مقدمة في المتجهات – بطاقات وأنشطة





تم تحميل هذا الملف من موقع مناهج مملكة البحرين	
موقع المناهج ⇦ مناهج مملكة البحرين ⇦ الصف الثالث الثانوي ⇦ رياضيات ⇦ ⇦ ملفات متنوعة ⇦ الملف	
تاريخ إضافة الملف على موقع المناهج: 18-11-2026 18:52:11	
ملفات ا كتب للمعلم ا كتب للطالب ا اختبارات الكترونية ا اختبارات ا حلول ا عروض بوربوينت ا أوراق عمل منهج انجليزي ا ملخصات وتقارير ا مذكرات وبنوك ا الامتحان النهائي ا للمدرس	المزيد من مادة رياضيات:
إعداد: عابدين حامد فؤاد	

التواصل الاجتماعي بحسب الصف الثالث الثانوي					
صفحة مناهج مملكة البحرين على فيسبوك					
المواد على تلغرام	التربية الاسلامية	اللغة العربية	اللغة الانجليزية	الرياضيات	

المزيد من الملفات بحسب الصف الثالث الثانوي والمادة رياضيات في

تحميل تطبيق المناهج للهواتف الذكية	
تطبيق المناهج على Store App (آبل)	تطبيق المناهج على Play Google (أندرويد)

KINGDOM OF BAHRAIN
Ministry of Education
ALNOAIM SECONDARY BOYS SCHOOL

مَمْلَكَة البَحْرَيْن
وَزَارَةُ التَّرْبِيَةِ وَالتَّعْلِيم
مَدْرَسَةُ اَلْنُعَيْمِ اَلْثَّانَوِيَةِ لِلْبَنِيْنْ
قسم الرياضيات

توجيهي فيز وريض

إعداد الأستاذ / عابدين حامد فؤاد

ملف إنجاز الطالب

بطاقات + أنشطة

الرياضيات 5 (ريض 365)

الوحدة الأولى

مقدمة في المتجهات

إعداد الأستاذ : عابدين حامد فؤاد

اسم الطالب : .....

الرقم الأكاديمي : .....

الصف : .....

ملحوظة : هذه المذكرة ليست بديلاً عن الكتاب المدرسي (الكتاب هو المرجع الأساسي)

محتوى مساق الرياضيات للمستوى الثالث (توحيد المسارات / العلمي)

اسم المساق	الفصل الدراسي	رمز المساق	عدد الساعات	سنة الطبعة
الرياضيات 5	الخامس	ريض 365	2	الطبعة الأولى 1434 هـ - 2013 م الطبعة الثانية 1436 هـ - 2015 م

رمز الدرس	عنوان الدرس	الكفايات	الامثلة غير المطلوبة	التمارين غير المطلوبة
4 – 1	مقدمة في المتجهات	• إجراء العمليات على المتجهات باستعمال مقياس الرسم وتمثيلها هندسيًا. • تحليل المتجه إلى مركبتيه المتعامدتين. • حل مسائل تطبيقية على المتجهات.	----	45 – 37
4 – 2	المتجهات في المستوى الاحداثي	• إجراء العمليات على المتجهات في المستوى الإحداثي وتمثيلها بيانيًا. • كتابه المتجه باستعمال متجهي الوحدة.	----	----
4 – 3	الضرب الداخلي ومسقطا المتجه	• إيجاد الضرب الداخلي لمتجهين واستعماله في إيجاد الزاوية بينهما. • إيجاد مسقط متجه على آخر.	----	27
5 – 1	الإحداثيات القطبية	• تمثيل نقاط بالإحداثيات القطبية. • تمثيل معادلات قطبية بسيطة.	----	----
5 – 2	الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات	• التحويل بين الإحداثيات القطبية و الديكارتية. • تحويل المعادلات من الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية والعكس.	----	----
5 – 3	الأعداد المركبة ونظرية ديموافر	• تحويل الأعداد المركبة من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية والعكس. • إيجاد ضرب الأعداد المركبة وقسمتها، وإيجاد جذورها وقواها بالصورة القطبية.	----	----
6 – 1	الإحصاء الوصفي	• تعرف أشكال التوزيعات؛ لاختبار المقاييس الإحصائية المناسبة. • مقارنة بين مجموعتين من البيانات باستعمال مقاييس الموقع.	----	2 ، 16 – 12
6 – 2	التوزيعات الاحتمالية	• تكوين توزيع احتمالي، وحساب ملخصاته الإحصائية. • تكوين توزيع ذات الحدين واستعماله، وحساب ملخصاته الإحصائية الأساسية.	5	9 ،8
6 – 3	التوزيع الطبيعي	• إيجاد المساحة تحت منحنيات توزيعات طبيعية. • إيجاد احتمالات ضمن توزيعات طبيعية، وإيجاد قيم بيانات عُلمت احتمالاتها.	دراسة ذاتية	

بطاقة (1) ريض 365

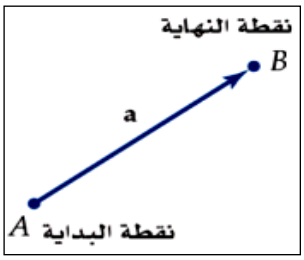
❶ مقدمة في المتجهات

أ./ عابدين حامد

① تحديد الكميات المتجهة و الكميات القياسية :

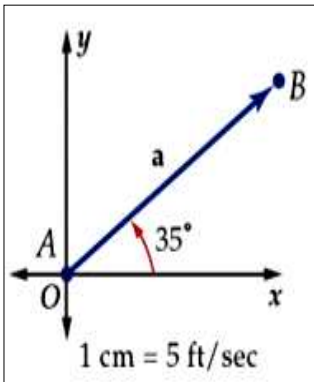
المتجهات يمكن وصف الكثير من الكميات الفيزيائية مثل الكتلة بقيمة عددية واحدة، تُسمى كمية قياسية (عددية)، ويدل هذا العدد على مقدار الكمية أو قياسها. وأما **المتجه** فهو كمية لها طول واتجاه؛ فمثلًا السرعة المتجهة للكرة تصف كلًّا من مقدار سرعة الكرة، واتجاه حركتها.

② تمثيل المتجه هندسياً + طول المتجه :



يمكن تمثيل المتجه هندسيًّا بقطعة مستقيمة متجهة، أو سهم يظهر كلًّا من القيمة والاتجاه. ويمثل الشكل المجاور القطعة المستقيمة المتجهة التي لها **نقطة البداية** A، **ونقطة النهاية** B. ويرمز لهذا المتجه بالرمز $\overrightarrow{AB}$ أو $\vec{a}$ أو $\mathbf{a}$.

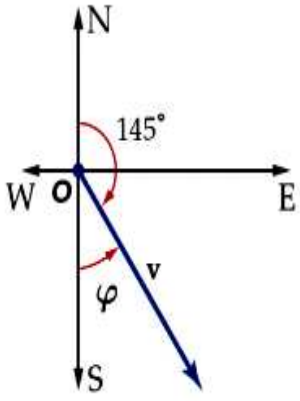
③ الوضع القياسي + اتجاه المتجه + طول المتجه :



إذا كانت نقطة بداية المتجه هي نقطة الأصل، فإن **المتجه يكون في الوضع القياسي**. ويعبّر عن اتجاه **المتجه** بالزاوية التي يصنعها مع الأفقي (الاتجاه الموجب للمحور x). فمثلًا، اتجاه المتجه $\mathbf{a}$ هو $35°$.

أما **طول المتجه** فيمثّله طول القطعة المستقيمة. إذا كان مقياس الرسم هو $1\text{ cm} = 5\text{ ft/sec}$ ، فإن طول المتجه $\mathbf{a}$ ، ويُرمز له بالرمز $|\mathbf{a}|$ ، يساوي 5×2.6 أو 13 ft / sec .

④ الاتجاه الرُبعي + الاتجاه الحقيقي :



ويمكن التعبير عن اتجاه المتجه أيضًا باستعمال زاوية **الاتجاه الربعي** φ ، وتُقرأ فاي، وهي قياس اتجاهي بين $0°$ و $90°$ شرق أو غرب الخط الرأسي (خط شمال - جنوب). فمثلًا زاوية الاتجاه الربعي للمتجه $\mathbf{v}$ في الشكل المجاور هي $35°$ شرق الجنوب، وتُكتب S 35° E .

كما يمكن استعمال زاوية **الاتجاه الحقيقي** ، حيث تُقاس الزاوية مع عقارب الساعة بدءًا من الشمال. ويُقاس الاتجاه الحقيقي بثلاثة أرقام، فمثلًا يُكتب الاتجاه الذي يحدّد زاوية قياسها $25°$ من الشمال مع عقارب الساعة باستعمال الاتجاه الحقيقي على الصورة $025°$.

ملحوظة

❶ **إذا أُعطي قياس زاوية برقمين دون تحديد أي اتجاهات إضافية فهي زاوية مع الأفقي .**

❷ **إذا أُعطي قياس زاوية بثلاث أرقام دون تحديد أي اتجاهات إضافية فهي زاوية اتجاه حقيقي (بداية من الشمال مع عقارب الساعة)**

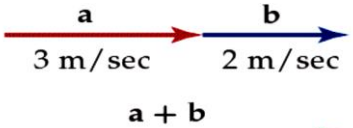
❶ تابع : مقدمة في المتجهات

⑤ المتجه الصفري (المحايد الجمعي) :

عند جمع متجهين متعاكسين لهما نفس الطول ، فإن المحصلة هي المتجه الصفري ، ويرمز له بالرمز $\vec{0}$ أو 0 ، وهو متجه طوله صفر ، وليس له اتجاه ، وهو المحايد الجمعي لعملية جمع المتجهات .

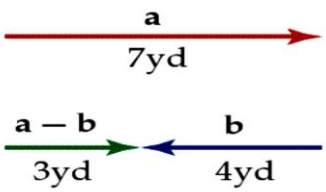
المتجهات المتوازية في الاتجاه نفسه

محصِّلة ناتج جمع متجهين أو أكثر لها الاتجاه نفسه، هو مجموع أطوال هذه المتجهات، واتجاهها هو نفس اتجاه المتجهات الأصلية .



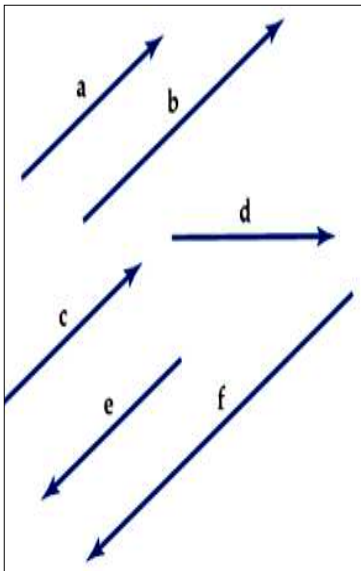
المتجهان المتوازيان المتعاكسان

عند جمع متجهين متوازيين متعاكسين، فإن طول المحصِّلة هو القيمة المطلقة للفرق بين طولي المتجهين، واتجاهها هو اتجاه المتجه الأكبر طولًا.



⑥ أنواع المتجهات الشائعة :

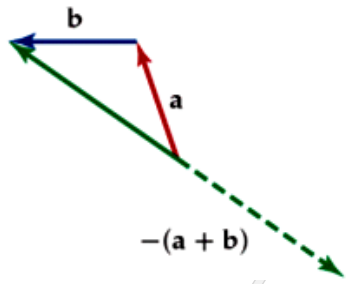
عند إجرائك العمليات على المتجهات، فإنك بحاجة للأنواع الشائعة الآتية من المتجهات:



- **المتجهات المتوازية** لها الاتجاه نفسه، أو اتجاهان متعاكسان، وليس بالضرورة أن يكون لها الطول نفسه. فمثلًا في الشكل المجاور $a \parallel b \parallel c \parallel e \parallel f$.
- **المتجهات المتكافئة** لها الاتجاه نفسه، والطول نفسه. كما في الشكل المجاور، $a = c$ ؛ لأن لهما الطول والاتجاه نفسيهما، لاحظ أن $a \neq b$ لأن $|a| \neq |b|$ ، $a \neq d$ ؛ لأن لهما اتجاهين مختلفين.
- **المتجهان المتعاكسان** لهما الطول نفسه، لكن اتجاهيهما متعاكسان. يكتب المتجه المعاكس للمتجه a على الصورة $-a$. ففي الشكل المجاور $e = -a$.

⑦ المتجه الموازن :

المتجه الموازن هو متجه يساوي متجه المحصلة في المقدار ويعاكسه في الاتجاه، بحيث إن ناتج جمع متجه المحصلة مع المتجه الموازن يساوي المتجه الصفري. والمتجه الموازن للمتجه $a + b$ هو $-(a + b)$.



⑧ ضرب المتجه في عدد حقيقي :

مفهوم أساسي — **ضرب المتجه في عدد حقيقي**

إذا ضُرب المتجه v في عدد حقيقي k ، فإن طول المتجه kv هو $|v|\,|k|$. ويتحدَّد اتجاهه بإشارة k .

- إذا كانت $k > 0$ ، فإن اتجاه kv هو اتجاه v نفسه.
- إذا كانت $k < 0$ ، فإن اتجاه kv هو عكس اتجاه v .

ويكون المتجه $k\vec{v}$ موازٍ للمتجه $\vec{v}$

الطول يمكن أن يمثل طول المتجه مسافة، أو سرعة، أو قوة. وإذا مثل المتجه سرعة، فإن طوله لا يمثِّل المسافة المقطوعة .

❶ تابع : مقدمة في المتجهات

أولاً : الكميات المتجهة والكميات القياسية (العددية)

حدّد الكميات المتجهة، والكميات القياسية (العددية) في كلٍّ مما يأتي:

a) يسير قارب بسرعة $15\ mi/h$

بما أن لهذه الكمية قيمة هي $15\ mi/h$ ، وليس لها اتجاه. لذا، فإن هذه السرعة كمية قياسية.

b) يسير شخص على قدميه بسرعة $75\ m/min$ باتجاه الغرب.

بما أن لسرعة الشخص قيمة هي $75\ m/min$ واتجاهًا للغرب. لذا، فهي كمية متجهة.

c) قطعت سيارة مسافة قدرها $20\ km$.

بما أن لهذه الكمية قيمة هي $20\ km$ ، وليس لها اتجاه. لذا، فإن هذه المسافة كمية قياسية.

تأكد

حدّد الكميات المتجهة ، والكميات القياسية (العددية) في كلٍّ مما يأتي:

1A) تسير سيارة بسرعة $60\ mi/h$ ، وبزاوية $15°$ باتجاه شرق الجنوب.

1B) هبوط مظلي رأسيًّا للأسفل بسرعة $12.5\ mi/h$.

1C) دفع طفل مزلجة بقوة مقدارها $40\ N$.

ثانياً : تمثيل المتجهات هندسياً

استعمل المسطرة والمنقلة ، لرسم متجه لكل من الكميات الأتية ، واكتب مقياس الرسم في كل حالة :

❶ $v = 75\ N$ باتجاه $140°$ مع الأفقي .

❷ $a = 20\ ft/sec$ باتجاه $065°$

❸ $u = 30\ mi/h$ باتجاه $S\ 60°\ W$

❹ $v = 20\ ft/sec$ باتجاه $225°$

تابع : بطاقة (1) ريض 365

أ./ عابدين

❶ إيجاد المحصلة (هندسياً و جبرياً)

إيجاد محصلة متجهين هندسياً : بالأدوات الهندسية (المسطرة + المنقلة) ومقياس الرسم .

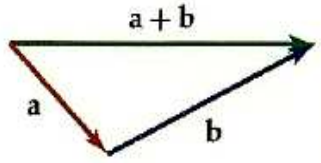
إيجاد محصلة متجهين جبرياً : (باستعمال فيثاغورس - قانون الجيب - قانون جيب التمام) .

ملحوظة : (زاوية الاتجاه $N\ 25^{\circ}\ E$) نفس (زاوية 65° مع الأفقي) نفس (اتجاه حقيقي 025°)

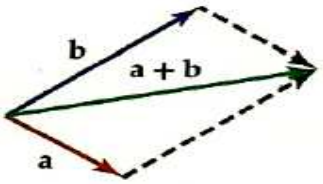
ثالثاً : إيجاد محصلة متجهين هندسياً

قاعدة المثلث

الرأس والذيل



قاعدة متوازي الأضلاع

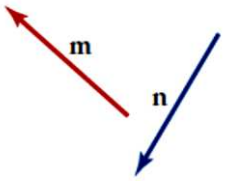


أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية، مستعملًا قاعدة المثلث، أو متوازي الأضلاع. (قرّب المحصلة إلى أقرب سنتيمتر، ثمّ حدّد اتجاهها بالنسبة للأفقي).

❶



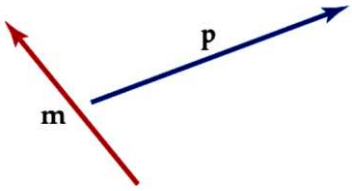
❷



رابعاً : العمليات على المتجهات هندسياً

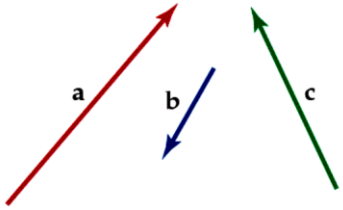
❸ ارسم المتجه الذي يُمثّل .

$$m - \frac{1}{4}p$$



❹ ارسم المتجه الذي يُمثّل .

$$a - c + 2b$$



❺ حدد مقدار واتجاه المحصلة الناتجة من جمع المتجهين :

a) $18\ N$ للامام ، ثم $20\ N$ للخلف .

b) $100\ m$ للشمال ، ثم $350\ m$ للجنوب .

