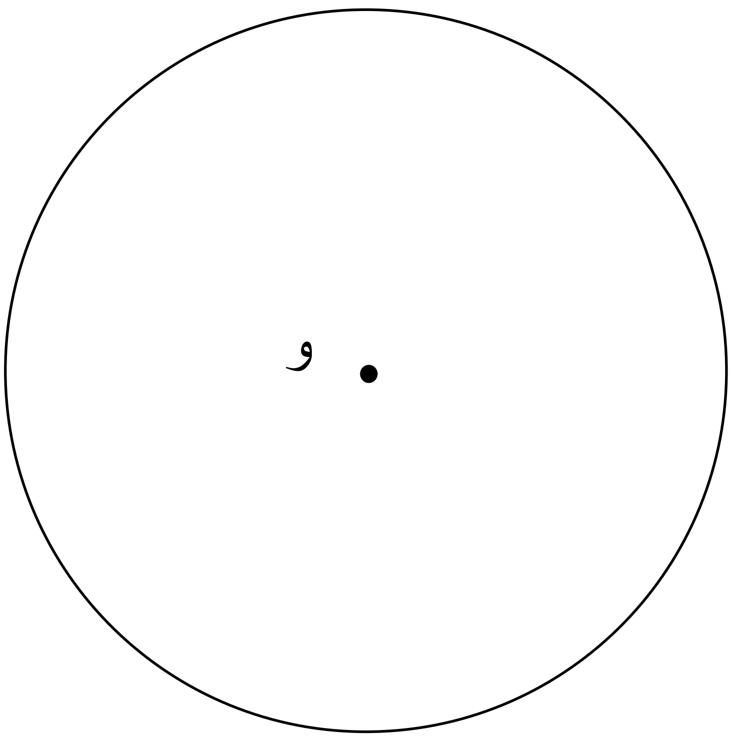
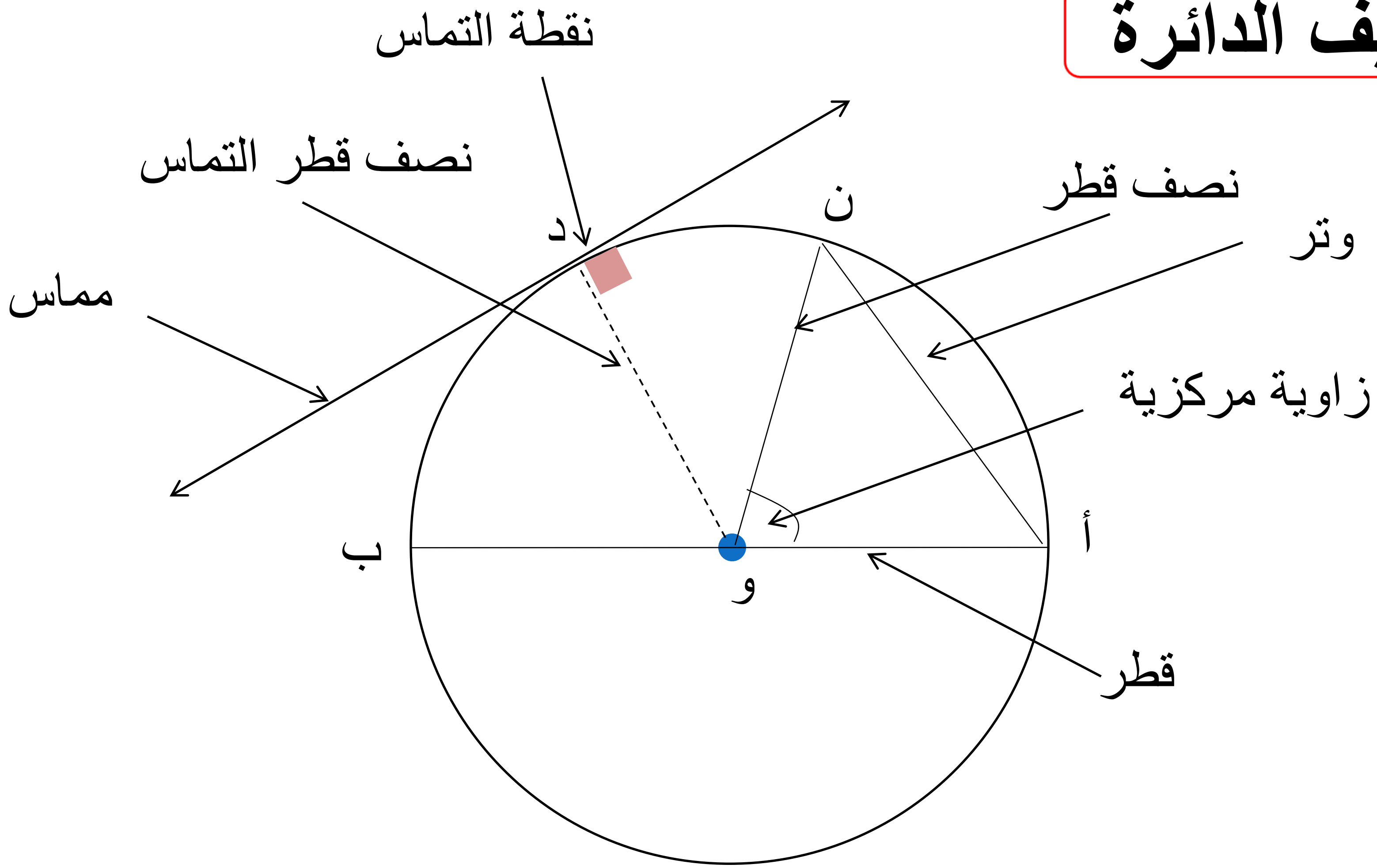
تعريف الدائرة

الدائرة هي مجموعة نقاط المستوى التي تبعد كل منها عن نقطة ثابتة م في المستوى بعدا ثابتا

تسمى النقطة الثابتة مركز الدائرة ويسمى البعد الثابت طول نصف القطر ويرمز إليه عادة بالرمز نق

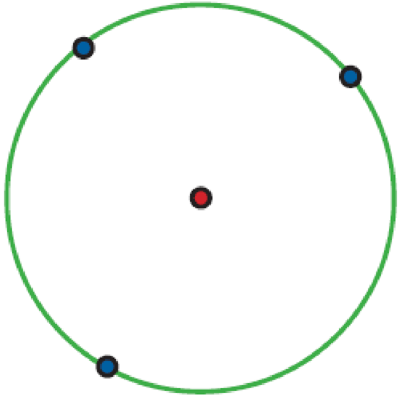


تعريف الدائرة



نظرية ١

كل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تمر بها دائرة واحدة فقط



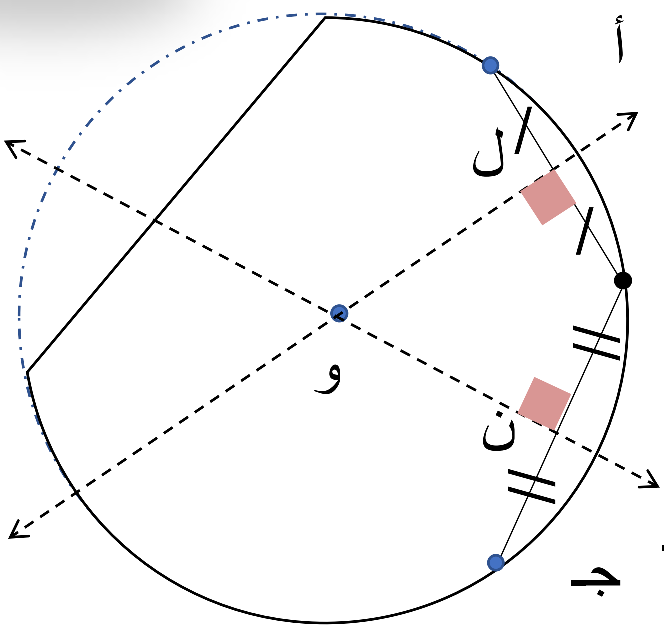
مثال (١)

علم الآثار: وجد عالم آثار قطعًا صغيرة من جرة خزفية بالإضافة إلى قطعة كبيرة دائرية الشكل من فوهة الجرة. كيف تستطيع مساعدة العالم لإعادة ترميم الجرة، وذلك بإيجاد مركز وطول نصف قطر القطعة الدائرية الكبيرة؟

المعطيات جزء من فوهة الجرة الدائرية

المطلوب ايجاد مركز الدائرة وطول نصف قطرها

البرهان نأخذ ٣ نقاط أ ، ب ، جـ على قوس الدائرة المرسومة والتي تمثل جزءا من فوهة الجرة



نرسم محورا لكل من $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ اللذان يتقاطعان في و

∵ $\overleftrightarrow{\text{و ل}}$ محور $\overline{\text{أ ب}}$

∴ و ب = و أ (١)

∵ $\overleftrightarrow{\text{و ن}}$ محور $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ و ب = و جـ (٢)

