تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج الكويتية

almanahj.com/kw

موقع المناهج الكويتية

سلامة علي الركاض

| الملف مذكرة الرياضيات الشاملة الأسس والتمارين |
| --- |
| موقع المناهج ⇦ ملفات الكويت التعليمية ⇦ الصف العاشر ⇦ رياضيات ⇦ الفصل الثاني |

| روابط مواقع التواصل الاجتماعي بحسب الصف العاشر | | | |
| --- | --- | --- | --- |
| | | | |
| روابط مواد الصف العاشر على تلغرام | | | |
| التربية الاسلامية | اللغة العربية | اللغة الانجليزية | الرياضيات |

| المزيد من الملفات بحسب الصف العاشر والمادة رياضيات في الفصل الثاني | |
| --- | --- |
| 1 | إجابة اختبار تقويمي ثاني |
| 2 | تمارين أسئلة حاول أن تحل |
| 3 | عاشر رياضيات حل الاحصاء |
| 4 | عاشر رياضيات نموذج إجابة اختبار |
| 5 | عاشر 2 |

# الرياضيات

الفصل الدراسي الثاني

## التقويمي الثاني

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

شامل كل تمارين الكتاب والكراسة

## الصف العاشر

أ : سلامة علي الركاض

## مصفوفة الوحدة

المصفوفة المربعة التي عناصر قطرها الرئيسي ١، وبقية العناصر صفر تسمى **مصفوفة الوحدة** للضرب. ويرمز إليها بِـ $\underline{و}$.

$\underline{و}_{٢\times٢} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$، $\underline{و}_{٣\times٣} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$

بفرض أن $\underline{أ} = \begin{bmatrix} أ & جـ \\ ب & د \end{bmatrix}$، $\underline{و} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$

$$\underline{أ} \times \underline{و} = \begin{bmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} أ\times١ + ب\times٠ & أ\times٠ + ب\times١ \\ جـ\times١ + د\times٠ & جـ\times٠ + د\times١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{bmatrix} = \underline{أ}$$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

كذلك $\underline{و} \times \underline{أ} = \begin{bmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{bmatrix} = \underline{أ}$

أي أن: $\underline{أ} \times \underline{و} = \underline{و} \times \underline{أ} = \underline{أ}$

$\underline{و} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$ هي العنصر المحايد الضربي للمصفوفات المربعة من الرتبة الثانية.

وبصورة عامة $\underline{و}_{ن\times ن}$ هي العنصر المحايد الضربي للمصفوفات المربعة من الرتبة ن.

# النظير الضربي

إذ كانت أ، س مصفوفتين مربعتين من الرتبة نفسها بحيث يكون أ × س = و ، فإن س هي النظير الضربي للمصفوفة أ .
ويرمز إليها بِـ $أ^{-١}$ .

إذًا $أ \times أ^{-١} = أ^{-١} \times أ = و$

## مثال 1

أثبت أن ب = $\begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي للمصفوفة أ = $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{bmatrix}$.

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

## حاول أن تحل 1

أ) أثبت أن المصفوفة $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٢,٥ & ١ \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي لِـ $\begin{bmatrix} -٢ & ٢ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix}$

ب) في المثال (١)، أثبت أن أ هي النظير الضربي لِـ ب.

## كراسة التمارين

**في التمرينين (١ – ٢)، بيّن أن كل مصفوفة هي نظير ضربي للمصفوفة الأخرى.**

(١) $\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ٣ & ٢- \\ ٤- & ٣ \end{bmatrix}$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

(٢) $\begin{bmatrix} \frac{١}{٥} & \frac{١}{١٠}- \\ ٠ & \frac{١}{٤} \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٠ & ٤ \end{bmatrix}$

## محدد مصفوفة مربعة

ترتبط كل مصفوفة مربعة $\underline{أ}$ بعدد حقيقي يسمى **محدد $\underline{أ}$** ويرمز إلى هذا العدد بالرمز $|\underline{أ}|$ ويقرأ **محدد المصفوفة $\underline{أ}$**.

سنقتصر في هذا الدرس على محدد المصفوفة المربعة من الرتبة الثانية.

محدد المصفوفة المربعة $\begin{bmatrix} أ & جـ \\ ب & د \end{bmatrix}$ هو أ د – ب جـ

نكتب $|\underline{أ}| = \begin{vmatrix} أ & جـ \\ ب & د \end{vmatrix}$ = أ د – ب جـ

تسمى المصفوفة التي محددها يساوي الصفر **بالمصفوفة المنفردة**

## مثال 2

أوجد محدد كل من المصفوفات التالية: $\underline{أ} = \begin{bmatrix} -٣ & ٤ \\ ٢ & -٥ \end{bmatrix}$ $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ ٣ & -٢ \end{bmatrix}$ $\underline{جـ} = \begin{bmatrix} س & ٠ \\ ٠ & س \end{bmatrix}$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

## حاول أن تحل 1

أوجد محدد كل من المصفوفات التالية:

أ) $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$ ب) $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٧ & ٨ \\ ١٠ & ٢ \end{bmatrix}$ جـ) $\underline{جـ} = \begin{bmatrix} ك & ٣ \\ ٣ - ك & -٣ \end{bmatrix}$

## ملاحظة

ليس لكلّ المصفوفات المربّعة نظير ضربي (معكوسات). سوف يساعدك الاختبار التالي على استنتاج ما إذا كانت المصفوفة ٢ × ٢ لها نظير ضربي، وكيف يمكنك إيجاده إن وجد.

## خاصية

بفرض أن: $\underline{أ} = \begin{bmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{bmatrix}$ إذا كان أ د − ب جـ ≠ ٠ ، فإن $\underline{أ}$ لها نظير ضربي $\underline{أ}^{-١}$ حيث:

$$\underline{أ}^{-١} = \frac{١}{|\underline{أ}|} \begin{bmatrix} د & -ب \\ -جـ & أ \end{bmatrix}$$

$$\underline{أ}^{-١} = \frac{١}{أ د - ب جـ} \begin{bmatrix} د & -ب \\ -جـ & أ \end{bmatrix}$$

**معلومة رياضية:**

المصفوفة التي محددها الصفر ليس لها نظير ضربي وتسمى مصفوفة منفردة.

