تمرين ٨-١

التاريخُ الهجريُّ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

دائرة الوحدة في المستوى الإحداثي

The Unit Circle in the Coordinate Plane

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) أكمل الجدول أدناه.

القياس بالدرجات	القياس بالراديان
٤٥°	$\frac{\pi}{٤}$
١٣٥°	$\frac{٣\pi}{٤}$
-١٨٠°	$-\pi$
-١٥٠°	$-\frac{٥\pi}{٦}$
-٢٢٥°	$-\frac{٥\pi}{٤}$
١٥٠°	$\frac{٥\pi}{٦}$

(٢) اذكر النقطة المثلثية للزاوية التي قياسها ٣٠°، ثمّ أوجد كلًّا من: $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{١}{٢}\right)$

(أ) جا ٣٠° $= \frac{١}{٢}$

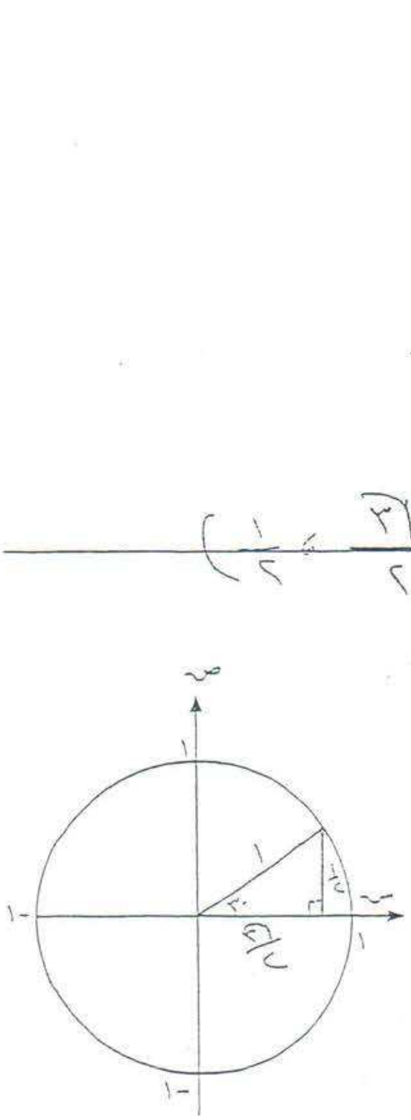
(ب) جتا ٣٠° $= \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(ج) ظا ٣٠° $= \frac{\sqrt{٣}}{٣}$

(د) ظتا ٣٠° $= \sqrt{٣}$

(هـ) قا ٣٠° $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

(و) قتا ٣٠° ٢



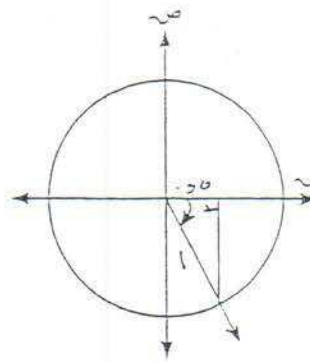
في التمرينين (٣–٤)، باستخدام دائرة الوحدة أوجد جيب تمام الزاوية وجيب الزاوية لكل من:

(٣) -60°

رأسها يا النقطة المثلثية $\left(\frac{1}{2} ، -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

جتا$(-60^\circ) = \frac{1}{2}$

جا$(-60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

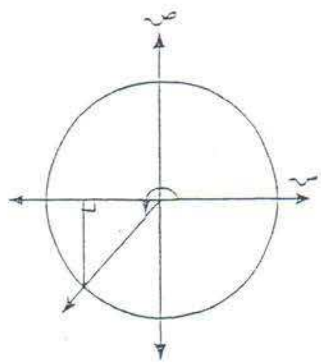


(٤) 225°

رأسها يا النقطة المثلثية $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} ، -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

جتا $225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

ظا $225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



في التمارين (٥–٨)، استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد جيب تمام، جيب، ظل الزاوية على الترتيب لكلّ من الزوايا التالية. ثمّ قرّب الإجابات إلى أقرب جزء من مئة.

(٥) 32° جتا $32^\circ = 0.85$ جا $32 = 0.53$ ظا $32 = 0.62$

(٦) -45° جتا$(-45) = 0.71$ جا$(-45^\circ) = -0.71$ ظا$(-45^\circ) = -1$

(٧) -97° جتا$(-97^\circ) =$ جا$(-97^\circ) =$ ظا$(-97^\circ) =$

(٨) 154° جتا$(154^\circ) =$ جا$(154^\circ) =$ ظا$(154) =$

في التمارين (٩–١١)، بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد جيب تمام، جيب، ظل الزاوية على الترتيب لكلّ من الزوايا التالية:

(٩) $\frac{\pi}{4}$ جتا $\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ جا $\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ظا $\frac{\pi}{4} = 1$

(١٠) 60° جتا $60^\circ = \frac{1}{2}$ جا $60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ظا $60^\circ = \sqrt{3}$

(١١) 0° جتا $0^\circ = 1$ جا $0^\circ = 0$ ظا $0^\circ = 0$

في التمارين (١٢–١٥)، في أيّ ربع أو على أيّ محور يقع الضلع النهائي لكلّ من الزوايا التالية:

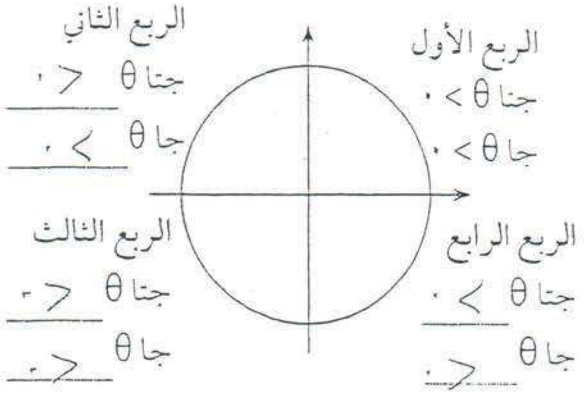
(١٢) 150° في الربع الثاني

(١٣) $-\pi$ على محور السينات السالب

(١٤) -60° في الربع الرابع

(١٥) $\frac{7\pi}{6}$ في الربع الثالث

(١٦) (أ) أكمل الفراغ في الرسم أدناه.



(ب) افترض أن جتاθ سالبة جاθ موجبة. يقع الضلع النهائي للزاوية θ في : ______

(أ) الربع الأول (ب) الربع الثاني (جـ) الربع الثالث (د) الربع الرابع

(١٧) الكتابة في الرياضيات: فسّر كيفية إيجاد جيب، جيب تمام الزوايا التالية: ٠°، ٩٠°، ١٨٠°، ٢٧٠°، ٣٦٠° بدون استخدام الآلة الحاسبة.

باستخدام النقطة الإحداثية ٠° ← (١، ٠)

٩٠° ← (٠، ١) ، ١٨٠° ← (-١، ٠)

٢٧٠° ← (٠، -١) ، ٣٦٠° ← (١، ٠)

في التمارين (١٨ -٢٥)، استخدم المنقلة وارسم كلًّا من الزوايا التالية على دائرة الوحدة، ثم عيّن زاوية الإسناد وأوجد قياسها.

(١٨) ٢١٠°   α = ٣٠°   (١٩) $\frac{\pi ٢}{٣}$ α = $\frac{\pi}{٣}$

(٢٠) ١٧٠°   α = ١٠°   (٢١) $\frac{\pi ٧}{٣}$ α = $\frac{\pi}{٣}$

(٢٢) -١٣٥°   α = ٤٥°   (٢٣) -$\frac{\pi ٧}{٦}$ α = $\frac{\pi}{٦}$

(٢٤) -٢٤٠°   α = ٦٠°   (٢٥) -$\frac{\pi ١١}{٦}$ α = $\frac{\pi}{٦}$

(٢٦) الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها تختلف عن الزوايا الأخرى هي: ______

(أ) ١٩٠° (ب) ١٧٠°

(جـ) ٣٥٠° (د) ١١٠°

(٢٧) الزاوية التي في الوضع القياسي وضلعها النهائي يمر بالنقطة م($\frac{\sqrt{٢}}{٢}$، - $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$) التي تقع على دائرة الوحدة هي: ______

(أ) ٤٥° (ب) ٢٢٥°

(جـ) ٣١٥° (د) ٣٣٠°

المجموعة ب تمارين تعزيزية

في التمارين (١ – ٤)، إذا كانت العبارة صحيحة ظلل (أ) وإذا كانت خاطئة ظلل (ب).

(١) جتا (–٣٠٠°) = $\frac{١}{٢}$ (أ) (ب)

(٢) جا (١٢٠°) = $\frac{١}{٢}$ (أ) (ب)

(٣) ظا (–١٥٠°) = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (أ) (ب)

(٤) قا (٣١٥°) = $\sqrt{٢}$ (أ) (ب)

(٥) الزاوية التي يقع ضلعها النهائي في الربع الرابع في ما يلي هي:

(أ) –٣٢٠° (ب) –٢٧٠°

(ج) $\frac{٥\pi}{٣}$ (د) $\frac{١٣\pi}{٩}$

(٦) الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها يختلف عن الزوايا الأخرى هي:

(أ) $\frac{٧\pi}{٤}$ (ب) ١٣٥°

(ج) $\frac{٣\pi}{٤}$ (د) ٢١٥°

(٧) الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها $\frac{\pi}{٣}$ هي:

(أ) $\frac{١١\pi}{٦}$ (ب) ٢٥٥°

(ج) $\frac{٧\pi}{٨}$ (د) $\frac{٥\pi}{٣}$

(٨) زاوية في الوضع القياسي قياسها يساوي −٢٢٥°. فإن النقطة التي يمكن أن تقع على الضلع النهائي لهذه الزاوية هي:

(أ) $\left(\frac{\sqrt{٢}}{٢}, \frac{-\sqrt{٢}}{٢}\right)$

(ب) $\left(\frac{-\sqrt{٢}}{٢}, \frac{\sqrt{٢}}{٢}\right)$

(جـ) $\left(\frac{-\sqrt{٣}}{٢}, \frac{-\sqrt{٢}}{٢}\right)$

(د) $(-١، ١)$

(٩) $[\text{جا}(-١٣٥°)]^{٢} + [\text{جتا}(-١٣٥°)]^{٢} =$

(أ) ١

(ب) $\frac{١}{٢}$

(جـ) $\frac{١}{٤}$

(د) صفر

تمرين
٨-٢

التاريخ الهجري: .... التاريخ الميلادي: ....