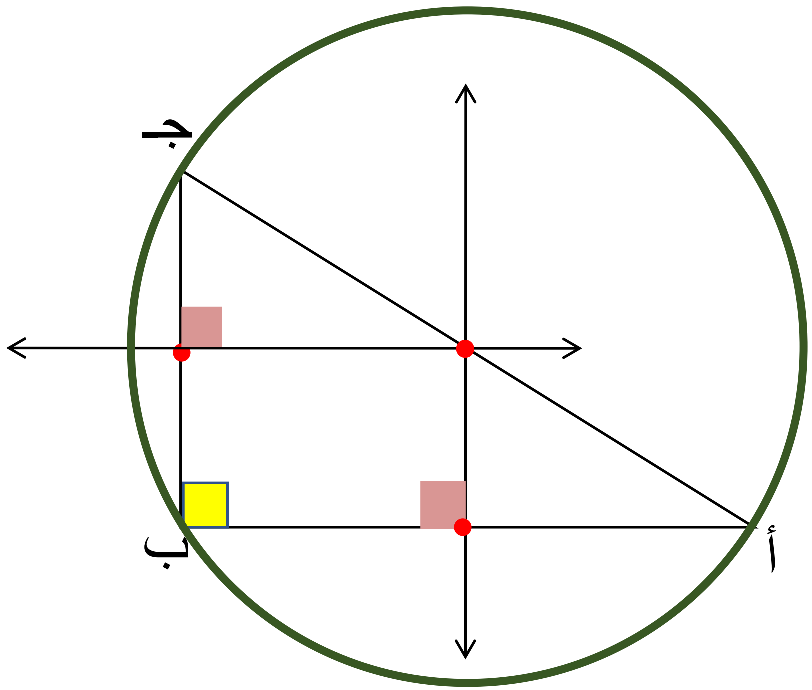
من (١) ، (٢) نستنتج أن النقطة و هي مركز الدائرة .

∴ طول و أ = طول نصف قطر الدائرة .

٢٠٢١/٠١/٢٥ ١٠:٢٤ م

حاول أن تحل

١ استخدم المفهوم السابق في مثال (١) لإثبات برهان نظرية (١) وتحديد مركز الدائرة المحيطة بمثلث قائم الزاوية.



استنتاج ١

من نقطة خارج مستقيم يوجد مستقيم وحيد يمر بهذه النقطة وعمودي على المستقيم المعلوم

استنتاج ٢

أقصر بعد بين نقطة ومستقيم هو البعد العمودي

(٦ ـ ١) (ب)

مماس الدائرة

المماس

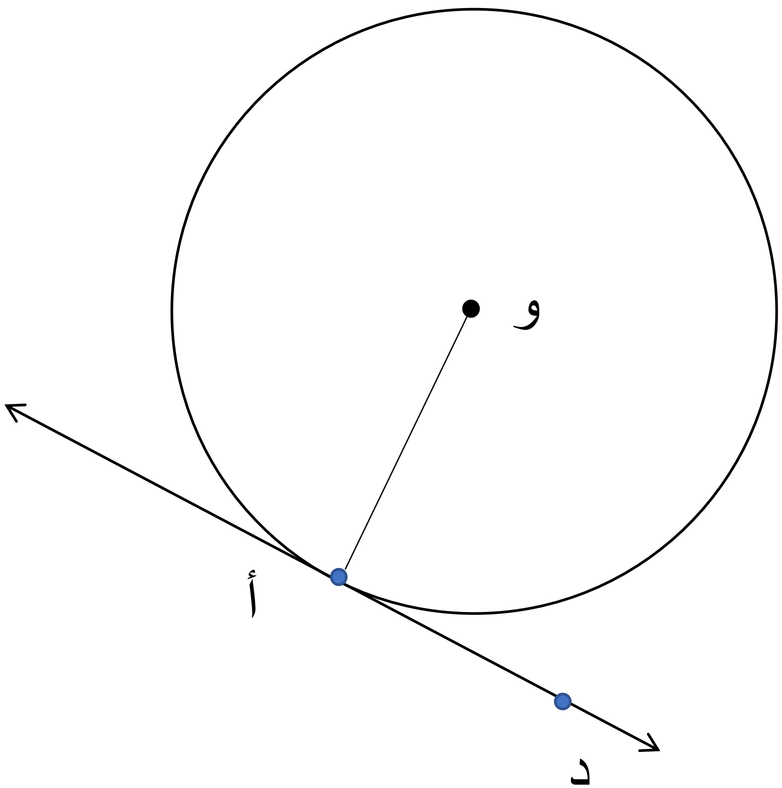
المماس للدائرة هو مستقيم في المستوى يتقاطع مع الدائرة في نقطة واحدة

$\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ مماس

$\overleftarrow{\text{أ د}}$ شعاع مماس

$\overline{\text{أ د}}$ قطعة مماسية

$\overline{\text{أ و}}$ نصف قطر التماس



مماس الدائرة

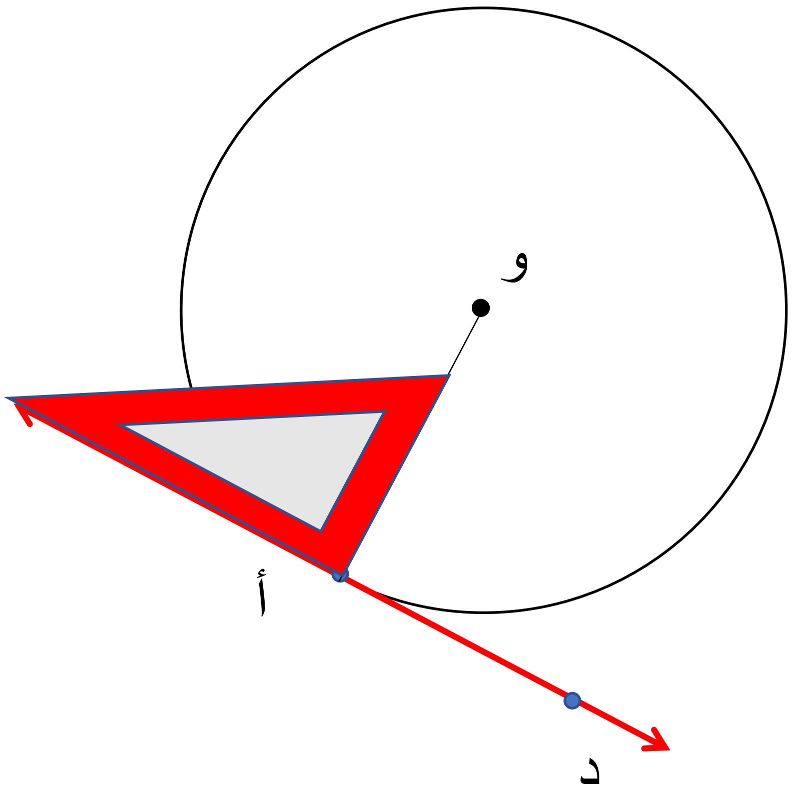
(٦ ـ ١) (ب)

نظرية ٢

المماس يكون عموديا على نصف قطر التماس

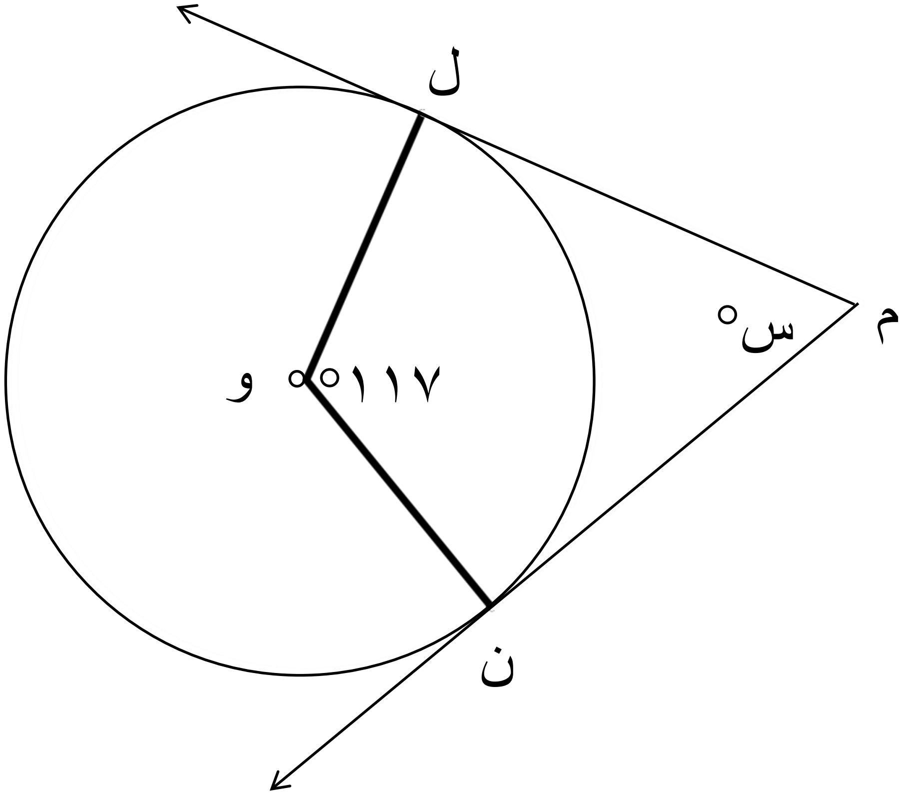
اذا كان مستقيم مماسا لدائرة فإنه يكون متعامدا مع نصف القطر المار بنقطة التماس

أي أن $\overline{\text{و أ}} \perp \overleftrightarrow{\text{د أ}}$



مثال (٢)