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

**مثال 3** إذا كانت المصفوفة $\underline{أ} = \begin{bmatrix} س & ٤ \\ ١٢ & ٦ \end{bmatrix}$ منفردة أوجد قيمة س.

.....

.....

.....

**حاول أن تحل 3** إذا كانت المصفوفة $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٥ & ١٠ \\ -٤ & ٢س \end{bmatrix}$ منفردة، أوجد قيمة س.

.....

.....

.....

**مثال 4** هل للمصفوفة: $\underline{أ} = \begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٨ & -٢ \end{bmatrix}$ نظير (معكوس) ضربي؟ في حالة الإيجاب أوجده.

.....

.....

.....

.....

**حاول أن تحل 4**

هل $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ لها نظير ضربي؟ فسّر إجابتك.

هل $\underline{ب} = \begin{bmatrix} ٦ & ٨ \\ -٣ & -٤ \end{bmatrix}$ لها نظير ضربي؟ فسّر إجابتك.

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

**مثال5** حدّد أي مصفوفة مما يلي لها نظير (معكوس) ضربي، ثم أوجده.

أ) $\underline{م} = \begin{bmatrix} -٢ & ٢ \\ ٥ & -٤ \end{bmatrix}$

ب) $\underline{ن} = \begin{bmatrix} ٣ & ٩ \\ ٢ & ٦ \end{bmatrix}$

## حاول أن تحل 5

حدّد أي مصفوفة من المصفوفات التالية لها نظير ضربي (معكوس)، ثم أوجده.

أ $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$

ب $\begin{bmatrix} ٠,٥ & ٢,٣ \\ ٣ & ٧,٢ \end{bmatrix}$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

## كراسة التمارين

في التمارين (٣–٥)، أوجد محدّد كل مصفوفة.

(٣) $\begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ -٦ & -٢ \end{bmatrix}$

(٤) $\begin{bmatrix} \frac{١}{٢} & \frac{٢}{٣} \\ \frac{٣}{٥} & \frac{١}{٤} \end{bmatrix}$

(٥) $\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$

في التمارين (٦–٩)، أوجد النظير الضربي لكل مصفوفة إن وجد، وإذا لم يوجد فاكتب «لا يوجد نظير ضربي» مع ذكر السبب.

(٦) $\begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

(٧) $\begin{bmatrix} ٤ & ٨ \\ ٣- & ٢- \end{bmatrix}$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

في التمارين (١٠–١٢)، حلّ كل معادلة في س. وإذا كان من غير الممكن حلها، فاكتب السبب.

(١٠) $\begin{bmatrix} ٢ & ١- \\ ٣ & ٢ \end{bmatrix} = \underline{س} \times \begin{bmatrix} ١٢ & ٧ \\ ٥ & ٣ \end{bmatrix}$

(١٢) $\underline{س} \times \begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٧ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣١ & ١٦ \\ ٢٧ & ١٢ \end{bmatrix}$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

(١٨) أوجد المصفوفة $\underline{س}$: $\begin{bmatrix} ٤ & ٧ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \underline{س} + \begin{bmatrix} ٢ & ٧ \\ -٣ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix}$

٥-٧

# حل نظام من معادلتين خطيتين

## الحل باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفة المربعة

**مثال1** حلّ النظام: $\begin{cases} س + ص = ٣ \\ س - ص = ٧ \end{cases}$ باستخدام النظير الضربي للمصفوفة.

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

**حاول أن تحل 1** حلّ النظام: $\begin{cases} ٥س + ٣ص = ٧ \\ ٣س + ٢ص = ٥ \end{cases}$ باستخدام النظير الضربي للمصفوفة.

# استخدام قاعدة كرامر (المحددات ) لحل معادلتين

## مثال1

استخدم قاعدة كرامر لحلّ النظام: $\begin{cases} ٤س - ٥ص + ٧ = ٠ \\ ٣ص - ٦س + ٣ = ٠ \end{cases}$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

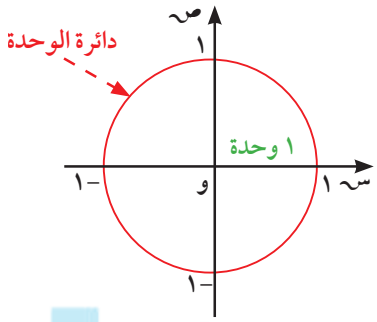
## حاول أن تحل 1

استخدم قاعدة كرامر لحلّ النظام: $\begin{cases} ٣س + ٢ص = -٦ \\ -٤س - ٣ص - ٧ = ٠ \end{cases}$

# دائرة الوحدة في المستوي الإحداثي والدوال المثلثية ( الدائرية )

## دائرة الوحدة

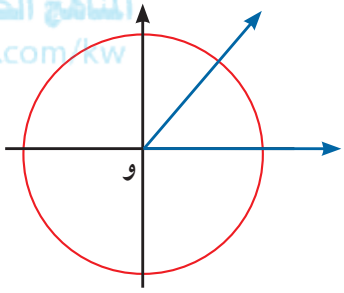
هي دائرة مركزها نقطة الأصل و، وطول نصف قطرها واحد وحدة.




موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

## النقطة المثلثية

هي نقطة تقاطع الضلع النهائي لزاوية موجهة في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة.

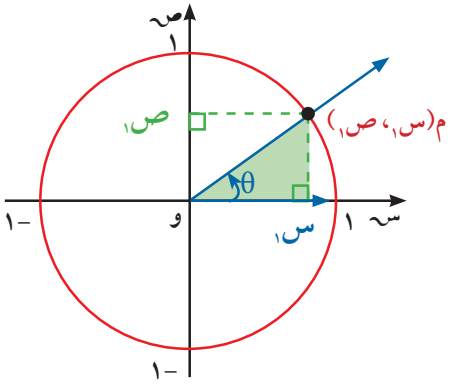



**ملاحظة**: تكون النقطة (س، ص) نقطة مثلثية إذا وفقط إذا كان $س^{٢} + ص^{٢} = ١$

سوف نستخدم الرمز θ لنرمز إلى قياس زاوية موجهة في الوضع القياسي.

