

تجميع قوانين ونظريات رياضيات صف 10

الفصل الثاني 2023

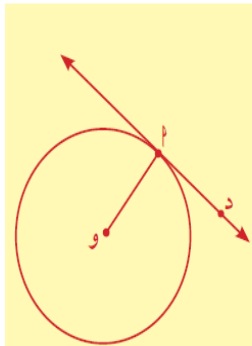
عمل / أ . أحمد نصار

الدائرة



نظرية (١)

كل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة واحدة.



المماس للدائرة هو مستقيم في المستوي يتقاطع مع الدائرة في نقطة واحدة.

نقطة التقاطع تسمى نقطة التماس.

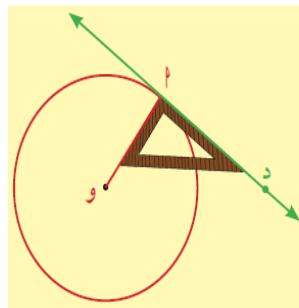
أد مماس.

أد شعاع مماس.

أد قطعة مماسية

أو نصف قطر التماس

نظرية (٢)



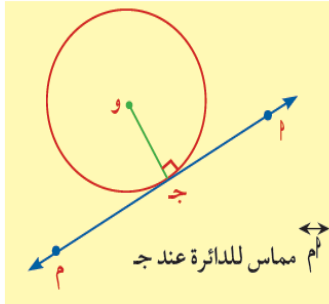
المماس عمودي على نصف قطر التماس.

إذا كان مستقيم مماساً للدائرة، فإنه يكون متعامداً مع نصف القطر

المرار بنقطة التماس.

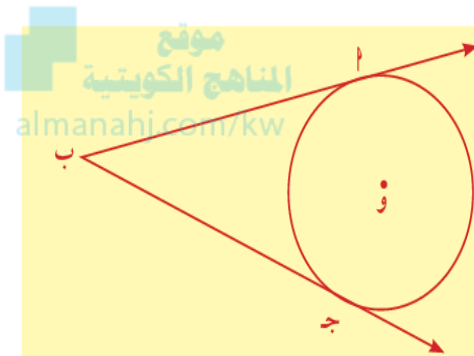
أي أن $\overline{OD} \perp \overline{AD}$.

نظرية (٣)



المستقيم العمودي على نصف قطر دائرة عند نهايته التي تنتمي إلى الدائرة يكون مماساً لهذه الدائرة عند هذه النقطة.

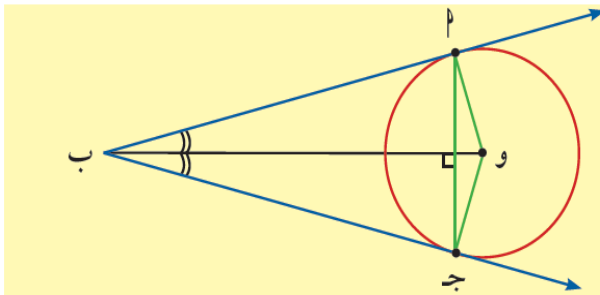
نظرية (٤)



القطعتان المماستان لدائرة والمرسومتان من نقطة خارجها متطابقتان.

$$\overline{BP} \cong \overline{BK}$$

نتائج النظرية

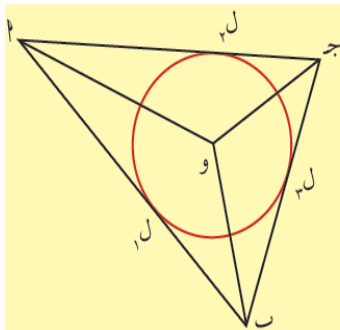


$\Delta BPQ \cong \Delta BJK$ متطابق الضلعين من النظرية السابقة.

١ $\overline{BQ}$ و $\overline{BP}$ منصف الزاوية $\angle P B Q$

٢ $\overline{OJ}$ و $\overline{OK}$ منصف الزاوية $\angle J O K$

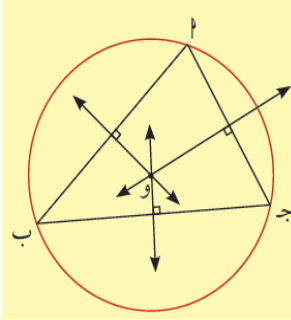
٣ $\overline{OJ} \perp \overline{JK}$ و $\overline{OK} \perp \overline{JK}$



الدائرة المحاطة بمثلث (الداخلية) (Inscribed Circle of a Triangle)

هي دائرة مماسة لأضلاع المثلث الثلاثة من الداخل.

مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي منصفات الزوايا الداخلية للمثلث Circum Center.



الدائرة المحيطة لمثلث (الخارجة) (Circumscribed Circle of a Triangle)

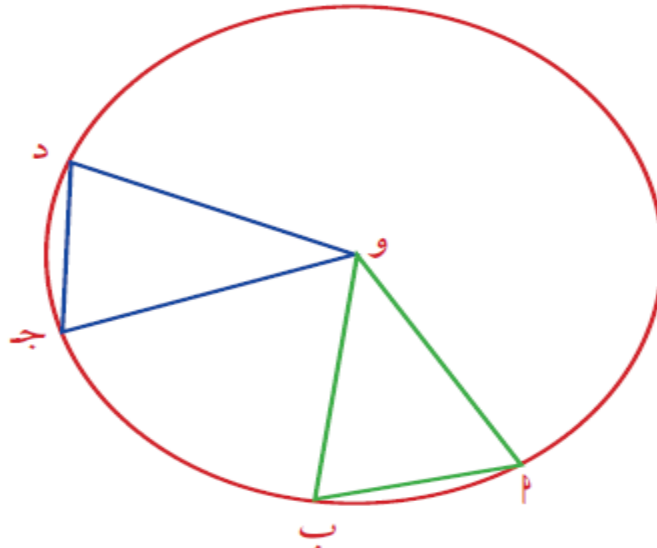
هي دائرة تمر برؤوس المثلث الثلاثة.
مركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي المحاور الثلاثة لأضلاع المثلث (نقطة تلاقي المنصفات العمودية لأضلاع المثلث).

الأوتار والأقواس

نظرية (١)

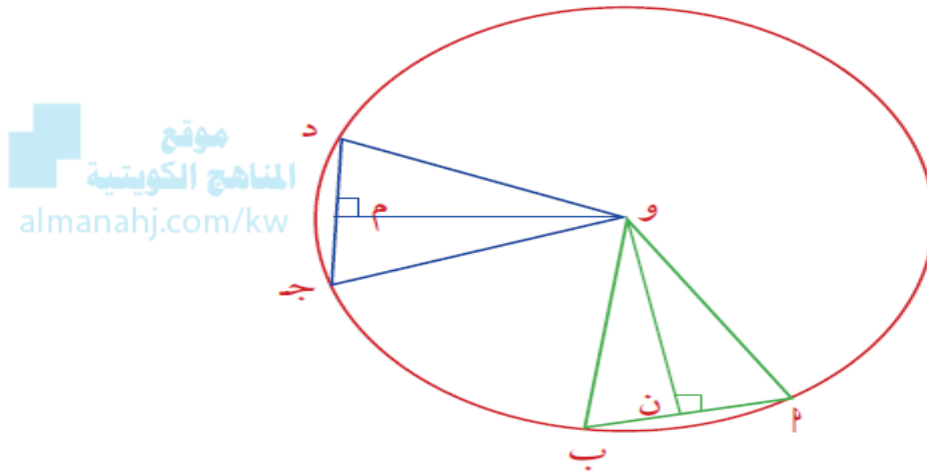
في دائرة أو في دوائر متطابقة:

- ١ للزوايا المركزية المتطابقة أوتار متطابقة.
- ٢ الأوتار المتطابقة تقابل أقواسًا متطابقة.
- ٣ للأقواس المتطابقة زوايا مركزية متطابقة.