في الشكل المقابل م ل ، م ن مماسان للدائرة التي مركزها و أوجد قياس ل م̂ ن



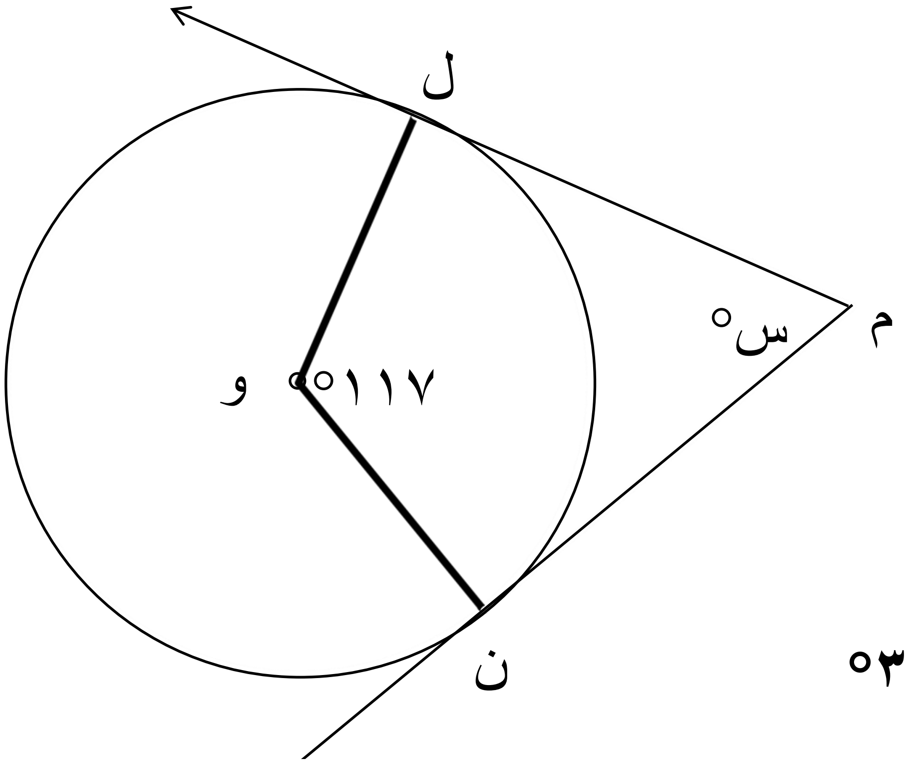
المعطيات

م ل ، م ن مماسان للدائرة و

المطلوب

إيجاد قياس الزاوية ل م̂ ن

البرهان



∵ م ل مماس ، ل و نصف قطر التماس

∴ ق (م لˆ و) = ٩٠°

∵ م ن مماس ، ن و نصف قطر التماس

∴ ق (م نˆ و) = ٩٠°

في الشكل الرباعي م ل و ن

∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠°

ق (مˆ) + ق (لˆ) + ق (وˆ) + ق (نˆ) = ٣٦٠°

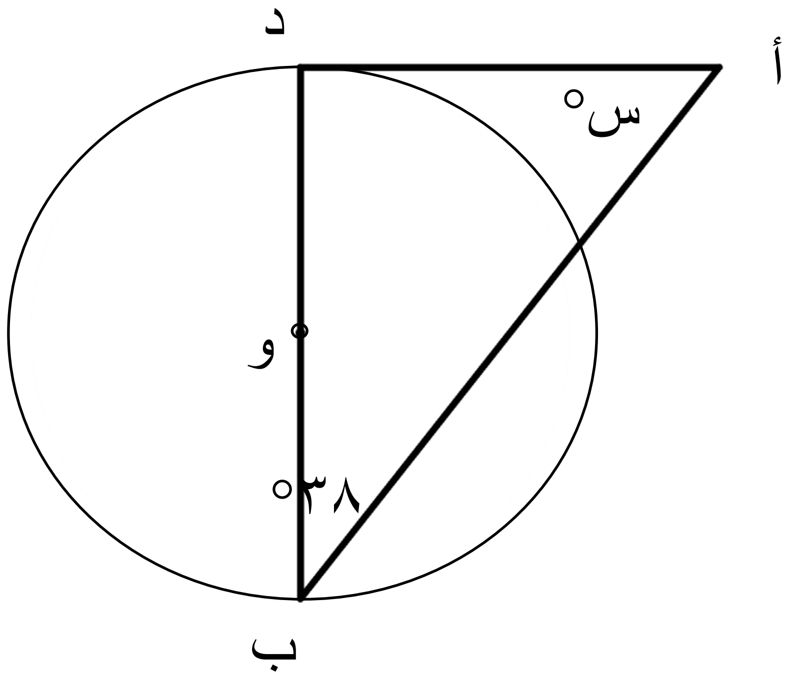
ق (مˆ) = ٣٦٠° − [١١٧° + ٩٠° + ٩٠°] = ٦٣°

حاول أن تحل(٢)

في الشكل المقابل

$\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ مماس للدائرة التي مركزها و

أوجد قيمة س°



المعطيات

$\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ مماس للدائرة

$\overline{\text{د ب}}$ قطر

المطلوب

أوجد قيمة س°

البرهان

∵ أ د مماس ، و د نصف قطر التماس

∴ ق (أ د̂ ب) = ٩٠°

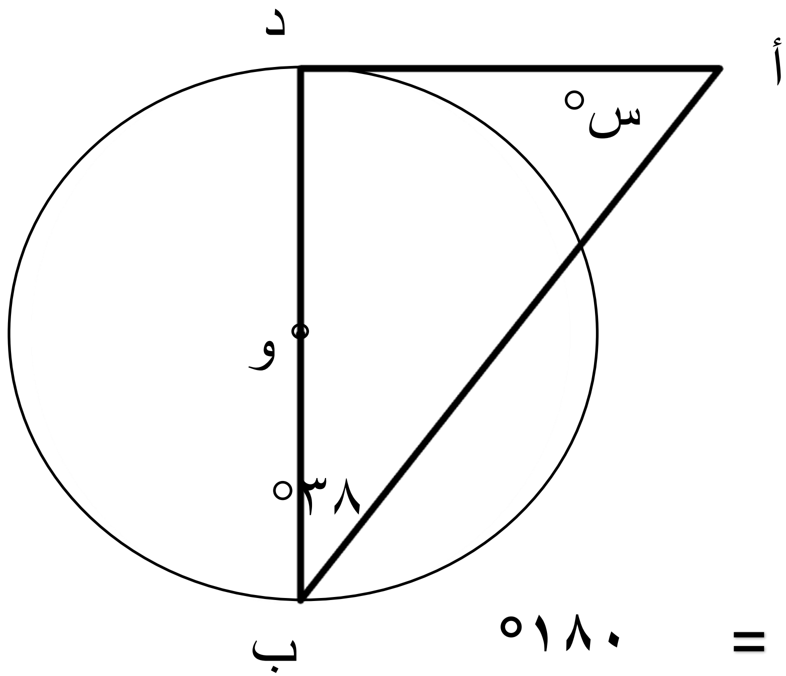
في المثلث أ ب د

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

ق (أ̂) + ق (د̂) + ق (ب̂) = ١٨٠°

ق (د̂) = ١٨٠° ـ [٩٠ + ٣٨]

= ٥٢°



مثال (٣) تطبيق حياتي

يمثل المخطط إطاري الدراجة. أوجد دجـ المسافة بين محوري هذين الإطارين.

إذا كان أد = ٣٢ سم، ب جـ = ٤٠ سم، أب = ٩٦ سم.

المعطيات

دائرة مركزها د ،فيها نق = ٣٢ سم

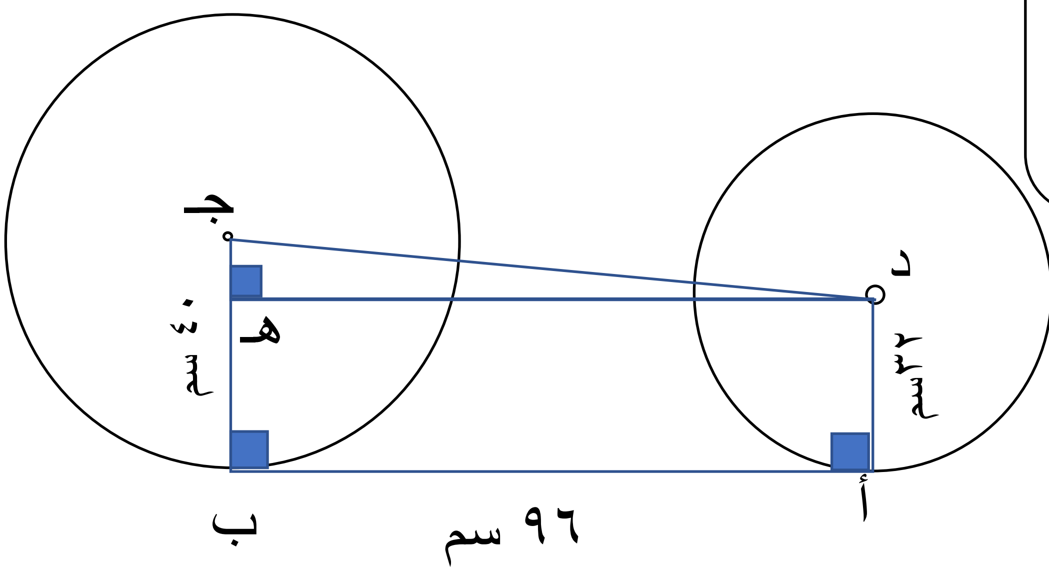
دائرة مركزها جـ ، فيها نق = ٤٠ سم

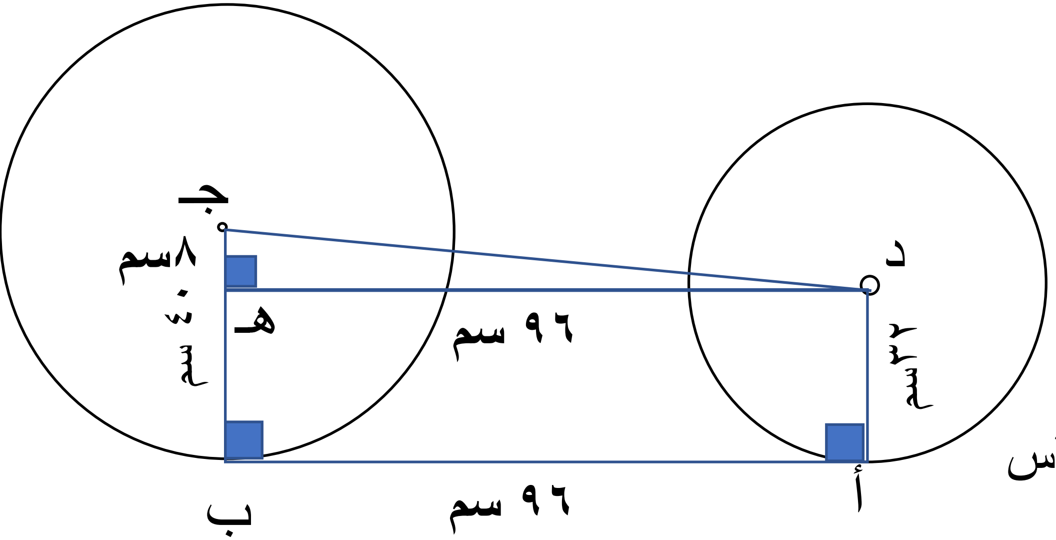
$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماسا للدائرتين

أ ب = ٩٦ سم

المطلوب

أوجد د جـ





العمل : نرسم $\overline{\text{دهـ}} \perp \overline{\text{جـ ب}}$.

البرهان

∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة ، $\overline{\text{د أ}}$ نصف قطر التماس

∴ $\overline{\text{د أ}} \perp \overline{\text{أ ب}}$

∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة ، $\overline{\text{جـ ب}}$ نصف قطر التماس

∴ $\overline{\text{جـ ب}} \perp \overline{\text{أ ب}}$

∴ الشكل د أ ب هـ مستطيل

المثلث د هـ جـ قائم الزاوية في هـ

بتطبيق نظرية فيثاغورث

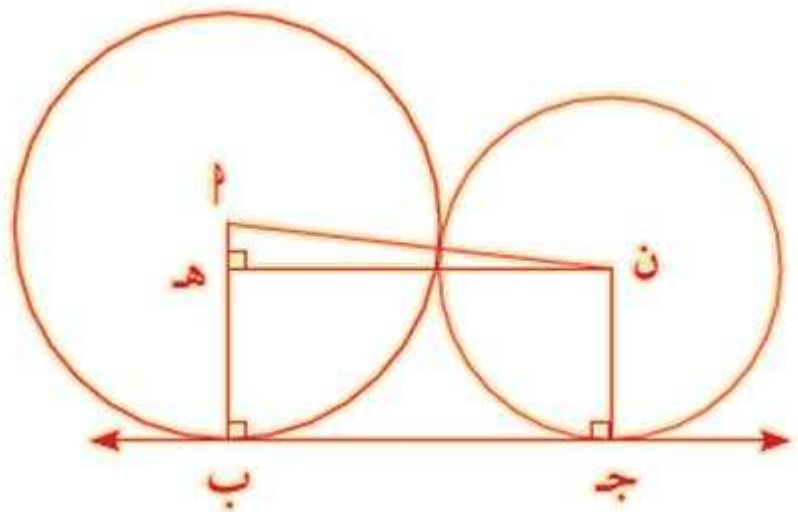
(د جـ)^{٢} = (د هـ)^{٢} + (جـ هـ)^{٢}

= (٩٦)^{٢} + (٨)^{٢} = ٩٢٨٠

د جـ = $\sqrt{\text{٩٢٨٠}}$ = ٩٦,٣ سم تقريبا

حاول أن تحل

٣ يمثل الشكل المقابل مقطعًا لأسطوانتين في معمل الورق.
أوجد طول ب جـ إذا كانت الدائرتان متماستين وطول نصف قطريهما ٥٠ سم، ٤٠ سم على الترتيب.



المعطيات

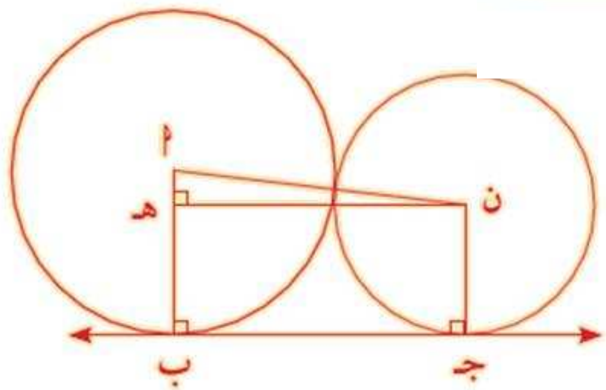
الدائرتان متماستان وطول نصف قطريهما ٥٠سم,٤٠سم على الترتيب

المطلوب

أوجد طول $\overline{\text{ب جـ}}$

حاول أن تحل

٣ يمثل الشكل المقابل مقطعًا لأسطوانتين في معمل الورق.
أوجد طول ب جـ إذا كانت الدائرتان متماستين وطول نصف قطريهما ٥٠ سم، ٤٠ سم على الترتيب.



البرهان

المثلث ن هـ أ قائم الزاوية في هـ

بتطبيق نظرية فيثاغورث

(أ ن)^٢ = (أ هـ)^٢ + (ن هـ)^٢

(ن هـ)^٢ = (أ ن)^٢ - (أ هـ)^٢

= (٩٠)^٢ - (١٠)^٢ = ٨٠٠٠

ن هـ = ٨٩,٤ سم

الشكل ن جـ ب هـ مستطيل

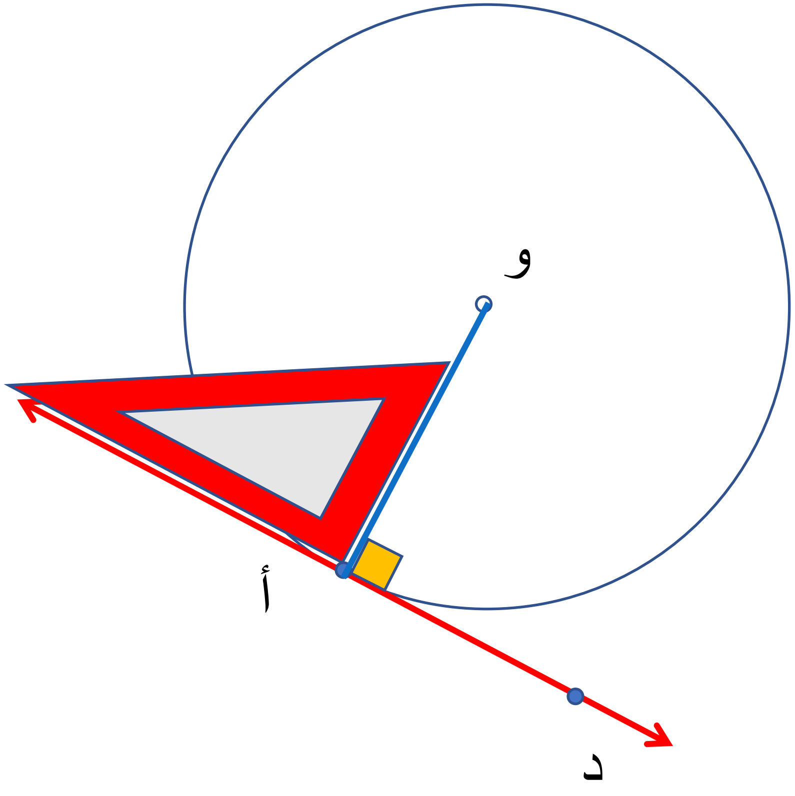
ب جـ = ن هـ = ٨٩,٤ سم

مماس الدائرة

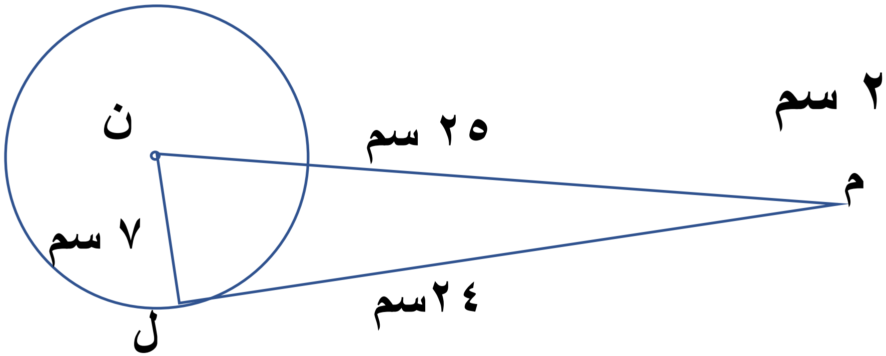
(٦ ـ ١) (ب)