## النسب المثلثية للزاوية التي قياسها θ

بفرض أنّ زاوية موجهة في الوضع القياسي قياسها θ، يقطع ضلعها النهائي دائرة الوحدة في النقطة م $(س_{١} ، ص_{١})$.




النسب المثلثية للزاوية θ هي:

$جتا\theta = س_{١}$

$جا\theta = ص_{١}$

$ظا\theta = \frac{ص_{١}}{س_{١}}$ ، $س_{١} \neq ٠$

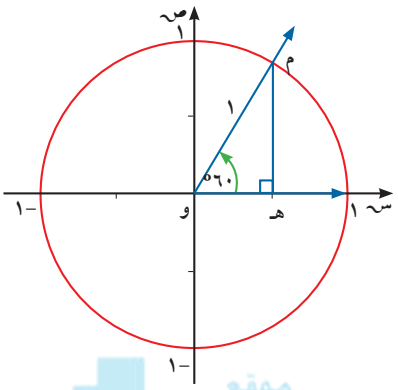
$ظتا\theta = \frac{س_{١}}{ص_{١}}$ ، $ص_{١} \neq ٠$

$قا\theta = \frac{١}{س_{١}}$ ، $س_{١} \neq ٠$

$قتا\theta = \frac{١}{ص_{١}}$ ، $ص_{١} \neq ٠$

## مثال 1

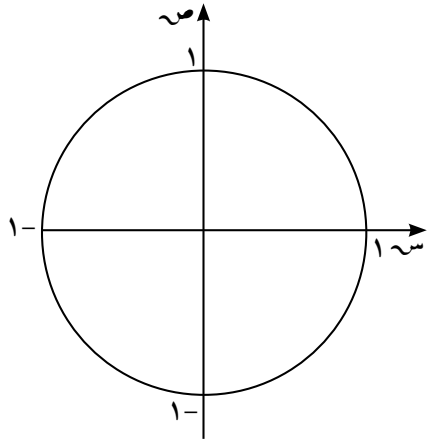
باستخدام دائرة الوحدة أوجد جا ٦٠°، جتا ٦٠°.




موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

## حاول أن تحل 1

على دائرة الوحدة، ارسم زاوية موجهة في الوضع القياسي قياسها ٤٥°. ثم أوجد جتا ٤٥°، جا ٤٥°.




يمكن استخدام مثلث قائم الزاوية لإيجاد جتا$\theta$، جا$\theta$ لأي زاوية $\theta$ موجهة في الوضع القياسي لا يقع ضلعها النهائي في الربع الأول.

# الدوال الدائرية -المثلثية

## تعريف

إذا كانت (س، ص) هي النقطة المثلثية لزاوية قياسها θ حيث ٠ ≤ θ < ٢π فإن:

(١) دالة الجيب: د(θ) = جاθ — حيث جاθ = ص (الإحداثي الصادي للنقطة المثلثية)

(٢) دالة جيب التمام: د(θ) = جتاθ — حيث جتاθ = س (الإحداثي السيني للنقطة المثلثية)

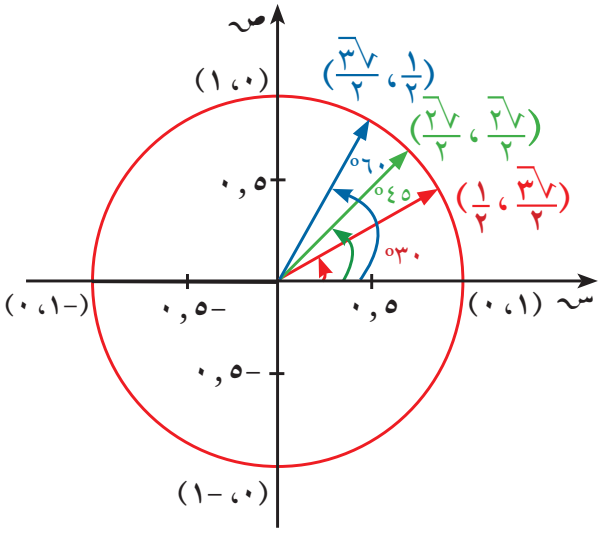
(٣) دالة الظل: د(θ) = ظاθ — حيث ظاθ = $\frac{ص}{س}$ ، س ≠ ٠

(٤) دالة القاطع: د(θ) = قاθ — حيث قاθ = $\frac{١}{س}$ ، س ≠ ٠

(٥) دالة قاطع التمام: د(θ) = قتاθ — حيث قتاθ = $\frac{١}{ص}$ ، ص ≠ ٠

(٦) دالة ظل التمام: د(θ) = ظتاθ — حيث ظتاθ = $\frac{س}{ص}$ ، ص ≠ ٠

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw




يمكن بسهولة إيجاد قيم الدوال المثلثية لبعض قيم θ الخاصة.

| قياس الزاوية θ / الدالة | ٠° | ٣٠° | ٤٥° | ٦٠° | ٩٠° | ١٨٠° | ٢٧٠° | ٣٦٠° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ٠ | $\frac{\pi}{٦}$ | $\frac{\pi}{٤}$ | $\frac{\pi}{٣}$ | $\frac{\pi}{٢}$ | π | $\frac{\pi ٣}{٢}$ | π٢ |
| جاθ | ٠ | $\frac{١}{٢}$ | $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ | $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ | ١ | ٠ | -١ | ٠ |
| جتاθ | ١ | $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ | $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ | $\frac{١}{٢}$ | ٠ | -١ | ٠ | ١ |
| ظاθ | ٠ | $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$ | ١ | $\sqrt{٣}$ | غير معرّف | ٠ | غير معرّف | ٠ |

