تم تحميل هذا الملف من موقع ملفات الكويت التعليمية

ملفات الكويت التعليمية

*للحصول على أوراق عمل لجميع الصفوف وجميع المواد اضغط هنا com.kwedufiles.www//:https

* للحصول على أوراق عمل لجميع مواد الصف العاشر اضغط هنا

https://kwedufiles.com/10

* للحصول على جميع أوراق الصف العاشر في مادة رياضيات ولجميع الفصول, اضغط هنا

https://kwedufiles.com/10math

* للحصول على أوراق عمل لجميع مواد الصف العاشر في مادة رياضيات الخاصة بـ الفصل الأول اضغط هنا

https://www.kwedufiles.com/10math1

* لتحميل كتب جميع المواد في جميع الفصول للـ الصف العاشر اضغط هنا

https://www.kwedufiles.com/grade10

للحصول على جميع روابط الصفوف على تلغرام وفيسبوك من قنوات وصفحات: اضغط هنا bot_kwlinks/me.t//:https

الروابط التالية هي روابط الصف العاشر على مواقع التواصل الاجتماعي

مجموعة الفيسبوك

صفحة الفيسبوك

مجموعة التلغرام

بوت التلغرام

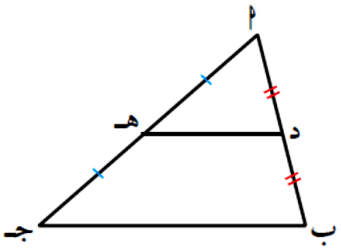
قناة التلغرام

رياضيات على التلغرام

المنهج التكميلى للصف العاشر

نظرية :

القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلّث توازي الضلع الثالث وطولها يساوي نصف طول هذا الضلع .



في المثلّث أ ب جـ :

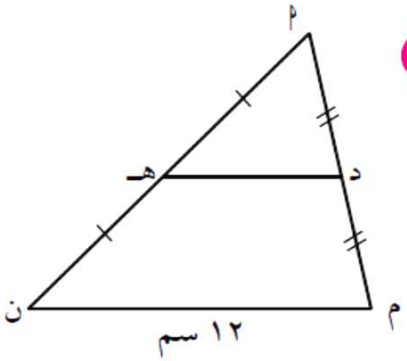
∵ د منتصف $\overline{\text{أب}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{أجـ}}$

∴ $\overline{\text{دهـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، د هـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ

تدرّب (١) :

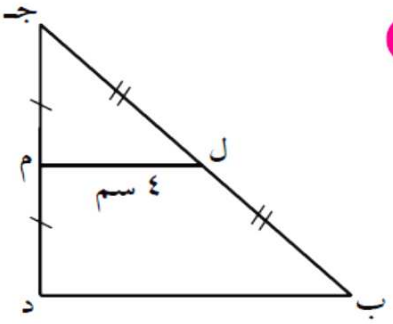
في كلّ من المثلّثات التالية أكمِل (دون استخدام الأدوات الهندسية) :

أ



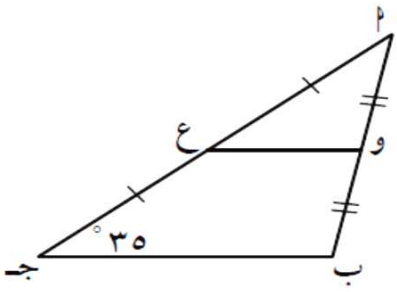
د هـ = ...

ب



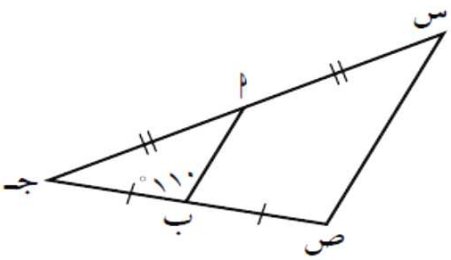
ب د = ...

جـ



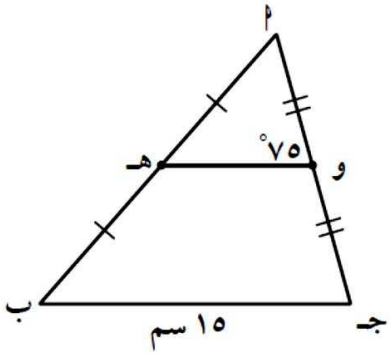
ق (أ$\hat{\text{ع}}$ و) = ...

د



ق ($\hat{\text{ص}}$) = ...

مثال (١) :



في الشكل المقابل أ ب جـ مثلّث فيه :

أ و = و جـ ، أ هـ = هـ ب ، ب جـ = ١٥ سم ،

ق (أ $\hat{و}$ هـ) = ٧٥° .

أوجِد بالبرهان : (١) طول $\overline{\text{و هـ}}$ (٢) ق ($\hat{\text{جـ}}$) .

الحلّ :

المعطيات : أ و = و جـ ، أ هـ = هـ ب ، ب جـ = ١٥ سم ،

ق (أ $\hat{و}$ هـ) = ٧٥°

المطلوب : إيجاد (١) طول $\overline{\text{و هـ}}$ (٢) ق ($\hat{\text{جـ}}$)

البرهان : في Δ أ ب جـ :

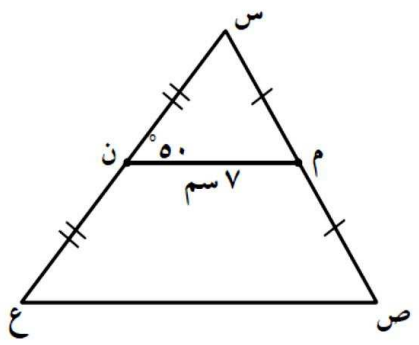
∵ و منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

∴ و هـ = $\frac{١}{٢}$ جـ ب ، $\overline{\text{و هـ}}$ // $\overline{\text{جـ ب}}$

و هـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٥ = $\frac{١}{٢}$ ٧ سم

∴ ق ($\hat{\text{جـ}}$) = ق (أ $\hat{و}$ هـ) = ٧٥° (بالتناظر والتوازي)

تدرّب (٢) :



س ص ع مثلّث فيه :

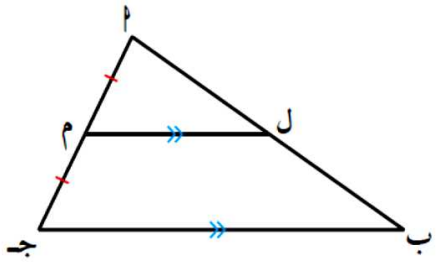
م منتصف $\overline{\text{س ص}}$ ، ن منتصف $\overline{\text{س ع}}$ ،

ق (س $\hat{\text{ن}}$ م) = ٥٠° ، م ن = ٧ سم .

أوجِد بالبرهان : (١) ص ع (٢) ق ($\hat{\text{ع}}$) .

نظرية :

إذا رُسِم مستقيم من منتصف أحد أضلاع مثلّث موازِيًا ضلعًا آخر فيه ، فإنّه ينصّف الضلع الثالث .

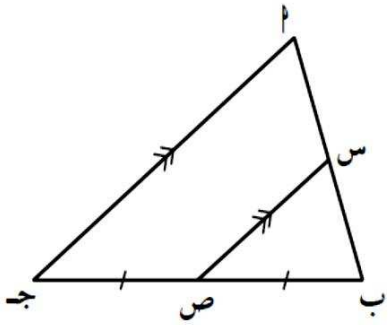


في المثلّث أ ب جـ :

∵ م منتصف $\overline{\text{أجـ}}$ ، $\overline{\text{ل م}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ ل منتصف $\overline{\text{أب}}$

تدرّب (٥) :



أ ب جـ مثلّث فيه : ص منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ،

$\overline{\text{ص س}}$ // $\overline{\text{جـ أ}}$ ، أ س = ٦ سم .

أوجِد بالبرهان ب س .

المعطَيات : .....

.....

المطلوب : .....

البرهان : في المثلّث أ ب جـ :

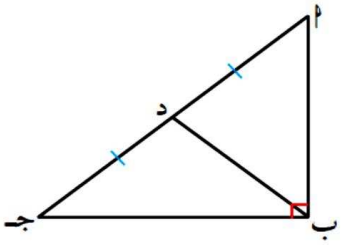
∵ ص منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{ص س}}$ // .....

∴ س منتصف .....

∴ ب س = أ س = ... سم

نظرية :

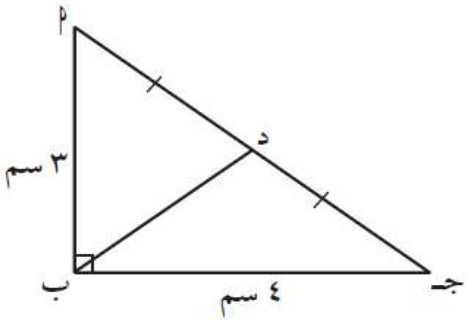
طول القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة إلى منتصف الوتر في المثلّث القائم الزاوية يساوي نصف طول الوتر .



في المثلّث أ ب جـ :

∵ ق ($\hat{ب}$) = ٩٠° ، د منتصف $\overline{أجـ}$

∴ ب د = $\frac{١}{٢}$ أ جـ



مثال (١) :

أ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب ، أ ب = ٣ سم ،

ب جـ = ٤ سم ، د منتصف $\overline{أجـ}$.

أوجِد بالبرهان طول $\overline{ب د}$.

الحلّ :

المعطَيات : أ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب ، أ ب = ٣ سم ،

ب جـ = ٤ سم ، د منتصف $\overline{أجـ}$.

المطلوب : إيجاد طول $\overline{ب د}$.

البرهان : ∵ أ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب

∴ $(أجـ)^٢ = (أب)^٢ + (ب جـ)^٢$ **(نظرية فيثاغورث)**

$= (٣)^٢ + (٤)^٢$

$= ٩ + ١٦ = ٢٥$

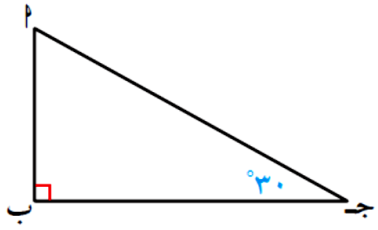
∴ أ جـ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ سم

∵ د منتصف $\overline{أجـ}$

∴ ب د = $\frac{١}{٢}$ أ جـ

= $\frac{١}{٢} \times ٥ = ٢\frac{١}{٢}$ سم

نتيجة (١) : في المثلّث الثلاثيني الستّيني يكون طول الضلع المقابِل للزاوية التي قياسها ٣٠° مساوِيًا نصف طول الوتر .



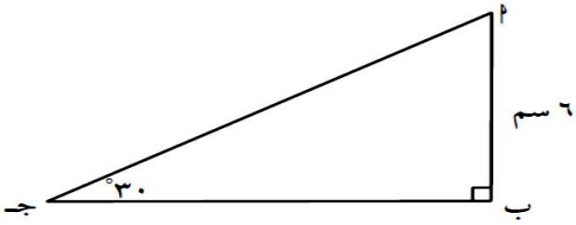
∵ أ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب ، ق ($\hat{جـ}$) = ٣٠°

∴ أ ب = $\frac{١}{٢}$ أ جـ

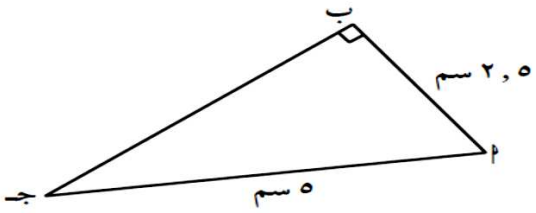
وعكس ذلك أيضًا صحيح :

تدرّب (٣) :

أكمِل ما يلي (دون استخدام الأدوات الهندسية) :

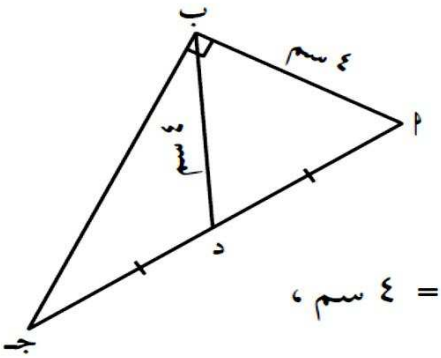


أ جـ = ...



ق ($\hat{جـ}$) = ...

مثال (٢) :



في الشكل المقابِل :

أوجد بالبرهان : (١) ق ($\hat{جـ}$) (٢) ق ($\hat{أ}$) .

الحلّ :

المعطَيات : أ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب ، أ ب = ٤ سم ،

ب د = ٤ سم ، د منتصف $\overline{أ جـ}$.

المطلوب : إيجاد (١) ق ($\hat{جـ}$) (٢) ق ($\hat{أ}$) .

البرهان : ∵ المثلّث أ ب جـ قائم الزاوية في ب ، د منتصف $\overline{أ جـ}$

∴ ب د = $\frac{١}{٢}$ أ جـ

∴ أ جـ = ٢ × ٤ = ٨ سم

∵ أ ب = $\frac{١}{٢}$ أ جـ

∴ ق ($\hat{جـ}$) = ٣٠°

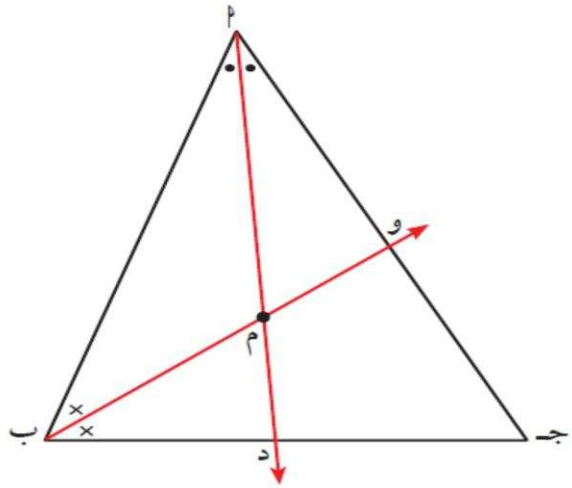
∴ أ ب جـ مثلّث ثلاثيني ستّيني

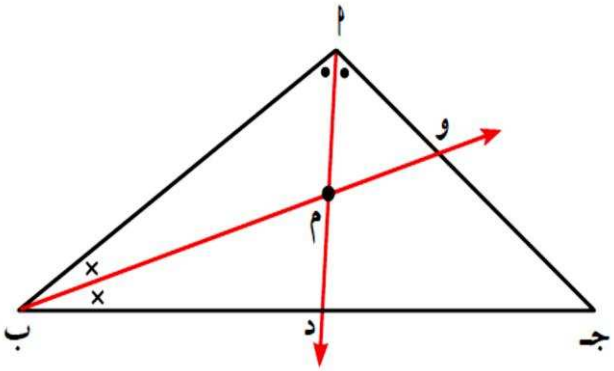
∴ ق ($\hat{أ}$) = ٦٠°

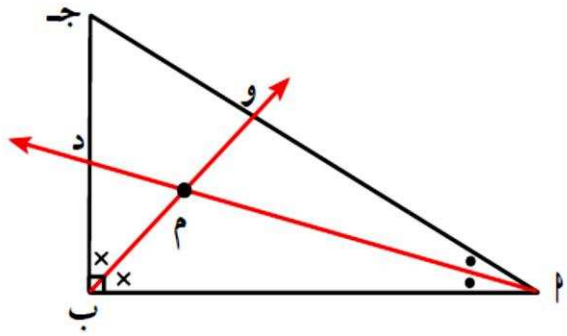
منصِّفات الزوايا الداخلية للمثلّث

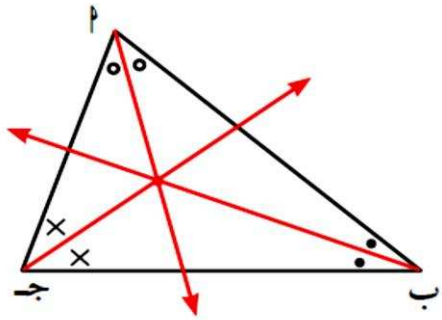
في المثلّثات التالية :

$\overleftarrow{\text{أد}}$ منصِّف الزاوية أ ، $\overleftarrow{\text{ب و}}$ منصِّف الزاوية ب ، $\overleftarrow{\text{أد}} \cap \overleftarrow{\text{ب و}} = \{ \text{م} \}$









نظرية :

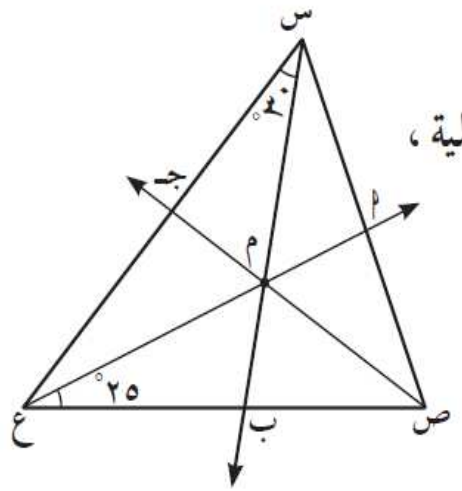
منصِّفات الزوايا الداخلية للمثلّث تتقاطع في نقطة واحدة .

نتيجة : نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلية للمثلّث على أبعاد متساوية من أضلاعه .

∵ م نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلية للمثلّث

∴ م ل = م ن = م و

مثال (١) :



Δ س ص ع فيه : م نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلية ،

إذا كان ق (م $\hat{ع}$ ص) = ٢٥° ، ق (م $\hat{س}$ ع) = ٣٠° ،

فأوجد بالبرهان كلًّا ممّا يلي :

(١) ق (س $\hat{ص}$ ع) (٢) ق (م $\hat{ص}$ ع)

الحلّ :

المعطيات : م نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلية للمثلّث س ص ع ،

ق (م $\hat{ع}$ ص) = ٢٥° ، ق (م $\hat{س}$ ع) = ٣٠°

المطلوب : إيجاد (١) ق (س $\hat{ص}$ ع) (٢) ق (م $\hat{ص}$ ع)

البرهان : ∵ م نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلية للمثلّث س ص ع

∴ $\overleftarrow{ع م}$ منصِّف $\hat{ع}$

∴ ق (س $\hat{ع}$ ص) = ٢ × ٢٥° = ٥٠°

وبالمثل $\overleftarrow{س م}$ منصِّف $\hat{س}$

∴ ق (ص $\hat{س}$ ع) = ٢ × ٣٠° = ٦٠°

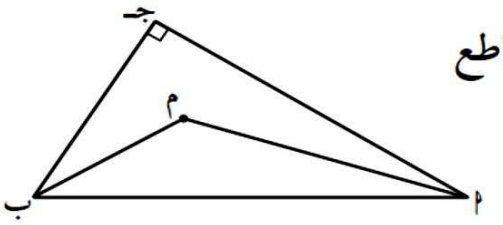
∵ مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلية يساوي ١٨٠°

∴ ق (س $\hat{ص}$ ع) = ١٨٠° − (٥٠° + ٦٠°) = ٧٠°

∵ $\overleftarrow{ص جـ}$ منصِّف $\hat{ص}$

∴ ق (م $\hat{ص}$ ع) = ٧٠° ÷ ٢ = ٣٥°

مثال (٢) :



Δ أ ب جـ قائم الزاوية في جـ ، إذا كانت م هي نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلية ، فأوجِد بالبرهان ق (أ م̂ ب) .

الحلّ :

المعطَيات : Δ أ ب جـ قائم الزاوية في جـ ،
م نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلية .

المطلوب : إيجاد ق (أ م̂ ب)

البرهان : في Δ أ ب جـ :

∵ مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلية يساوي ١٨٠°

∴ ق (جـ أ̂ ب) + ق (جـ ب̂ أ) = ١٨٠° − ٩٠° = ٩٠°

∵ م نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلية للمثلّث أ ب جـ

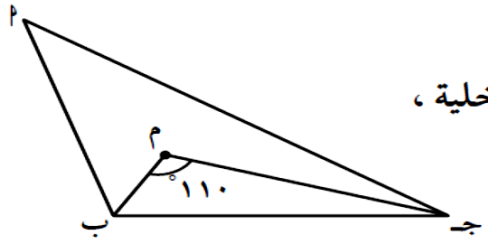
∴ ق (م أ̂ ب) + ق (م ب̂ أ) = $\frac{١}{٢}$ [ق (جـ أ̂ ب) + ق (جـ ب̂ أ)]

= $\frac{١}{٢}$ × ٩٠° = ٤٥°

∴ في Δ أ ب م :

ق (أ م̂ ب) = ١٨٠° − ٤٥° = ١٣٥°

تدرّب (٤) :



Δ أ ب جـ فيه : م نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلية ،
إذا كان ق (جـ م̂ ب) = ١١٠° .
فأوجِد بالبرهان ق (جـ أ̂ ب) .

المعطيات : ----------

المطلوب : ----------

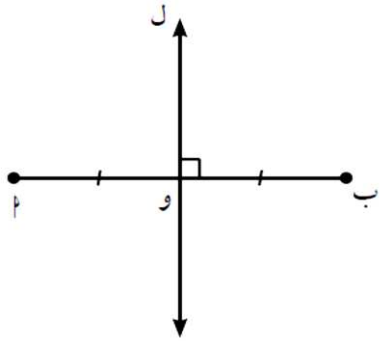
البرهان : ----------

محاور أضلاع المثلّث

محور القطعة المستقيمة هو العمود المنصِّف لها .

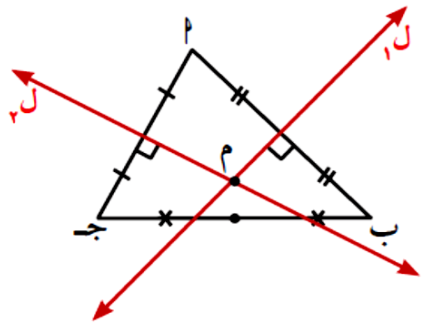
∵ $\overleftrightarrow{ل}$ ⊥ $\overline{أب}$ ، أو = ب و

∴ $\overleftrightarrow{ل}$ محور $\overline{أب}$

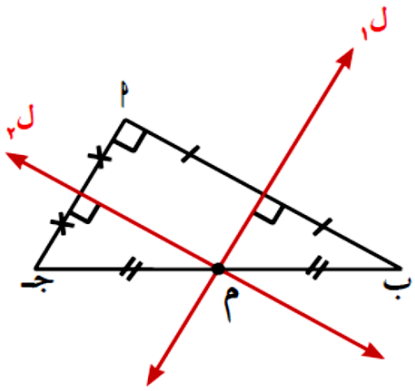


في المثلّثات التالية :

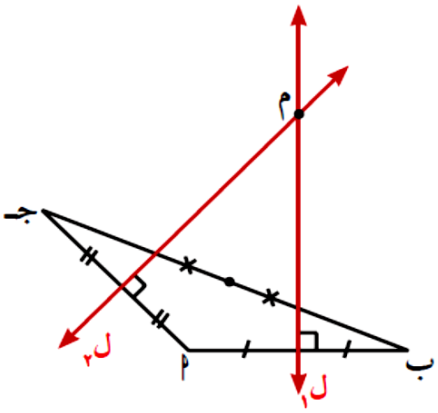
$\overleftrightarrow{ل_1}$ محور ---------- ، $\overleftrightarrow{ل_2}$ محور ---------- ، $\overleftrightarrow{ل_1}$ ∩ $\overleftrightarrow{ل_2}$ = ----------



مثلّث حادّ الزوايا



مثلّث قائم الزاوية

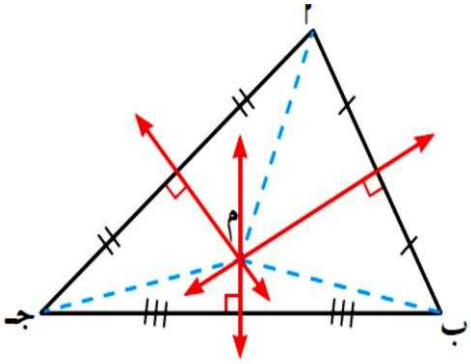


مثلّث منفرج الزاوية

نظرية :

محاور أضلاع المثلّث تتقاطع في نقطة واحدة .

- نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث الحادّ الزوايا تقع **داخله** .
- نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث القائم الزاوية تقع في **منتصف الوتر** .
- نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث المنفرج الزاوية تقع **خارجه** .

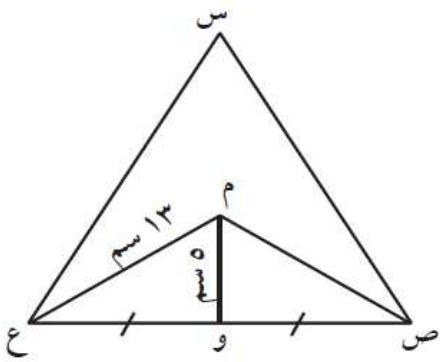


نتيجة : نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث تقع على أبعاد متساوية من رؤوسه .

∵ م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث أ ب جـ

∴ م أ = م ب = م جـ

مثال :



س ص ع مثلّث فيه : م نقطة تقاطع محاور أضلاعه ،

و منتصف $\overline{\text{ص ع}}$ ، م ع = ١٣ سم ، م و = ٥ سم .

أوجِد بالبرهان كلًّا ممّا يلي :

(١) م ص (٢) ص و (٣) ص ع

الحل :

المعطيات : س ص ع مثلّث فيه م نقطة تقاطع محاور أضلاعه ،

و منتصف $\overline{\text{ص ع}}$ ، م ع = ١٣ سم ، م و = ٥ سم .

المطلوب : إيجاد كلّ من : (١) م ص (٢) ص و (٣) ص ع

البرهان : ∵ م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث س ص ع

∴ م ص = م ع = ١٣ سم

∵ و منتصف $\overline{\text{ص ع}}$

∴ $\overline{\text{م و}}$ ⊥ $\overline{\text{ص ع}}$

∴ Δ م ص و قائم الزاوية في و

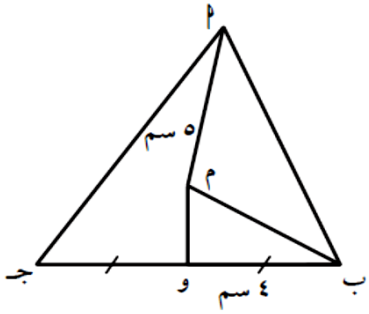
∴ $(\text{ص و})^{٢} = (\text{م ص})^{٢} - (\text{م و})^{٢}$ (نظرية فيثاغورث)

ص و = $\sqrt{(١٣)^{٢} - (٥)^{٢}}$

= $\sqrt{١٦٩ - ٢٥}$ = $\sqrt{١٤٤}$ = ١٢ سم

∴ ص ع = ٢ × ص و

= ٢ × ١٢ = ٢٤ سم



تدرّب (٢) :

Δ أ ب جـ فيه : م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث ،

أ م = ٥ سم ، ب و = ٤ سم ، و منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$.

أوجِد بالبرهان كلًّا ممّا يلي : (١) م ب (٢) م و .

المعطَيات : Δ أ ب جـ فيه م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث ،

أ م = ٥ سم ، ب و = ٤ سم ، و منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$.

المطلوب : إيجاد كلّ ممّا يلي : (١) م ب (٢) م و

البرهان : ∵ م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث أ ب جـ

∴ م ب = ... = ... سم

∵ و منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ∴ ..... ⊥ .....

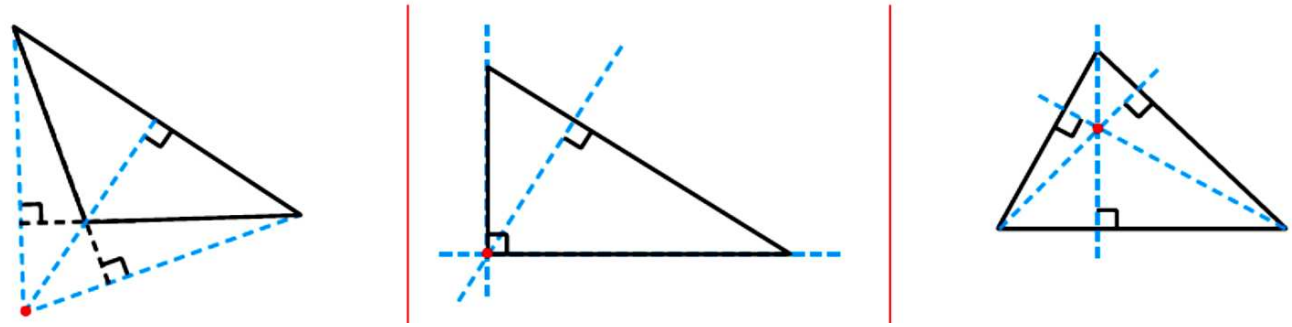
∵ Δ م ب و قائم الزاوية في و

∴ $(\text{م و})^{٢}$ = $(\text{.....})^{٢}$ − $(\text{.....})^{٢}$ (نظرية فيثاغورث)

= .....

∴ م و = ... = ... سم

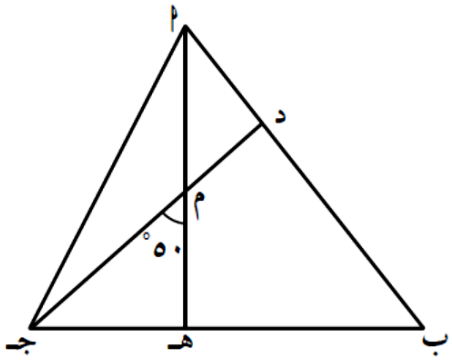
الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه



نظرية :

الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه تتقاطع في نقطة واحدة .

مثال :



أ ب جـ مثلّث فيه : م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه ، ق (جـ م̂ هـ) = ٥٠° ،

إذا كان $\overline{\text{جـ د}}$ ∩ $\overline{\text{أ هـ}}$ = { م } .

فأوجِد بالبرهان ق (ب̂) .

الحل :

المعطَيات : م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه ،

ق (جـ م̂ هـ) = ٥٠°

المطلوب : إيجاد ق (ب̂) .

البرهان : ∵ م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث أ ب جـ على أضلاعه

∴ Δ م هـ جـ قائم الزاوية في هـ

∵ مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلية ١٨٠°

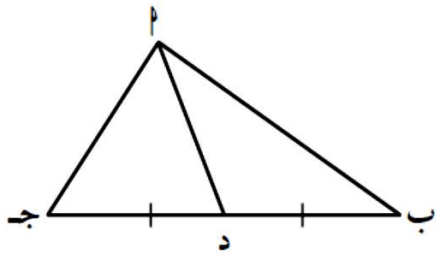
∴ ق (م جـ̂ هـ) = ١٨٠° − (٥٠° + ٩٠°) = ٤٠°

في Δ جـ د ب القائم الزاوية في د

ق (ب̂) = ١٨٠° − (٤٠° + ٩٠°) = ٥٠°

القطع المتوسّطة للمثلّث

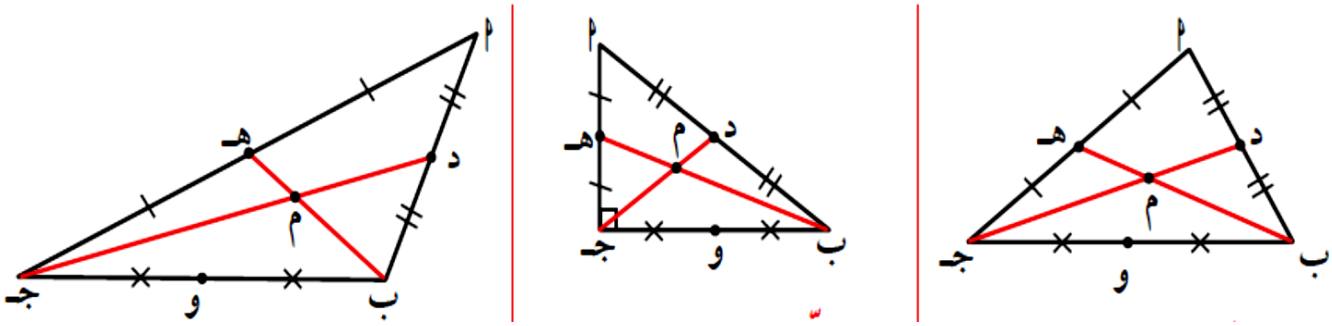
القطعة المستقيمة التي تصل أيّ رأس للمثلّث بمنتصف الضلع المقابِل له تسمى قطعة متوسّطة للمثلّث .



في Δ أ ب جـ :

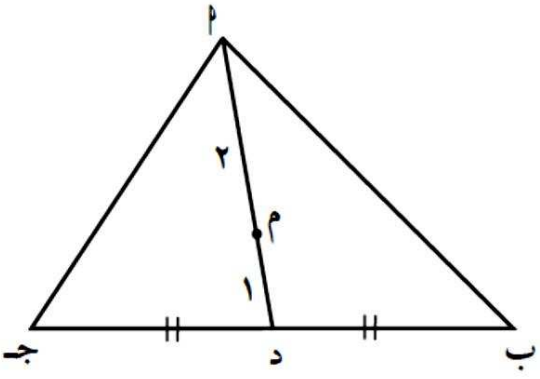
∵ د منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ $\overline{\text{أ د}}$ قطعة متوسّطة للمثلّث أ ب جـ .



نظرية :

القطع المتوسّطة للمثلّث تتقاطع في نقطة واحدة تقسم كلّ منها بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس .



في Δ أ ب جـ :

$\overline{\text{أ د}}$ قطعة متوسّطة ،

م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث .

أكمِل :

أ م = ... م د	م د = ... أ د	أ م = ... أ د
م د = ... أ م	أ د = ... م د	أ د = ... أ م

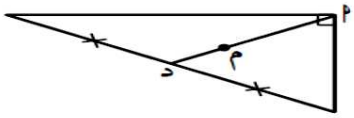
تدرّب (١) :

في كلّ من المثلّثات التالية : م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة ، أكمِل ما يلي (دون استخدام الأدوات الهندسية) :

د م = ٣ سم

أ م = ... سم

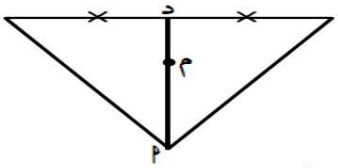
أ د = ... سم



أ م = ٤ سم

د م = ... سم

أ د = ... سم

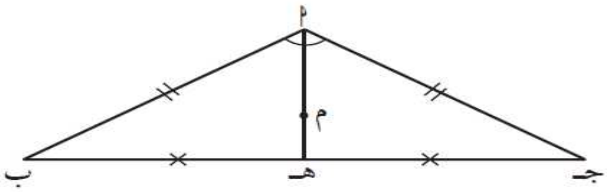


أ د = ١٨ سم

د م = ... سم

أ م = ... سم

مثال :



أ ب جـ مثلّث فيه :

أ ب = أ جـ = ٢٤ سم ،

ق ($\hat{جـ}$) = ٣٠° ،

م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث .

أوجد بالبرهان كلًّا من : (١) أ هـ (٢) م هـ (٣) م أ .

الحلّ :

المعطَيات : أ ب = أ جـ = ٢٤ سم ، ق ($\hat{جـ}$) = ٣٠° ،

م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة في المثلّث

المطلوب : إيجاد كلٍّ من : (١) أ هـ (٢) م هـ (٣) م أ

البرهان : في Δ أ ب جـ :

∵ أ ب = أ جـ ، هـ منتصف $\overline{جـ ب}$

∴ $\overline{أ هـ}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$

∵ ق ($\hat{جـ}$) = ٣٠°

∴ Δ أ جـ هـ ثلاثيني ستّيني

∴ أ هـ = $\frac{١}{٢}$ أ جـ

= $\frac{١}{٢}$ × ٢٤ = ١٢ سم

∵ م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث أ ب جـ

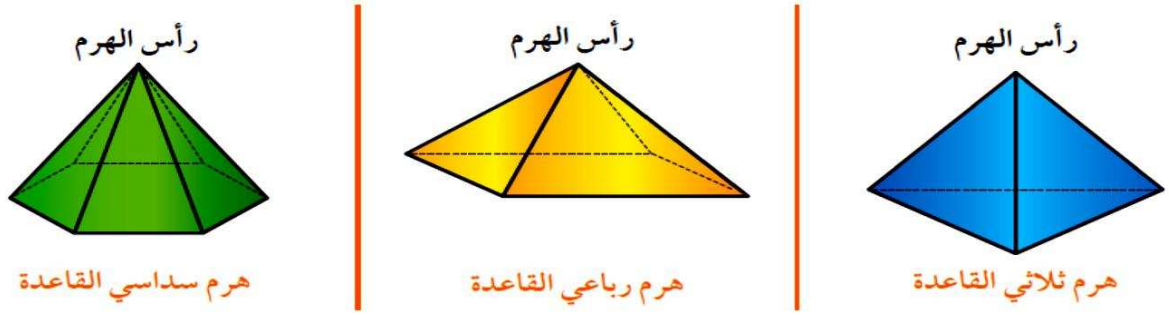
م هـ = $\frac{١}{٣}$ أ هـ

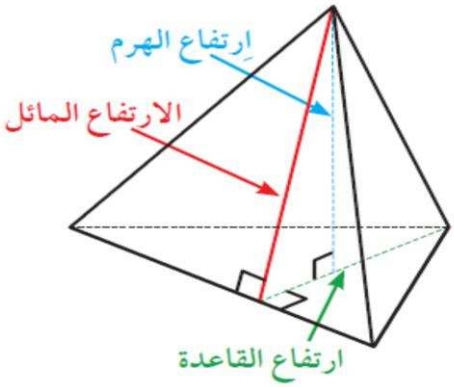
= $\frac{١}{٣}$ × ١٢ = ٤ سم

م أ = ٢ م هـ

= ٢ × ٤ = ٨ سم

الهرم المنتظم : مجسَّم متعدّد الأوجه له قاعدة واحدة منتظمة وأوجهه الجانبية الأخرى مثلّثات متطابقة تلتقي عند أعلى الهرم في نقطة تُسمّى رأس الهرم . يُسمّى الهرم بحسب عدد أضلاع قاعدته .





اِرتفاع الهرم : هو البعد العمودي من رأس الهرم إلى القاعدة المقابِلة .

الارتفاع المائل : هو البعد العمودي من رأس الهرم إلى أحد أحرف قاعدة الهرم .

المساحة السطحية للهرم = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

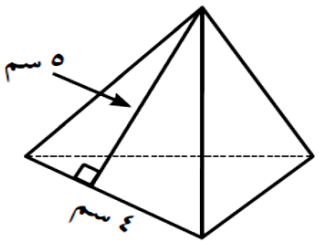
المساحة الجانبية للهرم المنتظم = عدد الأوجه × مساحة الوجه الواحد

المساحة السطحية للهرم المنتظم = (عدد الأوجه × مساحة الوجه الواحد) + مساحة القاعدة

تدرّب (١) :

هرم ثلاثي منتظم طول ضلع قاعدته ٤ سم ومساحة قاعدته ٤ $\sqrt{٣}$ سم^{٢} وارتفاعه المائل ٥ سم ، أوجِد مساحته السطحية .

المساحة السطحية للهرم المنتظم = (عدد الأوجه × مساحة الوجه الواحد) + مساحة القاعدة



مساحة الوجه الواحد = $\frac{١}{٢}$ × ق × ع

= $\frac{١}{٢}$ × ..... × .....

= .....

مساحة القاعدة = ...

المساحة السطحية للهرم المنتظم = ٣ × ..... + ...

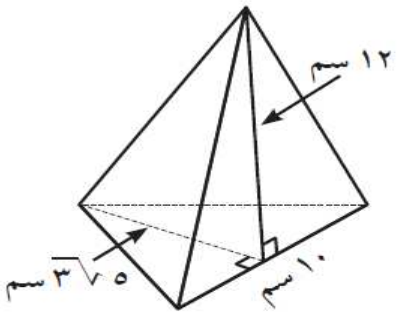
= (..... + ...) سم^{٢}

مثال (١) :

هرم ثلاثي منتظم طول ضلع قاعدته ١٠ سم ، وارتفاع قاعدته $٥\sqrt{٣}$ سم ، وارتفاعه المائل ١٢ سم . أوجد مساحته السطحية .

الحل :

المساحة السطحية للهرم المنتظم = (عدد الأوجه × مساحة الوجه الواحد) + مساحة القاعدة



مساحة الوجه الواحد = $\frac{١}{٢}$ × ق × ع

= $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ١٢

= ٦٠ سم^{٢}

مساحة القاعدة = $\frac{١}{٢}$ × ق × ع

= $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × $٥\sqrt{٣}$

= $٢٥\sqrt{٣}$ سم^{٢}

المساحة السطحية للهرم المنتظم = ٣ × ٦٠ + $٢٥\sqrt{٣}$

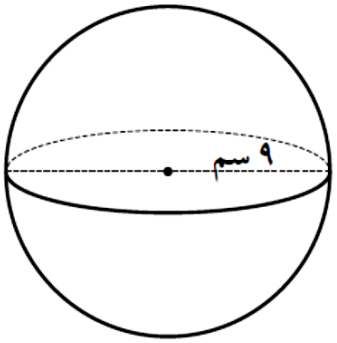
= (١٨٠ + $٢٥\sqrt{٣}$) سم^{٢}

حجم الكرة

$$\text{حجم الكرة} = \frac{٤}{٣} \times \pi \text{ نق}^{٣}$$

مثال (١) :

أوجِد حجم كرة طول نصف قطرها ٩ سم . (بدلالة π)



الحلّ :

$$\text{حجم الكرة} = \frac{٤}{٣} \times \pi \text{ نق}^{٣}$$

$$= \frac{٤}{٣} \times \pi \times (٩)^{٣}$$

$$= \frac{٤}{٣} \times \pi \times ٩ \times ٩ \times ٩$$

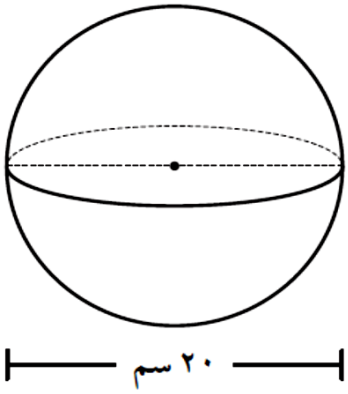
$$= ١٢ \times \pi \times ٨١$$

$$= ٩٧٢ \pi \text{ سم}^{٣}$$

مثال (٢) :

من خلال الشكل المقابِل :

أوجِد حجم الكرة المرسومة . (اعتبر π = ٣,١٤)



الحل :

نق = ١٠ سم

$$\text{حجم الكرة} = \frac{٤}{٣} \times \pi \text{ نق}^{٣}$$

$$= \frac{٤}{٣} \times ٣,١٤ \times (١٠)^{٣}$$

$$= \frac{٤}{٣} \times ٣,١٤ \times ١٠٠٠$$

$$= \frac{٤}{٣} \times ٣١٤٠$$

$$= \frac{١٢٥٦٠}{٣}$$

$$\approx ٤١٨٦,٧ \text{ سم}^{٣}$$