❶ إيجاد المحصلة (هندسياً و جبرياً)

خامساً : تطبيقات حياتية على المحصلة

❶ استعمل المسطرة والمنقلة ومقياس الرسم لحل المسألة التالية : يسبح سلطان عبر أحد الأنهار بسرعة $3.5\ ft/sec$ ، باتجاه الشرق قاصداً الضفة الأخرى للنهر ، في الوقت الذي يؤثر عليه تيار مائي باتجاه الجنوب بسرعة $2\ ft/sec$. ، فأوجد محصّلة سرعة سلطان ، واتجاه حركته .

محصلة سرعة سلطان $4\ ft/sec$ باتجاه $S\ 60^\circ\ E$

❷ يقود شخص طائرة شراعية بسرعة مقدارها $15\ mi/h$ باتجاه الغرب . إذا هبت الرياح بسرعة $5\ mi/h$ باتجاه $N\ 60^\circ E$ (باتجاه 060° أو باتجاه 30° مع الأفقي) . ، فأوجد محصّلة سرعة الطائرة بالنسبة للأرض .

يمكن الحل هندسياً بالأدوات ومقياس الرسم أو جبرياً
والجواب : $11\ mi/h$ باتجاه $N\ 77^\circ\ W$

إعداد أ./ عابدين حامد

❶ إيجاد المحصلة (هندسياً و جبرياً)

تابع : تطبيقات حياتية على المحصلة

❸ غادر زورق أحد الموانئ باتجاه $N\ 60^{\circ}\ W$ فقطع مسافة 12 ميلاً بحرياً ، ثم غير قائد الزورق اتجاه حركته إلى $N\ 25^{\circ}\ E$ ، فقطع مسافة 15 ميلاً بحرياً . أوجد بُعد الزورق ، واتجاه حركته في موقعة الحالي بالنسبة إلى الميناء .

ج : تقريباً 20 mi باتجاه $N\ 12^{\circ}\ W$

❹ تحلّق طائرة بسرعة مقدارها 475 mi/h باتجاه 070° . إذا كانت الرياح تتحرك بسرعة 80 mi/h من الاتجاه 120° . أوجد اتجاه ومحصّلة سرعة الطائرة بالنسبة للأرض .

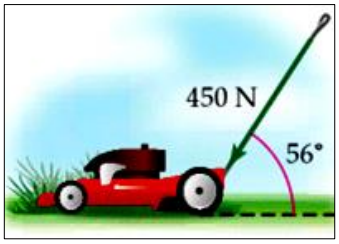
ج : 428 mi/h باتجاه 28° مع الأفقي أو 062°

إعداد أ./ عابدين حامد

❶ تحليل القوة إلى مركبتين متعامدتين

سادساً : تحليل القوة إلى مركبتين متعامدتين

❶ يدفع علي عربة قصّ العشب بقوة مقدارها 450 N ، وبزاوية قياسها 56° مع سطح الأرض .

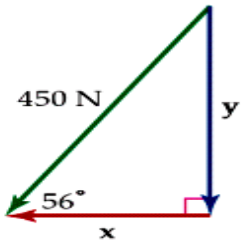


A) ارسم شكلاً يوضّح تحليل القوة التي يبذلها علي إلى مركبتين متعامدتين .

B) أوجد مقدار كل من المركبتين الأفقية ، والرأسية للقوة .

الحل :

$\cos 56^\circ = \frac{|x|}{450}$ تعريف الجيب، وجيب التمام $\sin 56^\circ = \frac{|y|}{450}$



$|x| = 450 \cos 56^\circ$ بالحلّ بالنسبة إلى x ، y $|y| = 450 \sin 56^\circ$

$|x| \approx 252$ باستعمال الآلة الحاسبة $|y| \approx 373$

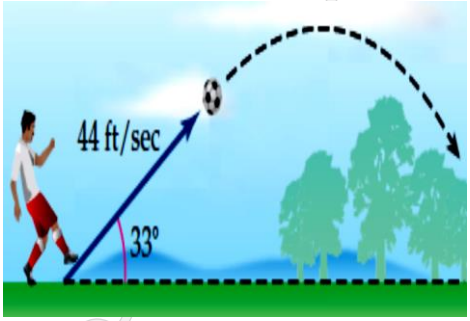
مقدار المركبة الأفقية 252 N تقريبًا، ومقدار المركبة الرأسية 373 N تقريبًا.

❷ يسحب محمد عربة أخته بقوة معينة مقدارها $|r|$ N ، وباتجاه 31° مع الأفقي ، إذا علمت أن مقدار مركبتها الأفقية 86 N .

A) فأوجد مقدار المركبة الرأسية للقوة إلى أقرب عدد صحيح ؟

B) فأوجد مقدار المحصلة $|r|$ إلى أقرب عدد صحيح ؟

❸ يركل لاعب كرة قدم من سطح الأرض بسرعة 44 ft/s ، وبزاوية قياسها 33° مع سطح الأرض .



A) ارسم شكلاً يوضّح تحليل هذه السرعة إلى مركبتين متعامدتين .

B) أوجد مقدار كل من المركبتين الأفقية ، والرأسية للسرعة .

❶ نشاط : اختبر نفسك

❶ يدفع سلمان مجرفة في أرض حديقته المنزلية بقوة مقدارها 480 N ، وبزاوية قياسها 55° مع سطح الأرض . ما مقدار المركبة الرأسية للقوة لأقرب نيوتن ؟



A 275 تقريبًا

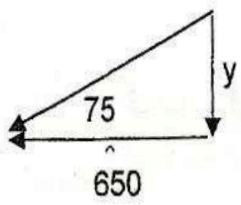
B 393 تقريبًا

C 586 تقريبًا

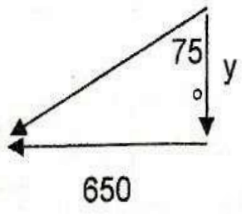
D 686 تقريبًا

❷ تدفع فاطمة مجرفة في أرض حديقتها المنزلية بقوة مقدارها 650N ، وبزاوية قياسها 75° مع سطح الأرض ، أي من الأشكال الآتية يوضح تحليل القوة التي تبذلها فاطمة إلى مركبتين متعامدتين ؟

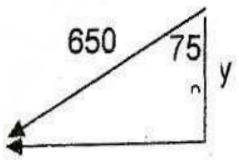
A



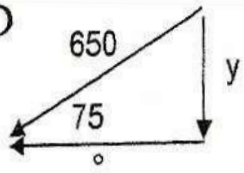
B



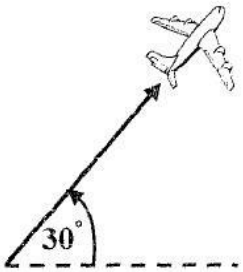
C



D



❸ طارت طائرة بزاوية قياسها 30° مع الأفقي كما في الشكل المجاور . إذا كان مقدار المركبة الرأسية لسرعة الطائرة 246 mi / h ، فما مقدار سرعة الطائرة ؟



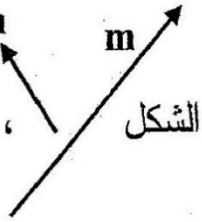
A 123 mi/h

B 142 mi/h

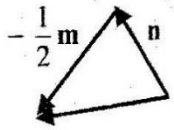
C 213 mi/h

D 492 mi/h

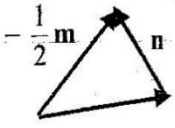
❹ إذا كان المتجهان n ، m يُمثلان الشكل ، فأيّ من الأشكال أدناه يُمثل المتجه $n - \frac{1}{2}m$ ؟



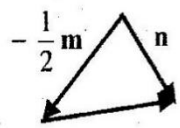
A



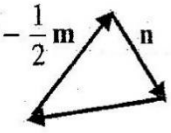
B



C



D



❺ إذا كانت محصلة المتجهان a ، b هي $(a+b)$ ، فإن المتجه الموازن للمتجه $(a+b)$ هو :

A $-(a+b)$

B $-a+b$

C $a-b$

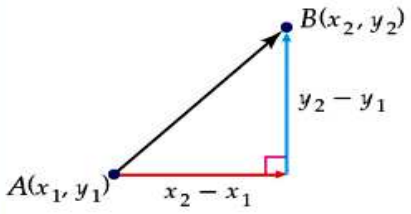
D $(a+b)$

بطاقة (2) ريض 365

❷ المتجهات في المستوى الاحداثي

أ./ عابدين

مفهوم أساسي — الصورة الإحداثية لمتجه

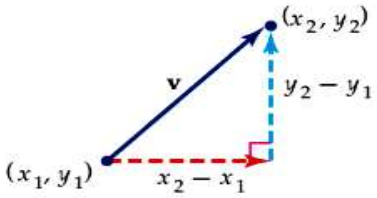


الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$ ، ونقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ هي :

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1 , y_2 - y_1 \rangle$$

النهاية ـ البداية

مفهوم أساسي — طول المتجه في المستوى الإحداثي



إذا كان $\mathbf{v}$ متجهًا، وكانت نقطة بدايته (x_1, y_1) ، ونقطة نهايته (x_2, y_2) ، فإن طول $\mathbf{v}$ يُعطى بالصيغة:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

وإذا كانت $\langle a, b \rangle$ هي الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ ، فإن :

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

طول (معيار) المتجه

مفهوم أساسي — العمليات على المتجهات

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ ، و $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ متجهين، و k عددًا حقيقيًّا، فإن:

جمع متجهين $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$

طرح متجهين $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$

ضرب متجه في عدد حقيقي $k\,\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2 \rangle$

ملحوظة

يمكن كتابة المتجه برمز المتجه أو بدون فيُكتب المتجه $\mathbf{u}$ أو $\vec{\mathbf{u}}$ ويعبر عنه بالصورة الاحداثية أو بدلالة متجهي الوحدة $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ الأساسيين (التوافق الخطي)

متجهات الوحدة يُسمَّى المتجه الذي طوله 1 **متجه الوحدة**. ومن المفيد أحيانًا التعبير عن المتجه غير الصفري $\mathbf{v}$ على أنه حاصل ضرب متجه وحدة $\mathbf{u}$ في عدد حقيقي بنفس اتجاه $\mathbf{v}$. ولإيجاد $\mathbf{u}$ ، اقسم المتجه $\mathbf{v}$ على طوله $|\mathbf{v}|$.

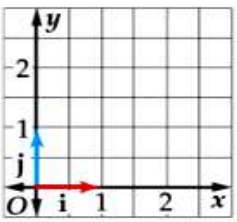
$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$$

يُرمز لمتجهي الوحدة باتجاه المحور x الموجب، والمحور y الموجب بالرمزين $\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$ ، $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$ ، على الترتيب كما في الشكل (3) . كما يُسمَّى المتجهان $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ متجهي الوحدة القياسيين.

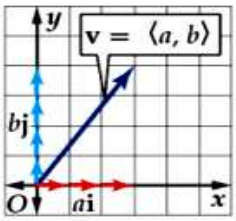
متجهي الوحدة الأساسيين (القياسيين)

$\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$

$\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$



الشكل(3)



الشكل(4)

المتجه (الاحداثية)

$\vec{\mathbf{v}} = \langle a, b \rangle$

المتجه (توافقاً خطياً)

$\vec{\mathbf{v}} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$

ويمكن استعمال هذين المتجهين للتعبير عن أي متجه $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ على الصورة $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ كما في الشكل (4) .

يسمى ناتج الجمع $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ **توافقًا خطيًّا** للمتجهين $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$. ويُقصد به كتابة ناتج الجمع بدلالة متجهي الوحدة $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$.

❷ المتجهات في المستوى الاحداثي

التعبير عن المتجه على الصورة الإحداثية : $\vec{v} = \langle x_2 - x_1 \ , \ y_2 - y_1 \rangle = \langle a \ , b \rangle$

المتجه في صورة توافق خطي : $\vec{v} = \langle a, b \rangle = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$

طول المتجه : $|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

❶ أوجد الصورة الإحداثية لـِ $\overrightarrow{DE}$ المُعطى نقطتا بدايته ونهايته ، ثم اكتبه في صورة توافق خطي بدلالة متجهي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ ، ثم أوجد طول $\overrightarrow{DE}$ حيث أن : $E(7, 1)$, $D(-3, -8)$

❷ أوجد الصورة الإحداثية لـِ $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(-2, -7)$ ، ونقطة نهايته $B(6, 1)$ ، ثم اكتبه في صورة توافق خطي بدلالة متجهي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ ، ثم أوجد طول $\overrightarrow{AB}$.

❸ إذا كان $\vec{b} = \langle -5 \ , 6 \rangle$ ، $\vec{a} = \langle -3 \ , 4 \rangle$ ، فأي مما يأتي يُمثِّل $\vec{s}$ الذي يحقق المعادلة $\vec{s} = 2\vec{a} - \vec{b}$ ؟

A $\langle 1 \ , 2 \rangle$ C $\langle -1 \ , 2 \rangle$

B $\langle 1 \ , -2 \rangle$ D $\langle -1 \ , -2 \rangle$

❹ إذا كان $\mathbf{u} = \langle 2 \ , 0 \rangle$ ، $\mathbf{v} = \langle -1 \ , 4 \rangle$ ، فأوجد ناتج $|3\mathbf{u} - 2\mathbf{v}|$.

❺ إذا كانت الصورة الإحداثية لـِ $\overrightarrow{AB}$ هي $\langle -8, 8 \rangle$ ، والذي نقطة بدايته $A\ (2.5, -5)$ و نقطة نهايته $B\ (-5.5, y)$ ، فما قيمة y ؟

A -13 B 13 C -3 D 3

❷ المتجهات في المستوى الاحداثي

إيجاد متجه وحدة له نفس الاتجاه لمتجه معطى

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$$

أوجد متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه المتجه المُعطى في كل مما يأتي:

❶ $\mathbf{w} = \langle 6, -2 \rangle$

❷ $\mathbf{v} = \langle -4, -8 \rangle$

إيجاد الصورة الإحداثية

$$\vec{\mathbf{v}} = \langle a, b \rangle = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} = \langle |\vec{\mathbf{v}}| \cos\theta, |\vec{\mathbf{v}}| \sin\theta \rangle$$

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ المُعطى طوله وزاوية اتجاهه مع الافقي في كلٍّ مما يأتي :

❸ $|\mathbf{v}| = 4,\ \theta = 135°$

❹ $|\mathbf{v}| = 24,\ \theta = 210°$

زاوية الاتجاه للمتجه : $\vec{\mathbf{v}} = \langle a, b \rangle \Leftarrow \tan\theta = \frac{b}{a}$ (حيث θ مع محور x الموجب)

① $\vec{\mathbf{v}}$ في الرُبع الثاني أو الثالث نضيف $180°$.

② $\vec{\mathbf{v}}$ في الرُبع الرابع نضيف $360°$.

يُحدّد الرُبع من النقطة التي تمثل المتجه

أوجد زاوية اتجاه كل من المتجهات الأتية مع المحور x الموجب

❺ $\vec{\mathbf{v}} = -6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

❻ $\vec{\mathbf{u}} = \langle 4, -5 \rangle$

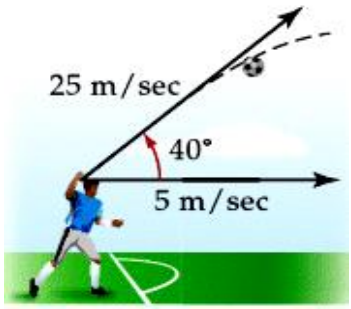
❼ $\vec{\mathbf{w}} = \langle -3, -8 \rangle$

❷ المتجهات في المستوى الاحداثي

تطبيق العمليات على المتجهات

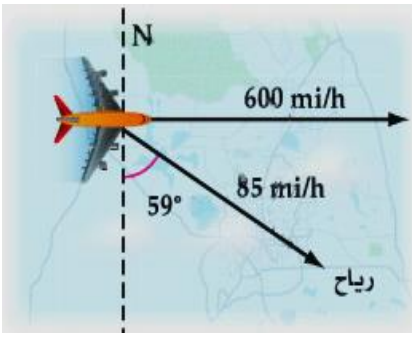
$$\mathbf{r} = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$$

❶ **كرة قدم:** يركض حارس مرمى في لعبة كرة القدم للأمام بسرعة 5 m/sec ، ليرمي الكرة بسرعة 25 m/sec ، بزاوية 40° مع الأفقي. أوجد محصلة السرعة، واتجاه حركة الكرة.



الجواب : 29.1 m/sec بزاوية 33.6° مع الأفقي

❷ **ملاحة جوية:** تطير طائرة باتجاه الشرق بسرعة مقدارها 600 mi/h . وتهب الرياح بسرعة مقدارها 85 mi/h باتجاه S59°E .



a) أوجد محصّلة سرعة الطائرة. **الجواب :** 674 mi/h

b) أوجد زاوية اتجاه مسار الطائرة. **الجواب :** S 86° E

❸ تتقدم دبّابة إلى الأمام على أرض أفقية مستوية في مناورات عسكرية بسرعة 10 mi/h ؛ لتطلق قذيفة بسرعة 200 mi/h وبزاوية قياسها 25° مع الأفقي . أوجد محصلة السرعة واتجاه الحركة للقذيفة إلى أقرب جزء من مئة .

الجواب : $r \approx 209.10$ mi/h , $\theta \approx 23.84°$

❷ نشاط: اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة في كل ما يأتي :

❶ ما صورة $\overrightarrow{AB}$ الإحداثية إذا كانت نقطة بدايته $A(-3,-8)$ ، و $B(6,1)$ هي نقطة نهايته ؟

A $\langle -2,-2 \rangle$

B $\langle 9,9 \rangle$

C $\langle -2,9 \rangle$

D $\langle 9,-2 \rangle$

❷ ما طول المتجه الذي بدايته $(3,7)$ ونهايته $(-1,2)$ ؟

A $\sqrt{29}$

B $\sqrt{65}$

C $\sqrt{41}$

D $\sqrt{97}$

❸ إذا كان $\vec{y} = \langle 2a, a \rangle$ ، وكان $|\vec{y}| = \sqrt{20}$ ، فما قيم a الممكنة ؟

A ± 1

B ± 2

C ± 3

D ± 4

❹ إذا كان المتجه $\vec{v} = \langle 3,-4 \rangle$ ، فما متجه وحدة الذي له نفس اتجاه $\vec{v}$ ؟

A $\frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$

B $\frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}$

C $-\frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$

D $-\frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}$

❺ ما قياس زاوية اتجاه $\mathbf{V} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ مع المحور x الموجب ؟

A 37° تقريباً

B 143° تقريباً

C 217° تقريباً

D 323° تقريباً

❻ أوجد مقدار واتجاه محصلة القوى الثلاث الآتية التي تؤثر على جسم . حيث القوة الأولى $10\ \mathrm{N}$ باتجاه $S\ 30^\circ\ E$ ، والقوة الثانية $12\ \mathrm{N}$ باتجاه 045° ، والقوة الثالثة $6\ \mathrm{N}$ باتجاه 120° مع الأفقي .

$$r = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} + \mathbf{v_3} = \langle 10.49, 5.03 \rangle$$

$$|r| = \sqrt{(10.49)^2 + (5.03)^2} \approx 11.63$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{5.03}{10.49}\right) \approx 25.6^\circ$$

❸ الضرب الداخلي و مسقطا المتجه

مفهوم أساسي — الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى الإحداثي

يُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ ، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ كالآتي :

الضرب الداخلي ← $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$ ← الضرب القياسي

قراءة الرياضيات

الضرب القياسي يسمى الضرب الداخلي في بعض الأحيان بالضرب القياسي.

مفهوم أساسي — المتجهان المتعامدان

يكون المتجهان $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ متعامدين، إذا وفقط إذا كان $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ← شرط تعامد متجهين غير صفريين

على الرغم من أن حاصل الضرب الداخلي للمتجه الصفري في أي متجه آخر يساوي الصفر، أي أن :

$\langle 0, 0 \rangle \cdot \langle a_1, a_2 \rangle = 0a_1 + 0a_2 = 0$ ، إلا أن المتجه الصفري لا يعامد أي متجه آخر؛ لأنه ليس له طول أو اتجاه.

مفهوم أساسي — خصائص الضرب الداخلي

إذا كانت $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ متجهات، وكان k عددًا حقيقيًّا، فإن الخصائص الآتية صحيحة:

الخاصية الإبدالية	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
خاصية التوزيع	$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
خاصية الضرب في عدد حقيقي	$k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = k\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot k\mathbf{v}$
خاصية الضرب الداخلي في المتجه الصفري	$0 \cdot \mathbf{u} = 0$
العلاقة بين الضرب الداخلي وطول المتجه	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \lvert\mathbf{u}\rvert^2$

إرشادات للدراسة

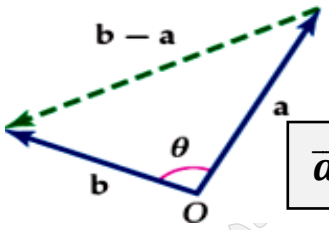
المتجهات المتعامدة والمتوازية يقال لمتجهين: إنهما متعامدان، إذا كانت الزاوية بينهما $90°$. ويقال لمتجهين أنهما متوازيان، إذا كانت الزاوية بينهما $0°$ أو $180°$.

مفهوم أساسي — الزاوية بين متجهين

إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ ، فإن:

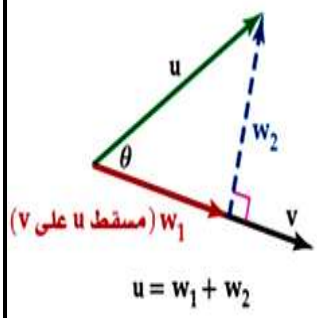
$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$$



مفهوم أساسي — مسقط u على v

إذا كان $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ متجهين غير صفريين، وكان $\mathbf{w_1}$ ، $\mathbf{w_2}$ مركبتي $\mathbf{u}$ ، بحيث $\mathbf{w_1}$ موازٍ للمتجه $\mathbf{v}$ كما في الشكل المجاور ، فإن $\mathbf{w_1}$ يُسمَّى مسقط المتجه $\mathbf{u}$ على المتجه $\mathbf{v}$ ، ويكون:



العمودي $\overrightarrow{w_2} = \vec{u} - \overrightarrow{w_1}$

$$\mathbf{w_1} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}$$

المسقط $\overrightarrow{w_1} = \vec{u} - \overrightarrow{w_2}$

إرشادات للدراسة

المركبة العمودية يُسمَّى المتجه $\mathbf{w_2}$ المركبة العمودية للمتجه $\mathbf{u}$ على $\mathbf{v}$.

❸ الضرب الداخلي و مسقطا المتجه

استعمال الضرب الداخلي في التحقق من تعامد متجهين

شرط تعامد متجهين غير صفريين : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$، ثم تحقق فيما إذا كانا متعامدين .

❶ $\mathbf{u} = \langle 3, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle -5, 1 \rangle$

❷ $\mathbf{u} = \langle -2, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 9, -6 \rangle$

❸ إذا كان المتجهين : $u = 2i - 6j$ ، $\mathbf{v} = \langle k - 1, 3 \rangle$

متعامدين ، فما قيمة الثابت k ؟

❹ إذا كان : $\overrightarrow{u} = \langle 4, -6 \rangle$ ، $\overrightarrow{\mathbf{v}} = \langle k + 1, 6 \rangle$

، فأوجد قيمة k التي تجعل المتجهين متعامدين .

استعمال الضرب الداخلي لإيجاد طول متجه

بما أن $|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \bullet \mathbf{a}$ ، فإن $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \bullet \mathbf{a}}$

استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول كلٍّ من المتجهات الآتية :

❺ $\mathbf{b} = \langle 12, 16 \rangle$

❻ $\mathbf{c} = \langle -1, -7 \rangle$

❸ الضرب الداخلي و مسقطا المتجه

$0^\circ \le \theta \le 180^\circ$

إيجاد قياس الزاوية بين متجهين

$$\cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a|\,|b|}$$

❶ أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين :

$u = \langle -5 , -2 \rangle$ ، $v = \langle 4 , 4 \rangle$

❷ أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين :

$a = \langle 6 , 2 \rangle$ ، $b = \langle -4 , 3 \rangle$

❸ إذا كان $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 5$

، وكان قياس الزاوية بين المتجهين 120°

، فأوجد حاصل الضرب الداخلي $a \cdot b$.

❹ إذا كان $|\vec{u}| = 4$ ، $|\vec{v}| = 6$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 10$ ، فما قيمة $\vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{v})$ ؟

تذكر : $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2$

A 20

B 26

C 46

D 60

❺ غادر يوسف ويحيى مخيمهما الكشفي للبحث عن حطب . إذا كان المتجه $u = \langle 3 , -5 \rangle$ يُمثِّل الطريق الذي سلكه يوسف ، المتجه $v = \langle -7 , 6 \rangle$ يُمثِّل الطريق الذي سلكه يحيى .

، فأوجد قياس الزاوية بين المتجهين مُقرباً لأقرب رقم عشري واحد .

الجواب : 161.6°

❸ الضرب الداخلي و مسقطا المتجه

إيجاد مسقط u على v

$$w_1 = \left(\frac{u \cdot v}{|v|^2}\right) v$$

❶ أوجد مسقط $u = \langle 3, 2 \rangle$ على $v = \langle 5, -5 \rangle$ ، ثم اكتب u على صورة ناتج جمع متجهين متعامدين أحدهما مسقط u على v .

❷ أوجد مسقط $u = \langle 4, -3 \rangle$ على $v = \langle 2, 6 \rangle$ ، ثم اكتب u على صورة ناتج جمع متجهين متعامدين أحدهما مسقط u على v .

❸ أوجد مسقط المتجه $\overrightarrow{u} = \langle -3, 4 \rangle$ على المتجه $\overrightarrow{v} = \langle 2, 4 \rangle$ ، ثم اكتب $\overrightarrow{u}$ على صورة ناتج طرح متجهين متعامدين أحدهما مسقط $\overrightarrow{u}$ على $\overrightarrow{v}$.

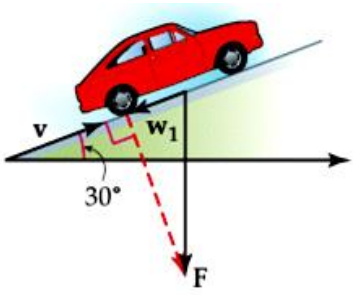
فكرة الحل : ① نوجد $\overrightarrow{w_1}$ (مسقط $\overrightarrow{u}$ على $\overrightarrow{v}$) ② نوجد المتجه $\overrightarrow{w_2}$ ، حيث $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{w_1} - \overrightarrow{w_2}$

بابدين حامد * * * عداد أ./ عابدين حامد

❸ الضرب الداخلي و مسقطا المتجه

مسائل وتطبيقات حياتية (استعمال مسقط المتجه لإيجاد قوة)

❶ **سيارات:** تقف سيارة وزنها 1000 N على مرتفع يميل عن الأفقي بزاوية 30° ، كما في الشكل المجاور. إذا أهملت قوة الاحتكاك، فما القوة المطلوبة لتمنع السيارة من الانزلاق للأسفل؟



الجواب : $500\ N$

❷ **تزحلق:** يجلس شخص على عربة مخصصة للتزحلق على منحدر يميل عن الأفقي بزاوية 60° . أوجد القوة اللازمة لمنع العربة من الانزلاق للأسفل، إذا كان وزن الشخص والعربة معًا 80N.

$40\sqrt{3}\ N$

❸ استعمل مسقط متجه لإيجاد مقدار القوة المطلوبة لمنع سيارة من الانزلاق ، إذا وقفت السيارة على منحدر يميل على الأفقي بزاوية قياسها 20° ، وكان وزنها يساوي 1500 N مع اهمال قوة الاحتكاك .

الجواب : $513\ N$

تابع : بطاقة (3) ريض 365

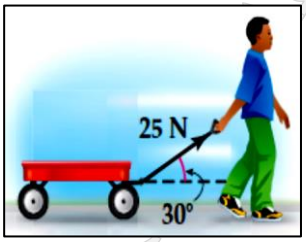
❸ حساب الشغل (المسقط + الضرب الداخلي)

أ./ عابدين

قاعدة المسقط : $W = |\overrightarrow{w_1}||\overrightarrow{AB}| = |\vec{F}||\overrightarrow{AB}|\cos\theta$

قاعدة الضرب الداخلي : $W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$

❶ يسحب أحمد عربة بقوة مقدارها 25 N ، وبزاوية ثابتة 30° مع الأفقي . أوجد لأقرب عدد صحيح مقدار الشغل الذي يبذله أحمد عندما يسحب العربة 150 m .



الجواب : 3248 J

❷ يدفع إبراهيم مكنسة كهربائية بقوة مقدارها 25 N . إذا كان قياس الزاوية بين ذراع المكنسة وسطح الأرض 60° ، فأوجد الشغل بالجول الذي بذله إبراهيم عند تحريك المكنسة مسافة 6 m .



الجواب : 75 J

❸ يسحب طالب حقيبته المدرسية بقوة 100 N كما بالشكل .



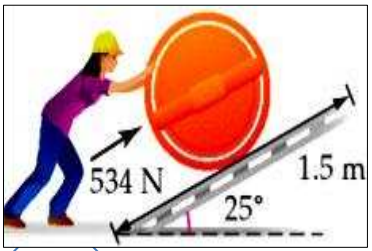
الجواب : 20 m

A) إذا بذل الطالب شغلاً مقداره 1747 J ، لسحب حقيبته مسافة 31m ، فما قيمة الزاوية بين قوة السحب والأفقي ؟

الجواب : 55.7°

B) إذا بذل الطالب شغلاً قدره 1000 J بزاوية قياسها 60° ، فما المسافة التي سحب الطالب فيها حقيبته ؟

❹ يدفع طارق برميلاً إلى أعلى سطح مائل مسافة 1.5 m بقوة مقدارها 534 N ليضعه في سيارة شحن . إذا كان السطح يميل على الأفقي بزاوية 25° ، فأوجد مقدارالشغل الذي يبذله طارق .



الجواب : 801 J

❸ نشاط : اختبر نفسك

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة في كل ما يأتي :

❶ أي من المتجهات الأتية متعامد مع المتجه $\vec{v} = \langle 2.5, -5 \rangle$ ؟

A $-4i + 2j$

B $-4i - 2j$

C $-2i + 4j$

D $-2i - 4j$

❷ إذا كان : $s = \langle 4 , -3 \rangle$ ، $t = \langle -6 , 2 \rangle$

فأيّ مما يأتي يمثل r ، حيث $r = t - 2\,s$

A $\langle 14 , 8 \rangle$

B $\langle 14 , 6 \rangle$

C $\langle -14 , 8 \rangle$

D $\langle -14 , -8 \rangle$

❸ ما قياس الزاوية بين المتجهين $v = \langle 3, 5 \rangle$, $u = \langle -4, -1 \rangle$ ؟

A 30°

B 45°

C 60°

D 135°

❹ ما مسقط المتجه $\vec{u} = \langle -4, 8 \rangle$ على المتجه $\vec{v} = \langle -3, 1 \rangle$ ؟

A $\langle -8, 16 \rangle$

B $\langle 8, -16 \rangle$

C $\langle 6, -2 \rangle$

D $\langle -6, 2 \rangle$

❺ يدفع شخص عربة من أسفل أرض منحدرة إلى أعلى بقوة مقدارها 128 N ، إذا كانت زاوية ميل المنحدر 30° . فما الشغل الذي يبذله الشخص ليدفع العربة مسافة 2 m ؟

A 128 جول

B 222 جول

D 256 جول

القوة $\vec{F}$ في نفس اتجاه $\overrightarrow{AB}$ ، ج : $256\,J$

KINGDOM OF BAHRAIN
Ministry of Education
ALNOAIM SECONDARY BOYS SCHOOL



مَمْلَكَة البَحْرَيْن
وَزَارَةُ التَّرْبِيَةِ وَالتَّعْلِيم
مَدْرَسَةُ اَلْنُعِيمْ اَلْثَانَوِيةِ لَلْبَنِين
قسم الرياضيات

توجيهي فيز وريض

إعداد الأستاذ / عابدين حامد فؤاد

ملف إنجاز الطالب

بطاقات + أنشطة

الرياضيات 5 (ريض 365)

الوحدة الثانية

الإحداثيات القطبية و الأعداد المركبة

إعداد الأستاذ : عابدين حامد فؤاد

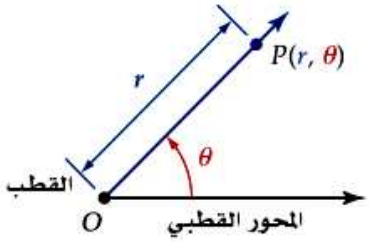
ملحوظة : هذه المذكرة ليست بديلاً عن الكتاب المدرسي (الكتاب هو المرجع الأساسي)

بطاقة (4) ريض 365

❸ الإحداثيات القطبية

في نظام الإحداثيات القطبية، نقطة الأصل O نقطة ثابتة تُسمى **القطب**.
و**المحور القطبي** هو شعاع يمتد أفقيًّا من القطب إلى اليمين. يمكن تعيين موقع نقطة P في نظام الإحداثيات القطبية باستعمال **الإحداثيات القطبيّة** (r, θ) ، حيث r المسافة المتّجهة من القطب إلى النقطة P ، θ الزاوية المتّجهة من المحور القطبيّ إلى $\overrightarrow{OP}$.

نظام الإحداثيات القطبية

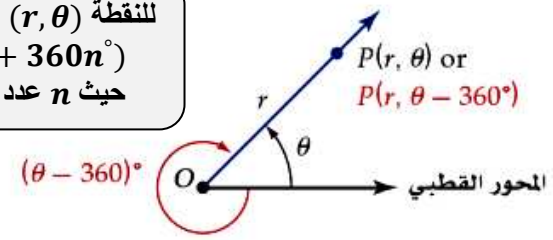


لتمثيل نقطة معطاة بإحداثيات قطبيّة، فإن القياس الموجب للزاوية θ يعني دورانًا بعكس اتجاه عقارب الساعة بدءًا من المحور القطبي، في حين يعني القياس السالب دورانًا باتجاه عقارب الساعة، وإذا كانت r موجبة، فإن P واقعة على الضلع النهائي للزاوية θ. أما إذا كانت سالبة، فإن P واقعة على الشعاع المقابل (الامتداد) للضلع النهائي للزاوية θ .

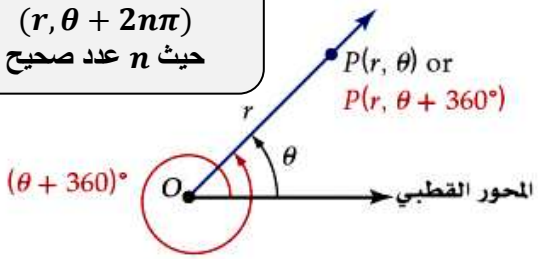
تُعيَّن الإحداثيات القطبية في المستوى القطبي الذي يتخذ شكلًا دائريًّا، كما تُعيَّنُ الإحداثيات الديكارتية في المستوى الإحداثي الذي يتخذ شكلًا مستطيلًا.

في نظام الإحداثيات الديكارتية كل نقطة يُعبَّر عنها بزوج وحيد من الإحداثيات (x, y). إلا أن هذا لا ينطبق على نظام الإحداثيات القطبية؛ وذلك لأن قياس كل زاوية يُكتب بعدد لانهائي من الطرق. وعليه، فإن للنقطة (r, θ) الإحداثيات $(r, \theta \pm 360°)$ أو $(r, \theta \pm 2\pi)$ كما في الشكل أدناه.

للنقطة (r, θ) الإحداثيات
$(r, \theta + 360n°)$
حيث n عدد صحيح

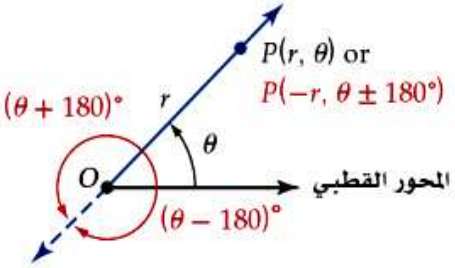


للنقطة (r, θ) الإحداثيات
$(r, \theta + 2n\pi)$
حيث n عدد صحيح



وكذلك؛ لأن r مسافة متجهة، فإن (r, θ) و $(-r, \theta \pm 180°)$ ، أو $(-r, \theta \pm \pi)$ تمثّل النقطة نفسها، كما في الشكل المجاور.

للنقطة (r, θ) الإحداثيات
$(-r, \theta + (2n + 1)180°)$
$(-r, \theta + (2n + 1)\pi)$
حيث n عدد صحيح



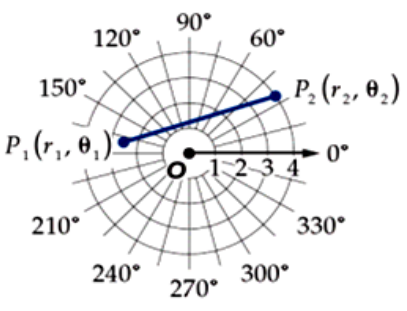
عند تغيير إشارة r نضيف أو نطرح المضاعفات الفردية لـ $180°$

التمثيل البياني للمعادلات القطبية تُسمى المعادلة المعطاة بدلالة الإحداثيات القطبية **معادلةً قطبيةً**. فمثلًا، $r = 2 \sin \theta$ هي معادلة قطبية. **التمثيل القطبي** هو مجموعة كل النقاط (r, θ) التي يحقق إحداثياتها المعادلة القطبية.

مفهوم اساسي **المسافة بالصيغة القطبية**

افترض أن $P_1(r_1, \theta_1)$ ، $P_2(r_2, \theta_2)$ نقطتان في المستوى القطبي، تُعطى المسافة P_1P_2 ، بالصيغة:

$$P_1P_2 = \sqrt{{r_1}^2 + {r_2}^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

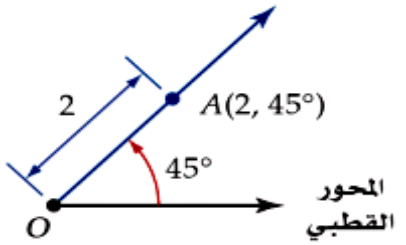


٤ تابع : الإحداثيات القطبية

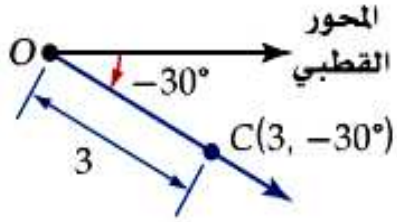
تمثيل الإحداثيات القطبية

مثّل كل نقطة من النقاط الآتية:

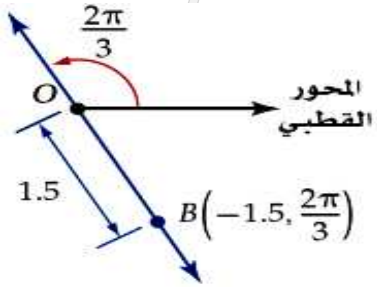
١ $A(2, 45°)$



٢ $C(3, -30°)$



٣ $\left(-1.5, \frac{2\pi}{3}\right)$

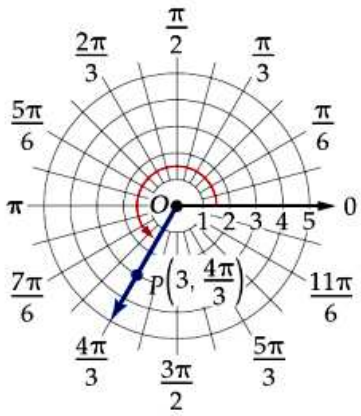


٤ $D\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$

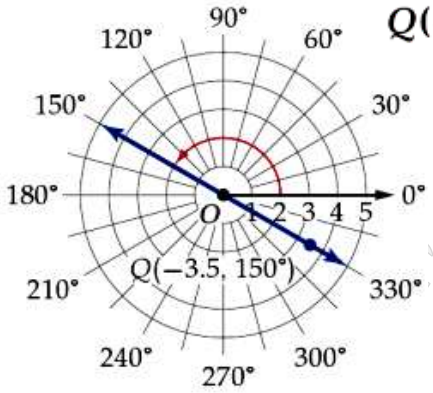
تمثيل النقاط في المستوى القطبي

مثّل كلًّا من النقاط الآتية في المستوى القطبي:

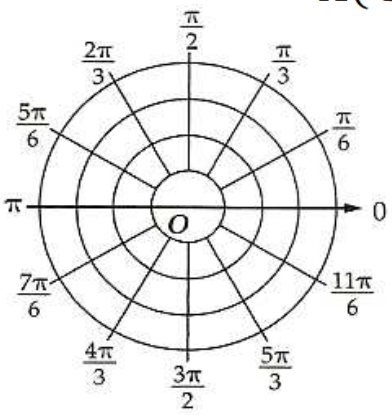
٥ $P\left(3, \frac{4\pi}{3}\right)$



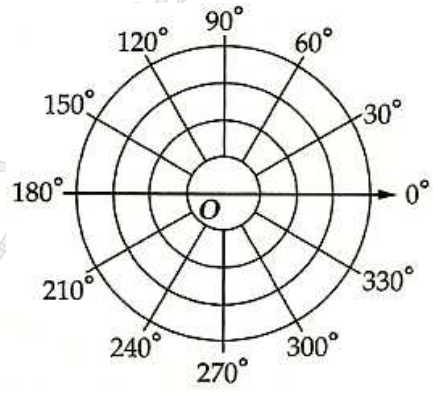
٦ $Q(-3.5, 150°)$



٧ $A\left(3, \frac{5\pi}{6}\right)$



٨ $Q(-2, -240°)$

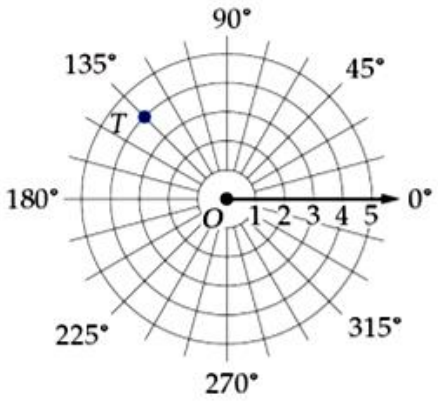


٤ تابع : الإحداثيات القطبية

$(r, \theta \pm 360°)$ أو $(r, \theta \pm 2\pi)$ | **تمثيلات قطبية متعددة** | $(-r, \theta \pm 180°)$ ، أو $(-r, \theta \pm \pi)$

١ إذا كانت $-360° \le \theta \le 360°$ ، فأوجد أربعة أزواج مختلفة كل منها يمثّل إحداثيين قطبيين للنقطة T في الشكل

أحد الأزواج القطبية التي تمثل النقطة T هو $(4, 135°)$.



$(4, 135°) = (4, 135° - 360°)$ بطرح $360°$ من θ

$= (4, -225°)$

$(4, 135°) = (-4, 135° + 180°)$ بوضع $r-$ بدلًا من r، وإضافة $180°$ إلى θ

$= (-4, 315°)$

$(4, 135°) = (-4, 135° - 180°)$ بوضع $r-$ بدلًا من r، بطرح $180°$ من θ

$= (-4, -45°)$

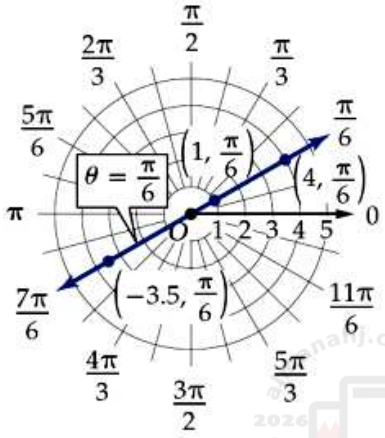
٢ أوجد ثلاثة أزواج مختلفة كل منها يمثّل إحداثيين قطبيين للنقطة المعطاة، علمًا بأن:

$-360° \le \theta \le 360°$ ، أو $-2\pi \le \theta \le 2\pi$. $\boxed{\left(2, \frac{\pi}{6}\right)}$

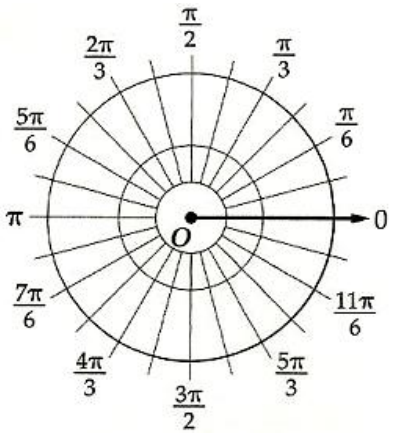
التمثيل البياني للمعادلات القطبية

مَثِّل كل معادلة من المعادلات القطبية الآتية بيانيًّا:

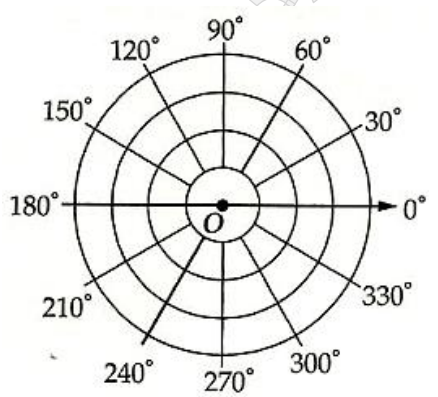
٣ $\theta = \frac{\pi}{6}$



٤ $r = 3$



٥ $\theta = 60°$



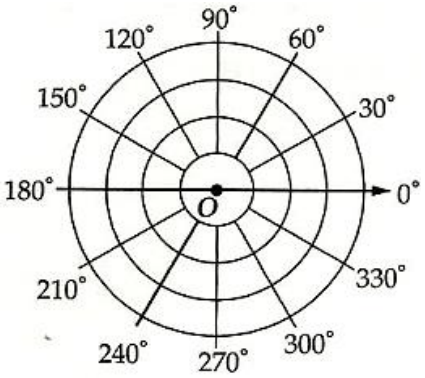
❹ تابع : الإحداثيات القطبية

المسافة بالصيغة القطبية

$$P_1P_2 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

مساحة القطاع الدائري : $A = \frac{x^\circ}{360^\circ} \cdot \pi r^2$ ، حيث r نصف القطر ، x زاوية القطاع بالدرجات

❶ **قوارب :** يرصُد رادار بحري حركة قاربين، إذا كانت إحداثيات موقعي القاربين $(8, 150°)$ ، $(3, 65°)$ ، حيث r بالأميال.



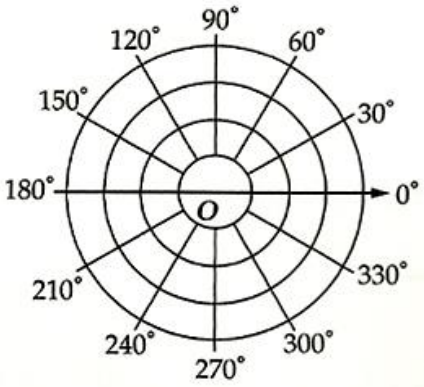
A) فمثّل هذا الموقف في المستوى القطبي.

B) ما المسافة بين القاربين؟

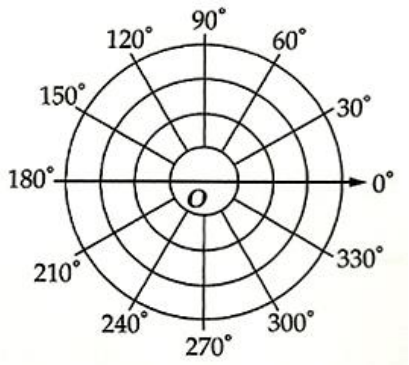
❷ **منظر طبيعي :** صمم أحد المعماريين حديقة في مبنى جديد لجمعية المتقاعدين.

a) إذا وضع المصمم نخلة عند $(3, -135°)$ فمثّل موقع النخلة في المستوى القطبي أدناه.

b) إذا أراد المصمم وضع مقعد عند $(-4, 85°)$ ، وإنشاء بركة عند $(1, 105°)$ فأوجد المسافة بين المقعد والبركة.



❸ **مراقبة :** تراقب آلة تصوير مثبتة منطقة جبلية تمثّل جزءًا من دائرة، وتُحدَّدُ بالمتباينات $-60° \le \theta \le 150°$ ، $0 \le r \le 40$ ، حيث r بالأمتار.



a) مثّل في المستوى القطبي المنطقة التي يمكن لآلة التصوير مراقبتها.

b) أوجد مساحة المنطقة.

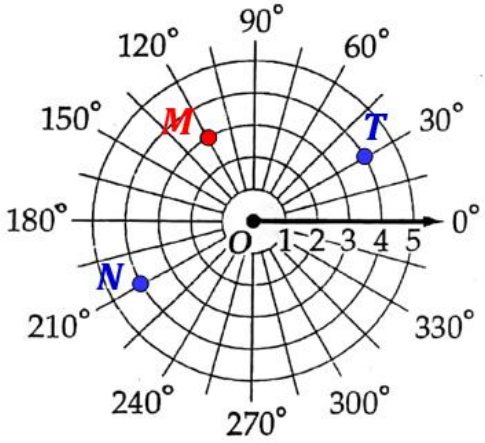
الجواب : $A = 2932$

❹ **يقوم مراقب حركة الطيران بمراقبة طائرتين على الارتفاع نفسه ، إذا كانت إحداثيات موقعي الطائرتين $A(5, 310^\circ)$ ، $B(6, 345^\circ)$ ، وتقاس المسافة المتجهة بالأميال ، فما المسافة التقريبية بين الطائرتين .**

الجواب : $AB \approx 3.44$ mi

❹ نشاط: اختبر نفسك

❶ استعمل التمثيل البياني المجاور ، لإيجاد كل مما يأتي :

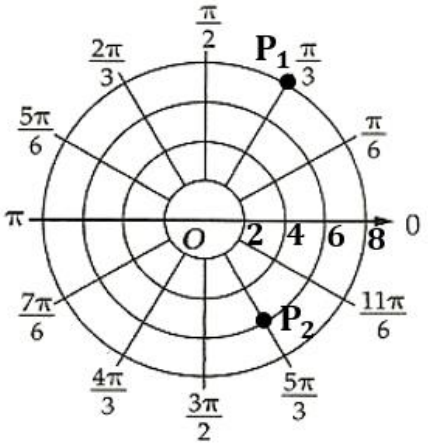


a) أربعة أزواج مختلفة ، كل منها يمثل إحداثيين قطبيين للنقطة القطبية T ، إذا كانت $-360^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$

b) MN

---

❷ يبين الشكل المجاور إحداثيات موقعين لطائرتين تطيران على نفس الارتفاع ، حيث المسافة المتجهة تقاس بالأميال ما مقدار المسافة بين الطائرتين إلى أقرب ميل ؟



A 4 mi تقريباً.

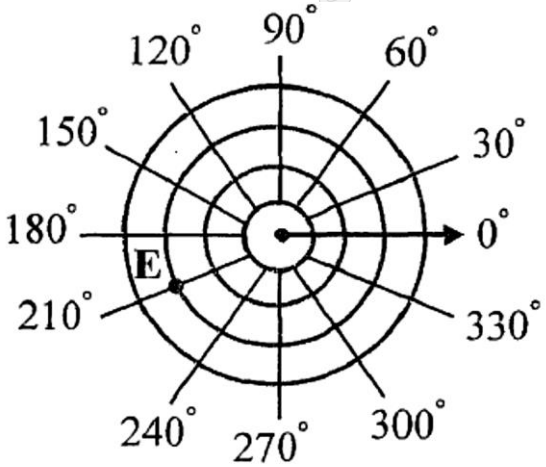
B 7 mi تقريباً.

C 12 mi تقريباً.

D 14 mi تقريباً.

---

❸ في الشكل المجاور إذا كانت $-360^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ ، فأيّ مما يأتي لا يُمثل إحداثيين قطبيين للنقطة E ؟



A $(-3, 30^\circ)$

B $(-3, 210^\circ)$

C $(3, -150^\circ)$

D $(3, 210^\circ)$

بطاقة (5) ريض 365

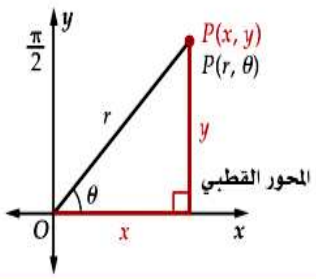
❺ الصورة القطبية و الديكارتية للمعادلات

مفهوم أساسي — تحويل الإحداثيات القطبية إلى الإحداثيات الديكارتية

إذا كان للنقطة P الإحداثيات القطبية (r, θ) ، فإن الإحداثيات الديكارتية (x, y) للنقطة P هي:

$$x = r\cos\theta \quad ، \quad y = r\sin\theta$$

أي أن $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.



إرشادات للدراسة

تحويل الإحداثيات

العملية المتبعة لتحويل الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية هي ذاتُها العملية المتبعة لإيجاد طول المتجه واتجاهه.

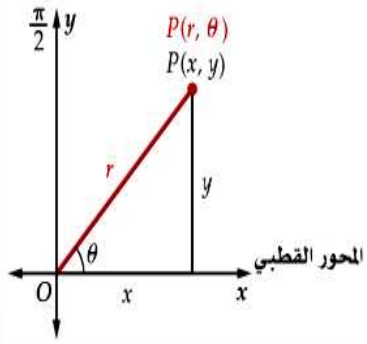
مفهوم أساسي — تحويل الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية

إذا كان للنقطة P الإحداثيات الديكارتية (x, y) ، فإن الإحداثيات القطبية (r, θ) للنقطة P هي:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ، \quad \theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x} \text{ ، عندما } x > 0$$

$$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + \pi \text{ ، عندما } x < 0$$

$$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + 180° .$$



إرشادات للدراسة

التحويل إلى الصورة الديكارتية

هناك بعض التعويضات التي يمكن استعمالها بدلًا من $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ ، وهي:

$$r = \frac{x}{\cos\theta} , r = \frac{y}{\sin\theta} .$$

إن عملية تحويل المعادلة من الصورة الديكارتية إلى الصورة القطبية عملية مباشرة، إذ نستبدل x بـ $r\cos\theta$، و y بـ $r\sin\theta$ ، ثم نبسط المعادلة الناتجة باستعمال الطرق الجبرية و المتطابقات المثلثية.

عملية تحويل المعادلة القطبية إلى معادلة ديكارتية ليست مباشرة مثل عملية التحويل من المعادلة الديكارتية إلى المعادلة القطبية، ففي التحويل الثاني تلزمنا جميع العلاقات الآتية:

$$r^2 = x^2 + y^2 , \tan\theta = \frac{y}{x}, x = r\cos\theta , y = r\sin\theta$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$
$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 .$$

مفهوم أساسي — تصنيف القطوع المخروطية باستعمال المميز

أضف إلى مطويتك

نوع القطع المخروطي	المميز
دائرة	$B^2 - 4AC < 0, B = 0 , A = C$
قطع ناقص	$B^2 - 4AC < 0,\ B \neq 0$ أو $A \neq C$
قطع مكافئ	$B^2 - 4AC = 0$
قطع زائد	$B^2 - 4AC > 0$

معادلة الخط المستقيم

$$y = mx + b$$

أو

$$ax + by + c = 0$$

❺ الإحداثيات القطبية و الديكارتية

تحويل الإحداثيات القطبية إلى الإحداثيات الديكارتية

$x = r\cos\theta$ ، $y = r\sin\theta$

حول الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية، لكل نقطة مما يأتي:

❶ $R(-6, -120°)$

❷ $S\left(5, \frac{\pi}{3}\right)$

تحويل الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبيّة

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$ ، عندما $x > 0$

$\theta = \text{Tan}^{-1}\frac{y}{x} + \pi$ ، عندما $x < 0$

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثّل إحداثيين قطبيين لكل نقطة معطاة

❸ $S\ (1, -\sqrt{3}\ )$

❹ $T\ (-3, 6)$

تطبيقات على التحويل بين الإحداثيات

❺ **صيد الأسماك:** يُستعمل جهاز رصد؛ لتحديد موقع وجود الأسماك تحت الماء. افترض أن قاربًا يتجه إلى الشرق، وأن جهاز الرصد قد رصد سربًا من الأسماك عند النقطة $(6, 125°)$.

A) ما الإحداثيات الديكارتية لموقع سرب الأسماك؟

$(-3.44, 4.91)$

B) إذا كان موقع سرب الأسماك قد رُصد سابقًا عند النقطة الديكارتية $(-2, 6)$، فما الإحداثيات القطبية لموقع السرب؟

$(6.32, 108°)$

أ./ عابدين

ريض 365

٥ المعادلات القطبية و الديكارتية

$\tan\theta = \frac{y}{x}$
$r^2 = x^2 + y^2$

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$

تحويل المعادلات الديكارتية إلى المعادلات القطبية

حدّد شكل التمثيل البياني لكل معادلة ديكارتية فيما يأتي، ثم اكتب المعادلة على الصورة القطبية:

١ $x^2 + (y-3)^2 = 9$

٢ $x^2 - y^2 = 1$

٣ ما الصورة القطبية للمعادلة الديكارتية $x = y^2$ ؟

A $r^2 = 2\sin 2\theta$

B $r^2 = \tan\theta \sec\theta$

C $r = \tan\theta \sec\theta$

D $r = \cot\theta \csc\theta$

٤ ما الصورة القطبية للمعادلة الديكارتية $x^2 + y^2 = 4$ ؟

A $r = 2$

B $r = 4$

C $r = 2\cos\theta$

D $r = 4\sin\theta$

٥ ما الصورة القطبية للمعادلة الديكارتية $y = \sqrt{3}\,x$ ؟

A $r = \sqrt{3}\sin\theta$

B $r = \sqrt{3}\cos\theta$

C $\theta = \frac{\pi}{3}$

D $\theta = \frac{\pi}{6}$

تدريب إضافي

حدّد شكل التمثيل البياني للمعادلة الديكارتية

$(x-6)^2 + (y-8)^2 = 100$

ثم اكتب المعادلة على الصورة القطبية

إعداد أ. عابدين

أ./ عابدين

ريض 365

٥ المعادلات القطبية و الديكارتية

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$

$\tan\theta = \frac{y}{x}$
$r^2 = x^2 + y^2$

تحويل المعادلات القطبية إلى المعادلات الديكارتية

اكتب كلّ معادلة قطبيّة مما يأتي على الصورة الديكارتية، وحدِّد نوع تمثيلها البياني:

١ $r = 7$

٢ $\theta = \frac{\pi}{3}$

٣ $r = 3\cos\theta$

٤ $r = 3\csc\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$

٥ $r = \frac{5\cos\theta + 5\sin\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}$

٦ ما الصورة الديكارتية للمعادلة القطبية $r^2 = \frac{4}{\sin 2\theta}$ ؟

A $y = 4x^2$

B $x = 4y^2$

C $xy = 2$

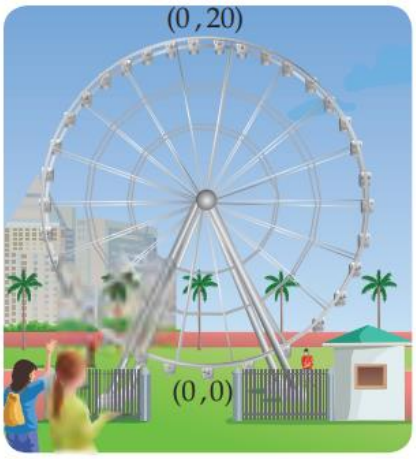
D $xy = 4$

أ. عابدين حامد *** إعداد أ. عابدين حامد

٥ المعادلات القطبية و الديكارتية

تطبيقات على التحويل بين المعادلات القطبية والديكارتية

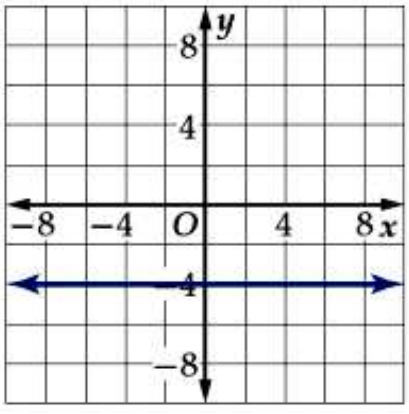
١ **عجلة دوّارة:** إذا كانت أدنى نقطة في عجلة دوّارة عند (0 , 0)، وأعلى نقطة فيها عند (0 , 20).

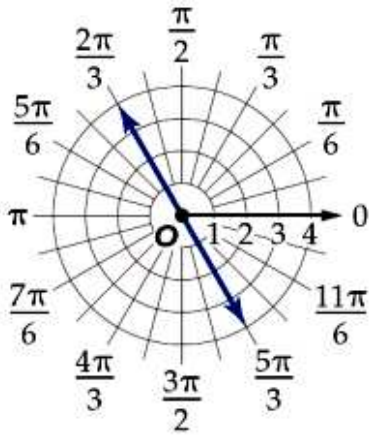


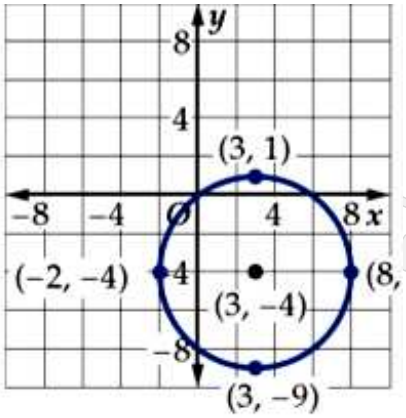
(A) اكتب معادلة العجلة الدوّارة الموضحة بالشكل المجاور على الصورة الديكارتية .

(B) اكتب المعادلة في الفرع A بالصيغة القطبية .

٢ اكتب معادلة ديكارتيّة، وأخرى قطبية لكل منحنى مما يأتي:







❺ نشاط: اختبر نفسك

❶ ما الاحداثيات الديكارتية للنقطة التي إحداثياتها القطبية $(12\ ,\frac{7\pi}{6})$ ؟

A $(6\sqrt{3}\ ,6\ )$

B $(6\ ,6\sqrt{3}\ )$

C $(-6\sqrt{3}\ ,-6\ )$

D $(-6\ ,-6\sqrt{3}\ )$

❷ ما الصورة الديكارتية للمعادلة القطبية $\theta=\frac{3\pi}{4}$ ؟

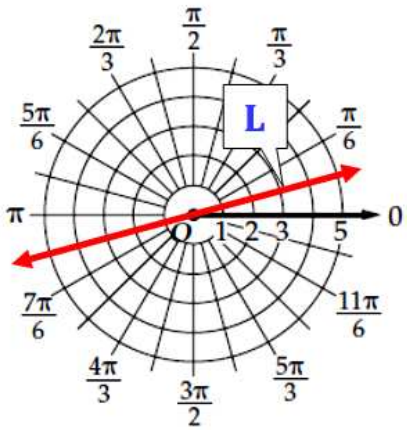
A $y=x$

B $y=-x$

C $y=\sqrt{3}\,x$

D $y=-\sqrt{3}\,x$

❸ ما المعادلة الديكارتية للمستقيم L الممثل في المستوى القطبي المجاور ؟



A $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$

B $y=\sqrt{3}\,x$

C $y=(\,2-\sqrt{3}\,)\,x$

D $y=(\,2+\sqrt{3}\,)\,x$

❹ إذا كانت الصورة الديكارتية لمعادلة قطع مكافئ هي : $(x-3)^2-y=9$

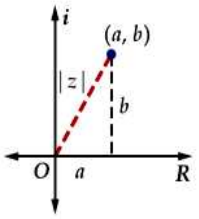
، فأثبت أن الصورة القطبية لهذه المعادلة هي : $r=\sec\theta\,(\tan\theta+6)$

٦ الأعداد المركبة و نظرية ديموافر

مفهوم أساسي — القيمة المطلقة لعدد مركب

القيمة المطلقة للعدد المركب $z = a + bi$ هي:

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



صيغة مختصرة للصورة القطبية (المثلثية)

$$z = r \operatorname{cis} \theta$$

مفهوم أساسي — الصورة القطبية لعدد مركب

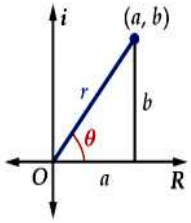
الصورة القطبية أو المثلثية للعدد المركب $z = a + bi$ هي:

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ، حيث

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ، $a = r\cos\theta$ ، $b = r\sin\theta$ ،

$\theta = \operatorname{Tan}^{-1}\frac{b}{a}$ عندما $a > 0$ ، $\theta = \operatorname{Tan}^{-1}\frac{b}{a} + \pi$ ، عندما $a < 0$.

أما إذا كانت $a = 0$ ، فإن $\theta = \frac{\pi}{2}$ إذا كانت $b > 0$ ، $\theta = -\frac{\pi}{2}$ إذا كانت $b < 0$



r : المقياس

θ : السعة

ويمكنك استعمال الصورة القطبية لعدد مركب؛ لتمثيله في المستوى القطبي باستعمال قيم r ، θ كما في الإحداثيات القطبية (r, θ) . كما يمكنك تحويل عدد مركب مكتوب على الصورة القطبية إلى الصورة الديكارتية، وذلك باستعمال قيم r ، وقيم النسب المثلثية للزاوية θ المعطاة.

مفهوم أساسي — ضرب الأعداد المركبة على الصورة القطبية وقسمتها

للعددين المركبين $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ ، $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ ، فإن:

صيغة الضرب

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

صيغة القسمة

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)] \text{ ، حيث } z_2 \neq 0 \text{ ، } r_2 \neq 0$$

قبل حساب قوى الأعداد المركبة وجذورها، فإن من المفيد كتابة العدد المركب على الصورة القطبية. حيث يعود الفضل في حساب قوى الأعداد المركبة وجذورها للعالم الفرنسي ديموافر.

نظرية — نظرية ديموافر

إذا كان $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ عددًا مركبًا على الصورة القطبية، وكان n عددًا صحيحًا موجبًا، فإن:

$$z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) .$$

مفهوم أساسي — الجذور المختلفة

لأي عدد صحيح موجب n، فإن للعدد المركب $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ، n من الجذور النونية المختلفة ويمكن إيجادها باستعمال الصيغة :

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

حيث $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

ملحوظة : عند تطبيق نظرية ديموافر يجب وضع العدد على الصورة القطبية

تنبيه!

الصورة القطبية يجب عدم الخلط بين الصورة القطبية للعدد المركب والإحداثيات القطبية للعدد. فالصورة القطبية لعدد مركب هي طريقة أخرى لكتابة العدد المركب. وسوف نناقش الإحداثيات القطبية للعدد المركب لاحقًا في هذا الدرس.

إرشادات للدراسة

السعة كما في الإحداثيات القطبية، فإن θ ليست وحيدةً، مع أنها تُعطى عادةً في الفترة $-2\pi < \theta < 2\pi$.

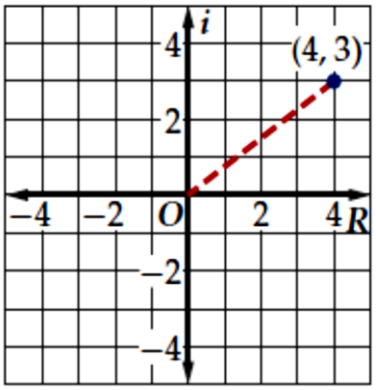
٦ الأعداد المركبة

تمثيل الأعداد المركبة وإيجاد قيمها المطلقة

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

مثِّل كلّ عدد مما يأتي في المستوى المركب (مستوى آرجاند) ، وأوجد قيمته المطلقة (المقياس)

١ $z = 4 + 3i$



$(a, b) = (4, 3)$

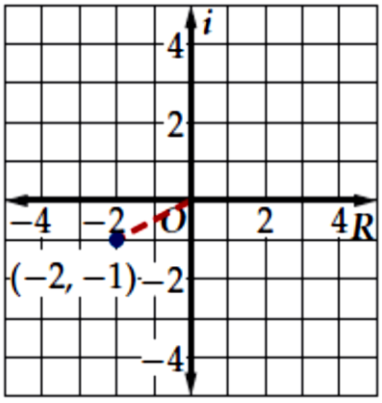
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$= \sqrt{4^2 + 3^2}$

$= \sqrt{25} = 5$

القيمة المطلقة للعدد $3i + 4$ تساوي 5.

٢ $z = -2 - i$



$(a, b) = (-2, -1)$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$= \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{5} \approx 2.24$

القيمة المطلقة للعدد $i - 2$ تساوي 2.24 تقريبًا.

الصورة القطبية لعدد مركب

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,\text{cis}\,\theta$$

عبِّر عن كلّ عدد مركب مما يأتي بالصورة القطبية (الصورة المثلثية) :

٣ $z = 2 + 2\sqrt{3}\,i$

٤ $z = -6 + 8\,i$

٥ ما سعة العدد المركب $z = -2 + 5i$ بالراديان إلى أقرب جزء من مئة ؟

A 68.20

C -68.20

B -1.19

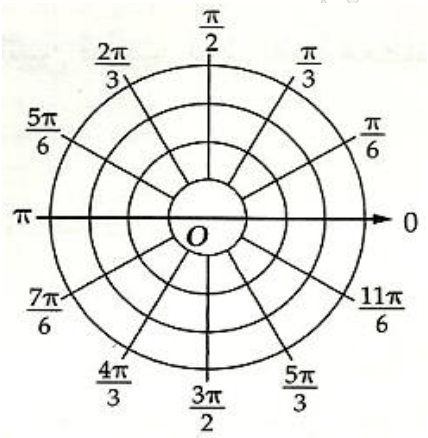
D 1.95

٦ تابع : الأعداد المركبة

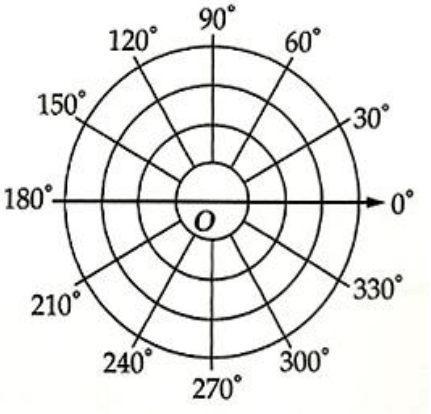
تمثيل الصورة القطبية لعدد مركب وتحويلها إلى الصورة الديكارتية

مَثِّل كل عدد مركب مما يأتي في المستوى القطبي، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية:

١ $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$



٢ $z = 5\,(\cos 150° + i\sin 150°)$



ضرب الأعداد المركبة على الصورة القطبية

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

أوجد الناتج على الصورة القطبية، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية لكلٍّ مما يأتي:

٣ $2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) \cdot 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

٤ إذا كان $z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

، فأوجد ناتج $z_1 \cdot z_2$ على الصورة القطبية ، ثم عبِّر عنه بالصورة الديكارتية.

❻ تابع : الأعداد المركبة

قسمة الأعداد المركبة على الصورة القطبية

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$ ، حيث $z_2 \neq 0$ ، $r_2 \neq 0$

❶ إذا كان $z_1 = 6\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ ، $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

، فأوجد ناتج $\frac{z_1}{z_2}$ على الصورة القطبية ، ثم عبِّر عنه بالصورة الديكارتية.

❷ أوجد الناتج على الصورة القطبية ، ثم عبِّر عنه بالصورة الديكارتية.

$$8\,(\cos 240^\circ + i\sin 240^\circ) \div 4\,(\cos 210^\circ + i\sin 210^\circ)$$

❸ إذا كان فرق الجهد E في دائرة كهربائية يساوي $100\ V$ ، وكانت ممانعتها (مقاومتها) Z تساوي $(4 - 3j)\Omega$ ، فأوجد شدة التيار I في الدائرة على الصورة الديكارتية باستعمال : $E = I \cdot Z$

ممكن الحل بطريقتين

بالطريقة الجبرية (الضرب في المرافق)

أو قسمة الأعداد المركبة في الصورة القطبية

والجواب هو : $(16 + 12j)\text{Amp}$

❻ نظرية ديموافر

نظرية ديموافر

$$z^n = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

أوجد باستعمال نظرية ديموافر الناتج في كل مما يأتي ، وعبّر عنه بالصورة الديكارتية :

❶ $(4 + 4\sqrt{3}\,i)^6$

❷ $(1 + \sqrt{3}\,i)^4$

❸ استعمل نظرية ديموافر؛ لكتابة المقدار $\dfrac{\left(2\left[\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right]\right)^7}{\left(4\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]\right)^3}$ على صورة $a + ib$.

❻ نظرية ديموافر و جذور العدد المركب

جذور العدد المركب

حيث $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

❶ أوجد الجذور الرباعية للعدد :

$z = 3 + 3\sqrt{3}\,i$ لأقرب جزء من مئة

باستعمال صيغة الجذور المختلفة (ديموافر)

❷ أوجد الجذور التكعيبية للعدد :

$z = 2 + 2\,i$ لأقرب جزء من مئة

باستعمال صيغة الجذور المختلفة (ديموافر)

إعداد أ. عابدين حامد

❻ نظرية ديموافر و جذور العدد المركب

جذور العدد المركب

حيث $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

❸ حل المعادلة : $x^3 + 16 = -200$

باستعمال صيغة الجذور المختلفة (ديموافر) .

(بصيغة أخرى : أوجد الجذور التكعيبية للعدد -216)

❹ حل المعادلة : $x^3 - 1 = 0$

باستعمال صيغة الجذور المختلفة (ديموافر) .

(بصيغة أخرى : أوجد الجذور التكعيبية للعدد 1)

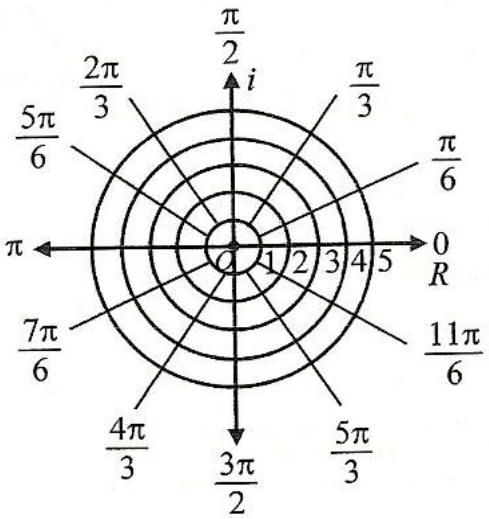
إعداد أ./ عابدين حامد

❻ نشاط: اختبر نفسك

❶ إذا كان $z_2 = 5\ \text{cis}\ \frac{2\pi}{3}$ ، $z_2 = 2\left(\cos(-\frac{\pi}{3}) - i\sin(-\frac{\pi}{3})\right)$ عددين مركبين

a) مثّل العدد المركب z_2 ، في المستوى القطبي المجاور .

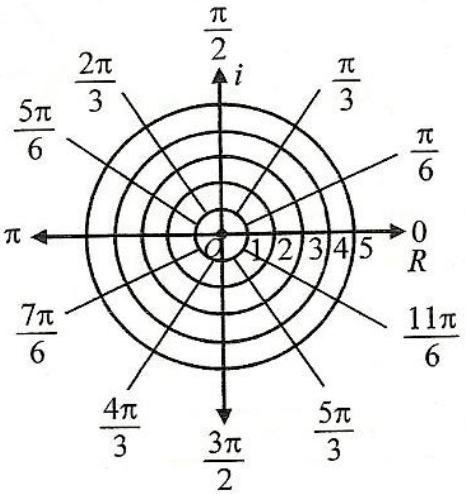
يجب أولاً التعديل ووضع العددين على الصورة القطبية (المثلثية)



b) أوجد ناتج $z_1 z_2$ ، ثم عبّر عنه بالصورة الديكارتية .

❷ إذا كان $z = 2 + 2\sqrt{3}\,i$ عدد مركب .

a) ضع العدد المركب z على الصورة القطبية ، ثم مثله في المستوى القطبي المجاور .



b) أوجد الجذور التربيعية للعدد z في الصورة الديكارتية .

❸ أوجد ناتج $(2\sqrt{3} + 2i)^6$ وعبّر عنه بالصورة الديكارتية .

الجواب : -4096

KINGDOM OF BAHRAIN
Ministry of Education
ALNOAIM SECONDARY BOYS SCHOOL



مَمْلَكَة البَحْرَيْن
وَزَارَةُ التَّرْبِيَةِ وَالتَّعْلِيم
مَدْرَسَةُ اَلْنُعِيمْ اَلْثَانَوِيَةِ لِلْبَنِين
قسم الرياضيات

توجيهي فيز وريض

إعداد الأستاذ / عابدين حامد فؤاد

ملف إنجاز الطالب

بطاقات + أنشطة

الرياضيات 5 (ريض 365)

الوحدة الثالثة

الإحصاء

و التوزيعات الاحتمالية

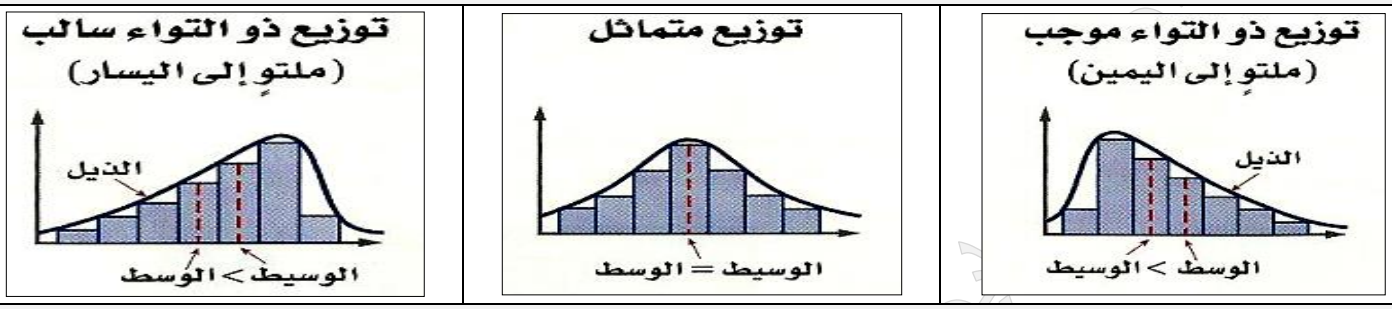
إعداد الأستاذ : عابدين حامد فؤاد

ملحوظة : هذه المذكرة ليست بديلاً عن الكتاب المدرسي (الكتاب هو المرجع الأساسي)

بطاقة (7) ريض 365

❼ الإحصـــــاء الـــوصـفـي

التوزيعات المتماثلة والتوزيعات الملتوية



اختيار الإحصائيات المناسبة لوصف التوزيع

عند اختيار مقاييس النزعة المركزية والتشتت لوصف التوزيع ، تعرَّف أولاً على شكل التوزيع :

❶ إذا كان التوزيع متماثلاً ، ولا يتضمن قيماً متطرفة ← فاستعمل الوسط ، والانحراف المعياري .

❷ إذا كان التوزيع ملتوياً ، أو يتضمن قيماً متطرفة قوية ← فاستعمل المقاييس الخمسة

(القيمة الصغرى ، الرُّبيع 1 (Q_1) ، الوسيط [الرُّبيع 2 (Q_2)] ، الرُّبيع 3 (Q_3) ، القيمة العُظمى) .

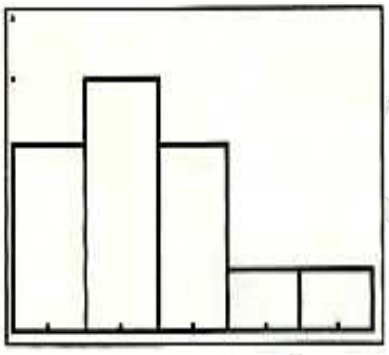
ملاحظة : الرُّبيع 1 (Q_1) هو الرُّبيع الأدنى . ⇐ [وهو الوسيط للنصف الأول من القيم]

، الرُّبيع 3 (Q_3) هو الرُّبيع الأعلى . ⇐ [وهو الـوسيط للنصف الثاني من القيم]

، الرُّبيع 2 (Q_2) هو الوسيط . ⇐ [وهو الوسيط لجميع القيم]

المدى = العظمى – الصغرى ، المدى الرُّبيعي $= Q_3 - Q_1$ ، نصف المدى الرُبيعي $= \frac{Q_1 + Q_3}{2}$

❶ تُبيّن القائمة أدناه عدد الساعات التي يقضيها أعضاء فريق المدرسة لكرة السلة في التدريب الفردي ، والجماعي أسبوعياً .



15 , 18 , 16 , 20 , 22 , 18 , 19 , 20 , 24 , 18 , 16 , 18

A) استعمل المدرج التكراري أدناه لوصف شكل التوزيع .

ج : يُبيّن المدرج التكراري أن : للتوزيع التواء موجب (لليمين)

B) لخِّص تمركز ، وتشتت البيانات مستعملاً الوسط والانحراف المعياري ، أو المقاييس الخمسة ، وبرِّر إجابتك ؟

ج : بما أن التوزيع ملتوٍ ، فنستعمل المقاييس الخمسة لتلخيص تمركز وتشتت البيانات

، نرتب القيم تصاعدياً : 15, 16 , 16 , 18 , 18 , 18 , 18 , 19 , 20 , 20 , 22 , 24

- القيمة الصغرى = 15 ، الرُّبيع 1 (Q_1) = 17 ، الوسيط $Q_2 = 18$
- الرُّبيع 3 (Q_3) = 20 ، القيمة العظمى = 24 ، المدى الرُّبيعي = 3
- **التلخيص :** تدل المقاييس الخمسة على أن عدد ساعات التدريب تتراوح بين 15 h ، 24 h ، ويكون الوسيط 18 h ، ونصف ساعات التدريب يقع بين 17 h ، 20 h

❼ التوزيعات المتماثلة و التوزيعات الملتوية

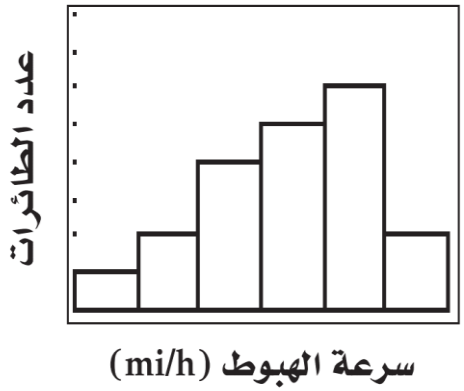
تمارين على التوزيعات المتماثلة والتوزيعات الملتوية

❷ يُبيّن الجدول المجاور سرعة هبوط 20 طائرة تجارية في أحد المطارات ، بالميل لكل ساعة

سرعة الهبوط(mi/h)			
145	153	157	150
162	158	158	155
154	138	142	149
148	146	161	156
152	151	144	158

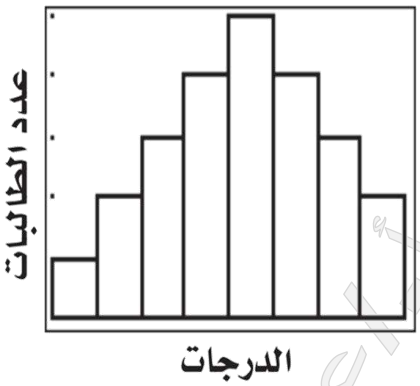
A) استعمل المدرج التكراري أدناه لوصف شكل التوزيع .

B) لخِّص تمركز ، وتشتت البيانات مستعملاً الوسط والانحراف المعياري ، أو المقاييس الخمسة ، وبرِّر إجابتك ؟



❸ يُبيّن الجدول أدناه درجات طالبات فصل دراسي في مادة الأحياء .

درجات طالبات فصل دراسي في مادة الأحياء											
87	75	80	67	84	72	74	96	91	89	76	86
98	63	76	80	83	68	78	94	88	80	73	92



A) استعمل المدرج التكراري المجاور ؛ لوصف شكل التوزيع .

الجواب : التوزيع متماثل .

B) لخِّص تمركز ، وتشتت البيانات مستعملاً الوسط والانحراف المعياري ، أو المقاييس الخمسة .

الجواب : بما أن التوزيع متماثل فاستعمل الوسط و الانحراف المعياري .

الوسط : $\mu = \frac{\sum_{k=1}^{N} x_k}{N} = \frac{87+75+80+\ \dots\ +80+73+92}{24} = 81.3$

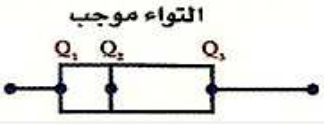
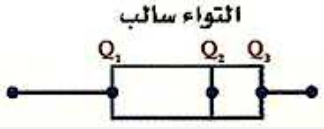
الانحراف المعياري : $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{N}(x_k-\mu)^2}{N}} = \sqrt{\frac{(87-81.3)^2+(75-81.3)^2+\ \dots\ +(92-81.3)^2}{24}} = 9.3$

❹ ما قيمة المدى الرُّبيعي للقيم : 363 ، 322 ، 317 ، 292 ، 290 ، 282 ، 273 ؟

A 10 B 30 C 40 D 90

تابع : بطاقة (7) ريض 365

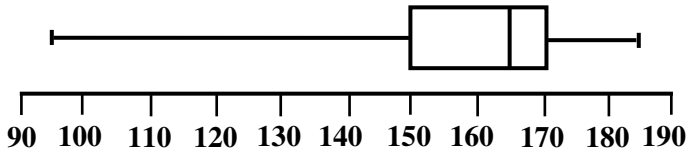
❼ استعمال الصندوق و طرفيه للتماثل و الالتواء

التواء موجب	تماثل	التواء سالب	المدى الرُّبيعي :
			الرُبيع الأعلى – الرُبيع الأدنى
الأيمن أطول من الأيسر	الأيمن يساوي الأيسر	الأيسر أطول من الأيمن	$Q_3 - Q_1$
Q_2 أقرب إلى Q_1	Q_2 يقع بين Q_1 و Q_3	Q_2 أقرب إلى Q_3	

❶ يُبيّن الجدول أدناه أسعار مجموعة من البنايات الإسكانية المعروضة للبيع لدى أحد المكاتب العقارية .

أسعار البنايات (بآلاف الدنانير)				
152	150	115	110	95
168	165	165	156	154
185	177	175	170	168

A) استعمل شكل الصندوق وطرفيه المجاور لوصف شكل التوزيع لهذه الأسعار ، وبرِّر وصفك .



ج : يُبيّن شكل الصندوق وطرفيه أن :
التوزيع ذو التواء سالب (لليسار)
لأن الطرف الأيسر أطول من الطرف الأيمن ، والخط الذي يمثل Q_2 أقرب إلى Q_3 منه إلى Q_1 .

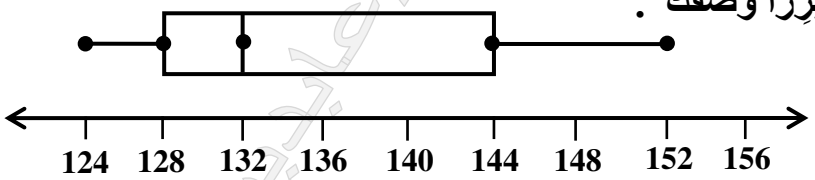
B) لخِّص تمركز ، وتشتت البيانات مستعملاً الوسط والانحراف المعياري ، أو المقاييس الخمسة ، وبرِّر إجابتك ؟

ج : بما أن للتوزيع التواء سالب (ملتوٍ) لذا نستخدم المقاييس الخمسة .

- القيمة الصغرى = 95000 ، الرُبيع الأدنى $Q_1 = 150000$
- الوسيط $Q_2 = 165000$ ، الرُبيع الأعلى $Q_3 = 170000$
- القيمة العظمى = BD 185000 ، المدى الرُّبيعي : $170000 - 150000 = 20000$ BD
- التلخيص : تدل المقاييس الخمسة على أن الأسعار تتراوح بين BD 95000 ، BD 185000 ويكون الوسيط BD 165000 ، ونصف الأسعار تقع بين BD 150000 ، BD 170000

❷ يُبيّن شكل الصندوق وطرفيه أدناه أسعار مجموعة من أجهزة الحاسوب في أحد المحلات التجارية بالدينار، استعمله للإجابة عن كل مما يأتي :

A) صف شكل التوزيع لأسعار الأجهزة ، مبرِّراً وصفك .



B) أوجد قيمة الوسيط للتوزيع .

C) حدد القيمتين اللتين يتوزع بينهما نصف عدد القيم في هذا التوزيع .

D) إذا أردت تلخيص تمركز البيانات وتشتتها في هذا الموقف ، فأيّهما تستعمل الوسط والانحراف المعياري ، أم المقاييس الخمسة ؟ وبرِّر إجابتك .

تابع : بطاقة (7) ريض 365

❼ رسم المنحنى المئيني و استعماله

أ./ عابدين

المئينات : ومفردها المئين ، تقسم التوزيع إلى 100 مجموعة يُرمز لها بالرموز $P_1 , P_2 , P_3 , \dots , P_{99}$

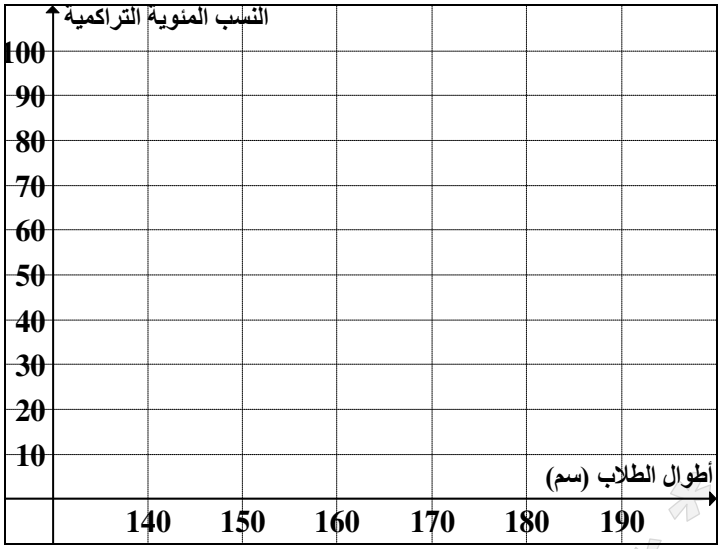
تمثيل المئين بيانياً : كما يُمثل المنحنى التكراري التراكمي (المتجمع الصاعد) ، إلا أن التناسب يحسب كنسبة مئوية

تمارين على رسم المنحنى المئيني واستعماله

❶ يُبيّن الجدول أدناه التوزيع التكراري لأطوال 40 طالباً وفق أطوالهم بالسنتيمتر في أحد صفوف مدارس المرحلة الثانوية بمملكة البحرين .

A) أكمل الجدول أدناه . $\frac{8}{40} \times 100\,\% = 20\,\%$

الفئات	التكرار f	التكرار التراكمي	النسب المئوية التراكمية
140 –	8		
150 –	14		
160 –	12		
170 – 180	6		



B) ارسم المنحنى المئيني لهذه الأطوال .

C) قدِّر الرتبة المئينية للطول 165 cm ضمن التوزيع ، وفسِّر معناه . **الجواب :** الطول 165 cm يقابل المئين 70 تقريباً

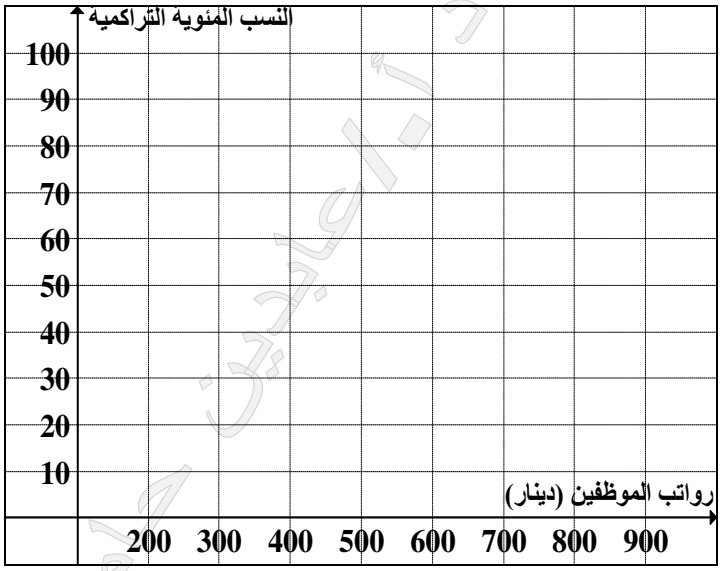
التفسير : الطالب الذي طوله 165 cm يكون أطول من 70 % من الطلاب .

والتفسير بصيغة أخرى : [هذا يعني أن 70 % من الطلاب أطوالهم لا تتجاوز 165 cm]

❷ يُبيّن الجدول أدناه رواتب 50 موظفاً بالدينار(BD) في إحدى الشركات التجارية بمملكة البحرين

A) أكمل الجدول أدناه .

الفئات	التكرار f	التكرار التراكمي	النسب المئوية التراكمية
200 –	2		
300 –	8		
400 –	10		
500 –	15		
600 –	10		
700 – 800	5		



B) ارسم المنحنى المئيني لهذه الأطوال .

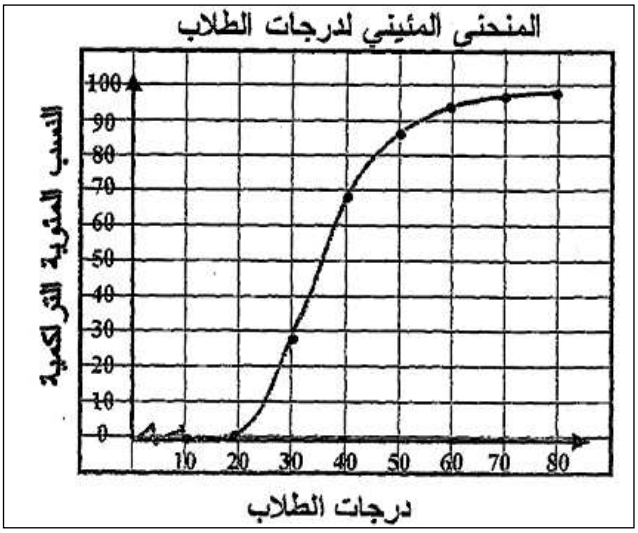
C) قدِّر الرتبة المئينية للراتب 550 BD ضمن التوزيع ، وفسِّر معناه . ج : 55 تقريباً

الجواب :

التفسير :

٧ نشاط : اختبر نفسك

١ يُبيّن المنحنى المئيني المجاور درجات طلاب إحدى المدارس في أحد الاختبارات ، فأجب عما يأتي :



(أ) ما الرتبة المئينية للدرجة 45 ؟

A 40 تقريباً　　C 70 تقريباً

B 80 تقريباً　　D 90 تقريباً

(ب) ما الدرجة التي تقابل الرتبة المئينية 50 ؟

A 25 تقريباً　　C 35 تقريباً

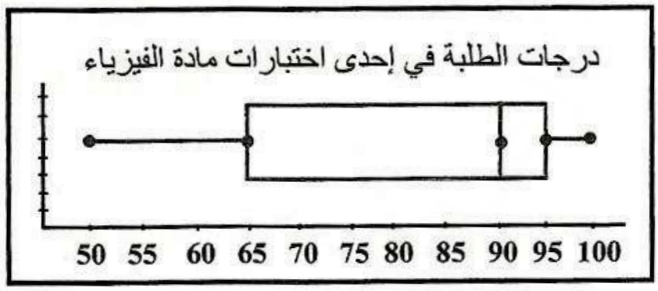
B 45 تقريباً　　D 55 تقريباً

٢ ما قيمة الرُّبيع الأول Q_1 للقيم الأتية :

7 ، 4 ، 1 ، 4 ، 9 ، 7 ، 10 ، 3 ، 8 ، 7 ؟

A 1　　B 2　　C 3　　D 4

٣ إذا كان شكل الصندوق وطرفيه أدناه يُمثّل توزيعاً لدرجات الطلبة في إحدى اختبارات مادة الفيزياء فما قيمة المدى الرُبيعي لهذه الدرجات .



A 30

B 35

C 40

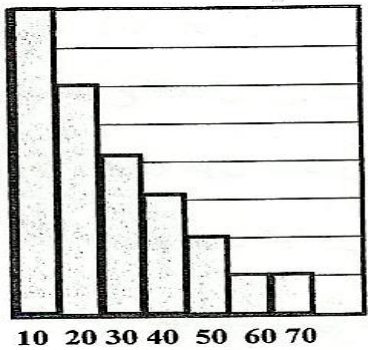
D 50

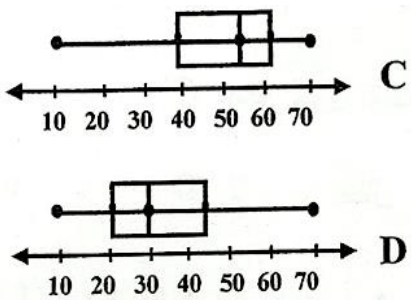
٤ إذا كان المدى الرُبيعي لبيانات إحصائية ما يساوي 27 ، وكان $Q_1 = 15$. فما قيمة Q_3 ؟

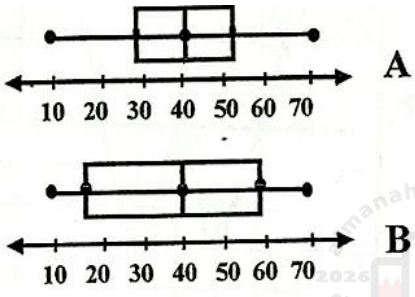
A 42　　C 20

B 32　　D 12

٥ أي من الصندوق وطرفيه أدناه يُمثّل المدرج التكراري المجاور ؟







٨ التوزيعات الاحتمالية

مفهوم أساسي

المتغيرات العشوائية المنفصلة والمتصلة

للمتغير العشوائي المنفصل عددٌ معدود أو منته من القيم الممكنة.

يكون له عددٌ محدود أو منتهٍ من القيم الممكنة (قابلة للعد)

مثال

X يُمثّل عدد حوادث السيارات في السنة

0 1 2 3 4 5 6 7 8

للمتغير العشوائي المتصل عددٌ غير منته من القيم الممكنة ضمن فترة محددة.

يكون له عددٌ غير محدود من القيم الممكنة (غير قابلة للعد)

مثال

X يُمثّل المسافة التي تقطعها سيارة بالكيلومتر

0 2 4 6 8 10

مثال : صنِّف كل متغير عشوائي مما يأتي من حيث كونه منفصلاً أو متصلاً . وبرِّر إجابتك .

١ X يُمثِّل عدد السيارات في موقف مخصص لمدرسة النعيم في أوقات عشوائية خلال يوم دراسي .

ج : متغيراً عشوائياً منفصلاً ، لأن عدد السيارات في الموقف محدود (قابل للعد) .

٢ X يُمثِّل الوقت الذي سيحتاجه محمد لحل جميع تمارين درس التوزيعات الاحتمالية .

ج : متغيراً عشوائياً متصلاً ، لأنه قد يكون الوقت من دقيقة إلى ساعة مثلاً (غير قابلة للعد) .

٣ X يُمثِّل عدد المسافرين من مطار البحرين خلال يوم تم اختياره عشوائياً . ⇐ (ج : منفصل)

٤ X يُمثّل عدد الحضور في أحد الاجتماعات الشهرية تم اختياره عشوائياً . ⇐ (ج : منفصل)

٥ X يُمثِّل وزن طالب تم اختياره عشوائياً . ⇐ (ج : متصل) ، لأنه يمكن لأي عدد أن يكون وزناً

٦ X يُمثِّل كمية الدم التي تبرّع بها شخص في حملة للتبرع بالدم . ⇐ (الجواب : متصل)

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل X

يُعبر عنه في صورة جدول أو معادلة أو تمثيل بياني يربط بين كل قيمة من قيم X ، واحتمال وقوعها $P(X)$.

شروط التوزيع الاحتمالي الصحيح : ويجب أن يحقق الشرطين الآتيين معاً

(1) احتما ل كل قيمة من قيم X محصوراً ما بين 0 و 1 ، أي أن : $0 \le P(X) \le 1$

(2) مجموع كل احتمالات قيم X يساوي 1 ، أي أن : $\sum P(X) = 1$

تدريب : الجدول أدناه يبين توزيع احتمالي صحيح ، فما قيمة k ؟

عدد الطلاب الغائبين X	0	1	2	3
الاحتمال $P(X)$	0.2	0.4	k	0.1

A 0.1 B 0.3 C 0.2 D 0.4

❽ تابع : التوزيعات الاحتمالية

تمارين على التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل X

❶ استعمل جدول التوزيع التكراري المجاور (تقويم أداء مجموعة من الطلبة) للإجابة عما يأتي :

الدرجة X	التكرار f
1	4
2	6
3	8
4	2

A) كوّن جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير X :

مجموع الطلبة $= 20$

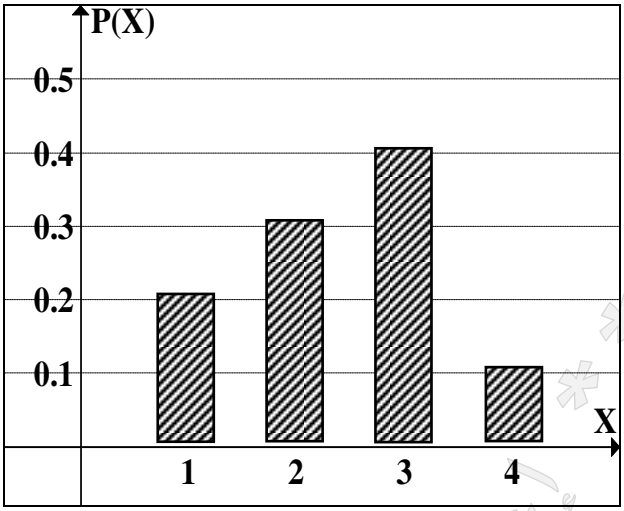
$P(1) = \frac{4}{20} = 0.2$ ، $P(2) = \frac{6}{20} = 0.3$

$P(3) = \frac{8}{20} = 0.4$ ، $P(4) = \frac{2}{20} = 0.1$

التوزيع الاحتمالي للمتغير X :

الدرجة X	1	2	3	4
الاحتمال $P(X)$	0.2	0.3	0.4	0.1

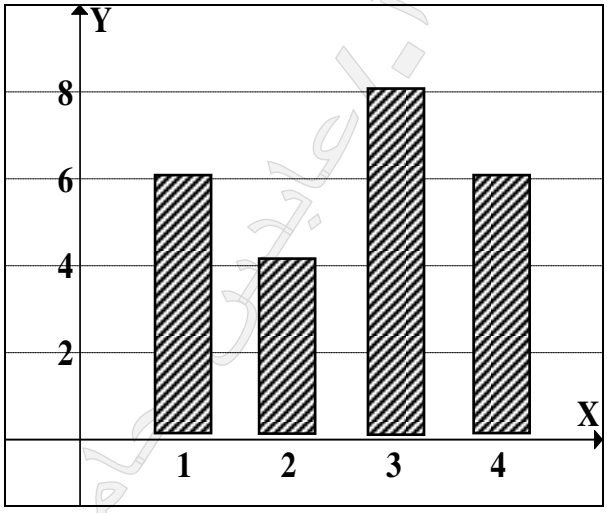
B) مثِّل التوزيع الاحتمالي بالأعمدة .



C) أوجد $P(X > 2)$:

❷ من البيانات الممثلة بالشكل أدناه حيث X هو المتغير العشوائي و Y هو التكرار :

A) كوّن جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير X :



B) أوجد $P(X \leq 3)$:

٨ الوسط (التوقع) ، التباين ، الانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي

الوسط (μ) :

$$\mu = E(X) = \sum[X \cdot P(X)]$$

التباين : $\sigma^2 = \sum [(X-\mu)^2 \cdot P(X)]$

الانحراف المعياري : $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\text{التباين}}$

١ أوجد الوسط ، والتباين ، والانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي المجاور :
مُقرباً إلى أقرب جزء من مئة .

الدرجة X	1	2	3	4
الاحتمال $P(X)$	0.2	0.3	0.4	0.1

الحل : نكوّن الجدول الآتي :

X	$P(X)$	$X \cdot P(X)$	$(X-\mu)^2$	$(X-\mu)^2 \cdot P(X)$
1	0.2	0.2	1.96	0.392
2	0.3	0.6	0.16	0.048
3	0.4	1.2	0.36	0.144
4	0.1	0.4	2.56	0.256
		$\mu = 2.4$		$\sigma^2 = 0.84$

الوسط : $\mu = \sum[X \cdot P(X)] = 2.4$

$$\mu = 2.4$$

التباين : $\sigma^2 = \sum [(X-\mu)^2 \cdot P(X)]$

$$\sigma^2 = 0.84$$

الانحراف المعياري :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0.84} \approx 0.92$$

٢ أوجد الوسط ، والتباين ، والانحراف المعياري للتوزيع الاحتمالي المجاور :
مُقرباً إلى أقرب جزء من مئة .

عدد الأيام الممطرة في السنة					
عدد الأيام X	1	2	3	4	5
الاحتمال $P(X)$	0.2	0.15	0.25	0.3	0.1

X	$P(X)$	$X \cdot P(X)$	$(X-\mu)^2$	$(X-\mu)^2 \cdot P(X)$
		$\mu =$		$\sigma^2 =$

٣ يُبيّن الجدول المجاور التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X ، ما قيمة التوقع $E(X)$ ؟

X	0	2	5
$P(X)$	0.3	0.5	0.2

A 1 B 2 C 2.3 D 7

❽ توزيع ذات الحدين

مفهوم أساسي — تجربة ذات الحدين

تجربة ذات الحدين هي تجربة احتمالية تحقق الشروط الآتية :

- يُعاد إجراء التجربة لعدد محدد من المحاولات المستقلة (المرات) n .
- لكل محاولة نتيجتان متوقعتان: نجاح S ، أو فشل F .
- احتمال النجاح $P(S)$، أو p نفسه في كل محاولة. واحتمال الفشل $P(F)$، أو q ويساوي $p - 1$.
- يُمثّل المتغير العشوائي X عدد مرات النجاح في n من المحاولات.

صيغة احتمال ذات الحدين

احتمال النجاح x مرة في n من المحاولات المستقلة في تجربة ذات الحدين :

يعطى بالقانون : $P(X = x) = P(x) = nC_x\, p^x\, q^{n-x}$ (دالة التوزيع الاحتمالي)

حيث : احتمال النجاح هو $p = P(S)$ ، احتمال الفشل $q = P(F)$ في المحاولة الواحدة

$$p + q = 1 \quad \Leftrightarrow \quad q = 1 - p$$

الوسط ، والتباين ، والانحراف المعياري لتوزيع ذات الحدين

الوسط :	التباين :	الانحراف المعياري :
$\mu = n \cdot p$	$\sigma^2 = n \cdot p \cdot q$	$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$

تمارين على توزيع ذات الحدين

❶ في دراسة إحصائية شملت طلاب الصف الثالث الثانوي ، تبيّن أن 80 % منهم يرغبون في إكمال دراستهم في الجامعات المحلية . إذا تم اختيار 9 منهم بشكل عشوائي ، وتم سؤالهم عما إذا كانوا يرغبون في إكمال دراستهم في الجامعات المحلية . فما قيمة الانحراف المعياري لهذا التوزيع ؟

A) 1.2 C) 2.7

B) 1.44 D) 7.2

❷ بيّنت دراسة إحصائية أن درجات 80 % من طلبة إحدى الجامعات في امتحان القبول كانت فوق درجة النجاح ، وكان التباين للدرجات $\sigma^2 = 14.4$. ما وسط درجات الطلبة μ في هذا الامتحان ؟

A) 94.4 C) 72

B) 65.6 D) 18

❽ تابع : توزيع ذات الحدين

تابع : تمارين على توزيع ذات الحدين

❸ أُجري مسح إحصائي مؤخراً ، فتبيّن أن $40\ \%$ من سكان إحدى المناطق يستعملون المواصلات العامة في الذهاب إلى أعمالهم . اختير خمسة أشخاص من سكان هذه المنطقة عشوائياً ، وتم سؤالهم عما إذا كانوا يستعملون المواصلات العامة في الذهاب إلى أعمالهم .

A) هل التجربة ذات حدين . إذا كانت التجربة ذات حدين ، فاكتب قيم $n\ ,p\ ,q$ ؟

B) أوجد الوسط لهذا التوزيع ، وفسّر إجابتك في سياق هذا الموقف . $\mu = 2$

C) أوجد الانحراف المعياري لهذا التوزيع لأقرب جزء من عشرة . $\sigma \approx 1.1$

❹ في دراسة إحصائية شملت طلاب الصف الثالث الثانوي، تبيّن أن $80\ \%$ منهم يرغبون في إكمال دراستهم في الجامعات المحلية . إذا تم اختيار 9 منهم بشكل عشوائي ، وتم سؤالهم عما إذا كانوا يرغبون في إكمال دراستهم في الجامعات المحلية .

A) هل التجربة ذات حدين . إذا كانت التجربة ذات حدين ، فاكتب قيم $n\ ,p\ ,q$ ؟

B) أوجد الوسط لهذا التوزيع ، وفسّر إجابتك في سياق هذا الموقف . $\mu = 7.2$

C) أوجد الانحراف المعياري لهذا التوزيع : $\sigma = 1.2$

❺ في تجربة إلقاء قطعة نقد منتظمة 64 مرة متتالية ، إذا دلّ المتغير العشوائي X على عدد مرات ظهور الصورة ، فما قيمة الانحراف المعياري في هذه التجربة ؟

تجربة ذات حدين
$n = 64$
$p = 0.5$
$q = 0.5$

A) 1 B) 8 C) 4 D) 16

٨ تابع : توزيع ذات الحدين

تابع : تمارين على توزيع ذات الحدين

٦ في دراسة أُجريت على خريجي إحدى الكليات ، فتبيّن أن 70 % منهم يخططون لتلقى التدريب العمل بعد التخرج . تم اختيار 5 طلاب بشكل عشوائي وسؤالهم إذا كانوا يرغبون بتلقي التدريب العملي بعد تخرجهم . أوجد احتمال أن يكون ثلاثة منهم على الأقل أجابوا بنعم عن السؤال .

الجواب : $P(X \geq 3) = 0.83692 \approx 83.7\ \%$

٧ أُجريت دراسة على المراجعين لإحدى العيادات الطبية ، فتبيّن أن 40 % منهم يتبعون نظام غذائي صحي . إذا تم اختيار 5 مراجعين بشكل عشوائي وسؤالهم إذا كانوا يتبعون نظام غذائي صحي أم لا أوجد احتمال أن يكون أقل من ثلاثة منهم يتبعون نظام غذائي صحي .

الجواب : $P(X < 3) = 0.68256 \approx 68.26\ \%$

٨ تُبيّن دراسة إحصائية أن 64 % من طلاب إحدى الجامعات يمتلكون سيارات خاصة ، إذا تم اختيار 100 طالب بطريقة عشوائية وسؤالهم إذا كانوا يمتلكون سيارات خاصة ، فما قيمة الوسط للدراسة ؟

A 4.8 B 8 C 23.04 D 64

❽ تابع : توزيع ذات الحدين

تابع : تمارين على توزيع ذات الحدين

❾ أُجريت دراسة في أحد المدارس ، فتبيّن أن 45 % من الطلبة يمتلكون آلة حاسبة بيانية . إذا تم اختيار 5 منهم بشكل عشوائي ، وتم سؤالهم عما كانوا يمتلكون آلة حاسبة بيانية .
إذا مثّل المتغير العشوائي X عدد الطلاب الذين يمتلكون آلة حاسبة بيانية .

A) هل التجربة ذات حدين . نعم تجربة ذات حدين (تحقق شروط التجربة ذات الحدين الأربعة)

B) كوّن التوزيع الاحتمالي ذي الحدين للمتغير X ، ومثّله بالأعمدة .

$P(x) = nC_x\, p^x\, q^{n-x}$

$n = 5\ ,\ p = 0.45\ ,\ q = 1 - 0.45 = 0.55$

$P(0) = 5C_0\,(0.45)^0\,(0.55)^5 \approx 0.05$, $P(1) = 5C_1\,(0.45)^1\,(0.55)^4 \approx 0.21$

$P(2) = 5C_2\,(0.45)^2\,(0.55)^3 \approx 0.34$, $P(3) = 5C_3\,(0.45)^3\,(0.55)^2 \approx 0.28$

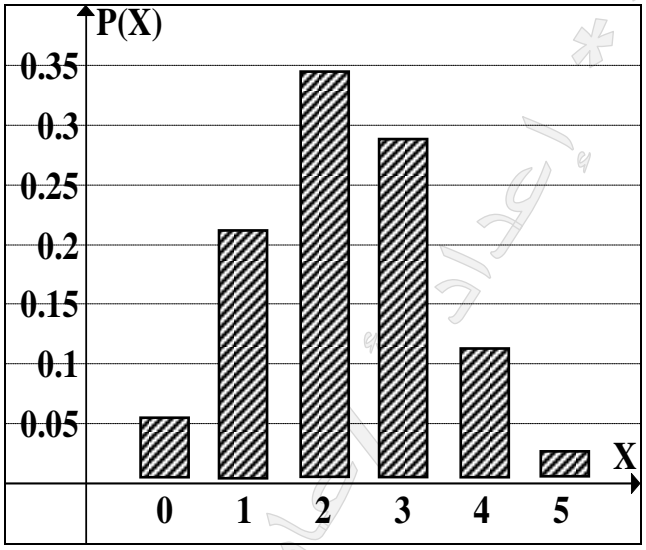
$P(4) = 5C_4\,(0.45)^4\,(0.55)^1 \approx 0.11$, $P(5) = 5C_5\,(0.45)^5\,(0.55)^0 \approx 0.02$

التوزيع الاحتمالي والتمثيل :

التوزيع الاحتمالي

X	$P(X)$
0	0.05
1	0.21
2	0.34
3	0.28
4	0.11
5	0.02

التمثيل بالأعمدة



C) أوجد الوسط لهذا التوزيع ، وفسّر إجابتك ؟

$\mu = n \cdot p$

$\mu = 5 \times 0.45$

$\mu = 2.25$

وهذا يعني أن طالبين تقريباً من أصل 5 طلاب يمتلكون يمتلكون آلة حاسبة بيانية

D) أوجد التباين ، والانحراف المعياري لهذا التوزيع .

التباين : $\sigma^2 = n\,p\,q = 5 \times 0.45 \times 0.55 \approx 1.24$

الانحراف المعياري : $\sigma = \sqrt{n\,p\,q} = \sqrt{1.2375} \approx 1.11$

E) أوجد احتمال أن يكون أقل من 3 طلبة من الذين تم مقابلتهم يمتلكون آلة حاسبة بيانية .

$P(X < 3) = P(0) + P(1) + P(2)$

$P(X < 3) \approx 0.05 + 0.21 + 0.34 = 0.6 = 60\ \%$

مملكة البحرين

وزارة التربية والتعليم

قسم الامتحانات الداخلية

امتحان نهاية الفصل الدراسي الأول للتعليم الثانوي للعام الدراسي 2024/2023 م

اسم المقرر: **الرياضيات 5** المسار: **توحيد المسارات**

رمز المقرر: **ريض 365** الزمــن: **ساعة ونصف**

ملاحظات: ❐ أجب عن جميع أسئلة هذا الامتحان وعددها 4 أسئلة، مع توضيح خطوات الحل في جميع الأسئلة ماعدا السؤال الأول.
❐ القياسات الموضحة على الرسومات والأشكال الواردة في هذا الامتحان تقريبية.

السؤال الأول:

12

اختر رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي، علمًا بأنه توجد إجابة صحيحة واحدة لكل فقرة:

1) إذا كان $\boldsymbol{a} = \langle -2, 3 \rangle$, $\boldsymbol{b} = \langle 4, 0 \rangle$ ، فأي مما يأتي يمثل $2\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ ؟

(A) $\langle -10, 3 \rangle$ **(C)** $\langle 0, 6 \rangle$
(B) $\langle 6, -3 \rangle$ **(D)** $\langle 10, -3 \rangle$

2) ما قياس زاوية اتجاه المتجه $-4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ مع المحور الموجب؟

(A) $37°$ **(C)** $217°$
(B) $143°$ **(D)** $323°$

3) إذا كان المتجهان $\mathbf{u} = \langle 3, 6 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle k, 4 \rangle$ متعامدين ، فما قيمة k ؟

(A) 2 **(C)** 8
(B) -2 **(D)** -8

4) ما الإحداثيات الديكارتية للنقطة التي إحداثياتها القطبية $\left(12, \frac{7\pi}{6}\right)$ ؟

(A) $(-6\sqrt{3}, -6)$ **(C)** $(6\sqrt{3}, 6)$
(B) $(-6, -6\sqrt{3})$ **(D)** $(6, 6\sqrt{3})$

almanahj.com/bh موقع المناهج البحرينية 2026 2025

يُتبع ≪

5) دفع شخص عربة من أسفل أرض منحدرة إلى الأعلى بقوة مقدارها $128\ \mathrm{N}$.إذا كانت زاوية ميل المنحدر $30°$ فما الشغل الذي يبذله الشخص ليدفع العربة مسافة $2\ \mathrm{m}$ ؟

(A) 128 جول تقريبًا
(B) 148 جول تقريبًا
(C) 222 جول تقريبًا
(D) 256 جول تقريبًا

6) ما الصورة القطبية للمعادلة الديكارتية $y = \sqrt{3}\ x$ ؟

(A) $r = \sqrt{3}\cos\theta$
(B) $r = \sqrt{3}\sin\theta$
(C) $\theta = \frac{\pi}{3}$
(D) $\theta = \frac{\pi}{6}$

7) ما ناتج $4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ ؟

(A) $8\,i$
(B) $16\,i$
(C) $\sqrt{3} - i$
(D) $4\sqrt{3} - 4\,i$

8) تُبين دراسة إحصائية أن 64% من طلاب إحدى الجامعات يمتلكون سيارات خاصة، إذا تم اختيار 100 طالب بطريقة عشوائية من طلاب هذه الجامعة وسؤالهم إن كانوا يمتلكون سيارات خاصة ، فما قيمة الوسط لهذه الدراسة؟

(A) 4.8
(B) 8
(C) 23.04
(D) 64

almanahj.com/bh موقع المناهج البحرينية 2026 2025

يُتبع ≪

السؤال الثاني:

17

1) أوجد مقدار واتجاه محصلة القوى الثلاث الآتية التي تؤثر على جسم. حيث القوة الأولى 10 N باتجاه S 30°E ، والقوة الثانية 12 N باتجاه 045° ، والقوة الثالثة 6 N باتجاه 120° مع الأفقي.

الحل

10

2) أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{v} = \langle 9, -4 \rangle$، $\mathbf{u} = \langle -1, -2 \rangle$ ، مقربًا الناتج إلى أقرب درجة.

الحل

7

almanahj.com/bh
موقع المناهج البحرينية

يُتبع ≪

السؤال الثالث: 17

1) يقوم مراقب حركة الطيران بمراقبة طائرتين على الارتفاع نفسه، إذا كانت إحداثيات موقعي الطائرتين $A(5,310°)$ ، $B(6,345°)$ ، وتقاس المسافة المتجهة بالأميال، فما المسافة التقريبية بين الطائرتين؟

الحل

4

2) اكتب المعادلة الأتية على الصورة القطبية: $x^2 + (y-3)^2 = 9$

الحل

5

3) أوجد ناتج $(2\sqrt{3} + 2i)^6$ وعبّر عنه بالصورة الديكارتية.

الحل

8

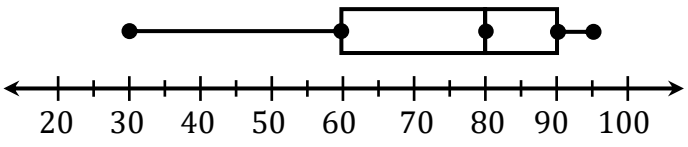
almanahj.com/bh 2026 2025 موقع المناهج البحرينية

يُتبع

السؤال الرابع:

14

1) يُبين التمثيل بالصندوق وطرفيه المجاور درجات طلاب في اختبار لمادة الرياضيات.



a) استعمل الصندوق وطرفيه أعلاه؛ لوصف شكل التوزيع مع تبرير إجابتك.

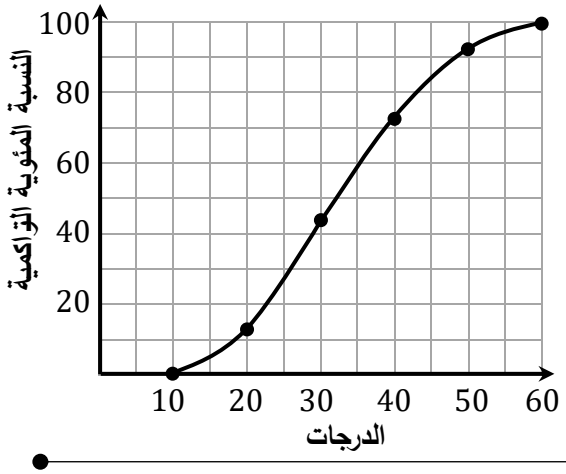
الحل

5/5

b) لخص تمركز البيانات وتشتتها باستعمال المقاييس الخمسة.

الحل

2) يُبين المنحنى المئيني المجاور درجات الطلاب في أحد الاختبارات قدّر الرتبة المئينية للدرجة 45 ضمن التوزيع، وفسر معناها.



الحل

3/3

3) يُبين استطلاع للرأي أن 75 % من سكان إحدى المدن يستعملون المواصلات العامة في الذهاب إلى أعمالهم. تم اختيار 10 أشخاص من سكان هذه المنطقة عشوائيًا وسؤالهم هل يستعملون المواصلات العامة للذهاب إلى أعمالهم؟ ما احتمال أن يُجيب أكثر من 8 أشخاص منهم بنعم؟

الحل

6

almanahj.com/bh
موقع المناهج البحرينية

﴿ انتهت الأسئلة ﴾