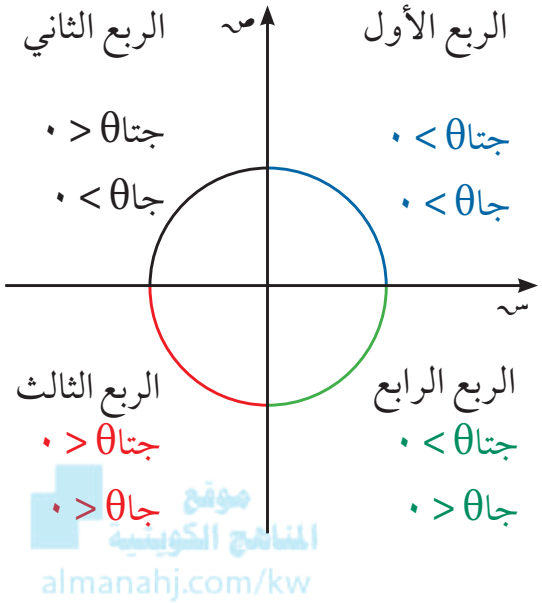
من الشكل: يمكن ملاحظة ما يلي:

إذا كانت θ في الربع الأول فإن: جاθ > ٠، جتاθ > ٠

إذا كانت θ في الربع الثاني فإن: جاθ > ٠، جتاθ < ٠

إذا كانت θ في الربع الثالث فإن: جاθ < ٠، جتاθ < ٠

إذا كانت θ في الربع الرابع فإن: جاθ < ٠، جتاθ > ٠




موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

## مثال 2

حدّد إشارة جاθ، جتاθ في كل مما يلي:

أ) θ = ١٣٥°

ب) $\theta = \frac{٧\pi}{٦}$

ج) θ = ٣٠٥°

## حاول أن تحل 2

أ) إذا كانت ٩٠° < θ < ٢٧٠°. ما هي إشارة جتاθ؟

ب) إذا كانت ٠° < θ < π. ما هي إشارة جاθ؟

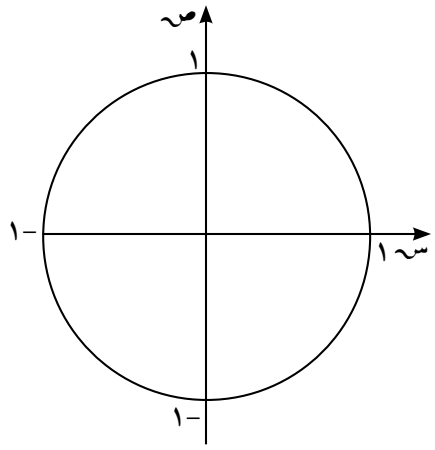
## كراسة التمارين

(١) أكمل الجدول أدناه.

| القياس بالدرجات | القياس بالراديان |
|---|---|
| ٤٥° | |
| | $\frac{3\pi}{4}$ |
| | $-\pi$ |
| $-150°$ | |
| $-225°$ | |
| | $\frac{5\pi}{6}$ |

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

(٢) اذكر النقطة المثلثية للزاوية التي قياسها ٣٠°، ثمّ أوجد كلاً من:




(أ) جا ٣٠° _____

(ب) جتا ٣٠° _____

(جـ) ظا ٣٠° _____

(د) ظتا ٣٠° _____

(هـ) قا ٣٠° _____

(و) قتا ٣٠° _____

**في التمارين (٥–٧)، بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد جيب تمام، جيب، ظل الزاوية على الترتيب لكلّ من الزوايا التالية:**

(٥) $\frac{\pi}{٤}$ _____

(٦) $٦٠^{\circ}$ _____

(٧) $٠^{\circ}$ _____

**في التمارين (٨–١١)، في أيّ ربع أو على أيّ محور يقع الضلع النهائي لكلّ من الزوايا التالية:**

(٨) $١٥٠^{\circ}$ _____

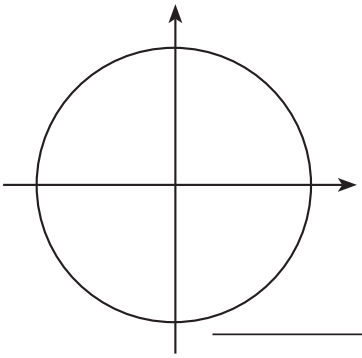
(٩) $-\pi$ _____

(١٠) $-٦٠^{\circ}$ _____

(١١) $\frac{٧\pi}{٦}$ _____

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

(١٢) (أ) أكمل الفراغ في الرسم أدناه.




(ب) افترض أن جتاθ سالبة جاθ موجبة. يقع الضلع النهائي للزاوية θ في:

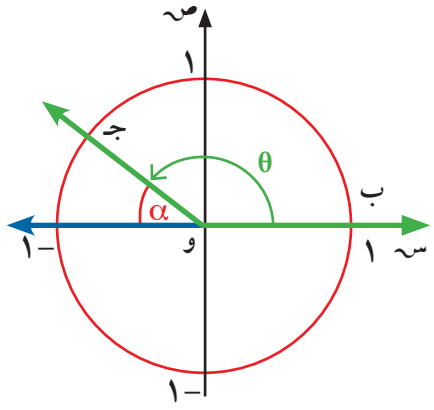
_____

(أ) الربع الأول (ب) الربع الثاني (جـ) الربع الثالث (د) الربع الرابع

## زاوية الاسناد

زاوية الإسناد للزاوية الموجهة (وب، وجـ) التي في وضع قياسي
هي الزاوية **الحادة** α التي يصنعها الضلع النهائي للزاوية الموجهة مع محور السينات.
فإذا كان α زاوية الإسناد فإن: $٠^{o} < \alpha < ٩٠^{o}$

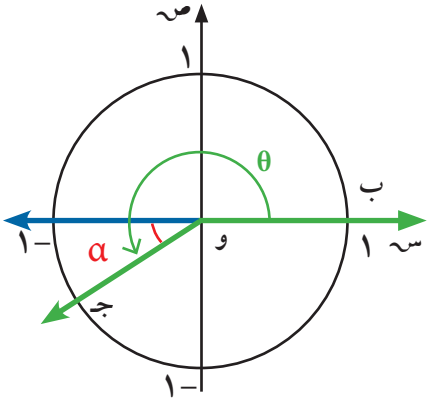
الأشكال التالية توضح الحالات المختلفة لإيجاد زاوية الإسناد:




عندما θ تقع في الربع الثاني

$\theta^{o} - ١٨٠^{o} = \alpha^{o}$

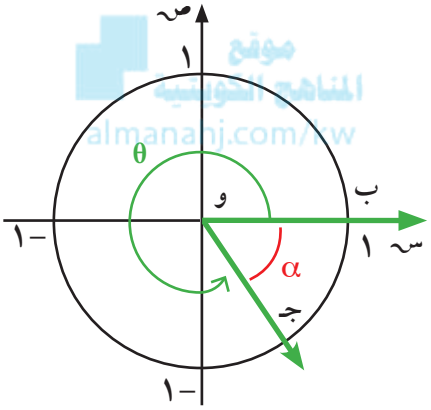
$\theta^{c} - \pi = \alpha^{c}$




عندما θ تقع في الربع الثالث

$١٨٠^{o} - \theta^{o} = \alpha^{o}$

$\pi - \theta^{c} = \alpha^{c}$




عندما θ تقع في الربع الرابع

$\theta^{o} - ٣٦٠^{o} = \alpha^{o}$

$\theta^{c} - ٢\pi = \alpha^{c}$

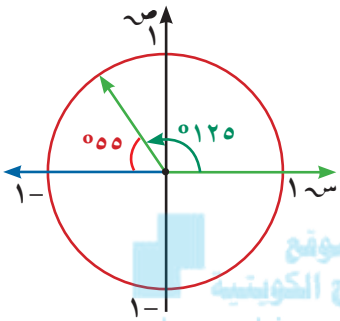
**تذكر**

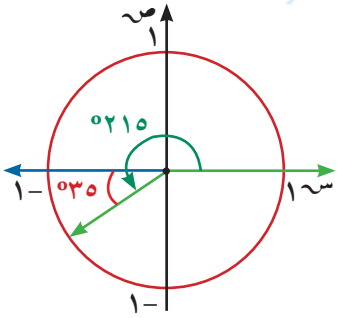
الزاوية الموجهة ب وَ جـ يمكن أن نرمز لها بالرمز (وب، وجـ) حيث وب الضلع الابتدائي، وجـ الضلع النهائي.

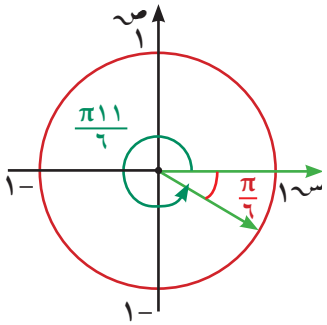
## مثال 3

ارسم كلًّا من الزوايا الموجهة في وضع قياسي، ثم عيّن زاوية الإسناد وأوجد قياسها لكل مما يلي:

أ) $125^\circ$ ب) $215^\circ$ ج) $\frac{11\pi}{6}$



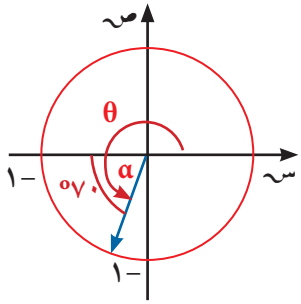




موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

## حاول أن تحل 3

يبيّن الشكل المقابل، زاوية الإسناد $\alpha^\circ$ للزاوية $\theta^\circ$. أوجد $\theta$.



## كراسة التمارين

**في التمارين (١٤-١٧)، ارسم كلًّا من الزوايا الموجهة التالية في وضع قياسي، ثم عيّن زاوية الإسناد وأوجد قياسها.**

(١٤) $٢١٠^\circ$ _____

(١٥) $\frac{\pi ٢}{٣}$ _____

(١٦) $١٧٠^\circ$ _____

(١٧) $\frac{\pi ٧}{٣}$ _____

**في التمرينين (١٨-١٩)، اختر الإجابة الصحيحة:**

(١٨) الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها تختلف عن الزوايا الأخرى هي:

(أ) $١٩٠^\circ$ (ب) $١٧٠^\circ$

(جـ) $٣٥٠^\circ$ (د) $١١٠^\circ$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

(١٩) الزاوية التي في الوضع القياسي وضلعها النهائي يمر بالنقطة م $\left(\frac{-\sqrt{٧٢}}{٢} ، \frac{\sqrt{٧٢}}{٢}\right)$ التي تقع على دائرة الوحدة هي:

(أ) $٤٥^\circ$ (ب) $٢٢٥^\circ$

(جـ) $١٣٥^\circ$ (د) $٣٣٠^\circ$

## بنود موضوعية

**في التمارين (١-٤)، إذا كانت العبارة صحيحة ظلل (أ) وإذا كانت خاطئة ظلل (ب).**

(١) جتا(−٣٠٠°) = $\frac{١}{٢}$ (أ) (ب)

(٢) جا(١٢٠°) = $\frac{١}{٢}$ (أ) (ب)

(٣) ظا(−١٥٠°) = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (أ) (ب)

(٤) قا(٣١٥°) = $\sqrt{٢}$ (أ) (ب)

**في التمارين (٥-٩)، اختر الإجابة الصحيحة:**

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

(٥) الزاوية التي يقع ضلعها النهائي في الربع الرابع في ما يلي هي:

(أ) −٣٢٠° (ب) −٢٧٠°

(جـ) $\frac{٥\pi}{٣}$ (د) $\frac{١٣\pi}{٩}$

(٦) الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها يختلف عن الزوايا الأخرى هي:

(أ) $\frac{٧\pi}{٤}$ (ب) ١٣٥°

(جـ) $\frac{٣\pi}{٤}$ (د) ٢١٥°

(٧) الزاوية التي في الوضع القياسي وقياس زاوية إسنادها $\frac{\pi}{٣}$ هي:

(أ) $\frac{١١\pi}{٦}$ (ب) ٢٥٥°

(جـ) $\frac{٧\pi}{٨}$ (د) $\frac{٥\pi}{٣}$

(٨) زاوية في الوضع القياسي قياسها يساوي −٢٢٥°. فإن النقطة المثلثية التي يمكن أن تقع على الضلع النهائي لهذه الزاوية هي:

(أ) $\left(\frac{\sqrt{٢}}{٢}، \frac{-\sqrt{٢}}{٢}\right)$ (ب) $\left(\frac{\sqrt{٢}}{٢}، \frac{-\sqrt{٢}}{٢}\right)$