نظرية (٢)

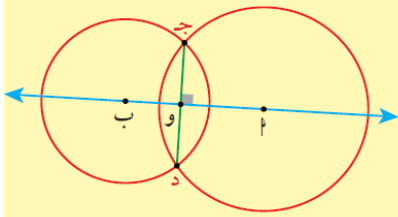
- ١ الأوتار المتطابقة في دائرة على أبعاد متساوية من مركز الدائرة.
- ٢ الأوتار التي على أبعاد متساوية من مركز دائرة تكون متطابقة.



نظرية (٣)

- ١ القطر العمودي على وتر في دائرة ينصفه وينصف كلاً من قوسيه.
- ٢ القطر الذي ينصف وترًا (ليس قطرًا) في دائرة يكون عمودياً على هذا الوتر.
- ٣ العمود المنصف لوتر في دائرة يمر بمركز الدائرة.

نتيجة



خط المراكزين لدائرتين متقاطعتين يكون عمودياً على الوتر المشترك بينهما وينصفه.

Central Angle and Inscribed Angle

١ - الزاوية المركزية والزاوية المحيطية

تعريف:

- ١ الزاوية التي رأسها مركز الدائرة و ضلعاها يقطعان الدائرة تسمى بالزاوية المركزية.
- ٢ الزاوية التي رأسها إحدى نقاط الدائرة و ضلعاها يقطعان الدائرة تسمى بالزاوية المحيطية.

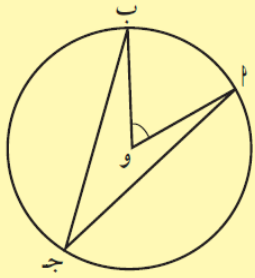
نظرية (١)

قياس الزاوية المركزية يساوي قياس القوس المحصور بين ضلعيها على الدائرة.



نظرية (٢)

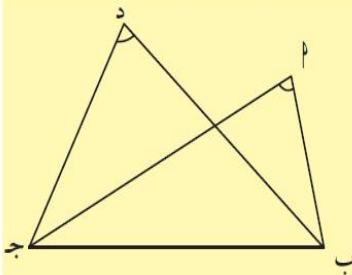
في الدائرة قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها.



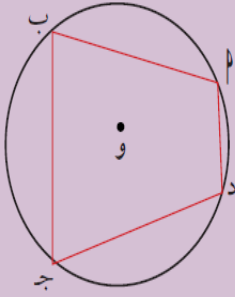
$$\widehat{ACB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB} = \frac{1}{2} \widehat{AB}$$

قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس نفسه.

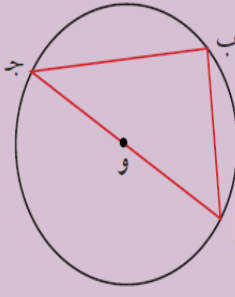
نتائج



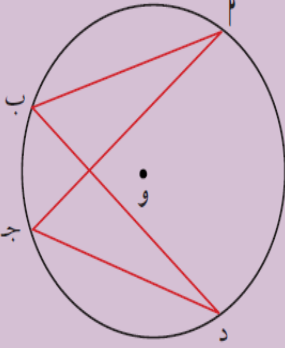
- ١ كل زاويتين محيطيتين في دائرة تحصران القوس نفسه متطابقتان.
- ٢ كل زاوية محيطية في دائرة تحصر نصف دائرة تكون زاوية قائمة.
- ٣ كل شكل رباعي دائري (محاط بدائرة)، تكون زواياه المتقابلة متكاملة.
- ٤ في الشكل إذا تطابقت الزاويتان $\hat{A}$ ، $\hat{D}$ المرسومات على القاعدة ب ج وفي جهة واحدة منها. كان الشكل ب ج د رباعياً دائرياً.



$\angle A = \angle B + \angle C + \angle D$
 $\angle A = \angle B + \angle C + \angle D$



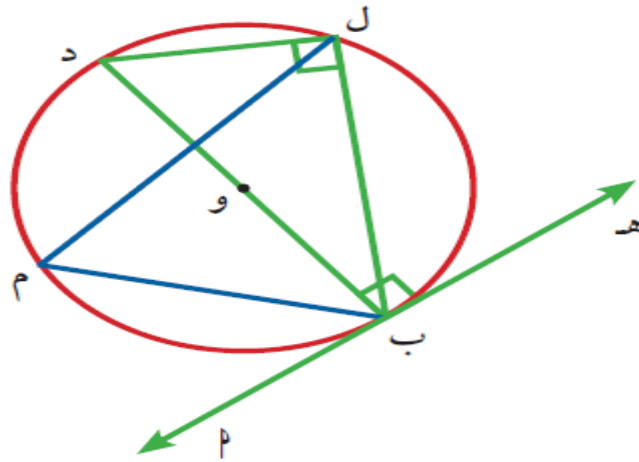
المماس (نصف دائرة)
 $\angle A = 90^\circ$
 (المماس) زاوية محيطية مرسومة على قطر
 الدائرة وهي زاوية قائمة



المماس، المماس (نصف دائرة)
 $\angle A = \angle B + \angle C + \angle D$

نظرية (3)

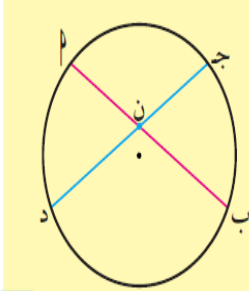
- (1) قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس نفسه.
- (2) قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين المماس والوتر.



Intersecting Chords Inside the Circle

١ - تقاطع الأوتار داخل الدائرة

نظرية (١)



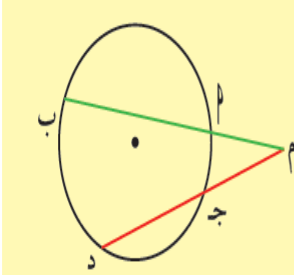
إذا تقاطع وتران داخل دائرة، فإن ناتج ضرب طولي جزئي أحد الوترين يساوي ناتج ضرب طولي جزئي الوتر الآخر.

$$AN \times NB = CN \times ND$$

Intersecting Chords Outside the Circle

٢ - تقاطع الأوتار خارج الدائرة

نتيجة (١)



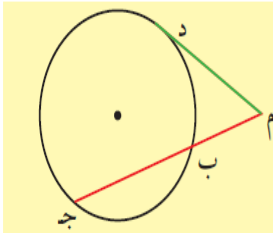
إذا رسم قاطعان من نقطة خارج دائرة، فإن ناتج ضرب طول أحد القاطعين في طول جزئه الخارجي يساوي ناتج ضرب طول القاطع الآخر في طول جزئه الخارجي.

$$MA \times MB = MC \times MD$$

٣ - تقاطع مماس وقاطع الدائرة من نقطة خارج دائرة

Intersection Between Tangent and Secant from any Point Outside of a Circle

نتيجة (٢)



إذا رسم من نقطة خارج دائرة قاطع ومماس، فإن ناتج ضرب طول القاطع في طول جزئه الخارجي يساوي مربع طول القطعة المماسية.

$$MA \times MB = MC^2$$

المصفوفات

تعريف

المصفوفة هي تنظيم من الأعداد المرتبة في صفوف وأعمدة.

الأعداد المكونة للمصفوفة تسمى عناصر **Elements**.

رتبة المصفوفة Dimension of a Matrix

نرمز إلى المصفوفة بأحد حروف الهجاء ونضع تحته خطاً، نكتب **P** ونقرأ المصفوفة **P**.
عدد الصفوف (م) وعدد الأعمدة (ن) يحددان رتبة المصفوفة وتكتب م × ن.

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 6 \end{bmatrix} = P$$

المصفوفة **P** هي من الرتبة 2 × 3.

ملاحظة: لكتابة رتبة المصفوفة نكتب أولاً عدد الصفوف يليه عدد الأعمدة.