نظرية ٣

المستقيم العمودي على نصف قطر الدائرة
عند نهايته التي تنتمي إلى الدائرة
يكون مماسا للدائرة عند هذه النقطة



مثال ٤



في الشكل المقابل : م ن = ٢٥ سم ، م ل = ٢٤ سم

ل ن = ٧ سم

هل $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ مماس للدائرة

المعطيات

م ن = ٢٥ سم ، م ل = ٢٤ سم ، ل ن = ٧ سم

المطلوب

إثبات أن المستقيم م ل مماس للدائرة

البرهان

(م ن)٢ = (٢٥)٢ = ٦٢٥

(م ل)٢ + (ن ل)٢ = (٢٤)٢ + (٧)٢ = ٦٢٥

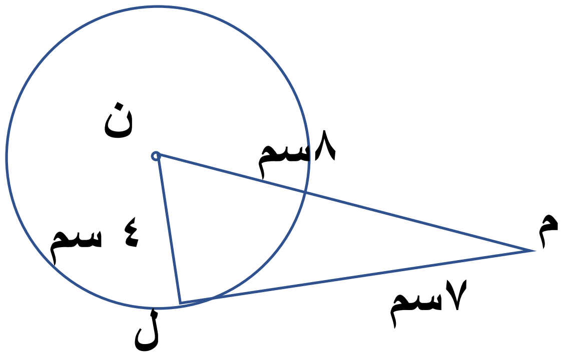
∴ (م ن)٢ = (م ل)٢ + (ن ل)٢

∴ $\boxed{\Delta \text{ م ل ن قائم الزاوية في ل}}$ ∴ $\overleftrightarrow{\text{م ل}} \perp \overline{\text{ل ن}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ مماس للدائرة عند ل

حاول أن تحل ٤

في الشكل المقابل : م ن = ٨ سم ، م ل = ٧ سم
ل ن = ٤ سم ، هل م ل مماس للدائرة فسر إجابتك



المعطيات

م ن = ٨ سم ، م ل = ٧ سم ، ل ن = ٤ سم

المطلوب

هل المستقيم م ل مماس للدائرة

البرهان

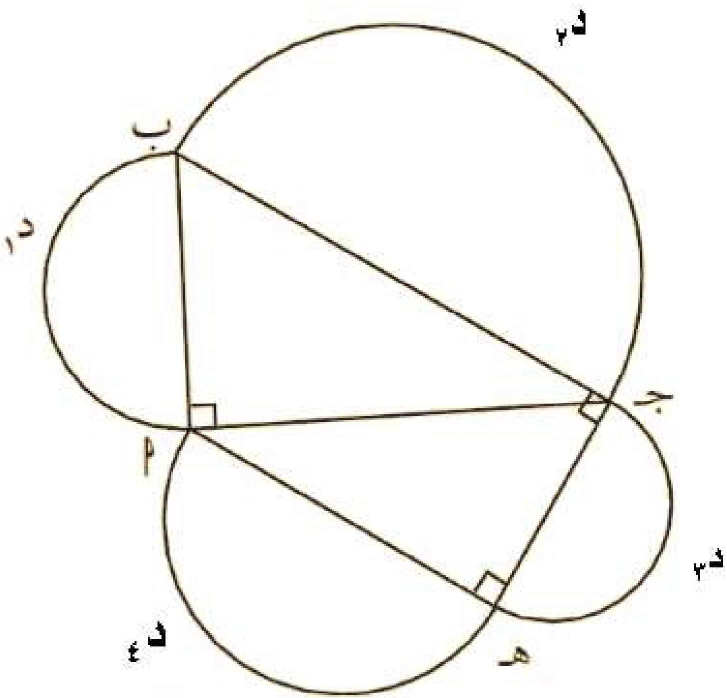
(م ن)^{2} = (٨)^{2} = ٦٤

(ل م)^{2} + (ن ل)^{2} = (٧)^{2} + (٤)^{2} = ٦٥

∴ (ن م)^{2} ≠ (ل م)^{2} + (ن ل)^{2}

∴ Δ م ل ن ليس قائم الزاوية

∴ م ل ليس مماس للدائرة



مثال ٥

في الشكل المقابل : د١ ، د٢ ، د٣ ، د٤ أنصاف دوائر أقطارها
على الترتيب أ ب ، ب جـ ، جـ هـ ، هـ أ
حدد الماسات لأنصاف الدوائر وفسر اجابتك

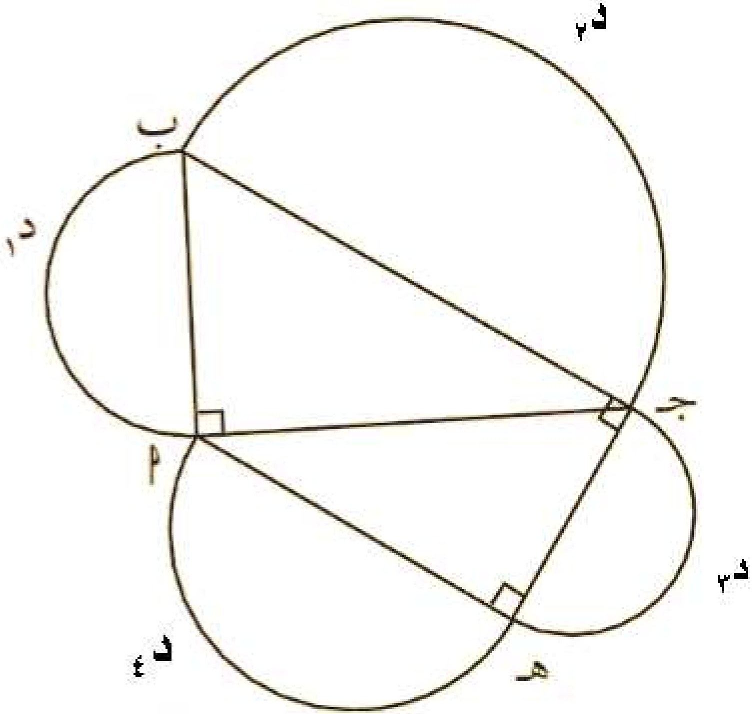
المعطيات

في الشكل المقابل : د١ ، د٢ ، د٣ ، د٤ أنصاف دوائر أقطارها
على الترتيب أ ب ، ب جـ ، جـ هـ ، هـ أ

المطلوب

حدد المماسات لأنصاف الدوائر مع تفسير اجابتك

البرهان



∵ $\overline{\text{أ ب}}$ قطر لنصف الدائرة د١

، $\overline{\text{أ ب}} \perp \overline{\text{جـ أ}}$

∴ $\overline{\text{أ جـ}}$ مماس لنصف الدائرة د١

∵ $\overline{\text{جـ ب}}$ قطر لنصف الدائرة د٢

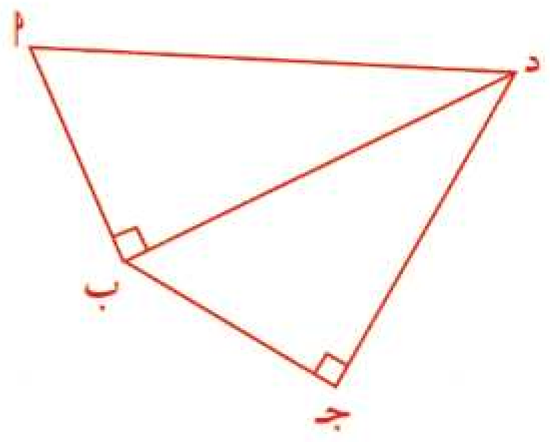
، $\overline{\text{جـ ب}} \perp \overline{\text{هـ جـ}}$

∴ $\overline{\text{هـ جـ}}$ مماس لنصف الدائرة د٢

وبالمثل يمكن اثبات ان $\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ مماس لنصف الدائرة د٣ كذلك يمكن اثبات ان $\overleftrightarrow{\text{هـ جـ}}$ مماس لنصف الدائرة د٢

كذلك $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ مماس لنصف الدائرة د٣

حاول أن تحل ٥



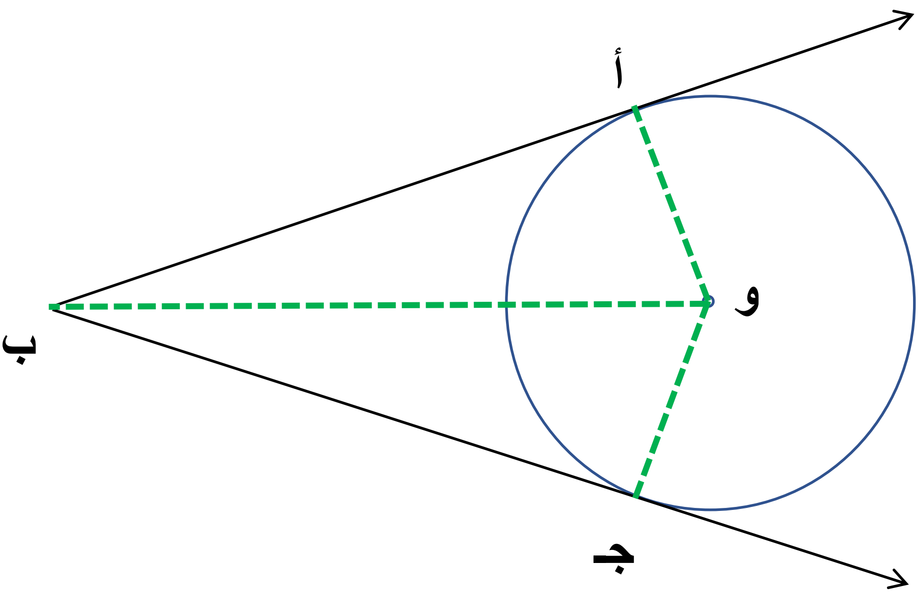
أكمل النص التالي

.... $\overline{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة التي تمر برؤوس المثلث .... $\boxed{\Delta \text{ د ب جـ}}$