(جـ) $\left(\frac{-\sqrt{٢}}{٢}، \frac{-\sqrt{٢}}{٢}\right)$ (د) (−١، ١)

(٩) [جا(−١٣٥°)]$^{٢}$ + [جتا(−١٣٥°)]$^{٢}$ =

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٢}$

(جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) صفر

## العلاقات بين الدوال المثلثية 1

تسمى جاθ، جتاθ، ظاθ النسب المثلثية للزاوية التي قياسها θ وتدعى **النسب المثلثية الأساسية**

علمًا بأن $-١ \leq$ جتاθ $\leq ١$

$-١ \leq$ جاθ $\leq ١$

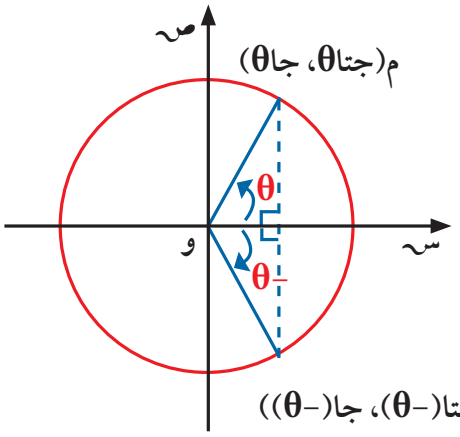
ظاθ $\ni$ ح

**النسب المثلثية للزاويتين θ، −θ.**

النقطة المثلثية م′ هي انعكاس للنقطة المثلثية م في محور السينات حيث م(س، ص) $\xrightarrow{\text{ع}_{\text{س}}}$ م′(س، −ص)

ويكون جتا(−θ) = جتاθ

جا(−θ) = −جاθ




**تذكر**

$\text{ع}_{\text{س}}$ تعني انعكاس في محور السينات.

### قانون

جتا(−θ) = جتاθ

جا(−θ) = −جاθ

وبالتالي ظا(−θ) = −ظاθ بشرط أن يكون ظاθ معرّف.

**مثال 1**

إذا كان جتا $\frac{\pi ٣}{٨} = \frac{\sqrt{٢ - \sqrt{٢}}}{٢}$ ، فأوجد جتا $\left(-\frac{\pi ٣}{٨}\right)$.

.....

إذا كان جا ٣٦° ≃ ٠,٥٨٧٨ ، فأوجد جا(−٣٦°).

.....

إذا كان ظا ٤٥° = ١ ، فأوجد ظا(−٤٥°).

.....

## حاول أن تحل 1

أكمل إذا كان:

أ) جا م = ٠,٣ فإن جا(– م) = ...

ب) جتا ل = ٠,٣٨ فإن جتا(– ل) = ...

جـ) ظا س = ٣,١٤ فإن ظا(– س) = ...

د) جتا(– ص) = $\frac{١}{٤}$ فإن جتا ص = ...

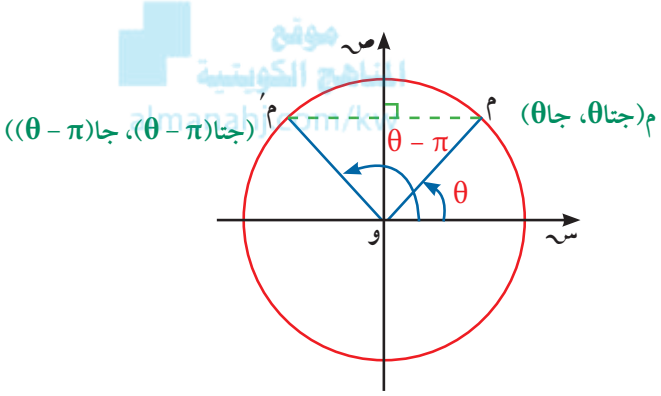
### النسب المثلثية للزاويتين θ ، (θ – π).

النقطة المثلثية م′ هي انعكاس للنقطة المثلثية م في محور الصادات.

حيث م(س، ص) $\xrightarrow{\text{ع}_{\text{صـ}}}$ م′(–س، ص)

فيكون: جتا(θ – π) = –جتاθ

جا(θ – π) = جاθ




## قانون

جتا(θ – π) = –جتاθ

جا(θ – π) = جاθ

وبالتالي ظا(θ – π) = –ظاθ شرط أن يكون ظاθ معرّفًا.

## مثال 1

بدون استخدام الآلة الحاسبة

إذا كان:

أ) جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$ ، أوجد جتا ١٢٠°.

ب) جا $\frac{\pi}{٤}$ = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ، أوجد جا $\frac{٣\pi}{٤}$ .

جـ) ظاθ = $\frac{٣}{٥}$ ، أوجد ظا(θ – π).

## حاول أن تحل 2

بدون استخدام الآلة الحاسبة. إذا كان:

أ) جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ ، فأوجد جا ١٥٠°.

ب) جتاس = $\frac{٤}{٥}$ ، فأوجد جتا(π − س).

جـ) ظا $\frac{\pi}{١٢}$ = ٢ − $\sqrt{٣}$، فأوجد ظا $\frac{\pi ١١}{١٢}$.

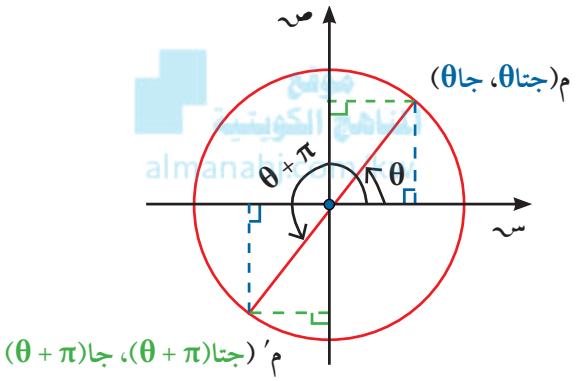
**النسب المثلثية للزاويتين θ، (θ + π).**

النقطة م′ هي انعكاس للنقطة م في نقطة الأصل.