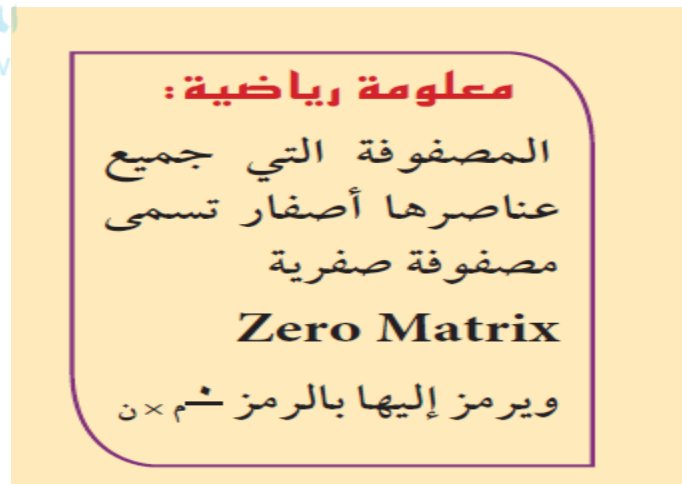
ترميز عناصر المصفوفة

يحدد أي عنصر في المصفوفة بدلالة رقمي الصف والعمود الواقع فيهما، فمثلاً، في المصفوفة **P** العنصر الذي في الصف الأول والعمود الثالث نرمز إليه بالرمز **P₃₁** (الصف أولاً والعمود ثانياً).

$$\begin{bmatrix} P_{31} & P_{21} & P_{11} \\ P_{32} & P_{22} & P_{12} \\ P_{33} & P_{23} & P_{13} \end{bmatrix} = P$$

العنصر في الصف الأول والعمود الثالث: **P₃₁**

- **المصفوفة المربعة:** هي مصفوفة فيها عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة.
- وفي ما عدا ذلك، تسمى المصفوفة: مصفوفة مستطيلة Rectangular Matrix.
- **المصفوفة الأفقية:** هي مصفوفة مكونة من صف واحد Horizontal Matrix.
- **المصفوفة العمودية:** هي مصفوفة مكونة من عمود واحد Vertical Matrix.



شرط تساوي المصفوفات:

المصفوفات المتساوية: Equal Matrices

تكون مصفوفتان متساويتين إذا كانت لهما الرتبة (الأبعاد) نفسها، وكانت عناصرهما المتناظرة متساوية والعكس صحيح.

المصفوفة التي عدد صفوفها (ج)، وعدد أعمدها (د) هي من الرتبة ج × د.

شرط جمع وطرح المصفوفات:

Adding and Subtracting Matrices

جمع وطرح المصفوفات

لجمع مصفوفتين $\underline{A}$ ، $\underline{B}$ يجب أن تكونا من الرتبة نفسها.
نجمع كل عنصرين لهما الموقع نفسه في $\underline{A}$ ، $\underline{B}$. مصفوفة الجمع لها رتبة كل من المصفوفتين $\underline{A}$ ، $\underline{B}$.
 $\underline{A} + \underline{B} = \underline{C}$

$\underline{A}$ من الرتبة $m \times n$ ، $\underline{B}$ من الرتبة $m \times n$
∴ $\underline{C}$ من الرتبة $m \times n$.
جوس $\underline{A}$ وس $\underline{B}$ وس.



معلومة رياضية :

المصفوفة $\underline{A}$ - هي النظير
الجمعي للمصفوفة $\underline{A}$.

خواص جمع المصفوفات

إذا كان $\underline{A}$ ، $\underline{B}$ ، $\underline{C}$ مصفوفات من الرتبة $m \times n$ فإن:

• $\underline{A} + \underline{B}$ هي من الرتبة $m \times n$ خاصية الإقفال (الانغلاق)

• $\underline{A} + \underline{B} = \underline{B} + \underline{A}$ خاصية الإبدال Commutative

• $(\underline{A} + \underline{B}) + \underline{C} = \underline{A} + (\underline{B} + \underline{C})$ خاصية التجميع Associative

• $\underline{A} + \underline{0} = \underline{A}$ المصفوفة الصفيرية هي العنصر المحايد الجمعي من الرتبة $m \times n$

• $\underline{A} + (-\underline{A}) = \underline{0}$ خاصية المعكوس الجمعي (النظير الجمعي).

طرح المصفوفات

يمكن طرح المصفوفات باستخدام خاصية مصفوفة المعكوس الجمعي.

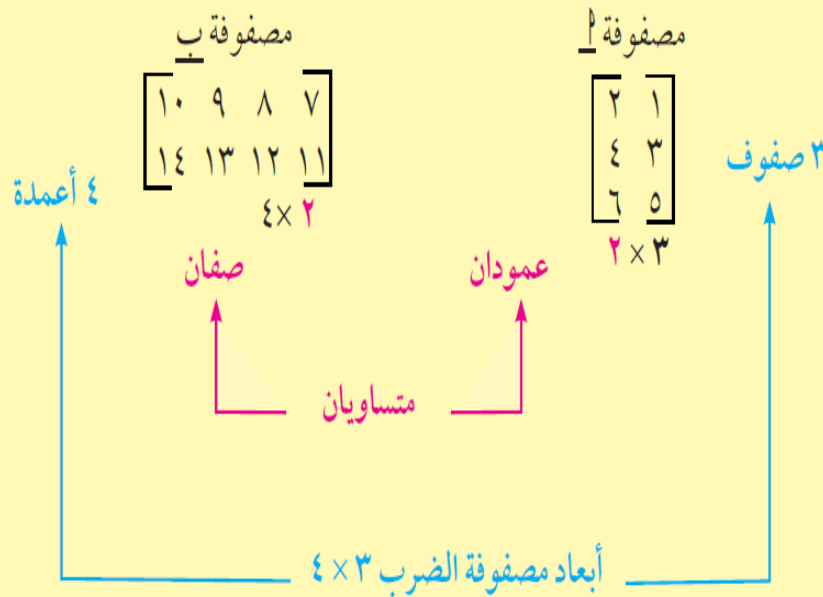
إذا كان للمصفوفتين A ، B الرتبة نفسها، فإن $A - B = A + (-B)$.

ملاحظة: إذا كان $A \neq B$ ولهما الرتبة نفسها فإن: $A - B \neq B - A$ وبالتالي، عملية طرح المصفوفات ليست إبدالية.

شرط ضرب المصفوفات:

ضرب المصفوفات:

المصفوفة A هي مصفوفة من الرتبة $m \times n$ والمصفوفة B هي مصفوفة من الرتبة $n \times r$ ، عندئذ مصفوفة الضرب $A \times B$ هي مصفوفة من الرتبة $m \times r$.



تكون مصفوفة الضرب معرفة إذا كان عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى مساوياً لعدد الصفوف في المصفوفة الثانية.

$$A \times B = C \quad \text{حيث } A \text{ من الرتبة } m \times n \text{ و } B \text{ من الرتبة } n \times r \text{ و } C \text{ من الرتبة } m \times r$$

ضرب المصفوفة في رقم :

Scalar Multiplication

الضرب القياسي

الضرب القياسي هو عملية ضرب مصفوفة $\underline{P}$ في عدد حقيقي k : $k \neq 0$.
 الناتج هو المصفوفة $k \underline{P}$.
 نحصل على المصفوفة $k \underline{P}$ بضرب كل عنصر من $\underline{P}$ في k .
 إذا كان $k = 0$ ، يكون الناتج مصفوفة صفرية.

موقع
 المناهج الكويتية
 almanahj.com/kw

Square Matrix

مربع المصفوفة

إذا كانت $\underline{P}$ مصفوفة مربعة، فإن المصفوفة $\underline{P} \times \underline{P}$ يرمز إليها بالرمز $\underline{P}^2$.
 وتقرأ مربع المصفوفة $\underline{P}$. وبالمثل $\underline{P} \times \underline{P} \times \underline{P} = \underline{P}^3$ ، $\underline{P} \times \underline{P} \times \underline{P} \times \underline{P} = \underline{P}^4$ ،

Identity Matrix مصفوفة الوحدة

المصفوفة المربعة التي عناصر قطرها الرئيسي 1، وبقية العناصر صفر تسمى مصفوفة الوحدة للضرب. ويرمز إليها بـ $\underline{I}$.

$$\underline{I}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \underline{I}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

أي أن: $\underline{P} = \underline{P} \times \underline{I} = \underline{I} \times \underline{P}$

$\underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ هي العنصر المحايد الضربي للمصفوفات المربعة من الرتبة الثانية.

النظير الضربي Multiplicative Inverse

إذا كانت a ، a مصفوفتين مربعيتين من الرتبة نفسها بحيث يكون $a \times a^{-1} = I$ ، فإن a^{-1} هي النظير الضربي للمصفوفة a . ويرمز إليها بـ a^{-1} .

$$إذا \quad a \times a^{-1} = I \quad و \quad a^{-1} \times a = I$$



معلومة رياضية :

النظير الضربي للمصفوفة a يسمى أيضًا المصفوفة المعكوسة a^{-1} .

محدد مصفوفة مربعة من الرتبة الثانية Determinant of a 2×2 Matrix

ترتبط كل مصفوفة مربعة a بعدد حقيقي يسمى **محدد** a ويرمز إلى هذا العدد بالرمز $|a|$ ويقرأ محدد المصفوفة a . سنقتصر في هذا الدرس على محدد المصفوفة المربعة من الرتبة الثانية.

$$\text{محدد المصفوفة المربعة } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ هو } a \cdot d - b \cdot c$$

$$\text{نكتب } |a| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

تسمى المصفوفة التي محددها يساوي الصفر **بالمصفوفة المنفردة**

حل نظام من معادلتين خطيتين

يمكن للمعادلة المصفوفية أن تمثل أي نظام معادلات.

$$\left. \begin{array}{l} \text{نظام معادلات} \\ \text{المعادلة المصفوفية} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{س} + 2\text{ص} = 5 \\ \text{س} + 3\text{ص} = 14 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$\text{مصفوفة المعاملات } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \times \text{مصفوفة المتغيرات } \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \text{مصفوفة الثوابت } \begin{bmatrix} 5 \\ 14 \end{bmatrix}$$

حل النظام: Solving a System

تستطيع إيجاد النظير الضربي لمصفوفة المعاملات، ثم الحصول سريعاً على حل النظام من المعادلات الخطية.

١ - الحل باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفة المربعة: Solving by Using Inverse Matrix

- نقترن كل مصفوفة مربعة بعدد حقيقي يسمى «محدد» ويرمز إليه بالرمز $|A|$ ويقرأ محدد المصفوفة A . وإذا كانت $|A| \neq 0$ فإن A^{-1} = $\frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ حيث a, b, c, d هي عناصر المصفوفة $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

$$\text{فإن } |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \text{ حيث } ad - bc \neq 0$$

٢ - استخدام قاعدة كرامر (المحددات) لحل معادلتين خطيتين:

Using Crammer's Rule to Solve Two Linear Equations

لحل نظام معادلتين خطيتين:

$$١س + ب ص = ل$$

$$ج س + د ص = م$$

نكتب: $\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ب \\ ج & د \end{vmatrix}$ وهو محدد مصفوفة المعاملات

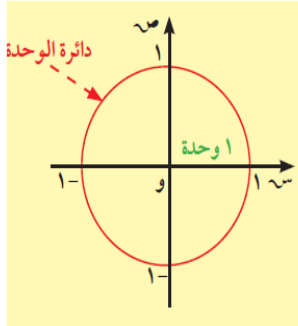


$\Delta_s = \begin{vmatrix} ب & ل \\ د & م \end{vmatrix}$ وهو محدد مصفوفة المعاملات بعد استبدال العمود الزائد بعمود معاملات س

$\Delta_v = \begin{vmatrix} ل & ١ \\ م & ج \end{vmatrix}$ وهو محدد مصفوفة المعاملات بعد استبدال العمود الزائد بعمود معاملات ص

$$\text{فإن } س = \frac{\Delta_s}{\Delta}, \text{ ص} = \frac{\Delta_v}{\Delta} \text{ (بشرط أن } \Delta \neq ٠ \text{)}$$

دائره الوحدة والمستوى الأحداث



Unit Circle

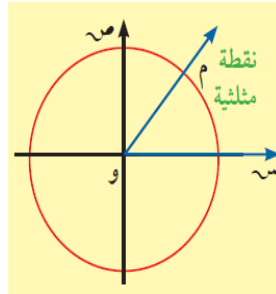
دائرة الوحدة

هي دائرة مركزها نقطة الأصل و، وطول نصف قطرها واحد وحدة.

The Triangular Point

النقطة المثلثية

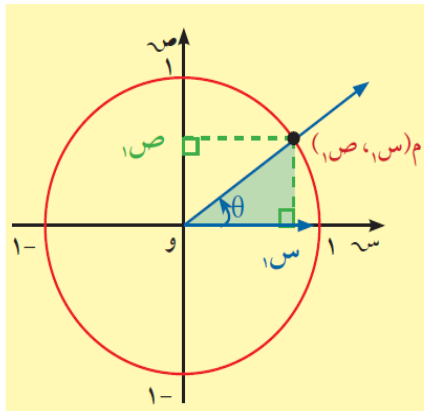
هي نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية موجهة في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة.



معلومة مفيدة:

عادة ما يستخدم الحرف اليوناني θ (يلفظ ثيتا) للتعبير عن قياس زاوية.

النسب المثلثية للزاوية:



في الشكل المقابل المثلث المظلّل قائم الزاوية.
تعرف من دراستك السابقة: أن $\text{جتا } \theta = \frac{\text{الضلع المجاور}}{\text{الوتر}}$
∴ طول الوتر = 1 ∴ $\text{جتا } \theta = \frac{\text{الضلع المجاور}}{1} = \text{س}$

أي أن $\text{جتا } \theta = \text{س}$

$$\therefore \text{جتا } \theta = \frac{\text{الضلع المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{س}}{1} = \text{س}$$

أي أن $\text{جا } \theta = \text{ص}$

$$\text{كذلك جا } \theta = \frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ص}}{1} = \text{ص}$$

وبالتالي تكون النسب المثلثية للزاوية θ هي:

معلومة مفيدة:

عندما نقول الزاوية θ أو α أو ... نقصد الزاوية التي قياسها θ أو α أو ...

$$\text{جا } \theta = \text{س}$$

$$\text{ظتا } \theta = \frac{\text{س}}{\text{ص}}, \text{ ص} \neq 0$$

$$\text{قتا } \theta = \frac{1}{\text{ص}}, \text{ ص} \neq 0$$

$$\text{جتا } \theta = \text{س}$$

$$\text{ظا } \theta = \frac{\text{ص}}{\text{س}}, \text{ س} \neq 0$$

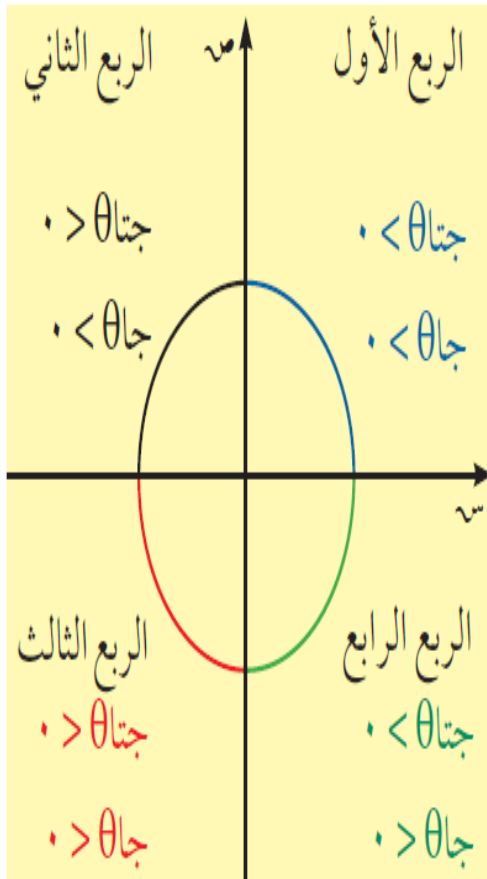
$$\text{قا } \theta = \frac{1}{\text{س}}, \text{ س} \neq 0$$

معلومة رياضية :

– الاتجاه الموجب هو
الاتجاه المعاكس
لدوران عقارب
الساعة.

– النقطة المثلثية
(س، ص) يمكن
التعبير عنها
بـ (جتا θ ، جتا θ).

موقع
المنهج الكويتية
almanahj.com/kw



من الشكل: يمكن ملاحظة ما يلي:

- إذا كانت θ في الربع الأول فإن: جتا $\theta > 0$ ، جتا $\theta > 0$.
- إذا كانت θ في الربع الثاني فإن: جتا $\theta < 0$ ، جتا $\theta > 0$.
- إذا كانت θ في الربع الثالث فإن: جتا $\theta < 0$ ، جتا $\theta < 0$.
- إذا كانت θ في الربع الرابع فإن: جتا $\theta > 0$ ، جتا $\theta < 0$.

زاوية الإسناد

Reference Angle

تحتاج أحياناً إلى معرفة قيم النسب المثلثية لزاوية θ ضلعها النهائي موجود في الربع الثاني أو الربع الثالث أو الربع الرابع. يمكن إسناد هذه الزاوية إلى زاوية حادة α ، محددة بمحور السينات والضلع النهائي للزاوية θ .

معلومة

الرمز α يُقرأ ألفا.

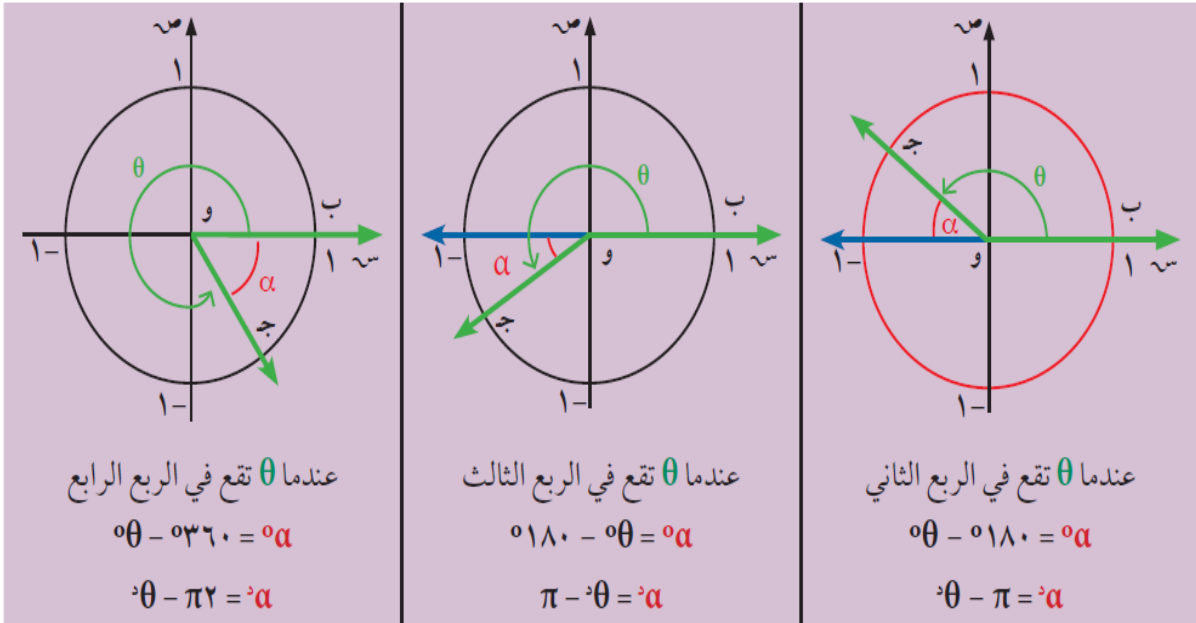
تذكر

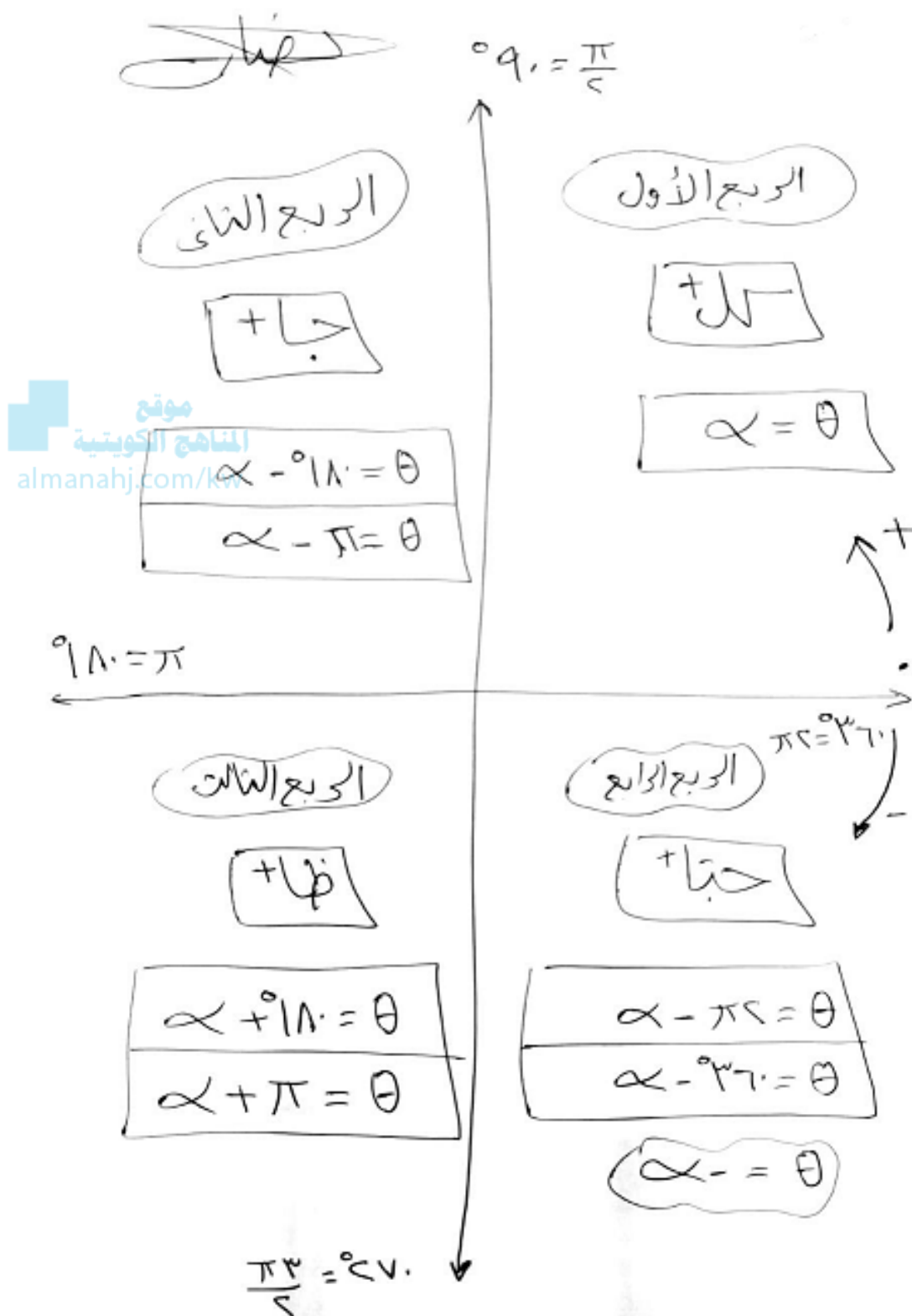
الزاوية الموجهة بـ $\hat{O}$ جـ يمكن أن نرمز لها بالرمز $(\hat{O}, \hat{J})$ حيث $\hat{O}$ الضلع الابتدائي، و $\hat{J}$ الضلع النهائي.

تعريف زاوية الإسناد:

زاوية الإسناد للزاوية الموجهة $(\hat{O}, \hat{J})$ التي في وضع قياسي هي الزاوية الحادة α التي يصنعها الضلع النهائي للزاوية الموجهة مع محور السينات. فإذا كان α زاوية الإسناد فإن: $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

الأشكال التالية توضح الحالات المختلفة لإيجاد زاوية الإسناد:





العلاقات بين الدوال المثلثية

قانون:

$$\text{جتا}(\theta -) = \text{جتا}\theta$$

$$\text{جا}(\theta -) = -\text{جا}\theta$$

وبالتالي $\text{ظا}(\theta -) = -\text{ظا}\theta$ بشرط أن يكون $\text{ظا}\theta$ معرّف.

قانون:

$$\text{جتا}(\theta - \pi) = -\text{جتا}\theta$$

$$\text{جا}(\theta - \pi) = \text{جا}\theta$$

وبالتالي $\text{ظا}(\theta - \pi) = -\text{ظا}\theta$ شرط أن يكون $\text{ظا}\theta$ معرّفًا.

معلومة مفيدة :

إذا كانت الزاوية α هي زاوية الإسناد للزاوية θ فإن:

$$|\text{جا}\theta| = \alpha$$

$$|\text{جتا}\theta| = \alpha$$

$$|\text{ظا}\theta| = \alpha$$

فمثلاً: الزاوية 60° زاوية إسناد للزاوية 120° .

$$|\text{جتا} 120^\circ| = 60^\circ$$

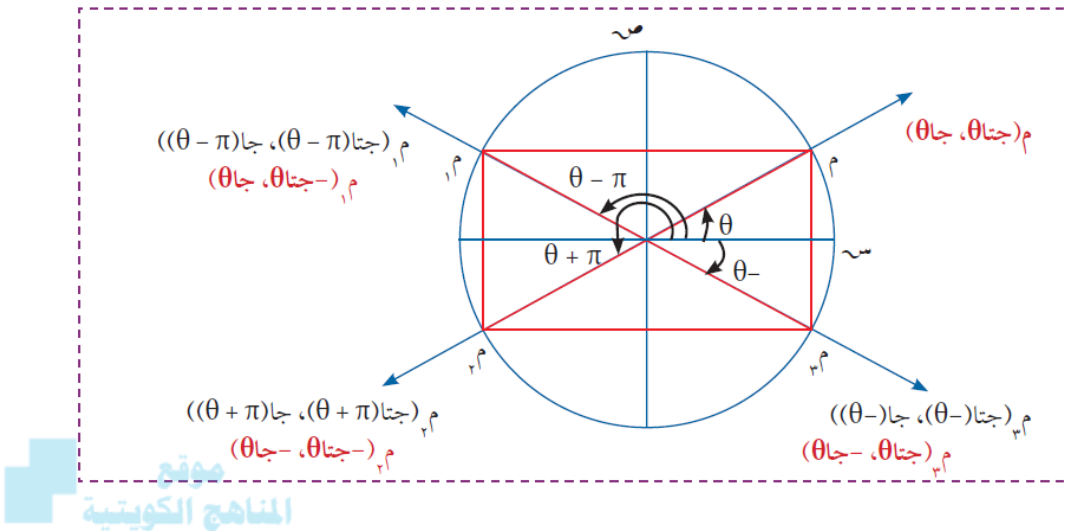
قانون:

$$\text{جتا}(\theta + \pi) = -\text{جتا}\theta$$

$$\text{جا}(\theta + \pi) = -\text{جا}\theta$$

وبالتالي $\text{ظا}(\theta + \pi) = \text{ظا}\theta$ شرط أن يكون $\text{ظا}\theta$ معرّفًا.

الخلاصة:



almanahj.com/kw

قانون:

$$\text{ج}(\theta - \frac{\pi}{2}) = \text{ج} \theta$$

$$\text{ج} \theta = \text{ج}(\theta - \frac{\pi}{2})$$

$$\text{ظ}(\theta - \frac{\pi}{2}) = \text{ظ} \theta$$

شرط أن يكون θ ظتا معرفًا.

قانون:

$$\text{ج}(\theta + \frac{\pi}{2}) = \text{ج} \theta$$

$$\text{ج} \theta = \text{ج}(\theta + \frac{\pi}{2})$$

$$\text{ظ}(\theta + \frac{\pi}{2}) = \text{ظ} \theta$$

شرط أن يكون θ ظتا معرفًا.

إذا كان θ عددًا صحيحًا فإن:

$$\text{ج}(\theta + 2\pi) = \text{ج} \theta$$

$$\text{ج} \theta = \text{ج}(\theta + 2\pi)$$

$$\text{ظ}(\theta + 2\pi) = \text{ظ} \theta \quad \text{حيث } \theta \text{ ظتا معرف}$$

تعريف:

إذا كانت (س، ص) هي النقطة المثلثية لزاوية موجهة في الوضع القياسي قياسها θ فإن:

١ جتا $\theta = \text{ص}$ $\forall \theta \in \mathbb{R}$

٢ جتا $\theta = \text{س}$ $\forall \theta \in \mathbb{R}$

٣ ظا $\theta = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$ ، $\text{س} \neq 0$ حيث $\theta \in \mathbb{R}$

٤ قتا $\theta = \frac{1}{\text{س}}$ ، $\text{س} \neq 0$ حيث $\theta \in \mathbb{R}$

٥ قتا $\theta = \frac{1}{\text{ص}}$ ، $\text{ص} \neq 0$ حيث $\theta \in \mathbb{R}$

٦ ظتا $\theta = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$ ، $\text{ص} \neq 0$ حيث $\theta \in \mathbb{R}$

حل معادلات مثلثية

حل المعادلة: جتا س = جتا θ

هو س = $\theta + 2\pi ك$ أو س = $-\theta + 2\pi ك$ (ك $\in \mathbb{Z}$)

لاحظ أن جيب تمام الزاوية يكون موجباً عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الرابع.

حل المعادلة جتا س = جتا θ

هو س = $\theta + 2\pi ك$ أو س = $(\theta - \pi) + 2\pi ك$ ، (ك $\in \mathbb{Z}$)

لاحظ أن جيب الزاوية يكون موجباً عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثاني.

حل المعادلة ظا س = ظا θ هو س = $\theta + \pi ك$ ، (ك $\in \mathbb{Z}$)

لاحظ أن ظل الزاوية يكون موجباً عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثالث.

المتطابقات المثلثية



جا² + جتا² = 1 تسمى متطابقة فيثاغورث



$$1 + \theta \text{ ظا}^2 = \theta \text{ قجا}^2$$

$$1 + \theta \text{ ظتا}^2 = \theta \text{ قتا}^2$$

المستوى الأحداثى

المسافة بين نقطتين:

قانون:

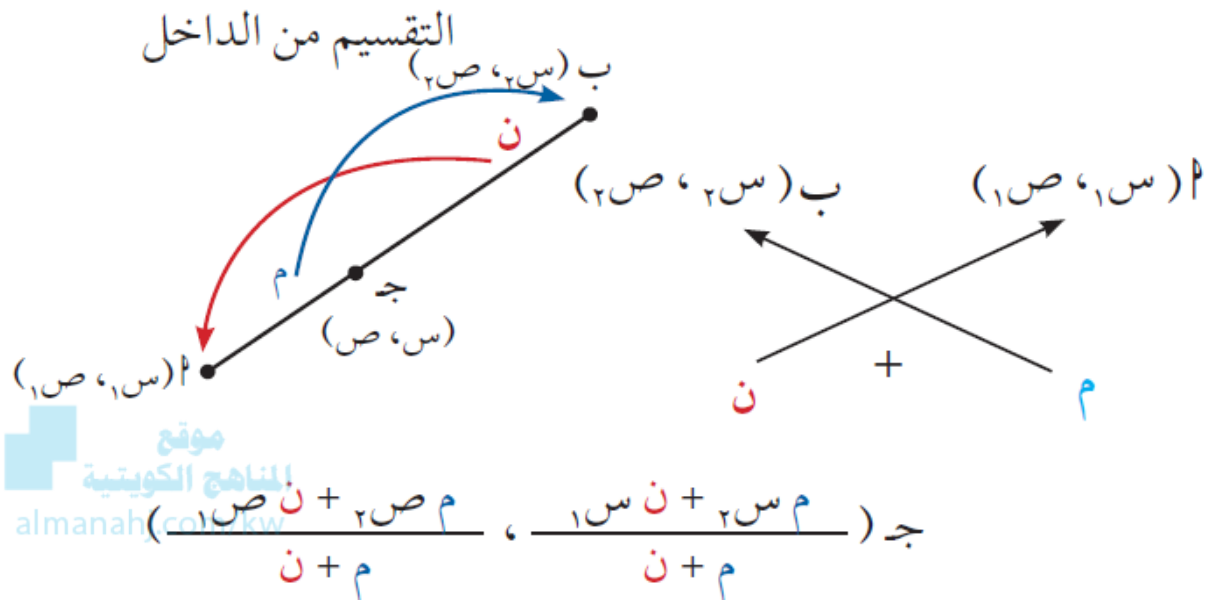
المسافة بين أي نقطتين $A(s_1, v_1)$ ، $B(s_2, v_2)$ تساوي $\sqrt{(s_2 - s_1)^2 + (v_2 - v_1)^2}$

نقطة المنتصف:

قانون:

إذا كانت $A(s_1, v_1)$ ، $B(s_2, v_2)$ فإن إحداثيات نقطة المنتصف هي $M(s, v)$ حيث $s = \frac{s_1 + s_2}{2}$ ، $v = \frac{v_1 + v_2}{2}$.

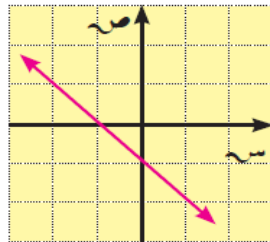
نقطة التقسيم من الداخل:



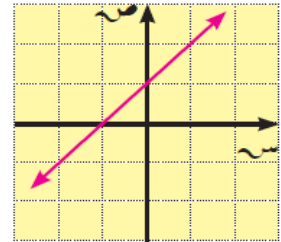
ميل الخط المستقيم:

$$\text{الميل} = \frac{\text{التغير الرأسى}}{\text{التغير الأفقى}} = \frac{ص_1 - ص_2}{س_1 - س_2}, \text{ حيث } س_1 - س_2 \neq 0$$

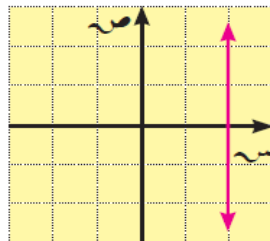
ميل المستقيم سالب



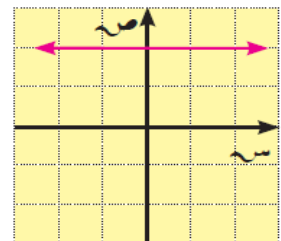
ميل المستقيم موجب



المستقيم الرأسى
ليس له ميل



ميل المستقيم الأفقى
يساوي صفرًا



تذكر أن العلاقة بين ظل الزاوية θ التي يصنعها مستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وميل هذا المستقيم m هي: $m = \tan \theta$.

معادلة الخط المستقيم

- الميل (m).
- نقطة من نقاط المستقيم ولتكن (s_1 , v_1).

تكون معادلة المستقيم: $v - v_1 = m(s - s_1)$.

موقع
المنهج الكويتية
almanahi.com/lw

معادلة المستقيم الرأسي هي $s = s_1$ (وهذا المستقيم ليس له ميل)

تذكر:

معادلة محور السينات هي: $v = 0$
معادلة محور الصادات هي: $s = 0$
وبالتالي إحداثيات نقاط محور السينات
(s , 0) وإحداثيات نقاط محور
الصادات (0 , v).

معلومة مفيدة:

الصورة العامة لمعادلة المستقيم هي:

$$as + bv + c = 0$$

حيث a , b لا يساويان الصفر معًا.

شرط التعامد وشرط التوازي:

المستقيمان ل، ه متوازيان ، ميل المستقيم ه = ميل المستقيم ل

تذكر:

إذا كان ميل المستقيم هو $\frac{p}{q}$
فإن ميل المستقيم المتعامد معه
هو $-\frac{q}{p}$ حيث $p, q \neq 0$

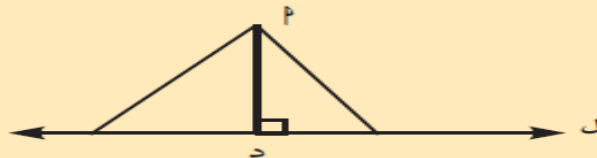
موقع
المنهج الكويتية
almanahj.com/kw

البعد بين نقطة ومستقيم:

إذا كانت معادلة المستقيم على الصورة ل: $ax + by + c = 0$ ، فإن البعد f بين النقطة د (س₁ ، ص₁) والمستقيم ل
تعطى بالصيغة: $f = \frac{|as_1 + bs_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

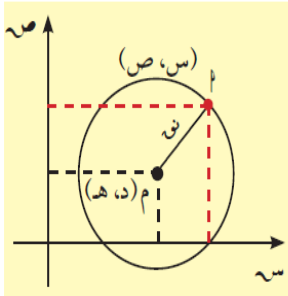
إذا كانت النقطة د تنتمي إلى المستقيم ل فالبعد بينهما يساوي صفرًا.

بعد نقطة عن مستقيم هو طول
القطعة العمودية المرسومة من
النقطة على الخط المستقيم.



د هي أقصر مسافة بين النقطة P
والمستقيم ل.

معادلة الدائرة



الصورة القياسية لمعادلة الدائرة:

لأي دائرة مركزها م(د، هـ) وطول نصف قطرها ر.

$$r^2 = (s - d)^2 + (v - h)^2$$

إذا كان ر = طول نصف قطر الدائرة التي مركزها نقطة الأصل، فإن معادلتها على الصورة: $s^2 + v^2 = r^2$

الصورة العامة لمعادلة دائره

س $s^2 + v^2 + ل s + ك v + ب = 0$ ، حيث ل، ك، ب ثوابت
وتسمى الصورة العامة لمعادلة الدائرة التي مركزها $(-\frac{ل}{2}, -\frac{ك}{2})$
طول نصف قطرها $r = \frac{1}{2} \sqrt{ل^2 + ك^2 - 4ب}$ حيث $ل^2 + ك^2 - 4ب > 0$.

ملاحظة

عندما يكون لدينا معادلة على الصورة العامة التالية: $s^2 + v^2 + ل s + ك v + ب = 0$
يمكننا معرفة ما تمثله بيانياً هذه المعادلة بمجرد مقارنة
 $ل^2 + ك^2 - 4ب$ مع الصفر.

- ١ عندما $ل^2 + ك^2 - 4ب > 0$ فإن المعادلة لا تمثل معادلة دائرة.
- ٢ عندما $ل^2 + ك^2 - 4ب = 0$ فإن المعادلة تمثل نقطة.
- ٣ عندما $ل^2 + ك^2 - 4ب < 0$ فإن المعادلة تمثل دائرة.

الأحصاء

المتوسط الحسابي هو ناتج قسمة مجموع قيم البيانات على عدد هذه القيم: $\bar{x}$

التباين والانحراف المعياري Variance and Standard Deviation

إذا كانت $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ مجموعة من القيم عددها n حيث متوسطها الحسابي $\bar{x}$ فإن:



$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

والتباين σ^2 ومنه الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

الانحراف المعياري يبين تشتت البيانات عن المتوسط الحسابي لهذه البيانات

نكون الجدول التالي:

القيمة x_i	الانحراف عن المتوسط الحسابي $x_i - \bar{x}$	مربع الانحراف عن المتوسط الحسابي $(x_i - \bar{x})^2$
--------------	---	--

معلومة رياضية:

- $(x_i - \bar{x})$ هي انحراف x_i عن المتوسط الحسابي.
- المتوسط الحسابي: هو ناتج قسمة مجموع قيم البيانات على عدد هذه القيم.

إذا كانت $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ هي قيم بيانات؛ $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ هي تكرار هذه القيم على الترتيب فيكون التباين لهذه القيم هو:

$$s^2 = \frac{t_1(s_1 - \bar{s})^2 + t_2(s_2 - \bar{s})^2 + \dots + t_n(s_n - \bar{s})^2}{t_1 + t_2 + \dots + t_n}$$

$$= \frac{\sum_{r=1}^n t_r (s_r - \bar{s})^2}{\sum_{r=1}^n t_r}$$

$$\sqrt{\frac{\sum_{r=1}^n t_r (s_r - \bar{s})^2}{\sum_{r=1}^n t_r}}$$

والانحراف المعياري = $s = \sqrt{\dots}$



لحساب التباين لقيم بيانات في جدول تكراري ذو فئات نعتبر s_r هي مركز الفئة.

$$\text{المتوسط الحسابي: } \frac{\sum s_r t_r}{\sum t_r}$$

نكون الجدول التالي:

الفئة	مركز الفئة s_r	التكرار t_r	$(s_r - \bar{s})$	$(s_r - \bar{s})^2$	$(s_r - \bar{s})^2 \times t_r$

Counting Principle

مبدأ العد

إذا كان لدينا عملية مركبة مع تتكون من عدة عمليات متتالية عددها n وهي :

n_1 مع n_2 مع n_3 ... مع n_n وإذا كانت:

n_1 يمكن أن تحدث بـ n_1 طريقة،

n_2 يمكن أن تحدث بـ n_2 طريقة،

:

n_n يمكن أن تحدث بـ n_n طريقة،

فإن عدد الطرق التي يمكن أن يحدث بها الإجراء ط هي:

$$n_1 \times n_2 \times \dots \times n_n$$

إن مفتاح حل مسائل مبدأ العد هو أن نحدد المراحل n_1 مع n_2 مع n_3 ... مع n_n وبمجرد تعريفها، يتم تحديد عدد مرات حدوث كل منها، ومن ثم ضرب هذه الأعداد للحصول على عدد الطرق الممكنة لحل المسألة.



تذكر:

مضروب n أو

$$n! \text{ هو: } n \times (n-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

$$\text{فمثلاً: } 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$1! = 1 \quad \text{تقرأ مضروب صفر} = 1$$

الترتيب مهمًا ومعتمدًا. مثل هذا الترتيب يسمى **بالتباديل**

قانون

$${}^n P_r = \frac{n!}{(n-r)!} \text{ حيث } r, n \in \mathbb{N}, r \leq n, {}^n P_0 = 1$$

قانون التباديل Law of Permutations

عدد تباديل n من العناصر المختلفة مأخوذة منها في كل مرة هو:

$$n! = n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1), \quad r, n \in \mathbb{N}, r \leq n$$

عندما $r = n$ يعرف $n!$.

$$\text{لاحظ: } n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-r+1)$$

ر عامل

$$\frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-r)}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-r)} \times (n-r+1) \times (n-r+2) \times \dots \times n = \frac{n!}{(n-r)!}$$



مساعدة:

يمكن استخدام الآلة الحاسبة
لإيجاد عدد التباديل،
اضغط على **nPr**.

موقع
المنهج الكويتية
almanahj.com/kw

التوافيق Combinations

عندما تريد إيجاد عدد المجموعات الجزئية والمكون كل منها من r عنصر، والتي يمكن اختيارها من مجموعة مكونة من n عنصر ($r \leq n$) دون الاعتماد على الترتيب فنحن نحسب التوافيق.

تعريف: قانون التوافيق

إذا كان n, r عدداً صحيحان موجبان حيث $n \geq r$ ، فإن:

عدد التوافيق المكونة كل منها من r من الأشياء والمختارة من بين n من الأشياء هو:

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

ملاحظة:

يستخدم الرمز $\binom{n}{r}$ للتعبير عن
عدد التوافيق.

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{r!} = \text{عدد التوافيق}$$

ملاحظات:

$$(1) \text{ عندما } r = 0 \text{ يُعرَّف } \binom{n}{0} = 1$$

$$(2) \binom{n}{n} = 1$$

موقع
المنهج الكويتية
almanahj.com/kw



تستخدم الخطوات التالية
لإيجاد التوافيق بواسطة الآلة الحاسبة:

$$nCr = r$$

الاحتمال

في كل تجربة عشوائية، نهتم أولاً بمعرفة مجموعة النواتج الممكنة والتي تسمى فضاء العينة (ف).

إذا كانت جميع نواتج التجربة لها فرصة الظهور نفسها فإن احتمال الحدث P هو:

$$L(\text{الحدث } P) = \frac{\text{عدد نواتج الحدث } P}{\text{عدد النواتج في فضاء العينة}}$$

$$\text{أي أن: } L(P) = \frac{n(P)}{n(F)}$$

احتمال وقوع حدث ما ، هو عدد ينتمي إلى الفترة $[0, 1]$.

خواص الاحتمال لحدث ما

ليكن P حدث في فضاء عينة F منته وغير خالٍ فإن:

١ $0 \leq P \leq 1$

٢ إذا كان $P = \{ \} = P(\emptyset)$ ويسمى P حدثاً مستحيلاً.

٣ إذا كان $P = F = P(\Omega)$ ويسمى P حدثاً مؤكداً.

٤ مجموع احتمالات جميع النواتج في فضاء العينة يساوي ١.

- تقاطع حدثين A, B هو الحدث الذي يتألف من النواتج الموجودة في A وفي B في آن معاً ويرمز إليه بـ $A \cap B$.
- اتحاد حدثين A, B هو الحدث الذي يتألف من النواتج الموجودة في A أو في B ويرمز إليه بـ $A \cup B$.
- الحدثان A, B هما متنافيان إذا لم يكن لهما ناتج مشترك أي $A \cap B = \emptyset$.
- متمم حدث A يرمز إليه بـ $\bar{A}$ وهو الحدث الذي يتألف من كل النواتج الموجودة في فضاء العينة وغير موجودة في A .
- الأحداث المستقلة: يكون حدثان مستقلان إذا كان حدوث أحدهما ليس له تأثير على احتمال حدوث الآخر.
- قاعدة الضرب للأحداث المستقلة:

إذا كان A, B حدثان مستقلان فإن احتمال وقوع الحدثين معاً هو: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

قاعدة الاحتمال لاتحاد حدثين:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

قاعدة الاحتمال لمتنصف الحدث:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

قاعدة الاحتمال لحدثين متنافيين:

إذا كان A ، B حدثين متنافيين من فضاء العينة S فإن $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

موقع

قاعدة الضرب للأحداث المستقلة Multiplication principle of Independent Events

إذا كان A ، B حدثان مستقلان فإن احتمال وقوع الحدثين معاً هو:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

- الحدث التابع: يكون الحدث تابِعاً عندما يتأثر ظهور هذا الحدث بحدث سابق.

- الاحتمال المشروط:

ليكن لدينا حدثين A ، B ونفترض أن $P(A) \neq 0$.

احتمال وقوع الحدث B بشرط وقوع الحدث A يسمى الاحتمال المشروط ويكتب $P(B|A)$ ويقرأ «احتمال الحدث B بشرط A ».

- قاعدة الاحتمال المشروط:

إذا كان وقوع الحدث B مشروطاً بوقوع الحدث A ($P(A) \neq 0$)

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A).$$