العلاقات بين الدوال المثلثية (١)

Relations Between Trigonometric Functions (1)

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) اكتب النسب المثلثية التالية بدلالة إحدى النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ.

(أ) جا$(\pi + \theta)$ = − جا θ

(ب) جتا$(\pi - \theta)$ = − جتا θ

(جـ) جا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ = جتا θ

(د) جتا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$ = جا θ

(٢) اكتب النسب المثلثية بدلالة إحدى النسب المثلثية الأساسية للزاوية س.

(أ) ظا(١٨٠° − س) = − ظا س

(ب) جتا(١٨٠° + س) = − جتا س

(جـ) جا(− س) = − جا

(٣) استخدم ما تعلمته لكتابة النسب المثلثية التالية بدلالة إحدى النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ.

(أ) ظتا$(\pi + \theta)$

= ظتا θ

(ب) قتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$

= قا θ

(جـ) ظتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$

= − ظا θ

(د) قا$(-\theta)$

= قا θ

(٤) أوجد قيمة النسب المثلثية التالية بدون استخدام الآلة الحاسبة.

(أ) جا ١٥٠° = جا (١٨٠° - ٣٠°) = جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$

(ب) ظا(-٢٢٥°) = - ظا ٢٢٥° = - ظا (١٨٠° + ٤٥°) = - ظا ٤٥ = - ١

(جـ) جتا(-١٣٥°) = جتا ١٣٥° = جتا (١٨٠ - ٤٥) = - جتا ٤٥ = - $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

(٥) أوجد قيمة النسب المثلثية التالية بدون استخدام الآلة الحاسبة.

(أ) جتا $\frac{٧\pi}{٦}$ = جتا $(\pi + \frac{\pi}{٦})$ = - جتا $\frac{\pi}{٦}$ = - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(ب) جا$\left(-\frac{٢\pi}{٣}\right)$ = - جا $\frac{٢\pi}{٣}$ = - جا $(\pi - \frac{\pi}{٣})$ = - جا $\frac{\pi}{٣}$ = - $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(جـ) ظا $\frac{١١\pi}{٦}$ = ظا $(٢\pi - \frac{\pi}{٦})$ = - ظا $\frac{\pi}{٦}$ = - $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

(٦) أوجد قيمة النسب المثلثية التالية بدون استخدام الآلة الحاسبة.

(أ) ظتا ٣٩٠° = ظتا (٣٦٠ + ٣٠) = ظتا ٣٠ = $\sqrt{٣}$

(ب) جا ٣٩٠° = جا (٣٦٠ + ٣٠) = جا ٣٠ = $\frac{١}{٢}$

(جـ) قتا ٤٥٠° = قتا (٣٦٠ + ٩٠) = قتا ٩٠ = ١

(د) قا $\frac{١٧\pi}{٤}$ = قا $(\frac{\pi}{٤} + ٤\pi)$ = قا $\frac{\pi}{٤}$ = $\sqrt{٢}$

في التمارين (٧-١٠)، ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة أو (ب) إذا كانت خاطئة.

(٧) إذا كانت جاθ = ٠,٢ فإن جا$(\pi + \theta)$ = ٠,٢ (أ) (ب)

(٨) إذا كانت جتاθ = $\frac{٢}{٣}$ فإن قاθ = $\frac{٣}{٢}$ (أ) (ب)

(٩) إذا كانت ظاθ = ٣ فإن ظتا$(\pi + \theta)$ = ٣ (أ) (ب)

(١٠) إذا كانت جاθ = $\frac{١}{٥}$ فإن قتا$(\pi + \theta)$ = -٥ (أ) (ب)

(١١) بسّط التعبيرات التالية لأبسط صورة:

(أ) جتا$(\pi - \theta)$ - جتا$(-\theta)$ + جا$(\pi + \theta)$ + جتا$\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$.

= - جتا θ - جتا θ - جا θ + جا θ = -٢ جتا θ

(ب) جا$(\pi + \theta)$ - جتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ + جتا$(\pi - \theta)$ + جا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$.

= - جا θ + جا θ - جتا θ + جتا θ = صفر

(١٢) حلّ المعادلات التالية:

(أ) جتا س = $+\frac{١}{٢}$

(ب) ظتا س = $\sqrt{٣}$

(جـ) ٢ جا س = $+\sqrt{٢}$

(د) جا(٤س) = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(هـ) جتا$\left(٢س + \frac{\pi}{٤}\right)$ = جتا$\left(س - \frac{٣\pi}{٤}\right)$

(و) جا$\left(\frac{\pi}{٦} - س\right)$ = جا$\left(٢س - \frac{٢\pi}{٣}\right)$

(ز) جتا$\left(\frac{\pi}{٨} + س\right)$ = ١

(حـ) ظا(٣π + ٢س) = ظتا(٢س)

ملاحظة حل رقم (١٢) ص ٨١ في الصفحة القادمة

رقم (12) ص ٧٧

(ه) $جتا\ س = \frac{1}{2}$

$جتا\ س > 0$

∴ س تقع في الربع الأول أو الربع الرابع

∴ $س = \frac{\pi}{3} + 2ن\pi$

أو $س = -\frac{\pi}{3} + 2ن\pi$ $(ن \in ص)$

(ج) $جا\ س = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$جا\ س > 0$

∴ س تقع في الربع الأول أو الثاني

∴ $س = \frac{\pi}{4} + 2ن\pi$ $(ن \in ص)$

أو $س = (\pi - \frac{\pi}{4}) + 2ن\pi$

$= \frac{3\pi}{4} + 2ن\pi$

(ب) $ظتا\ س = \sqrt{3}$

$ظا\ س = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$ظا\ س = ظا\ \frac{\pi}{6}$

∴ $س = \frac{\pi}{6} + ن\pi$ $(ن \in ص)$

(د) $جا(4س) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$جا(4س) > 0$

∴ 4س تقع في الربع الأول أو الثاني

$4س = \frac{\pi}{3} + 2ن\pi$

∴ $س = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}ن\pi$

أو $4س = (\pi - \frac{\pi}{3}) + 2ن\pi$

∴ $4س = \frac{2\pi}{3} + 2ن\pi$

$س = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}ن\pi$ $(ن \in ص)$

(هـ) $جتا(2س + \frac{\pi}{4}) = جتا(س - \frac{3\pi}{4})$

إما $2س + \frac{\pi}{4} = س - \frac{3\pi}{4} + 2ن\pi$ أو $2س + \frac{\pi}{4} = -س + \frac{3\pi}{4} + 2ن\pi$

$س = -\pi + 2ن\pi$ أو $3س = \frac{\pi}{2} + 2ن\pi$

$س = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}ن\pi$

(و) $جا(\frac{\pi}{6} - س) = جا(2س - \frac{2\pi}{3})$

إما $\frac{\pi}{6} - س = 2س - \frac{2\pi}{3} + 2ن\pi$ أو $\frac{\pi}{6} - س = \pi - 2س + \frac{2\pi}{3} + 2ن\pi$

$-3س = -\frac{5\pi}{6} + 2ن\pi$ ، $س = \frac{3\pi}{2} + 2ن\pi$

$س = \frac{5\pi}{18} - \frac{2}{3}ن\pi$

(ز) $جتا(\frac{\pi}{8} + س) = 1$

∴ $\frac{\pi}{8} + س = 0 + 2ن\pi$

$س = -\frac{\pi}{8} + 2ن\pi$

$(ن \in ص)$

(ح) $3\pi + 2س + 2س = \frac{\pi}{2}$

$4س = \frac{-5\pi}{2}$

$س = \frac{-5\pi}{8}$

(١) النسبة المثلثية في ما يلي التي قيمتها $\frac{1}{2}$ هي:

(أ) جا(−٣٣٠°) (ب) جتا(−٢٤٠°)

(جـ) ظتا(−١٥٠٠°) (د) ظا٧٦٥°

(٢) النسبة المثلثية في ما يلي التي قيمتها $-\frac{\sqrt{3}}{2}$:

(أ) جتا $\frac{31\pi}{6}$ (ب) جا$\left(-\frac{35\pi}{3}\right)$

(جـ) ظا $\frac{17\pi}{6}$ (د) قا $\frac{13\pi}{3}$

(٣) ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة أو (ب) إذا كانت خاطئة

ظا٢٢٥° − ٣جا١٢٣٠° + ٢جتا(−٩٦٠°) = $-\frac{3}{2}$ (أ) (ب)

قتا $\frac{19\pi}{6}$ − ٢قا $\frac{13\pi}{6}$ + جا$\left(-\frac{8\pi}{3}\right)$ − جتا$\left(\frac{17\pi}{6}\right)$ = ٢ (أ) (ب)

ظتا $\frac{19\pi}{4}$ − ٣ظا$\left(-\frac{11\pi}{4}\right)$ + جتا$\left(\frac{24\pi}{3}\right)$ − ٢جا$\left(\frac{45\pi}{6}\right)$ = ١ (أ) (ب)

قا(−٣١٥°) + ٢قتا٥٨٥° − ٢جتا٨٥٥° = $\sqrt{2}$ (أ) (ب)

٧٧

(٤) إن قيمة المقدار قا(٢ π − θ) − قتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ + جتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ + جاθ هي:

(أ) −١ | (ب) صفر
(جـ) $\frac{١}{٢}$ | (د) ١

(٥) ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة أو (ب) إذا كانت خاطئة.

إذا كان جا س = $\sqrt{٣}$ فإن مجموعة الحل = $\varnothing$	(أ)	(ب)
إذا كان جتا س = $\frac{١}{٢}$ فإن س = $\frac{\pi}{٣}$	(أ)	(ب)
إذا كانت س = $\frac{\pi}{٦}$ فإن جا س = $\frac{١}{٢}$	(أ)	(ب)
مجموعة حل قا س = ٣,٠ هي $\varnothing$	(أ)	(ب)
ظا (١٥ π) = صفر	(أ)	(ب)

تمرين
٨-٣

التاريخُ الهجريُ: .... التاريخُ الميلاديُّ: ....

العلاقات بين الدوال المثلثية (٢)

Relations Between Trigonometric Functions (2)

المجموعة أ تمارين أساسية

(١) إذا كانت جاθ = ١/٥ ، ٠ < θ < π/٢ . فأوجد قيمة النسب المثلثية الأخرى للزاوية θ.   حا²θ + حتا²θ = ١

ومنه حتا θ = ٠,٩٧ ، ظا θ = ٠,٢٠٦

(٢) إذا كانت ظاθ = √٨ ، جتاθ < ٠ . أوجد جاθ، جتاθ.   قا²θ = ١ + ظا²θ

ومنه قا θ = -٣ ، حتا θ = -١/٣ ، حا θ = -٢√٢/٣

(٣) إذا كانت جتاθ = ١/٣ ، جاθ < ٠ . أوجد جاθ، ظتاθ..   حا²θ + حتا²θ = ١

ومنه حا θ = -٢√٢/٣ ، ظتا θ = -√٢/٤

في التمارين (٤ – ٧)، أوجد قيمة كلًّا مما يلي:

(٤) (جاθ + جتاθ)² − ٢جاθ جتا θ. = حا²θ + حتا²θ + ٢حاθ حتاθ − ٢حاθ حتاθ = ١

(٥) (ظا²θ + ١)جتا²θ. = قا²θ حتا²θ = (قاθ حتاθ)² = ١² = ١

(٦) ١ + ظا²(−θ) − قا²θ. = قا²θ − قا²θ = ١

(٧) ٩قا²θ − ٥ظا²θ − ٤/جتا²θ . = ٩قا²θ − ٩ظا²θ = ٩(قا²θ − ظا²θ) = ٩

في التمارين (٨ – ١١)، أثبت صحة المتطابقات التالية:

(٨) ١ + ظتا²(−θ) = قتا²θ.

١ + ظتا²(−θ) = ١ + (ظتا − θ)² = ١ + (− ظتا θ)² = ١ + ظتا²θ = قتا²θ

(٩) قا⁴θ − قا²θ = ظا⁴θ + ظا²θ.   قا⁴θ − ظا⁴θ = (قا²θ + ظا²θ) (قا²θ − ظا²θ)

∴ قا⁴θ − ظا⁴θ = قا²θ + ظا²θ   ∴ قا⁴θ − قا²θ = ظا²θ + ظا²θ

(١٠) (١ − جتا²θ)(١ + ظتا²θ) = ١.

الأيمن = حا²θ × قتا²θ = ١ = الأيسر

(١١) ٣جا$^2\theta$ + ٤جتا$^2\theta$ = ٣ + جتا$^2\theta$.

الأيمن = ٣ حا$^2\theta$ + ٣جتا$^2\theta$ + جتا$^2\theta$ = ٣ + جتا$^2\theta$

في التمارين (١٢ – ١٦)، حل المعادلات التالية حيث $\theta \in$ (٠، ٢π) حيث المقام $\neq$ ٠:

* (١٢) $\frac{\text{جا}^3\theta}{\text{جتا}\theta}$ = ظاθ | حا$^3\theta$ – حاθ = ٠، حاθ(حا$^2\theta$ – ١) = ٠ | إما حاθ = ٠ أو حتا$^2\theta$ = ٠ مرفوض، $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، $\theta = \frac{3\pi}{2}$

* (١٣) $\frac{\text{جا}^2\theta}{\text{جتا}\theta}$ × قاθ = ظاθ | حاθ(ظاθ – ١) = ٠ | إما حاθ = ٠، $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، $\theta = \frac{3\pi}{2}$ أو ظاθ = ١ ∴ $\theta = \frac{\pi}{4}$ ، $\theta = \frac{5\pi}{4}$

* (١٤) $\frac{\text{قا}\theta}{\text{ظتا}\theta}$ = – قتاθ | ظاθ = – ظتاθ م ح = $\varnothing$

(١٥) ٢جتا$^2\theta$ + جتاθ – ١ = ٠ حيث جتاθ > ٠ | (٢حتاθ – ١)(حتاθ + ١) = ٠ | ∴ حتا$\theta = \frac{1}{2}$ ، حتاθ = –١ مرفوض | $\theta = \frac{\pi}{3}$ ، $\theta = -\frac{\pi}{3}$

(١٦) ظتا$^2\theta$ = ١ | ظتاθ = ±١ ظاθ = ±١ | $\theta = \frac{\pi}{4}$ أو $\theta = \frac{5\pi}{4}$ ، $\theta = \frac{3\pi}{4}$ ، $\theta = -\frac{\pi}{4}$

المجموعة ب تمارين تعزيزية

(١) إذا كانت جتاθ = – $\frac{٥}{٧}$ ، θ تقع في الربع الثالث. فإن جاθ =

(أ) $\frac{-٧}{٢\sqrt{٦}}$ (ب) $\frac{٢\sqrt{٦}}{٧}$

(جـ) $\frac{-٢\sqrt{٦}}{٧}$ (د) $\frac{٧}{٢\sqrt{٦}}$

(٢) إذا كانت قاθ = $\frac{٣}{٢}$ ، تقع في الربع الرابع. فإن ظاθ =

(أ) $\frac{\sqrt{٥}}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$

(جـ) $\frac{-٢}{\sqrt{٥}}$ (د) $\frac{-\sqrt{٥}}{٢}$

في التمارين (٣ – ٨)، ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة أو (ب) إذا كانت خاطئة.