حيث م(س، ص) ← (انعكاس في نقطة الأصل) م′(−س، −ص)

فيكون: جتا(θ + π) = −جتاθ

جا(θ + π) = −جاθ




## قانون

جتا(θ + π) = −جتاθ

جا(θ + π) = −جاθ

وبالتالي ظا(θ + π) = ظاθ  شرط أن يكون ظاθ معرّفًا.

## مثال 3

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان:

أ) جا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ ، فأوجد جا ٢١٠°.

ب) ظا $\frac{\pi}{٨}$ = $\sqrt{٢}$ − ١ ، فأوجد ظا $\frac{\pi ٩}{٨}$.

.....

.....

.....

.....

## حاول أن تحل 3

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان جتا ٤٠° ≃ ٠,٧٦٦ . فأوجد جتا ٢٢٠°.

## مثال 4

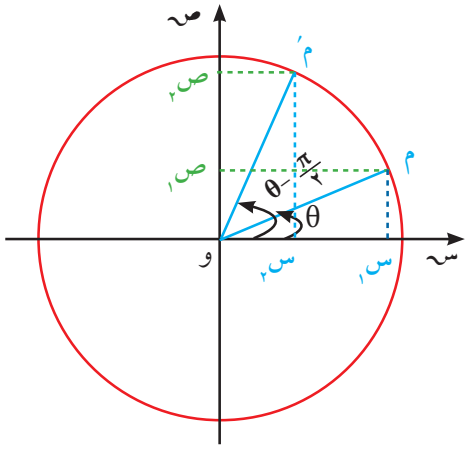
بدون استخدام الآلة الحاسبة، أوجد:

أ جا ١٥٠°.  ب جتا ٢٤٠°.  جـ ظا $\frac{٢\pi}{٣}$.

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

## حاول أن تحل 4

إذا كان جا ٥٦° ≃ ٠,٨٢٩ . بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد جا ٢٣٦°.




**النسب المثلثية للزاويتين θ، $\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right)$**

Δوس١ م ≅ Δ وص٢ م'  لماذا؟

استخدم تطابق الأضلاع المتناظرة لإثبات:

$$\text{جتا}\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right) = \text{جا}\theta$$

$$\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right) = \text{جتا}\theta$$

**استنتاج:** لأي زاويتين متتامتين، فإن جيب إحداهما يساوي جيب تمام الأخرى.

## قانون

$$\text{جا}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \text{جتا}\theta$$

$$\text{جتا}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \text{جا}\theta$$

$$\text{ظا}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \text{ظتا}\theta$$ شرط أن يكون ظتا$\theta$ معرّفًا.

## الدوال المثلثية (الدائرية ) على ح

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

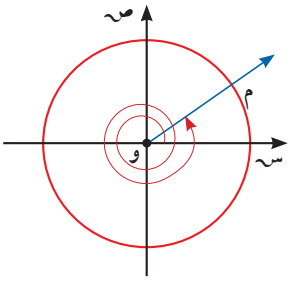
إذا كان ك عددًا صحيحًا فإن:

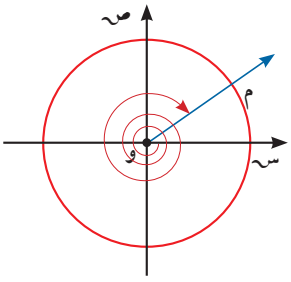
جا$(\theta + ٢\text{ك}\pi)$ = جا$\theta$

جتا$(\theta + ٢\text{ك}\pi)$ = جتا$\theta$

ظا$(\theta + \text{ك}\pi)$ = ظا$\theta$ حيث ظا$\theta$ معرّف

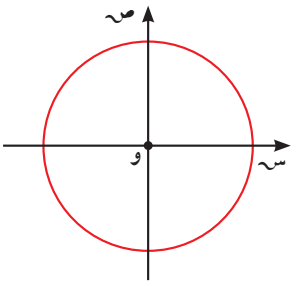
يبين الشكلان أدناه أن القوانين السابقة هي صحيحة أيضًا لأي زاوية قياسها $\theta$:



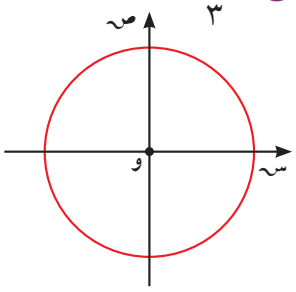




**تدريب** ارسم وحدد الربع الذي تقع فيه الزاوية التي قياسها:

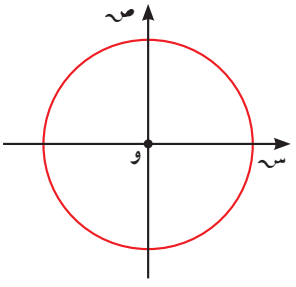
أ) $٤٧٥^\circ$



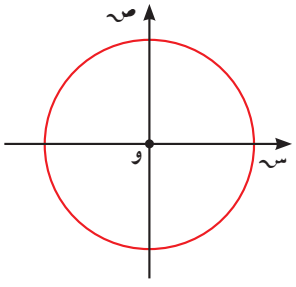

ب) $\frac{١٧\pi}{٣}$




جـ) $\frac{-١٦\pi}{٣}$




د) $-٨٩٠^\circ$



من العرض السابق يمكننا إعادة تعريف الدوال الدائرية باعتبار المجال هو ح فيكون:

## تعريف

إذا كانت (س، ص) هي النقطة المثلثية لزاوية موجهة في الوضع القياسي قياسها $\theta$ فإن:

١ $جا\theta = ص$ $\forall \theta \ni ح$

٢ $جتا\theta = س$ $\forall \theta \ni ح$

٣ $ظا\theta = \frac{ص}{س}$ ، $س \neq ٠$ حيث $\theta \ni ح$

٤ $قا\theta = \frac{١}{س}$ ، $س \neq ٠$ حيث $\theta \ni ح$

٥ $قتا\theta = \frac{١}{ص}$ ، $ص \neq ٠$ حيث $\theta \ni ح$

٦ $ظتا\theta = \frac{س}{ص}$ ، $ص \neq ٠$ حيث $\theta \ni ح$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

## مثال 5

بسط التعبير التالي لأبسط صورة:

جا س + جا(٩٠° + س) + جا(١٨٠° + س) + جا(٩٠° – س).