نظرية (٤)

القطعتان المماستان لدائرة والمرسومتان من نقطة خارجها متطابقتان

أ ب ≡ جـ ب



المعطيات

دائرة مركزها و

أ ، جـ نقطتان على الدائرة

ب نقطة خارج الدائرة

ب أ ، ب جـ مماسان للدائرة

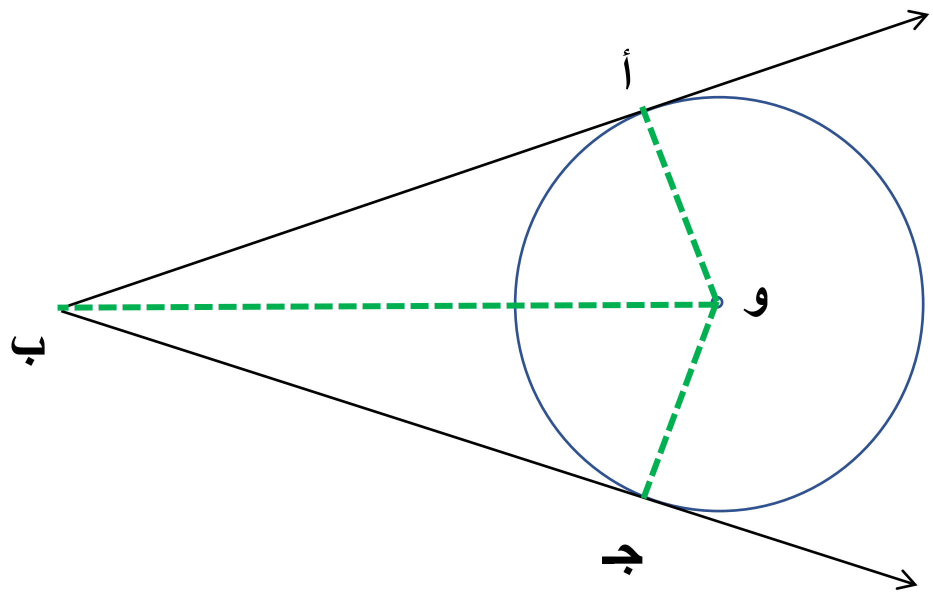
المطلوب

اثبت أن ب أ ≡ ب جـ

العمل

نرسم و أ ، و جـ ، و ب

البرهان



$\because$ $\overline{\text{و أ}}$ نصف قطر

، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة

$\therefore$ $\overline{\text{و أ}} \perp \overline{\text{أ ب}}$

في Δو أ ب قائم الزاوية في أ

أ ب $= \sqrt{(\text{و ب})^{٢} - (\text{و أ})^{٢}}$

أ ب $= \sqrt{(\text{و ب})^{٢} - (\text{نق})^{٢}}$ ١

$\because$ $\overline{\text{و جـ}}$ نصف قطر

$\overleftrightarrow{\text{جـ ب}}$ ، مماس للدائرة

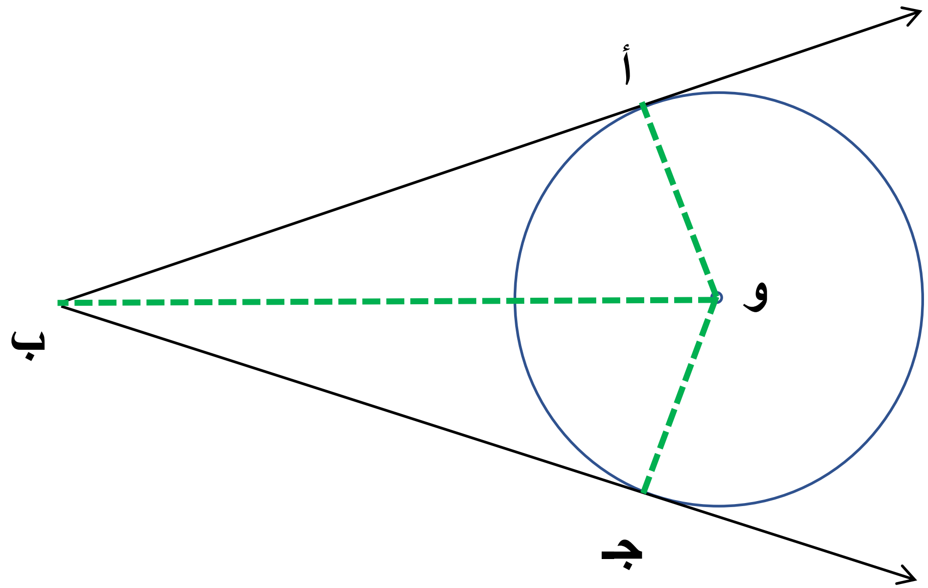
$\therefore$ $\overline{\text{و جـ}} \perp \overline{\text{جـ ب}}$

فيΔو جـ ب قائم الزاوية في جـ

جـ ب $= \sqrt{(\text{و ب})^{٢} - (\text{و جـ})^{٢}}$

جـ ب $= \sqrt{(\text{و ب})^{٢} - (\text{نق})^{٢}}$ ٢

بالمقارنة بين ٢,١ نجد أن أ ب $\boxed{=}$ جـ ب



برهان آخر

∵ $\overline{\text{و أ}}$ نصف قطر

$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة

∴ $\overline{\text{و أ}} \perp \overline{\text{أ ب}}$

∵ $\overline{\text{و جـ}}$ نصف قطر

$\overleftrightarrow{\text{جـ ب}}$ مماس للدائرة

∴ $\overline{\text{و جـ}} \perp \overline{\text{جـ ب}}$

في Δو جـ ب ، Δ و أ ب

$\overline{\text{و ب}}$ ضلع مشترك

و أ = و جـ أنصاف اقطار

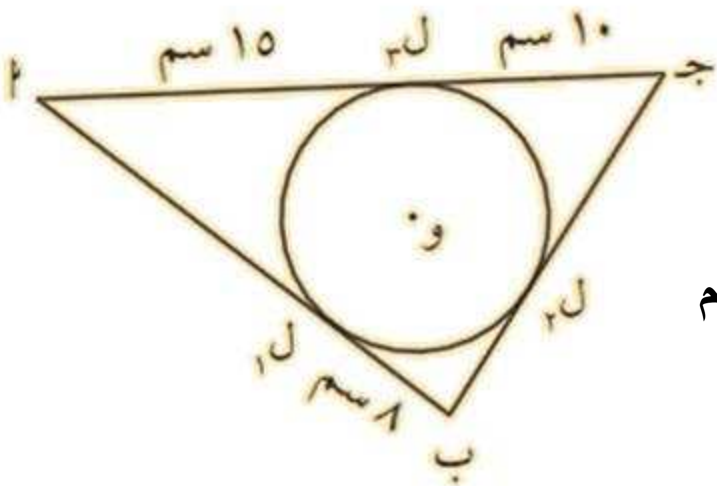
ق ($\hat{\text{أ}}$) = ق ($\hat{\text{جـ}}$) برهاناً

Δو جـ ب $\equiv$ Δ و أ ب

∴ $\overline{\text{أ ب}} \equiv \overline{\text{جـ ب}}$

مثال ٦

في الشكل المقابل ,أوجد محيط المثلث أ ب جـ



المعطيات

دائرة مركزها

أ ب مماس للدائرة عند ل$_{١}$ ، ب ل$_{١}$ = ٨ سم

أ جـ مماس للدائرة عند ل$_{٣}$ ،

أ ل$_{٣}$ = ١٥ سم ، جـ ل$_{٣}$ = ١٠ سم

ب جـ مماس للدائرة عند ل$_{٢}$

المطلوب

أوجد محيط المثلث أ ب جـ

البرهان

∵ أ ل$_{١}$ = أ ل$_{٣}$ = ١٥ سم (نظرية)

∵ ب ل$_{١}$ = ب ل$_{٢}$ = ٨ سم (نظرية)

∵ جـ ل$_{٢}$ = جـ ل$_{٣}$ = ١٠ سم (نظرية)

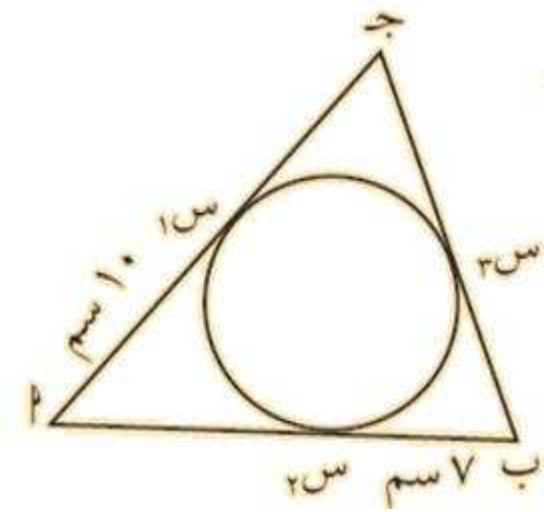
∴ محيط المثلث أ ب جـ =

أ ل$_{١}$ + ل$_{١}$ ب + ب ل$_{٢}$ + ل$_{٢}$ جـ + جـ ل$_{٣}$ + ل$_{٣}$ أ

= ١٥ + ٨ + ٨ + ١٠ + ١٠ + ١٥ = ٦٦ سم

حاول أن تحل

٦ في الشكل المقابل إذا كان محيط المثلث أب جـ = ٥٠ سم، فأوجد طول $\overline{\text{ب جـ}}$.



المعطيات

$\overline{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة عند س_2 ، $\text{ب س}_2 = ٧$ سم

$\overline{\text{أ جـ}}$ مماس للدائرة عند س_1 ، $\text{أ س}_1 = ١٥$ سم

$\overline{\text{ب جـ}}$ مماس للدائرة عند س_3

محيط المثلث أ ب جـ = ٥٠ سم

المطلوب

أوجد ب جـ

البرهان

∵ $\text{أ س}_1 = \text{أ س}_2 = ١٠$سم (نظرية)

∵ $\text{ب س}_2 = \text{ب س}_3 = ٧$ سم (نظرية)

∵ $\text{جـ س}_1 = \text{جـ س}_3 = \text{ن}$ (نظرية)

∴ محيط المثلث أ ب جـ =

$\text{أ س}_1 + \text{س}_1\text{ جـ} + \text{جـ س}_3 + \text{س}_3\text{ ب} + \text{ب س}_2 + \text{س}_2\text{ أ}$

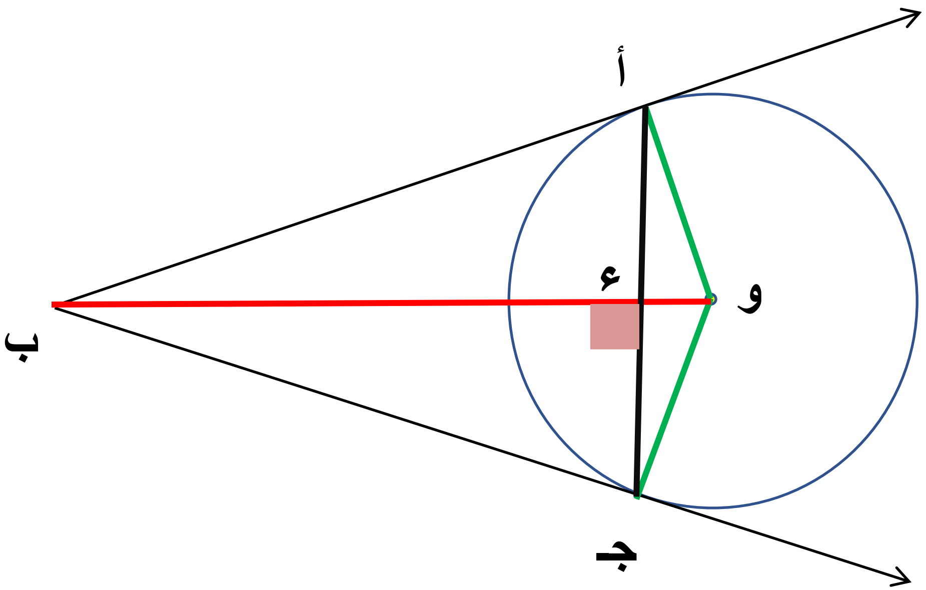
١٠ + ن + ن + ٧ + ٧ + ١٠ = ٥٠سم

٢ ن + ٣٤ = ٥٠سم

٢ ن = ١٦سم

ن = ٨ سم

ب جـ = ٨ + ٧ = ١٥ سم



نتائج على النظرية

∆ب أجـ متطابق الضلعين

١) $\overleftarrow{\text{ب و}}$ منصف الزاوية أ $\hat{\text{ب}}$ جـ

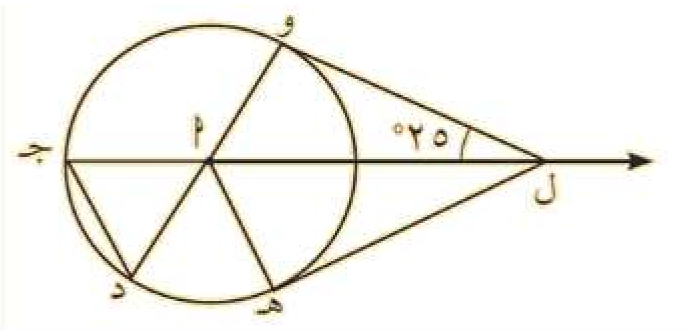
٢) $\overleftarrow{\text{و ب}}$ منصف الزاوية أ $\hat{\text{و}}$ جـ

٣) $\overline{\text{و ب}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$

مثال (٧)

في الشكل المقابل، أوجد ق(أ̂دج)، ق(هـأ̂د)

إذا كانت ل و ، ل هـ تمسان الدائرة حيث و د قطر للدائرة.



البرهان

∵ ل هـ مماس للدائرة

∴ ل هـ ⊥ هـ أ

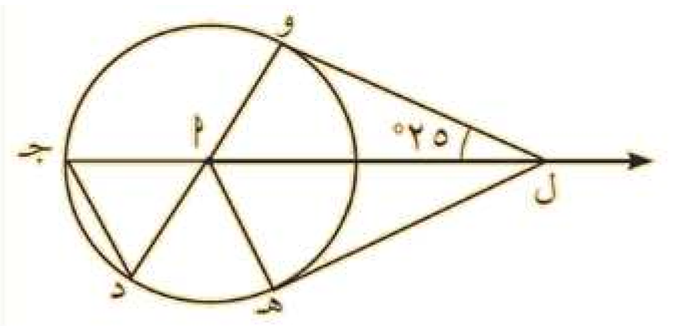
ق (ل هـ̂ أ) = ٩٠°

∵ ل جـ منصف الزاوية (و ل̂ هـ)

∴ ق (أ ل̂ هـ) = ق (أ و̂ ل) = ٢٥°

و منه ق (هـ أ̂ ل) = ١٨٠° − (٩٠° + ٢٥°) = ٦٥°

∴ ق (ل أ̂ و) = ٦٥°



مثال (٧)

في الشكل المقابل، أوجد ق(أ̂د جـ)، ق(هـ أ̂ د)
إذا كانت ل و ، ل هـ تمسان الدائرة حيث و د قطر للدائرة.

تابع البرهان

∵ ل أ منصف الزاوية (و أ̂ هـ)

∴ ق (د أ̂ جـ) = ق (و أ̂ ل) = ٦٥°

أ د = أ جـ = نق   ∴ Δ أ د جـ متطابق الضلعين

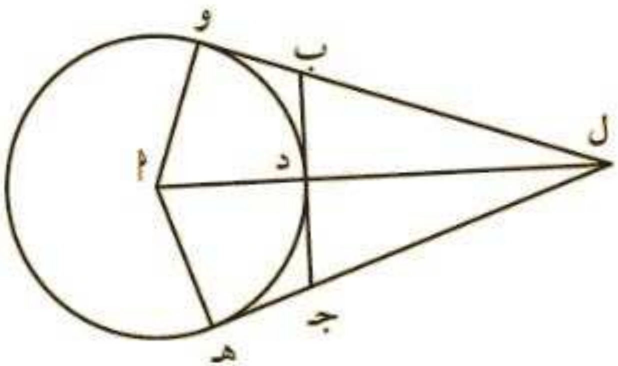
∴ ق (أ د̂ جـ) = ق (أ جـ̂ د)

∴ ق (أ د̂ جـ) = (١٨٠° − ٦٥°) ÷ ٢ = ٥٧,٥°

ق (هـ أ̂ د) = ١٨٠° - (ق (ل أ̂ هـ) + ق (د أ̂ جـ))

= ١٨٠° − (٦٥° + ٦٥°) = ١٨٠° − ١٣٠° = ٥٠°

حاول أن تحل



٧ في الشكل المقابل ل و ، ل هـ مماسان للدائرة، ب جـ مماس للدائرة عند النقطة د، أثبت أن المثلث ل ب جـ متطابق الضلعين.

البرهان

∵ ل و ، ل هـ مماسان للدائرة أ

∴ ل أ ينصف الزاوية (و ل هـ) (نتيجة)

∴ ق (و لˆ أ) = ق (هـ لˆ أ) (١)

∵ ب جـ مماس للدائرة ، أ د نصف قطر التماس

∴ ب جـ ⊥ أ د

∴ ق (ل دˆ ب) = ق (ل دˆ جـ) = ٩٠° (٢)

من (١) ، (٢)

ΔΔ ل ب د ، ل جـ د

فيهما:

- ق (ب لˆ د) = ق (جـ لˆ د)
- ق (ل دˆ ب) = ق (ل دˆ جـ)
- ل و ضلع مشترك

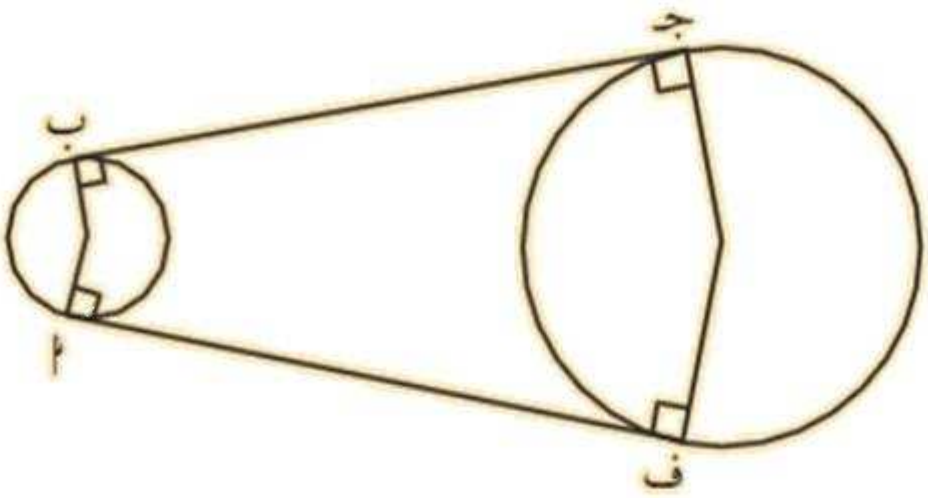
∴ Δ ل د ب ≡ Δ ل د جـ

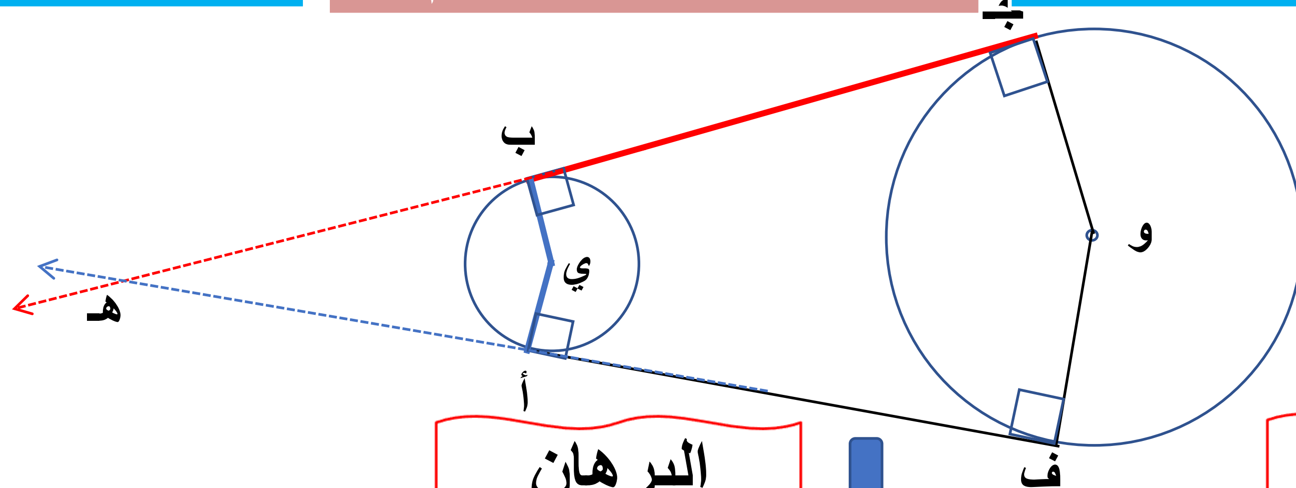
∴ ل ب = ل جـ

∴ Δ ل ب جـ متطابق الضلعين

مثال ٨

يمثل الرسم المقابل دولاب (إطار) دراجة.
برهن أن ب جـ = أف.





المعطيات

ب جـ مماس مشترك للدائرتين ،
ف أ مماس مشترك للدائرتين

المطلوب

اثبات أن ب جـ = أ ف

العمل

نمد جـ ب ، ف أ
حتى يتقاطعا في هـ

البرهان

هـ جـ ، هـ ف قطعتان مماستان للدائرة التي مركزها و

∴ هـ جـ = هـ ف (١)

هـ ب، هـ أ قطعتان مماستان للدائرة التي مركزها ي

∴ هـ ب = هـ أ (٢)

بطرح المعادلة ١ من المعادلة ٢

∴ هـ جـ ـ هـ ب = هـ ف ـ هـ أ

∴ ب جـ = أ ف

حاول أن تحل

٨ من المثال السابق بفرض أن الدائرتين متطابقتان.
أثبت أن ب جـ = أ ف إذا لم يتقاطع $\overleftrightarrow{\text{جـ ب}}$ مع $\overleftrightarrow{\text{أ ف}}$.

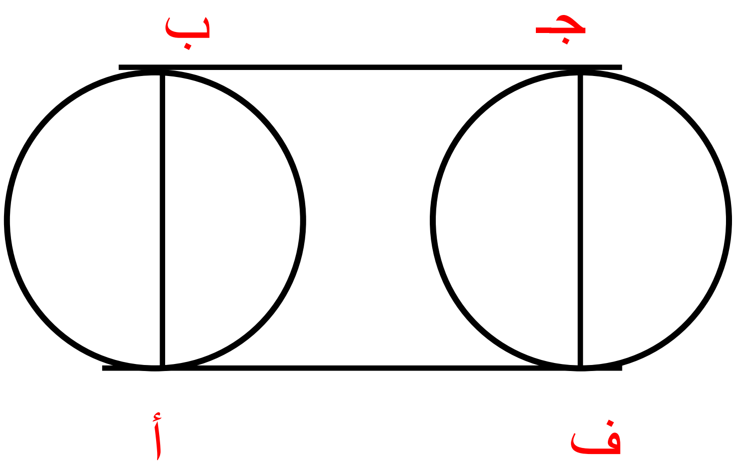
البرهان

∵ $\overleftrightarrow{\text{جـ ب}} \cap \overleftrightarrow{\text{أ ف}} = \emptyset$

∴ $\overleftrightarrow{\text{جـ ب}} \parallel \overleftrightarrow{\text{أ ف}}$

∴ الشكل أ ف جـ ب مستطيل

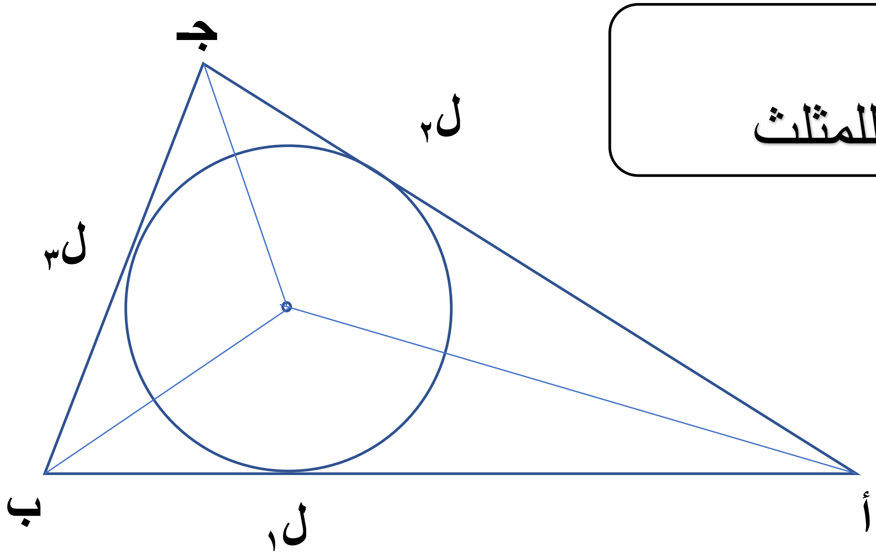
∴ ب جـ = أ ف



الدائرة المحاطة بمثلث (الداخلة)

هي دائرة مماسة لأضلاع المثلث من الداخل

مركز هذه الدائرة
هو نقطة تلاقي منصفات الزوايا الداخلية للمثلث



تذكر أن
المماسان المرسومان من نقطة خارج الدائرة متطابقان

أ ل$_1$ = أ ل$_2$

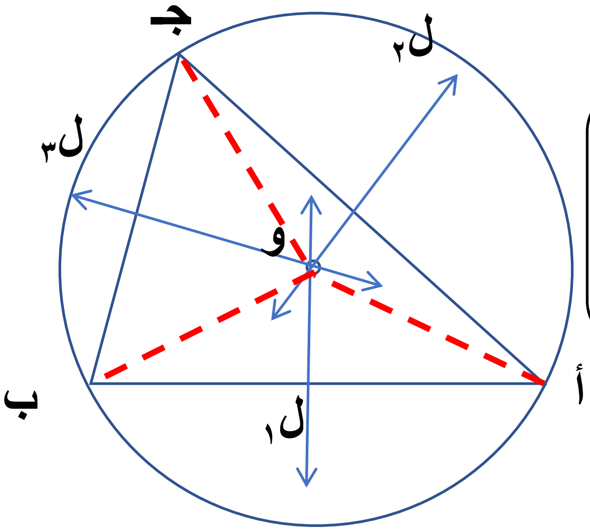
ب ل$_1$ = ب ل$_3$

جـ ل$_2$ = جـ ل$_3$

الدائرة المحيطة بمثلث (الخارجة)

هي دائرة تمر برؤوس المثلث الثلاثة

مركز هذه الدائرة
هو نقطة تلاقي محاور أضلاع المثلث



تذكر أن
مركز الدائرة الخارجة عن المثلث تكون على أبعاد متساوية من رؤوسه

و أ = و ب = و جـ