(٣) قتاθ × جتاθ − ظتاθ = ٠ — (أ) (ب)

(٤) ظتا^{٢} $(-\theta)$ − قتا^{٢} θ = −١ — (أ) (ب)

(٥) (قاθ + ظاθ)(قاθ − ظاθ) = ١ — (أ) (ب)

(٦) جاθ قتاθ − جتا^{٢} θ − جا^{٢} θ = ٠ — (أ) (ب)

(٧) $\dfrac{\text{جا}^{٢}\,\theta}{١ - \text{جتا}\,\theta}$ − جتاθ = −١ — (أ) (ب)

(٨) ظاθ + ظتاθ − قاθ قتاθ = ٠ — (أ) (ب)

في التمرينين (٩ – ١٠)، أثبت صحة المتطابقات التالية:

(٩) جاθ (ظتاθ + ظاθ) = قاθ

$$\text{جا}\,\theta \left(\frac{\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta} + \frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta} \right)$$

$$= \text{جا}\,\theta \left(\frac{\text{جتا}^{٢}\,\theta + \text{جا}^{٢}\,\theta}{\text{جا}\,\theta\ \text{جتا}\,\theta} \right) = \text{جا}\,\theta \times \frac{1}{\text{جا}\,\theta\ \text{جتا}\,\theta}$$

$$= \text{قا}\,\theta$$

(١٠) $\dfrac{\text{جا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta - \text{جتا}\,\theta} = \dfrac{١}{١ - \text{ظتا}\,\theta}$

$$\frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta - \text{جتا}\,\theta} = \frac{\frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta}}{\frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta} - \frac{\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta}} = \frac{1}{1 - \text{ظتا}\,\theta}$$

٨١

اختبار الوحدة الثامنة

(١) في أيّ ربع أو على أيّ محور يقع الضلع النهائي لـ θ في الحالات التالية:

(أ) جا$\theta = \frac{1}{3}$. الربع الأول أو الربع الثاني

(ب) قا$\theta = -1$. محور السينات السالب

(جـ) ظا$\theta = -3$. الثاني أو الرابع

(د) جتا$\theta = -\frac{7}{8}$. الربع الثاني أو الربع الثالث

(٢) إذا كان ظا$\theta = 4$ فأوجد:

(أ) قا$^2\theta$. $= 1 +$ ظا$^2\theta = 1 + 4^2 = 17$

(ب) ظتاθ. $= \frac{1}{4}$

(جـ) ظتا$\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$. $=$ ظا$\theta = 4$

(د) قتا$^2\theta$. $= 1 +$ ظتا$^2\theta = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{17}{16}$

(٣) إذا كان جا ٣٨° ≃ ٠,٦٢ بدون استخدام الآلة الحاسبة بطريقة مباشرة أوجد قيمة كل من:

(أ) جتا٣٨°. جتا٣٨ $= \sqrt{1 -}$ جا$^2 38$ $= \sqrt{1 - (0{,}62)^2} = 0{,}78$

(ب) جا(−٥٢°). $= -$ جا ٥٢ $= -$ جتا ٣٨ $= -0{,}78$

(جـ) ظا(١٤٢°) − جتا(٢١٨°) + ظتا(−٣٨°). $= -$ ظا٣٨ + جتا٣٨ − ظتا٣٨

$= -\frac{0{,}62}{0{,}78} + 0{,}78 - \frac{0{,}78}{0{,}62} = -1{,}27$

(٤) أوجد قيمة كل مما يلي:

(أ) قا(−٦٠٠°) + ظا(٦٠٠°) − ظتا(٢١٠°) + قتا(٣٠°) = − قا٦٠° + ظا٦٠° − ظتا٣٠° + قتا٣٠°

$= -2 + \sqrt{3} - \sqrt{3} + 2 =$ صفر

(ب) جتا$\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ + ٢جا$(-\pi)$ + جتا(-8π) + جا$\left(-\frac{7\pi}{2}\right)$.

$= 0 + 2 \times 0 + 1 + 1 = 2$

(٥) أثبت صحة ما يلي:

(أ) قا$^2\theta$ − ٢ظا$^2\theta$ + $\frac{1}{\text{جتا}^2(-\theta)}$ = ٢

(ب) جتاθ + $\frac{\text{جا}^2\theta}{1+\text{جتا}\theta}$ = ١

(أ) قا$^2\theta$ − ٢ظا$^2\theta$ + $\frac{1}{\text{جتا}^2(-\theta)}$ = قا$^2\theta$ − ٢ظا$^2\theta$ + قا$^2\theta$

= ٢قا$^2\theta$ − ٢ظا$^2\theta$

= ٢(قا$^2\theta$ − ظا$^2\theta$) = ٢ × ١ = ٢

(ب) جتاθ + $\frac{1-\text{جتا}^2\theta}{1+\text{جتا}\theta}$ = جتاθ + $\frac{(\cancel{1+\text{جتا}\theta})(1-\text{جتا}\theta)}{(\cancel{1+\text{جتا}\theta})}$

= جتاθ + ١ − جتاθ = ١

(٦) أثبت صحة المتطابقات التالية:

(أ) جتا$^4\theta$ − جا$^4\theta$ = جتا$^2\theta$ − جا$^2\theta$

جتا$^4\theta$ − جا$^4\theta$ = (جا$^2\theta$ + جتا$^2\theta$)(جتا$^2\theta$ − جا$^2\theta$) = ١ × (جتا$^2\theta$ − جا$^2\theta$) =

= جتا$^2\theta$ − جا$^2\theta$

(ب) جتاθ (ظاθ + ظتاθ) = قتاθ

جتاθ $\left(\frac{\text{جا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta}{\text{جا}\theta\,\text{جتا}\theta}\right)$ = جتاθ × $\frac{1}{\text{جا}\theta\,\text{جتا}\theta}$ = قتاθ.

(٧) أوجد مجموعة حل المعادلات المثلثية التالية: جتا س > ٠

(أ) جتاس = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

س تقع في الربع الأول أو الربع الرابع

س = $\frac{\pi}{4}$ + ٢لπ أو س = $-\frac{\pi}{4}$ + ٢لπ (ل ∈ ص)

(ب) ٢جاس − $\sqrt{3}$ = ٠

جاس = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ جاس > ٠ س تقع في الربع الأول أو الثاني

س = $\frac{\pi}{3}$ + ٢لπ أو س = $\pi - \frac{\pi}{3}$ + ٢لπ

= $\frac{2\pi}{3}$ + ٢لπ (ل ∈ ص)

(جـ) ظاس = ١

ظاس = ظا$\frac{\pi}{4}$

س = $\frac{\pi}{4}$ + لπ

تمارين إثرائية

(١) تفكير ناقد: افترض أن θ زاوية في الوضع القياسي، حيث جتاθ = $\frac{-١}{٢}$ ، جاθ = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$.
هل من الممكن أن تكون θ = ٦٠° أو θ = -١٢٠°؟

جتا θ = $-\frac{١}{٢}$ ، θ تقع في الربع الثاني والثالث ∴ θ = -١٢٠°

جا θ = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، θ تقع في الربع الثالث أو الرابع

(٢) أوجد قيمة كل مما يلي:

(أ) جا١٣٥° + جتا ٢٢٥° - ٢ظا(- ٢٢٥°) + ٣جا٣٣٠°. ________

(ب) ظتا٣٠° + ٢ظا ١٢٠° - ٣ظا٢١٠° + ٣ظتا(- ٣٣٠°). ________

(جـ) جتا $\frac{١٧\pi}{٣}$ + جا$\left(-\frac{١٥\pi}{٦}\right)$ + ٣جتا$\left(-\frac{٢٥\pi}{٣}\right)$. ________

(د) ظا $\frac{٩\pi}{٤}$ + ظتا $\frac{١٧\pi}{٤}$ + قا$\left(-\frac{٥\pi}{٤}\right)$ + قتا $\frac{١٩\pi}{٤}$. ________

(٣) أوجد قيمة:

(أ) جا١° + جا٢° + جا٣° + ... + جا٣٥٨° + جا٣٥٩°. ________

(ب) جتا١° + جتا٢° + جتا٣° + ... + جتا٣٥٨° + جتا٣٥٩°. ________

(٤) أثبت صحة المتطابقة التالية:

$$\frac{١ - جاθ}{جتاθ} + \frac{جتاθ}{١ - جاθ} = ٢قاθ$$

الأيمن = $\frac{(١ - جا θ)^٢ + جتا^٢ θ}{جتا θ (١ - جا θ)}$ = $\frac{١ - ٢جا θ + جا^٢ θ + جتا^٢ θ}{جتا θ (١ - جا θ)}$

= $\frac{٢ \cancel{(١ - جا θ)}}{جتا θ \cancel{(١ - جا θ)}}$ = ٢ قا θ = الأيسر

رقم ② ص ٨٤

(أ) المقدار = جا ٤٥° − جتا ٤٥° + ٢ ظا ٢٢٥° − ٣ جا ٣٠°

= جا ٤٥° − جتا ٤٥° + ٢ ظا ٤٥° − ٣ جا ٣٠°

$= \frac{\sqrt{٢}}{٢} - \frac{\sqrt{٢}}{٢} + ٢ \times ١ - ٣ \times \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٢}$

(ب) المقدار = ظتا ٣٠ ÷ ٢ ظا ٦٠° − ٣ ظا ٣٠ + ٣ ظتا ٣٠

$= \sqrt{٣} - ٢ \times \sqrt{٣} - ٣ \times \frac{\sqrt{٣}}{٣} + ٣ \times \sqrt{٣} = \sqrt{٣}$

(ج) جتا $\left(\frac{-\pi}{٣} + \frac{١٨\pi}{٣}\right)$ + جا $\left(-\frac{٣\pi}{٦} - \frac{١٢\pi}{٦}\right)$ + ٣ جتا $\left(\frac{-\pi}{٣} - \frac{٢٤\pi}{٣}\right)$

= جتا $\left(\frac{-\pi}{٣}\right)$ + جا $\left(-\frac{٣\pi}{٦}\right)$ + ٣ جتا $\left(\frac{-\pi}{٣}\right)$

= جتا $\frac{\pi}{٣}$ − جا $\frac{\pi}{٢}$ + ٣ جتا $\frac{\pi}{٣}$

$= \frac{١}{٢} - ١ + ٣ \times \frac{١}{٢} = ١$

(د) ظا $\left(\frac{\pi}{٤} + ٢\pi\right)$ + ظتا $\left(\frac{\pi}{٤} + ٤\pi\right)$ + قا $\frac{٥\pi}{٤}$ + قتا $\left(\frac{٣\pi}{٤} + ٤\pi\right)$

= ظا $\frac{\pi}{٤}$ + ظتا $\frac{\pi}{٤}$ − قا $\frac{\pi}{٤}$ + قتا $\frac{\pi}{٤}$

$= ١ + ١ - \frac{\sqrt{٢}}{٢} + \frac{\sqrt{٢}}{٢} = ٢$

رقم ③ ص ٨٤

(أ) المقدار = جا ١° + جا ٢° + جا ٣° + ... + جا(−٢)° + جا(−١)°

= جا ١° + جا ٢° + جا ٣° + ... − جا ٢° − جا ١°

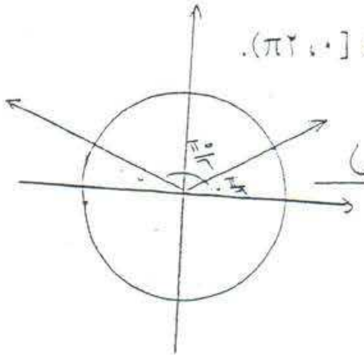
= جا ١٨٠° = ٠

(ب) المقدار = جتا ١° + جتا ٢° + جتا ٣° + ... + جتا ٢° + جتا ١

= ٢ جتا ١° + ٢ جتا ٢° + ٢ جتا ٣° + ... + ٢ جتا ١٧٩° + جتا ١٨٠°

= ٢ جتا ١° + ٢ جتا ٢° + ٢ جتا ٣° + ... − ٢ جتا ١° + جتا ١٨٠°

= جتا ١٨٠° = −١



(٥) أوجد مجموعة حل المعادلة المثلثية التالية، ثمّ مثّلها على دائرة الوحدة، حيث $\theta \in [0 ، 2\pi)$.

٢جا$^2\theta$ = ٤ − ٧جاθ.

٢جا$^2\theta$ + ٧جاθ − ٤ = ٠

(٢جاθ − ١)(جاθ + ٤) = ٠

جا$\theta = \frac{1}{2}$ ، جاθ = −٤ مرفوض

$\theta = \frac{\pi}{6}$ أو $\theta = \frac{5\pi}{6}$

في التمرينين (٦−٧)، أثبت صحة المتطابقات التالية:

(٦) $\frac{\text{جا}\theta + \text{جتا}\theta}{\text{جتا}\theta} - \frac{\text{جا}\theta - \text{جتا}\theta}{\text{جا}\theta} =$ قاθ قتاθ

الأيمن = $\frac{\text{جا}^2\theta + \cancel{\text{جا}\theta\,\text{جتا}\theta} - \cancel{\text{جا}\theta\,\text{جتا}\theta} + \text{جتا}^2\theta}{\text{جتا}\theta\,\text{جا}\theta} = \frac{1}{\text{جتا}\theta\,\text{جا}\theta} =$ قاθ قتاθ

(٧) $\frac{\text{جتا}^2\theta - \text{جا}^2\theta}{1 - \text{ظا}^2\theta} =$ جتا$^2\theta$

الأيمن = $\frac{\text{جتا}^2\theta - \text{جا}^2\theta}{1 - \frac{\text{جا}^2\theta}{\text{جتا}^2\theta}} = \frac{\text{جتا}^2\theta(\text{جتا}^2\theta - \text{جا}^2\theta)}{(\text{جتا}^2\theta - \text{جا}^2\theta)} =$ جتا$^2\theta$

في التمرينين (٨−٩)، حل المعادلات المثلثية التالية:

(٨) ظتا^{2}س + ظتاس = ٠

(٩) قا^{2}س = ٣ قاس − ٢

رقم ٨

ظتاس (ظتاس + ١) = ٠

ظتاس = ٠ أو ظتاس = −١

س = $\frac{\pi}{2} + \pi$ك أو س = $\frac{3\pi}{2}$

ظاس = −١

س = $\frac{3\pi}{4} + 2\pi$ك أو س = $\frac{-\pi}{4} + \pi$ك

رقم ٩

قا^{2}س − ٣ قاس + ٢ = ٠

(قاس − ١)(قاس − ٢) = ٠

إما قاس = ١ ، حاس = ١ ، س = $\frac{\pi}{2} + 2\pi$ك

أو قاس = ٢ ، جاس = $\frac{1}{2}$

س = $\frac{\pi}{6} + 2\pi$ك

س = $\frac{5\pi}{6} + 2\pi$ك

٨٥