.....

.....

.....

.....

## حاول أن تحل 5

بسّط كلًّا من التعبيرات التالية لأبسط صورة:

أ $جتا(\theta + ٩\pi)$

ب $جتا\left(\theta - \frac{\pi}{٢} -\right)$

## كراسة التمارين

(١) اكتب النسب المثلثية التالية بدلالة إحدى النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ.

(أ) جا(π + θ) _____

(ب) جتا(π − θ) _____

(جـ) جا$\left(\theta + \frac{\pi}{٢}\right)$ _____

(د) جتا$\left(\theta - \frac{\pi}{٢}\right)$ _____

(٢) اكتب النسب المثلثية بدلالة إحدى النسب المثلثية الأساسية للزاوية س.

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

(أ) ظا(٠١٨٠ − س) _____

(ب) جتا(٠١٨٠ + س) _____

(جـ) جا(− س) _____

(٤) أوجد قيمة النسب المثلثية التالية بدون استخدام الآلة الحاسبة.

(أ) جا٠١٥٠ _____

(ب) ظا(−٠٢٢٥) _____

(جـ) جتا(−٠١٣٥) _____

(٥) أوجد قيمة النسب المثلثية التالية بدون استخدام الآلة الحاسبة.

(أ) جتا $\frac{\pi ٧}{٦}$ _____

(ب) جا$\left(-\frac{\pi ٢}{٣}\right)$ _____

(جـ) ظا $\frac{\pi ١١}{٦}$ _____

## بنود موضوعية

في التمارين (٧–١٠)، ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة أو (ب) إذا كانت خاطئة .

(٧) إذا كانت جا$\theta$ = ٠,٢ فإن جا($\pi$ + $\theta$) = ٠,٢ (أ) (ب)

(٨) إذا كانت جتا$\theta$ = $\frac{٢}{٣}$ فإن قا$\theta$ = $\frac{٣}{٢}$ (أ) (ب)

(٩) إذا كانت ظا$\theta$ = ٣ فإن ظتا($\pi$ + $\theta$) = ٣ (أ) (ب)

(١٠) إذا كانت جا$\theta$ = $\frac{١}{٥}$ فإن قتا($\pi$ + $\theta$) = –٥ (أ) (ب)

(١١) بسّط التعبيرات التالية لأبسط صورة:

(أ) جتا($\pi$ – $\theta$) – جتا(– $\theta$) + جا($\pi$ + $\theta$) + جتا$\left(\theta - \frac{\pi}{٢}\right)$.

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

---

(ب) جا($\pi$ + $\theta$) – جتا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$ + جتا($\pi$ – $\theta$) + جا$\left(\frac{\pi}{٢} + \theta\right)$.

# حل معادلات مثلثية

حل المعادلة: جتا س = جتا $\theta$

هو س = $\theta$ + ٢ك $\pi$ أو س = − $\theta$ + ٢ك $\pi$ (ك ∋ صـ)

لاحظ أن جيب تمام الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الرابع.

## مثال ٦

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

حل كلًّا من المعادلتين:

أ جتا س = $\frac{١}{٢}$

ب ٢جتا س − $\sqrt{٣}$ = ٠

## حاول ان تحل 6

حل المعادلة : $\sqrt{٢}$ جتا س = ١ .

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

حل المعادلة جا س = جا$\theta$

هو س = $\theta$ + ٢ك$\pi$ أو س = ($\pi$ − $\theta$) + ٢ك$\pi$ ، (ك ∋ صـ)

لاحظ أن جيب الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثاني.

## مثال 7

حل كلًّا من المعادلتين:

أ جا س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ب ٢جا س = $\sqrt{٢}$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

## حاول ان تحل 7

حل المعادلة: ٢جا س − ١ = ٠ .

حل المعادلة ظا س = ظا$\theta$ هو س = $\theta$ + ك $\pi$، (ك ∋ صـ)

لاحظ أن ظل الزاوية يكون موجبًا عندما تقع الزاوية في الربع الأول أو الثالث.

**مثال 8** حل المعادلة: ظا س = $\sqrt{٣}$.

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

**حاول ان تحل 8** حل المعادلة: $\sqrt{٣}$ ظا س = ١ .

## كراسة التمارين

(١٢) حلّ المعادلات التالية:

(أ) جتا س = $\frac{١}{٢}$ +

(ب) ظتا س = $\sqrt{٣}$

(جـ) ٢ جا س = $+\sqrt{٢}$

موقع المناهج الكويتية
almanahj.com/kw

(٢) ظلل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة أو (ب) إذا كانت خاطئة.

إذا كان جا س = $\sqrt{٣}$ فإن مجموعة الحل = ∅ (أ) (ب)

إذا كان جتا س = $\frac{١}{٢}$ فإن س = $\frac{\pi}{٣}$ (أ) (ب)

إذا كانت س = $\frac{\pi}{٦}$ فإن جا س = $\frac{١}{٢}$ (أ) (ب)

مجموعة حل قا س = ٠,٣ هي ∅ (أ) (ب)

ظا (π١٥) = صفر (أ) (ب)

**في التمارين (٣-٥)، اختر الإجابة الصحيحة:**

(٣) النسبة المثلثية في ما يلي التي قيمتها $\frac{١}{٢}$ هي:

(أ) جا(-٣٣٠°) (ب) جتا(-٢٤٠°) (جـ) ظتا(-١٥٠٠°) (د) ظا٧٦٥°

(٤) النسبة المثلثية في ما يلي التي قيمتها $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$:

(أ) جتا $\frac{\pi ٣١}{٦}$ (ب) جا $\left(-\frac{\pi ٣٥}{٣}\right)$ (جـ) ظا $\frac{\pi ١٧}{٦}$ (د) قا $\frac{\pi ١٣}{٣}$

(٥) إن قيمة المقدار قا(π٢ - θ) - قتا$\left(\frac{\pi}{٢}+\theta\right)$ + جتا$\left(\theta+\frac{\pi}{٢}\right)$ + جاθ هي:

(أ) -١ (ب) صفر (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ١