


في الشكل المقابل أب ج مثلث متطابق الضلعين حيث أ، ب، ج نقاط على الدائرة التي مركزها و، ق(ب^أج) = ٤٠°.

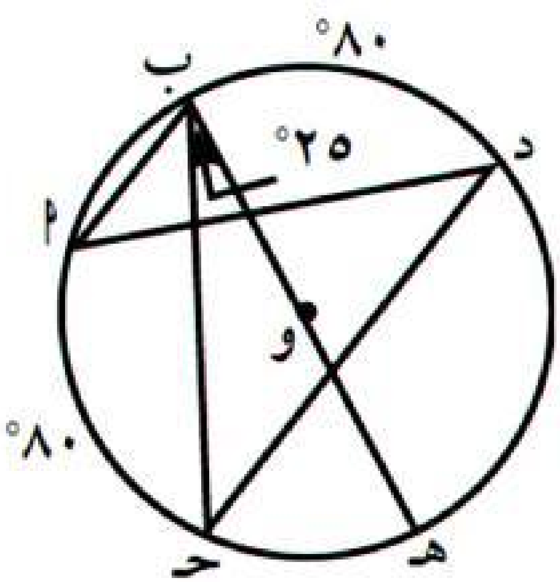
أوجد قياس كل من الأقواس ⌒أب، ⌒ب ج، ⌒أج.



في الشكل المقابل دائرة مركزها و. أثبت أن $\overline{\text{د و}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$.



أوجد قياسات الزوايا والأقواس التالية مستخدمًا الرسم المقابل:



(أ) ق(∠أ). ______________

(ب) ق(جـ هـ⌢). ______________

(جـ) ق(∠جـ). ______________

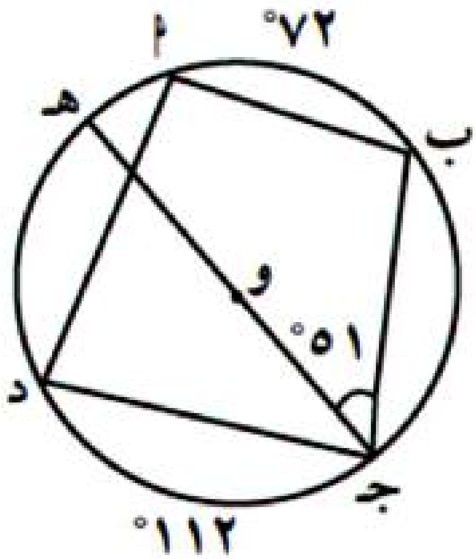
(د) ق(أ ب هـ⌢). ______________

في الشكل المقابل، أوجد قياس كل من:

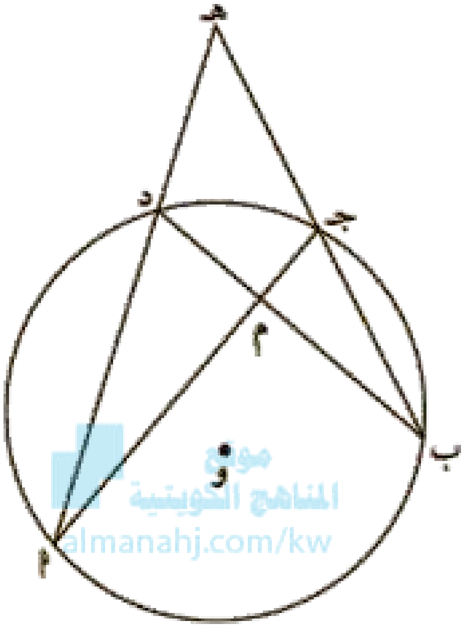
(أ) القوس الأصغر $\overset{\frown}{\text{ب ج}}$.

(ب) ق($\hat{\text{ب}}$).

(ج) ق(ب $\hat{\text{ج}}$ د).



في الشكل المقابل، أثبت أن: $\text{ق}(\widehat{\text{ب م أ}}) = \dfrac{\text{ق}(\overset{\frown}{\text{ب أ}}) + \text{ق}(\overset{\frown}{\text{جـ د}})}{\text{٢}}$.



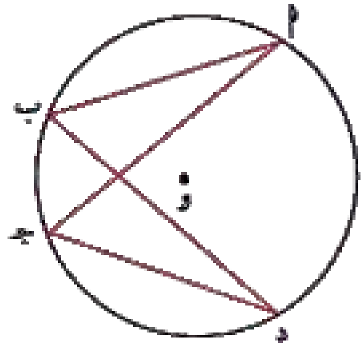
نتائج

١ كل زاويتين محيطيتين في دائرة تحصران القوس نفسه متطابقتان.

٢ كل زاوية محيطية في دائرة تحصر نصف دائرة تكون زاوية قائمة.

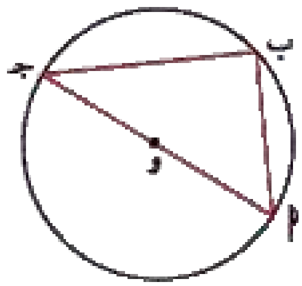
٣ كل شكل رباعي دائري (محاط بدائرة)، تكون زواياه المتقابلة متكاملة.

٤ في الشكل إذا تطابقت الزاويتان أ، د المرسومات على القاعدة ب جـ وفي جهة واحدة منها. كان الشكل أ ب جـ د رباعيًا دائريًا.



أ ب د ، أ جـ د تحصران أد

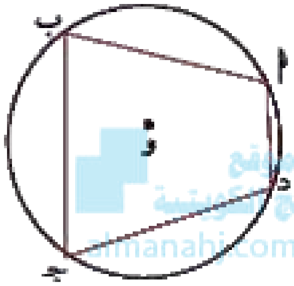
∴ ق(أ ب د) = ق(أ جـ د)



أ ب جـ تحصر أجـ (نصف دائرة)

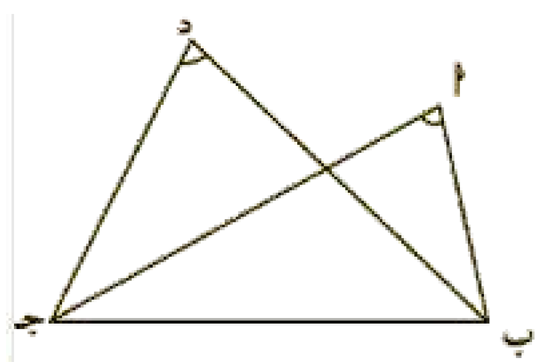
∴ ق(أ ب جـ) = ٩٠°

(أ ب جـ) زاوية محيطية مرسومة على قطر الدائرة وهي زاوية قائمة



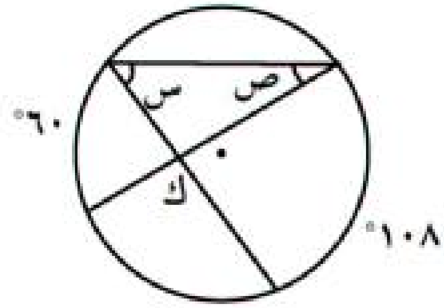
ق(أ) + ق(جـ) = ١٨٠°

ق(ب) + ق(د) = ١٨٠°

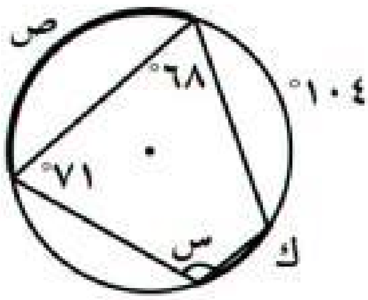


أوجد قياسات الزوايا والأقواس المجهولة في كلّ من الأشكال الهندسية التالية:

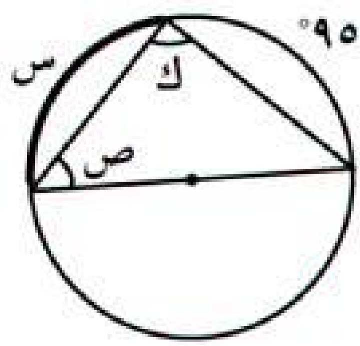
(أ)



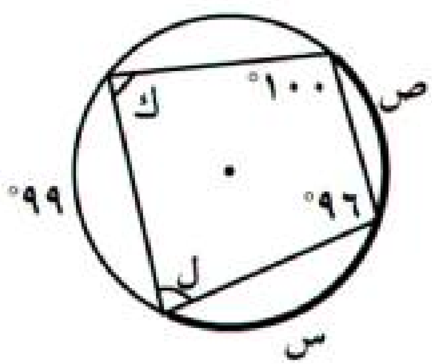
(ب)



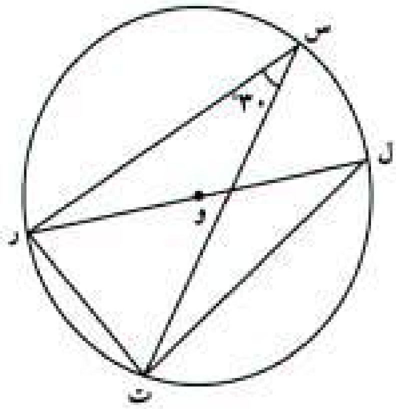
(جـ)



(د)



مستخدمًا معطيات الشكل المقابل حيث و مركز الدائرة:



(أ) ما نوع المثلث ر ل ت؟ ______________________

(ب) أوجد ق(ل ر̂ ت). ______________________

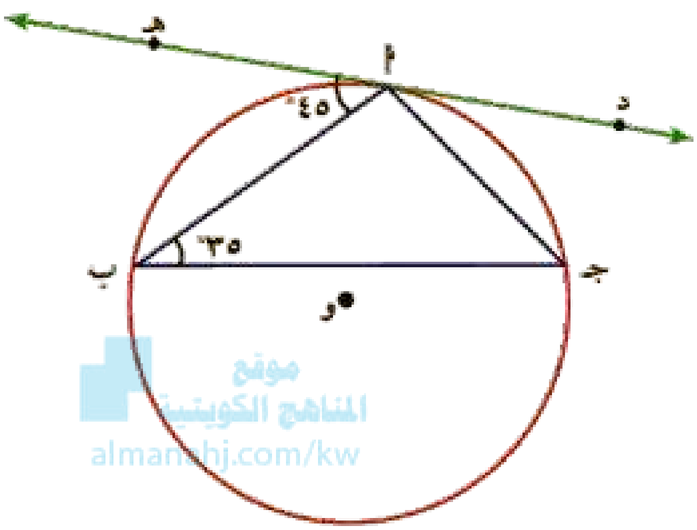
(ج) أوجد محيط Δر ل ت بدلالة ط. ______________________

نظرية (٣)

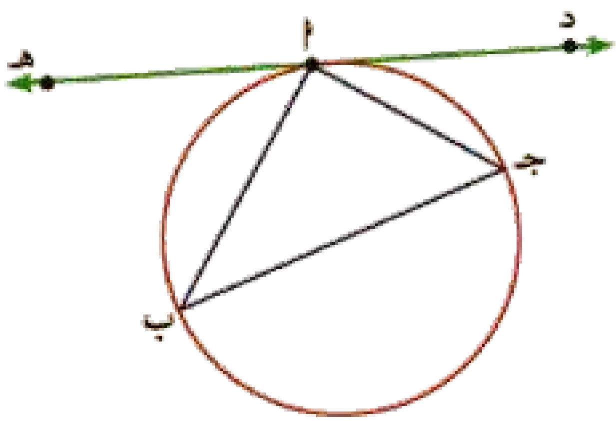
(١) قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس نفسه.

(٢) قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين المماس والوتر.

في الشكل المقابل إذا كان $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ مماسًا للدائرة عند أ ، فأوجد ق(جـ $\overset{\frown}{\text{أ}}$ ب).



في الشكل المقابل، لدينا: ق(د$\hat{أ}$جـ) = ٤٠°، ق(هـ$\hat{أ}$ب) = ٥٠°.



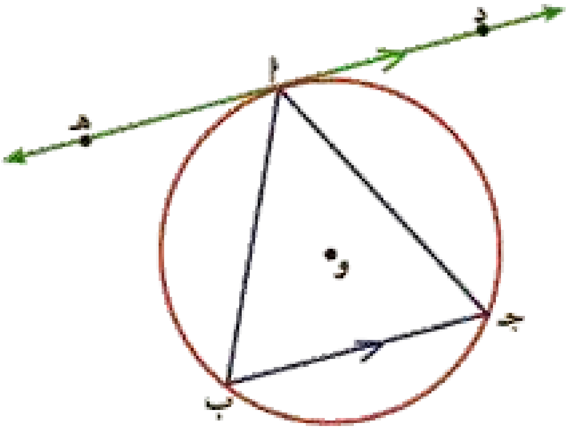
أ أوجد قياسات زوايا المثلث ا ب جـ.

ب أثبت أن $\overline{\text{جـ ب}}$ قطر للدائرة.

في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{\text{دهـ}}$ مماس للدائرة عند النقطة أ،

$\overline{\text{ب جـ}}$ وتر في الدائرة موازٍ للمماس $\overleftrightarrow{\text{دهـ}}$.

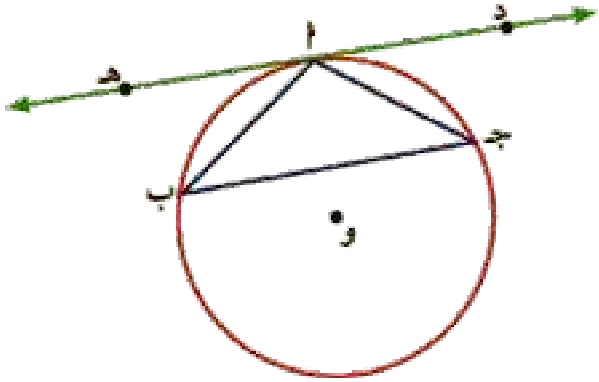
أثبت أن المثلث أ ب جـ متطابق الضلعين.



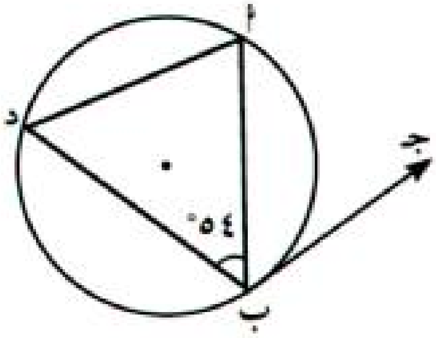
في الشكل المقابل، إذا كان لدينا $\overleftrightarrow{\text{دهـ}}$ مماس للدائرة عند النقطة أ.

المثلث أ ب جـ متطابق الضلعين (أب = أجـ).

أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{دهـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$



في الشكل المقابل، إذا كان ق($\overset{\frown}{\text{ب د}}$) = ١٤٠°، فإن ق($\text{أ}\hat{\text{ب}}\text{جـ}$) =



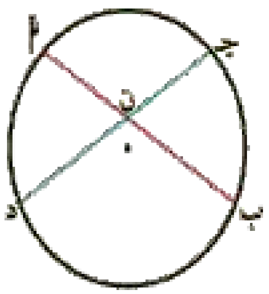
٦ – ٤ الدائرة: الأوتار المتقاطعة، المماس

تقاطع الأوتار داخل الدائرة

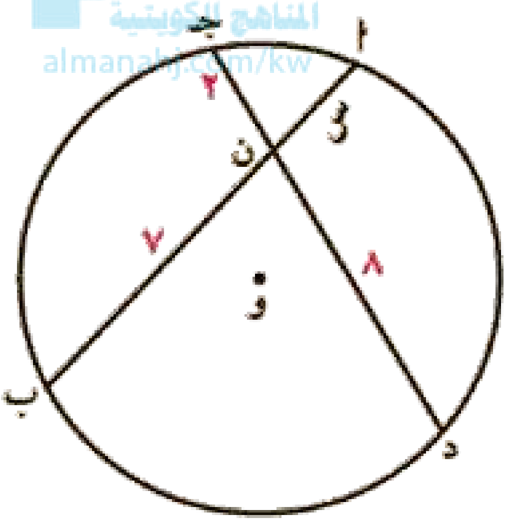
نظرية (١)

إذا تقاطع وتران داخل دائرة، فإن ناتج ضرب طولي جزءي أحد الوترين يساوي ناتج ضرب طولي جزءي الوتر الآخر.

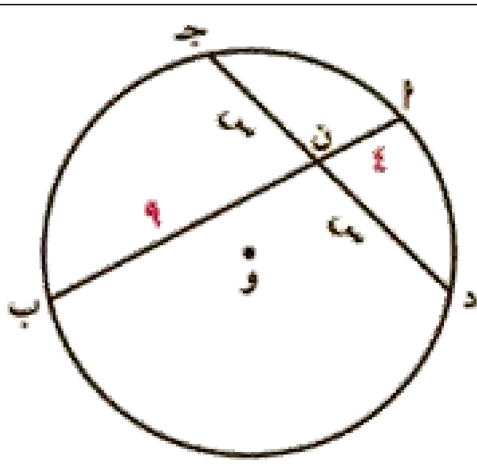
ن أ × ن ب = ن جـ × ن د



في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.

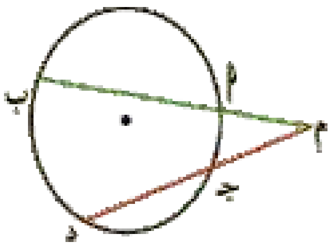


في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.



تقاطع الأوتار خارج الدائرة

نتيجة (١)



إذا رسم قاطعان من نقطة خارج دائرة، فإن ناتج ضرب طول أحد القاطعين في طول جزئه الخارجي يساوي ناتج ضرب طول القاطع الآخر في طول جزئه الخارجي.

م أ × م ب = م جـ × م د.

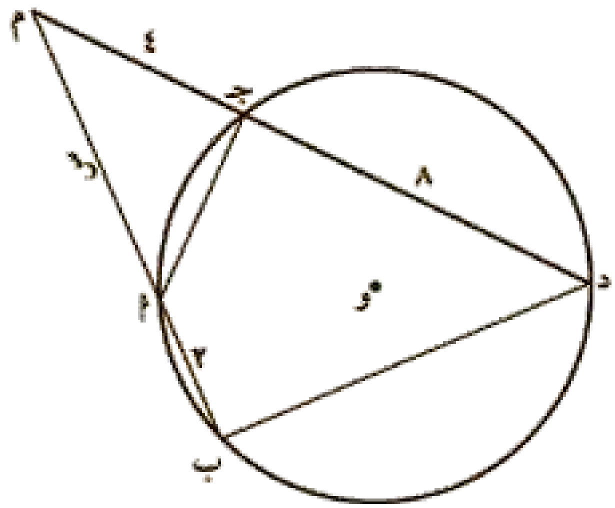
في الشكل المقابل:

أجـ = ٢٠ ، ب جـ = ١٥

أهـ = ٢٥ .

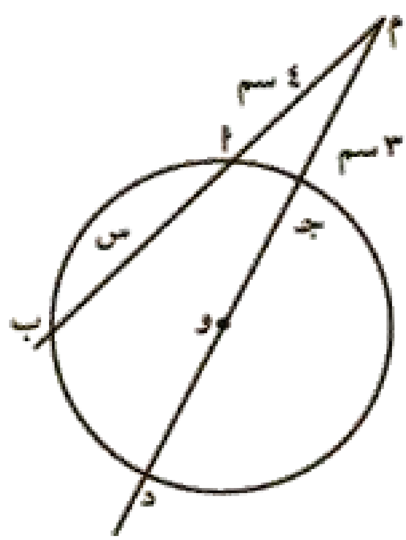
أوجد: د هـ.

في الشكل المقابل، أوجد قيمة س.



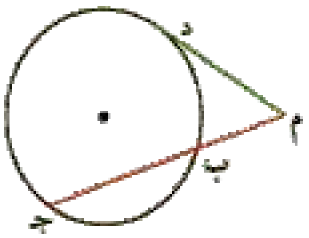
في الشكل المقابل، دائرة مركزها و. طول نصف قطرها يساوي ٤ سم.

أوجد قيمة س.



تقاطع مماس وقاطع الدائرة من نقطة خارج دائرة

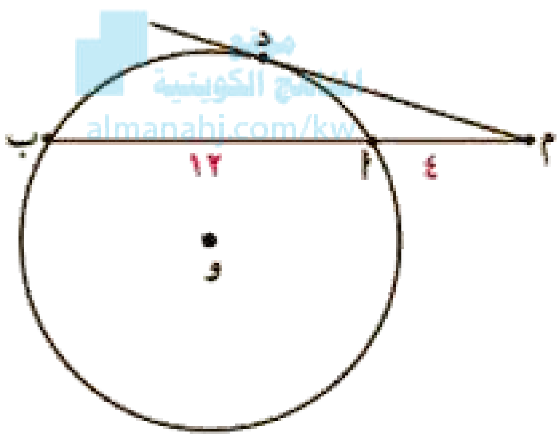
نتيجة (٢)



إذا رسم من نقطة خارج دائرة قاطع ومماس، فإن ناتج ضرب طول القاطع في طول جزئه الخارجي يساوي مربع طول القطعة المماسية.

(م د)^{٢} = م ب × م جـ .

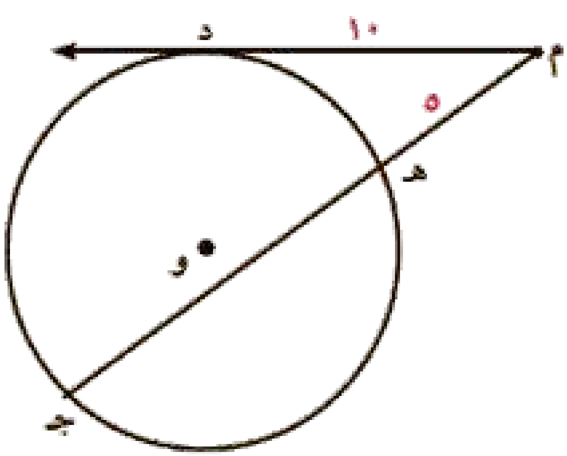
في الشكل المقابل، أوجد طول القطعة المماسية $\overline{\text{م د}}$ علمًا بأن: أم = ٤ سم ، أب = ١٢ سم.



في الشكل المقابل، $\overline{\text{م د}}$ قطعة مماسية حيث م د = ١٠

م هـ = ٥ .

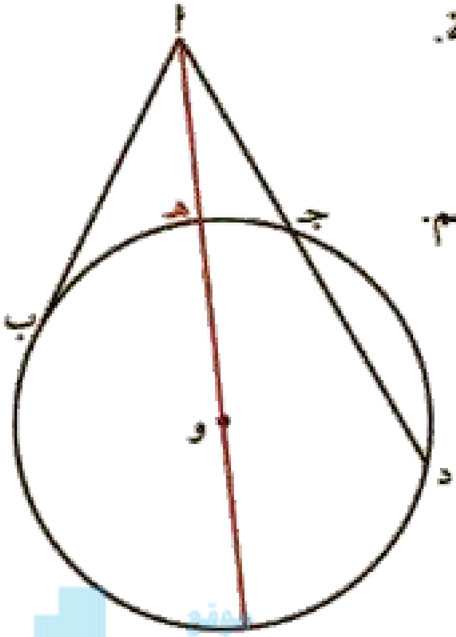
أوجد طول $\overline{\text{هـ جـ}}$.



المعطيات: أ جـ = ٤ سم، أ د = ٩ سم، أب قطعة مماسية.

المطلوب: إيجاد طول $\overline{\text{أب}}$.

أوجد طول نصف قطر الدائرة إذا كانت أ هـ = ٢ سم.



٧–١ تنظيم البيانات في مصفوفات

تعريف:

المصفوفة هي تنظيم من الأعداد المرتبة في صفوف وأعمدة.

الأعداد المكونة للمصفوفة تسمى عناصر

رتبة المصفوفة

نرمز إلى المصفوفة بأحد حروف الهجاء ونضع تحته خطًا، نكتب أ ونقرأ **المصفوفة أ**.

عدد الصفوف (م) وعدد الأعمدة (ن) يحددان **رتبة المصفوفة** وتكتب م × ن.

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & ٣ & ٢ \\ ٠ & ٧ & ٦ \end{bmatrix}$$

المصفوفة أ هي من **الرتبة ٢ × ٣**.

ملاحظة: لكتابة رتبة المصفوفة نكتب أولًا عدد الصفوف يليه عدد الأعمدة.

اكتب رتبة كل مصفوفة مما يلي:

$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٥ & ٦ & ٤ \\ ٧- & ٣- & ٢ \\ ٩ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$ $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٣- & \frac{٢}{٣} & ٤- \end{bmatrix}$ $\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٠ \\ ٠,٥ \end{bmatrix}$

$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٠ & ٥ & ٤ \\ ٧ & ٠,٥ & ٢- \end{bmatrix}$ $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٣ & ٨- \end{bmatrix}$ $\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ٠ & ١٠ \\ ٥- & ١ \\ ٩ & ٠,٦ \end{bmatrix}$

ترميز عناصر المصفوفة

يحدد أي عنصر في المصفوفة بدلالة رقمي الصف والعمود الواقع فيهما

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} أ_{٣١} & أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٣٢} & أ_{٢٢} & أ_{١٢} \\ أ_{٣٣} & أ_{٢٣} & أ_{١٣} \end{bmatrix}$$

العنصر في الصف الأول والعمود الثالث: $أ_{٣١}$

في المصفوفة: $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٤ & ٥ & ١ & ١٢ \\ ٣,٥ & ٢ & ٦ & ٢ \\ ٤- & ١ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$ اكتب قيمة كل عنصر مما يلي:

أ) $ب_{٢٢}$ ب) $ب_{١٢}$ ج) $ب_{١١}$

المصفوفات: المربعة، الأفقية، العمودية

صنّف كلًّا من المصفوفات التالية:

$$\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٠ & ٥- & ١ \\ ٧ & ٤ & ٠ \\ ٨ & ٢ & ٣ \end{bmatrix} \qquad \underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٣ \\ ٠,٢ \end{bmatrix}$$

$$\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ٥- & ٤ & ٣ \end{bmatrix} \qquad \underline{د} = \begin{bmatrix} ١,٤ & ٣ & ٢- \\ ٥ & ٨ & ١٢ \end{bmatrix}$$

المصفوفات المتساوية :

تكون **مصفوفتان متساويتين** إذا كانت لهما الرتبة (الأبعاد) نفسها، وكانت عناصرهما المتناظرة متساوية والعكس صحيح.

إذا كانت: $\begin{bmatrix} \text{٢س} - ٥ & ٤ \\ ٣ & \text{٣ص} + ١٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢٥ & ٤ \\ ٣ & \text{ص} + ١٨ \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة كل من س، ص.

إذا كانت $\begin{bmatrix} ٣٨ & ٥ \\ ٣ & \text{٤ص} - ١٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س} + ٨ & ٥ \\ ٣ & -\text{ص} \end{bmatrix}$ فأوجد قيمة كل من س، ص.

إذا كانت [٣س   س+ص   س−ص] = [−٩   ٤   −١٠] فأوجد قيمة كل من س، ص.

أوجد قيم كل من س، ص.

$$\begin{bmatrix} \text{٤} & \text{٩} \\ \text{٥ص} & \text{−٢} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{٤} & \text{س}^{\text{٢}} \\ \text{ص}^{\text{٢}} & \text{−٢} \end{bmatrix}$$

٧-٢ جمع وطرح المصفوفات

لجمع مصفوفتين أ، ب يجب أن تكونا من الرتبة نفسها.

نجمع كل عنصرين لهما الموقع نفسه في أ، ب. مصفوفة الجمع لها رتبة كل من المصفوفتين أ، ب.

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ١ & ٢- & ٠ \\ ٣ & ٥- & ٧ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٣- & ١ \\ ٢ & ٤- \\ ١- & ٥ \end{bmatrix}$ ، جـ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٩ & ٣- \\ ٩- & ٦ & ١٢ \end{bmatrix}$

فأوجد إن أمكن:

أ) أ + ب

ب) أ + جـ

وإذا لم يكن الجمع ممكنًا، فاذكر السبب.

أوجد ناتج ما يلي: $\begin{bmatrix} ١٢- & ٢٤ \\ ٣- & ٥ \\ ١- & ١٠ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٣- & ١- \\ ٥- & ٤ \\ ١ & ٧- \end{bmatrix}$

خواص جمع المصفوفات

إذا كان أ ، ب ، جـ مصفوفات من الرتبة م × ن فإن:

- أ + ب هي من الرتبة م × ن — خاصية الإقفال (الانغلاق)
- أ + ب = ب + أ — خاصية الإبدال Commutative
- (أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ) — خاصية التجميع Associative
- $و_{م×ن}$ + أ = أ + $و_{م×ن}$ = أ — المصفوفة الصفرية هي العنصر المحايد الجمعي من الرتبة م × ن
- أ + (−أ) = $و_{م×ن}$ — خاصية المعكوس الجمعي (النظير الجمعي).

طرح المصفوفات

أ = $\begin{bmatrix} ٤ & ٢ & ٣ \\ ٠ & ٤ & ١- \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٣ & ٤ & ١ \\ ٤ & ٢ & ٢- \end{bmatrix}$

أوجد أ − ب ، ب − أ

أوجد ناتج كل مما يلي:

أ) $$\begin{bmatrix} 6 & -9 & 7 \\ -2 & 1 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 6 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

ب) $$\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 6 \\ -5 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 3 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

حل المعادلات المصفوفية

حل المعادلة المصفوفية التالية:

$$\underline{س} - \begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٨ & ٩ \end{bmatrix}$$

أوجد س حيث:

$$\underline{س} - \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٧ \\ -٤ & ٤ \end{bmatrix}$$

٧ـ٣ ضرب المصفوفات

ضرب مصفوفة في عدد

الضرب القياسي هو عملية ضرب مصفوفة أ في عدد حقيقي ك : ك ≠ ٠ .

الناتج هو المصفوفة ك أ.

نحصل على المصفوفة ك أ بضرب كل عنصر من أ في ك.

إذا كان ك = ٠، يكون الناتج مصفوفة صفرية.

إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} -٤ & ٣ & ٢ \\ ٣ & ٤ & ٥ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ٣ & -١ & -٢ \end{bmatrix}$

فأوجد:

٥أ − ٣ب

٥ب − ٤أ

حل المعادلة: $٤\underline{س} + ٢\begin{bmatrix} ٣ & ٤ \\ ٢- & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٤ & ٢ \end{bmatrix}$

$$٢\underline{س} = \begin{bmatrix} ٤ & ١٢ \\ ١ & ٤- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢- & ٠ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$$

ضرب المصفوفات

بفرض $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٨ & ١- \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٠ & ٨ \\ ٥- & ٢ \end{bmatrix}$

حدّد ما إذا كانت كل من نواتج الضرب: $\underline{أ} \times \underline{ب}$، $\underline{ب} \times \underline{أ}$ معرّفة أو غير معرّفة.

أوجد ناتج ضرب كلّ مما يلي:

$$\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ٣- & ٢ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ٤ & ٣- \\ ٢ & ٥ \end{bmatrix}$$

إذا كانت $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & ١- \end{bmatrix}$. أوجد: $\underline{ب}^{٢}$ ، $\underline{ب}^{٣}$.

٧-٤ مصفوفات الوحدة والنظير الضربي (المعكوسات)

مصفوفة الوحدة

المصفوفة المربعة التي عناصر قطرها الرئيسي ١، وبقية العناصر صفر تسمى **مصفوفة الوحدة**

$$\underline{و}_{٢\times٢} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix} \qquad \underline{و}_{٣\times٣} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$$\underline{أ} \times \underline{و} = \underline{و} \times \underline{أ} = \underline{أ}$$

النظير الضربي

إذ كانت $\underline{أ}$ ، $\underline{س}$ مصفوفتين مربعتين من الرتبة نفسها بحيث يكون $\underline{أ} \times \underline{س} = \underline{و}$ ، فإن $\underline{س}$ هي النظير الضربي للمصفوفة $\underline{أ}$.

ويرمز إليها بـ $\underline{أ}^{-١}$.

إذاً $\underline{أ} \times \underline{أ}^{-١} = \underline{أ}^{-١} \times \underline{أ} = \underline{و}$

أثبت أن $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي للمصفوفة $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$.

محدد مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية

محدد المصفوفة المربعة $\begin{bmatrix} \text{أ} & \text{جـ} \\ \text{ب} & \text{د} \end{bmatrix}$ هو أ د − ب جـ

نكتب $|\underline{\text{أ}}| = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{جـ} \\ \text{ب} & \text{د} \end{vmatrix} =$ أ د − ب جـ

تسمى المصفوفة التي محددها يساوي الصفر **بالمصفوفة المنفردة**

أوجد محدد كل من المصفوفات التالية: $\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} -٣ & ٤ \\ ٢ & -٥ \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$ ، $\underline{\text{جـ}} = \begin{bmatrix} \text{س} & ٠ \\ ٠ & \text{س} \end{bmatrix}$

إذا كانت المصفوفة $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٤ & س \\ ٦ & ١٢ \end{bmatrix}$ منفردة أوجد قيمة س.

إذا كانت المصفوفة $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ١٠ & ٥ \\ ٢س & -٤ \end{bmatrix}$ منفردة، أوجد قيمة س.

خاصية

بفرض أن: $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ب & أ \\ د & جـ \end{bmatrix}$ إذا كان أ د − ب جـ ≠ ٠ ، فإن $\underline{أ}$ لها نظير ضربي $\underline{أ}^{-1}$ حيث:

$$\underline{أ}^{-1} = \frac{1}{|\underline{أ}|}\begin{bmatrix} -ب & د \\ أ & -جـ \end{bmatrix}$$

$$\underline{أ}^{-1} = \frac{1}{أ د - ب جـ}\begin{bmatrix} -ب & د \\ أ & -جـ \end{bmatrix}$$

حدّد أي مصفوفة مما يلي لها نظير (معكوس) ضربي، ثم أوجده.

أ $\underline{م} = \begin{bmatrix} ٢ & -٢ \\ -٤ & ٥ \end{bmatrix}$

ب $\underline{ن} = \begin{bmatrix} ٩ & ٣ \\ ٦ & ٢ \end{bmatrix}$

٧ـ٥ حل نظام من معادلتين خطيتين

الحل باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفة المربعة:

حلّ النظام: $\left\{\begin{array}{l} س + ص = ٣ \\ س - ص = ٧ \end{array}\right.$ باستخدام النظير الضربي للمصفوفة.

حلّ النظام: $\begin{cases} ٥س + ٣ص = ٧ \\ ٣س + ٢ص = ٥ \end{cases}$ باستخدام النظير الضربي للمصفوفة.

استخدام قاعدة كرامر (المحددات) لحل معادلتين خطيتين:

استخدم قاعدة كرامر لحلّ النظام:

$$\begin{cases} ٤س - ٥ص + ٧ = ٠ \\ ٣ص - ٦س + ٣ = ٠ \end{cases}$$

استخدم قاعدة كرامر لحلّ النظام:

$$\begin{cases} ٣س + ٢ص = -٦ \\ -٤س - ٣ص - ٧ = ٠ \end{cases}$$

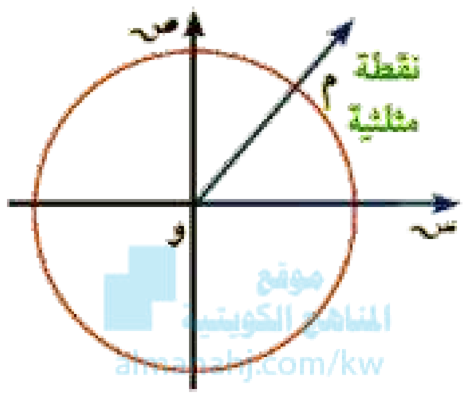
٨ـ١ دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي والدوال المثلثية (الدائرية)

دائرة الوحدة

هي دائرة مركزها نقطة الأصل و، وطول نصف قطرها واحد وحدة.

النقطة المثلثية

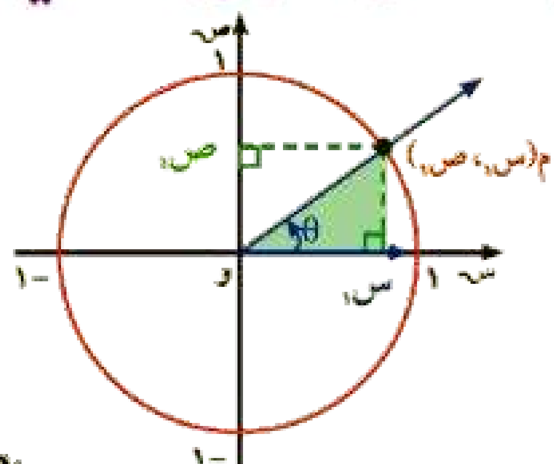
هي نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية موجهة في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة.



ملاحظة: تكون النقطة (س، ص) نقطة مثلثية إذا وفقط إذا كان $س^2 + ص^2 = ١$

سوف نستخدم الرمز θ لنرمز إلى قياس زاوية موجهة في الوضع القياسي.

النسب المثلثية للزاوية التي قياسها θ



جتاθ = $س_1$

جاθ = $ص_1$

ظاθ = $\frac{ص_1}{س_1}$ ، $س_1 \neq ٠$

ظتاθ = $\frac{س_1}{ص_1}$ ، $ص_1 \neq ٠$

قاθ = $\frac{١}{س_1}$ ، $س_1 \neq ٠$

قتاθ = $\frac{١}{ص_1}$ ، $ص_1 \neq ٠$

على دائرة الوحدة، ارسم زاوية موجهة في الوضع القياسي قياسها ٤٥°. ثم أوجد جتا ٤٥°، جا ٤٥°.

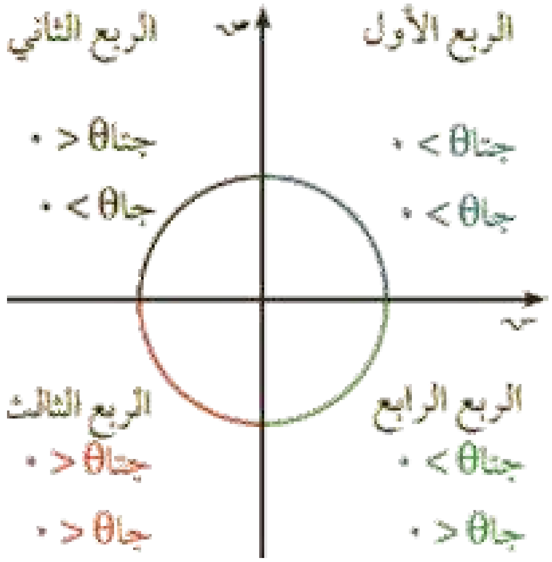
باستخدام دائرة الوحدة أوجد جتا(−١٢٠°)، جا(−١٢٠°).

إذا كانت θ في الربع الأول فإن: جاθ > ٠، جتاθ > ٠

إذا كانت θ في الربع الثاني فإن: جاθ > ٠، جتاθ < ٠

إذا كانت θ في الربع الثالث فإن: جاθ < ٠، جتاθ < ٠

إذا كانت θ في الربع الرابع فإن: جاθ < ٠، جتاθ > ٠



حدّد إشارة جاθ، جتاθ في كل مما يلي:

أ) θ = ١٣٥°

ب) θ = $\frac{٧\pi}{٦}$

جـ) θ = ٣٠٥°

أ) إذا كانت ٩٠° < θ < ٢٧٠°. ما هي إشارة جتاθ؟

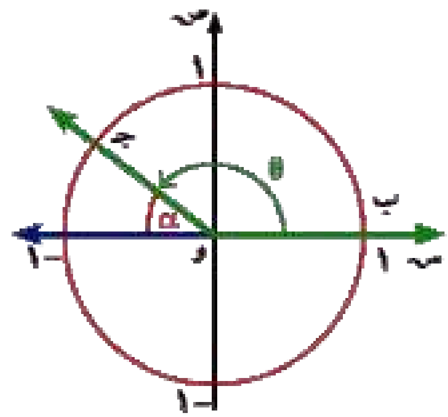
ب) إذا كانت ٠° < θ < π. ما هي إشارة جاθ؟

زاوية الإسناد

زاوية الإسناد للزاوية الموجهة ($\overrightarrow{\text{وب}}$، $\overrightarrow{\text{وجـ}}$) التي في وضع قياسي

هي الزاوية **الحادة** α التي يصنعها الضلع النهائي للزاوية الموجهة مع محور السينات.

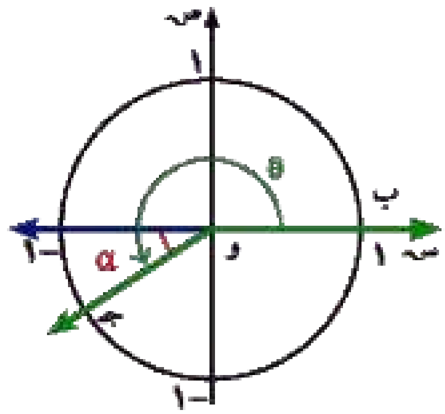
فإذا كان α زاوية الإسناد فإن: $٠° < \alpha < ٩٠°$



عندما θ تقع في الربع الثاني

$\alpha° = ١٨٠° - \theta°$

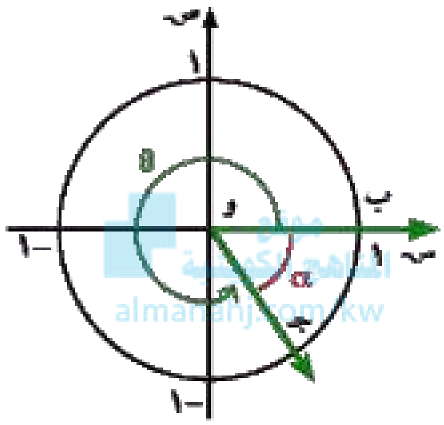
$\alpha = \pi - \theta$



عندما θ تقع في الربع الثالث

$\alpha° = \theta° - ١٨٠°$

$\alpha = \theta - \pi$



عندما θ تقع في الربع الرابع

$\alpha° = ٣٦٠° - \theta°$

$\alpha = ٢\pi - \theta$

ارسم كلًّا من الزوايا الموجهة في وضع قياسي، ثم عيّن زاوية الإسناد وأوجد قياسها لكل مما يلي:

أ) $١٢٥°$ ب) $٢١٥°$ جـ) $\frac{١١\pi}{٦}$

٨-٢ العلاقات بين الدوال المثلثية (١)

تسمى جاθ، جتاθ، ظاθ النسب المثلثية للزاوية التي قياسها θ وتدعى **النسب المثلثية الأساسية**

علمًا بأن

$-1 \leq$ جتا$\theta \leq 1$

$-1 \leq$ جا$\theta \leq 1$

ظا$\theta \in$ ح

النسب المثلثية للزاويتين θ، $-\theta$.

قانون:

جتا$(-\theta)$ = جتاθ

جا$(-\theta)$ = $-$جاθ

وبالتالي ظا$(-\theta)$ = $-$ظاθ بشرط أن يكون ظاθ معرّف.

أكمل إذا كان:

أ) جا م = ٠,٣ فإن جا(– م) = ...

ب) جتا ل = ٠,٣٨ فإن جتا(– ل) = ...

جـ) ظا س = ٣,١٤ فإن ظا(– س) = ...

د) جتا(– ص) = $\frac{١}{٤}$ فإن جتا ص = ...

النسب المثلثية للزاويتين θ ، $(\pi - \theta)$.

قانون:

جتا$(\pi - \theta)$ = −جتاθ

جا$(\pi - \theta)$ = جاθ

وبالتالي ظا$(\pi - \theta)$ = −ظاθ شرط أن يكون ظاθ معرّفًا.

بدون استخدام الآلة الحاسبة. إذا كان:

أ جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ ، فأوجد جا ١٥٠°.

ب جتاس = $\frac{٤}{٥}$ ، فأوجد جتا$(\pi$ − س).

جـ ظا $\frac{\pi}{١٢}$ = ٢ − $\sqrt{٣}$، فأوجد ظا $\frac{١١\pi}{١٢}$.

النسب المثلثية للزاويتين θ، $(\pi + \theta)$.

قانون:

جتا$(\pi + \theta)$ = −جتاθ

جا$(\pi + \theta)$ = −جاθ

وبالتالي ظا$(\pi + \theta)$ = ظاθ شرط أن يكون ظاθ معرّفًا.

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان:

أ) جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$، فأوجد جا ٢١٠°.

ب) ظا $\frac{\pi}{٨}$ = −١ + $\sqrt{٢}$، فأوجد ظا $\frac{٩\pi}{٨}$.

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان جتا ٤٠° ≃ ٠,٧٦٦ . فأوجد جتا ٢٢٠°.

النسب المثلثية للزاويتين θ، $\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$

قانون:

جا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = جتاθ

جتا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = جاθ

ظا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = ظتاθ شرط أن يكون ظتاθ معرّفًا.

النسب المثلثية للزاويتين θ، $\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$

قانون:

جا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ = جتاθ

جتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ = −جاθ

ظا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ = −ظتاθ شرط أن يكون ظتاθ معرّفًا.

(١) اكتب النسب المثلثية التالية بدلالة إحدى النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ.

(أ) جا$(\pi + \theta)$

(ب) جتا$(\pi - \theta)$

(جـ) جا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$

(د) جتا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$

(٢) اكتب النسب المثلثية بدلالة إحدى النسب المثلثية الأساسية للزاوية س.

(أ) ظا(١٨٠° − س)

(ب) جتا(١٨٠° + س)

(جـ) جا(− س)

(٣) استخدم ما تعلمته لكتابة النسب المثلثية التالية بدلالة إحدى النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ.

(أ) ظتا$(\pi + \theta)$

(ب) قتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$

(جـ) ظتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$

(د) قا$(-\theta)$

الدوال المثلثية (الدائرية) على ح

إذا كان ك عددًا صحيحًا فإن:

$$\text{جا}(\theta + ٢\text{ك}\pi) = \text{جا}\,\theta$$

$$\text{جتا}(\theta + ٢\text{ك}\pi) = \text{جتا}\,\theta$$

$$\text{ظا}(\theta + \text{ك}\pi) = \text{ظا}\,\theta \quad \text{حيث ظا}\,\theta \text{ معرّف}$$

بدون استخدام الآلة الحاسبة، أكمل:

جا ٣٩٠° = جا$(٣٠^\circ + ٣٦٠^\circ)$ = ... = ...

جتا٧٦٥° = ... = ... = ...

ظا$\left(\frac{-١١\pi}{٣}\right)$ = ظا(................) = ... = ...

بسط التعبير التالي لأبسط صورة:

جا س + جا$(٩٠^\circ$ + س) + جا$(١٨٠^\circ$ + س) + جا$(٩٠^\circ$ − س).

بسّط التعبيرات التالية لأبسط صورة:

(أ) جتا$(\pi - \theta)$ − جتا$(-\theta)$ + جا$(\pi + \theta)$ + جتا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$.

(ب) جا$(\pi + \theta)$ − جتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ + جتا$(\pi - \theta)$ + جا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$.

بسّط كلًّا من التعبيرات التالية لأبسط صورة:

(أ) جتا$(\theta + ٩\pi)$

(ب) جتا$\left(-\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$

أوجد قيمة النسب المثلثية التالية بدون استخدام الآلة الحاسبة.

(أ) جا ٣٩٠°

(ب) قتا ٤٥٠°

(جـ) قا $\frac{١٧\pi}{٤}$

حل معادلات مثلثية

حل المعادلة: جتا س = جتاθ

هو س = θ + ٢كπ أو س = $-\theta$ + ٢كπ (ك $\in$ ص)

لاحظ أن جيب تمام الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الرابع.

حل كلًّا من المعادلتين:

أ جتا س = $\frac{١}{٢}$

ب ٢جتا س − $\sqrt{٣}$ = ٠

حل المعادلة : $\sqrt{2}$ جتا س = ١ .

حل المعادلة جا س = جاθ

هو س = θ + ٢ك π أو س = $(\pi - \theta)$ + ٢ك π ، (ك $\in$ ص)

لاحظ أن جيب الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثاني.

حل كلًّا من المعادلتين:

أ جا س = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

ب ٢جا س = $\sqrt{2}$

حل المعادلة: 2 جا س $- 1 = 0$.

حل المعادلة ظا س = ظاθ هو س = θ + ك π، (ك $\in$ ص)

لاحظ أن ظل الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثالث.

حل المعادلة: $\sqrt{3}$ ظا س = ١.

٨-٣ العلاقات بين الدوال المثلثية (٢)

المتطابقات المثلثية الأساسية

ظاθ = $\dfrac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$ ، ظتاθ = $\dfrac{\text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta}$ ، ظتاθ = $\dfrac{1}{\text{ظا}\theta}$ حيث المقام $\neq$ ٠

قاθ = $\dfrac{1}{\text{جتا}\theta}$ ، قتاθ = $\dfrac{1}{\text{جا}\theta}$

متطابقات فيثاغورث

جا^2 θ + جتا^2 θ = ١ تسمى متطابقة فيثاغورث

١ + ظا^2 θ = قا^2 θ

١ + ظتا^2 θ = قتا^2θ

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان جتاθ = ٠,٤ ، $\frac{\pi}{٢} > \theta > ٠$.

أ أوجد جاθ.

ب استنتج ظاθ.

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان جا$\theta = \frac{٣}{٥}$ ، $٠ < \theta < \frac{\pi}{٢}$ فأوجد جتاθ، ظاθ.

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان ظا$\theta = \frac{٣}{٤}$ ، جا $\theta < ٠$ فأوجد جاθ، جتاθ.

بدون استخدام الآلة الحاسبة،

إذا كان ظاθ = $\frac{١٢}{٥}$ ، جاθ < ٠ فأوجد جاθ، جتاθ.

بدون استخدام الآلة الحاسبة،

إذا كان ظاθ = $\frac{٢٤}{٧}$ ، جتاθ > ٠ فأوجد جاθ، جتاθ.

بدون استخدام الآلة الحاسبة،

إذا كان ظتاθ = $\frac{٥}{٨}$، جتاθ > ٠ فأوجد جاθ.

أثبت صحة المتطابقة التالية: جا^{3}س + جاس × جتا^{2}س = جاس.

أثبت صحة المتطابقة: جتا^{4}س + جا^{2}س × جتا^{2}س = جتا^{2}س.

أثبت صحة المطابقة التالية: $\frac{(\text{قا}\theta + ١)(\text{قا}\theta - ١)}{\text{جا}^٢\theta} = \text{قا}^٢\theta$. حيث المقام ≠ ٠

أثبت صحة المتطابقة: (قا^2 θ + قتا^2 θ) − (ظا^2 θ + ظتا^2 θ) = ٢.

٩-١ المستوى الإحداثي

المسافة بين نقطتين

قانون:

المسافة بين أي نقطتين أ $(س_١ ، ص_١)$، ب $(س_٢ ، ص_٢)$ تساوي $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

أوجد المسافة بين ك (١، −٥) ، ل(٣، −٢).

نقطة المنتصف

قانون:

إذا كانت أ$(س_1، ص_1)$، ب$(س_2، ص_2)$، فإن إحداثيات نقطة المنتصف هي م$(س، ص)$ حيث $س = \frac{س_1 + س_2}{2}$، $ص = \frac{ص_1 + ص_2}{2}$.

أوجد نقطة منتصف $\overline{جـ د}$ حيث جـ (−١ ، ٥)، د (٣، ٠).

٩-٢ تقسيم قطعة مستقيمة

التقسيم من الداخل

إذا كانت $\overline{\text{أب}}$ قطعة مستقيمة بحيث أ (س$_1$، ص$_1$)،

ب(س$_2$، ص$_2$) ويراد تقسيمها من جهة أ بنسبة م: ن من الداخل وكانت نقطة التقسيم جـ(س، ص) فإن:

$$\text{س} = \frac{\text{م س}_2 + \text{ن س}_1}{\text{م} + \text{ن}}$$

$$\text{ص} = \frac{\text{م ص}_2 + \text{ن ص}_1}{\text{م} + \text{ن}}$$

إذا كان أ(−٥، ٣)، ب (٧، −٤). فأوجد نقطة تقسيم $\overline{\text{أب}}$ من جهة أ بنسبة ١:٣ من الداخل.

إذا كان أ (٢، ٤) ، ب (٥، ٩)،

ويراد تقسيم $\overline{\text{أب}}$ من الداخل من جهة ب في نقطة جـ بنسبة ٣:٥ .

أوجد إحداثيات النقطة جـ.

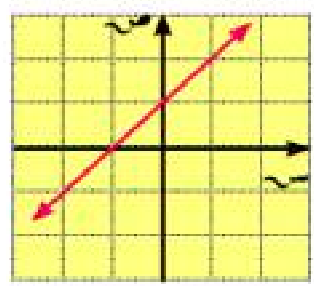
إذا كان أ(٣، −٤) ، ب (−٢، ٣). فأوجد جـ بحيث ٢ أجـ = جـ ب ، جـ ∈ $\overline{\text{أب}}$.

لتكن أ(٢، −٣) ، ب (−٤، ٧). أوجد إحداثيات النقطة جـ على $\overline{\text{أب}}$ بحيث: ٧جـ ب = ٢جـ أ .

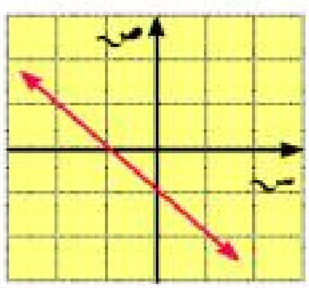
٩ـ٣ (أ) ميل الخط المستقيم

$$\text{الميل} = \frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} \text{ ، } س_٢ - س_١ \neq ٠$$

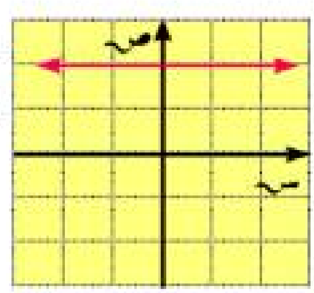
أوجد ميل الخط المستقيم الذي يمر بالنقطتين أ(−٢، ١) ، ب(٥، ٧).



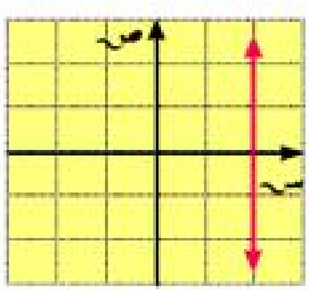
ميل المستقيم موجب



ميل المستقيم سالب



ميل المستقيم الأفقي
يساوي صفرًا



المستقيم الرأسي
ليس له ميل

أثبت أن النقاط أ(٢، −١) ، ب(−١، ٥) ، جـ(٣، −٣) على استقامة واحدة.

٩-٣ (ب) معادلة الخط المستقيم

تكون معادلة المستقيم: $ص - ص_١ = م(س - س_١)$.

اكتب معادلة الخط المستقيم الذي ميله $\frac{٣}{٢}$ و يمر بالنقطة (٤، -١).

١ اكتب معادلة الخط المستقيم الذي ميله $\frac{-٢}{٣}$ ويمر بالنقطة (−٦، ٥).

أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين جـ (٣، −١) ، د(٢، −٢).

٣ إذا كان المستقيم ك: ٣ص + س + ٣ = ٠، فأوجد:

أ معادلة المستقيم م الموازي للمستقيم ك والذي يمر بالنقطة (−٣، ٢).

ب معادلة المستقيم ز العمودي على المستقيم ك والذي يمر بالنقطة (١، ٤).

٩–٤ البعد بين نقطة ومستقيم

إذا كانت معادلة المستقيم على الصورة ل: أس + ب ص + جـ = ٠، فإن البعد ف بين النقطة د (س، ، ص،) والمستقيم ل تعطى بالصيغة: $ف = \frac{|أس_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$.

أوجد البعد بين المستقيم ل: ص = −س + ٣ والنقطة د(٢، ٥).

أثبت أن النقطة هـ(٢، ١) لا تنتمي إلى المستقيم ل الذي معادلته: ص = ٣س − ٤، ثمّ أوجد البعد بين المستقيم ل والنقطة هـ.

أوجد البعد من النقطة د(−٤، −٣) إلى المستقيم ل: ٢ص = ٣ س − ٧.

أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (−٤، ٧) على المستقيم: ص = −٥س + ١

٩–٥ معادلة الدائرة

وعلى ذلك، تكون معادلة الدائرة التي مركزها (د، هـ) وطول نصف قطرها نق على الصورة:

$$(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = نق^٢$$

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٥، −٣) وطول نصف قطرها ٥ وحدات.

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٤ وحدات.

أوجد معادلة دائرة قطرها $\overline{أب}$ حيث أ(−٣، ٦) ، ب(١، −٢).

أوجد مركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها:

أ $س^2 + ص^2 = 49$.

ب $(س - 4)^2 + (ص + 5)^2 = 36$.

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٣، ٤) وتمس محور الصادات.

١٠ـ٣ الانحراف المعياري

إذا كانت $س_١$، $س_٢$، $س_٣$، ...، $س_ن$ مجموعة من القيم عددها ن حيث متوسطها الحسابي $\overline{س}$ فإن:

$$التباين = ع^٢ = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \overline{س})^٢}{ن}$$

ومنه الانحراف المعياري = $ع = \sqrt{ع^٢}$

أوجد التباين والانحراف المعياري لقيم البيانات:

٩، ٧، ٨، ٦، ٤، ٢

الانحراف المعياري لمجموعة قيم من بيانات هو ع = ٤، ومجموع مربعات انحرافات هذه القيم عن متوسطها الحسابي هو ٤٨٠.

فما عدد قيم هذه البيانات؟

٣ يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري لأوزان ١٠٠ طالب ثانوي (الوزن بالكيلوجرام).

الفئة	٦٠-	٦٤-	٦٨-	٧٢-	٧٦
التكرار	٥	١٨	٤٢	٢٧	٨

أوجد المتوسط الحسابي $\overline{س}$ والانحراف المعياري ع لهذه الأوزان.

١٠ ـ ٥ الاحتمال المشروط

إذا كانت جميع نواتج التجربة لها فرصة الظهور نفسها فإن احتمال الحدث أ هو:

$$ل(\text{الحدث أ}) = \frac{\text{عدد نواتج الحدث أ}}{\text{عدد النواتج في فضاء العينة}}$$

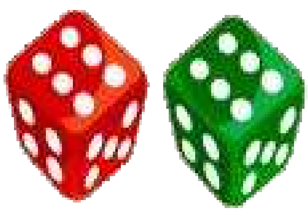
أي أن: $ل(أ) = \frac{ن\,(أ)}{ن\,(ف)}$

في لعبة «رمي حجري نرد منتظمين ومتمايزين» والتجربة هي ملاحظة الوجه العلوي لكل من الحجرين

أ مِمَّ يتألف كل ناتج؟ اكتب فضاء العينة. وما عدد النواتج الممكنة؟

ب مثل فضاء العينة بيانيًا.

جـ ما احتمال الحدث أ: «ظهور عددين مجموعهما يساوي ٤»؟



الحل:

في المثال (١): أ ما احتمال الحدث «ب»: «ظهور عددين مجموعهما يساوي ٧»؟

ب ما احتمال الحدث «جـ»: «ظهور عددين مجموعهما يساوي ١٣»؟

جـ ما احتمال الحدث «د»: «ظهور عددين أحدهما مربعًا للآخر»؟

خواص الاحتمال لحدث ما

ليكن أ حدث في فضاء عينة ف منته وغير خالٍ فإن:

1. $٠ \leq$ ل(أ) ≤ ١
2. إذا كان أ = { } إذًا ل(أ) = ٠ ويسمى أ **حدثًا مستحيلًا**.
3. إذا كان أ = ف إذًا ل(أ) = ١ ويسمى أ **حدثًا مؤكدًا**.
4. مجموع احتمالات جميع النواتج في فضاء العينة يساوي ١.

احتمال وقوع حدث ما ، هو عدد ينتمي إلى الفترة [٠ ، ١].

٢ في تجربة رمي حجري نرد متمايزين معًا وملاحظة الوجه العلوي لكل منهما، كان الحدث ب الحصول على مجموع أصغر من ١٣، فما احتمال وقوع الحدث ب؟

اشترى ناصر علبة حلوى تحتوي على ١٢ قطعة بينها ٤ قطع بالشوكولاتة. يريد ناصر أخذ قطعتين من العلبة معًا عشوائيًا.
فما احتمال أن يختار قطعتين بالشوكولاتة؟

قاعدة الاحتمال لاتحاد حدثين:

ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

ومنها ل(أ ∩ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∪ ب)

قاعدة الاحتمال لمتمم الحدث أ:

ل(أ̅) = ١ − ل(أ)

قاعدة الاحتمال لحدثين متنافيين:

إذا كان أ، ب حدثين متنافيين من فضاء العينة ف فإن ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب).

إذا كان أ، ب حدثان في فضاء العينة ف وكان:

ل(أ) = ٠,٧ ، ل(ب) = ٠,٤ ، ل(أ ∩ ب) = ٠,٤ ، أوجد كلًّا من:

١ ل(أ ∪ ب)

٢ ل(أ̅)

٥ إذا كان أ، ب حدثان في فضاء العينة، وكان ل(أ) = ٠,٣ ، ل(ب) = ٠,٥ ، ل(أ ∪ ب) = ٠,٦ أوجد كلًّا من:

أ ل(أ ∩ ب)

ب ل($\overline{\text{ب}}$)

إذا كان أ، ب حدثان في فضاء العينة ف وكان:

$ل(\bar{أ}) = ٠,٢$ ، $ل(أ \cup ب) = ٠,٩$ ، $ل(أ \cap ب) = ٠,٤$ ، أوجد $ل(\bar{ب})$، $ل(\overline{أ \cap ب})$.

إذا كان أ، ب حدثان في فضاء العينة، وكان ل(أ) = ٠,٥ ، ل(ب) = ٠,٦ ، ل(أ $\cap$ ب) = ٠,٢ ،

أوجد ل($\overline{أ \cup ب}$).

الاحتمال المشروط

قاعدة الاحتمال المشروط

إذا كان وقوع الحدث ب مشروطًا بوقوع الحدث أ فإن:

ل(ب|أ) = $\frac{\text{ل(أ} \cap \text{ب)}}{\text{ل(أ)}}$ حيث ل(أ) $\neq$ ٠

وكذلك ل(أ $\cap$ ب) = ل(أ) $\times$ ل(ب|أ)

في تجربة عشوائية أ، ب حدثان حيث ل(أ) = ٠,٣ ، ل(ب) = ٠,٦ ، ل(أ $\cap$ ب) = ٠,٢ .

أوجد احتمال كل من الأحداث التالية: أ ل(ب|أ) ب ل(أ|ب)

في تجربة عشوائية، إذا كان ل(أ) = ٠,٣ ، ل(ب | أ) = ٠,٢ . أوجد ل(أ ∩ ب).

في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم، إذا كان الحدث ب «الحصول على عدد زوجي»، والحدث أ «الحصول على عدد أولي». فاحسب ل(ب|أ).