نموذج إجابة

مملكة البحرين
وزارة التربية والتعليم
إدارة الامتحانات/ قسم الامتحانات

يعتمد للتصحيح 1/18

امتحان نهاية الفصل الأول للتعليم الثانوي للعام الدراسي 2015 - 2016 م

اسم المقرر : الرياضيات 6 — المسار : توحيد المسارات

رمز المقرر: ريض 366 — الزمن : ساعتان

أجب عن جميع الأسئلة الآتية وعددها (7) ، مبينًا خطوات حلّك في جميع الأسئلة ما عدا السؤال الأول.

السؤال الأول : اختر رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي ، علمًا بأنه توجد إجابة صحيحة واحدة من بين البدائل الأربع التي تلي كل فقرة .

10 درجات

1) إذا كان $z = 2y + 1$ ، وكان $\frac{dz}{dx} = 10$ ، فما قيمة $\frac{dy}{dx}$ عندما $z = 3$ ؟

(A 5 (B 10 (C 20 (D 25

2) إذا كان $y = \sin x$ ، فما قيمة $\frac{d^4y}{dx^4}$ عندما $x = \frac{\pi}{2}$ ؟

(A -1 (B 0 (C $\frac{-1}{2}$ (D 1

3) قذف جسم رأسيًا إلى أعلى، وكانت العلاقة بين ارتفاعه s بالأمتار عن سطح الأرض والزمن t بالثواني هي $s = 128t - 16t^2$. بعد كم ثانية يصل الجسم إلى أقصى ارتفاع ؟

(A 256 sec (B 16 sec (C 4 sec (D 3 sec

4) إذا كان $y = \int_a^5 \sqrt{x^3+1}\ dx$ ، فما قيمة $\frac{dy}{dx}$ عندما $a = 1$ ؟

(A $\sqrt[5]{3}$ (B 1 (C 0 (D 2

5) إذا كانت مساحة سطح المنطقة المحصورة بين منحنى f_1 والمحور x في $[a, b]$ تساوي 3 وحدات مربعة ،

وكانت مساحة سطح المنطقة المحصورة بين منحنى f_2 والمحور x في $[a, b]$ تساوي 5 وحدات مربعة ،

وكان $f_2 \geq f_1 > 0$ لكل x في $[a, b]$ ، فما قيمة $\int_a^b (f_1 - f_2)(x)\ dx$ ؟

(A 2 (B -2 C -3 (D 5

13 درجة

السؤال الثاني:

1) أوجد معادلة المماس لمنحنى $2x^2 - y^2 = 3xy + 8$ ، عند $(3,1)$ الواقعة على المنحنى.

الحل:

6

$$4x - 2y\frac{dy}{dx} = 3x\frac{dy}{dx} + 3y \quad ②$$

$$\frac{dy}{dx}(3x + 2y) = 4x - 3y \quad ①$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x - 3y}{3x + 2y} \quad ①$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,1)} = \frac{12 - 3}{9 + 2} = \frac{9}{11} \quad ①$$

∴ معادلة المماس هي

$$y - 1 = \frac{9}{11}(x - 3) \quad ①$$

2) إذا كان $g'(x) = x^2$ ، $f(x) = \sin 4x$ ، فأوجد $(g \circ f)'(\frac{\pi}{16})$.

الحل:

7

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x) \quad ②$$

$$= (\sin 4x)^2 (4\cos 4x) \quad ②$$

$$(g \circ f)'(\frac{\pi}{16}) = (\sin\frac{\pi}{4})^2 (4\cos\frac{\pi}{4}) \quad ①$$

$$= (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ①$$

$$= \frac{2}{4} \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \sqrt{2} \quad ①$$

مملكة البحرين - وزارة التربية والتعليم - اللجنة الفنية - إدارة الامتحانات

18 درجة

السؤال الثالث:

1) يتسرب الهواء من كرة بمعدل $300\ cm^3/\sec$. أوجد معدّل التغيّر في طول نصف قطر الكرة عندما يكون طول قطرها يساوي $30\ cm$.

6

علمًا بأن حجم الكرة التي طول نصف قطر قاعدتها r يعطى بالعلاقة : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

الحل:

$$\frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \quad 2$$

$$-300 \ (1) = 4\pi (15^2) \ (1) \ \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{-300}{4\pi \times 225} \quad 1$$

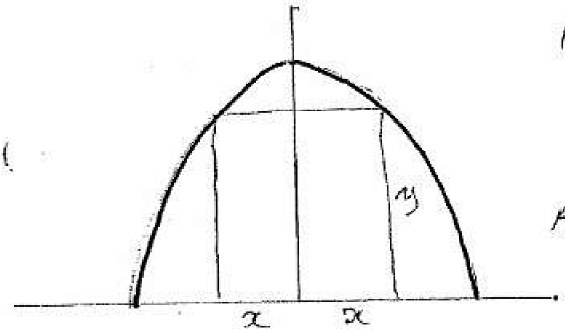
$$= \frac{-1}{3\pi} \ cm/sec \quad 1$$

مملكة البحرين - وزارة التربية والتعليم
اللجنة الفنية
إدارة الامتحانات

2) أوجد بُعديّ المستطيل الذي مساحة سطحه أكبر ما يمكن ، والذي يمكن رسمه فوق المحور x بحيث تكون إحدى قاعدتيه على المحور x، والرأسان الآخران على منحنى $f(x) = 24 - x^2$.

12

الحل:



$$A = 2xy \quad 2$$

$$= 2x(24 - x^2) \quad 1$$

$$= 48x - 2x^3$$

$$A' = 48 - 6x^2 \quad 2$$

$$48 - 6x^2 = 0 \quad 1$$

$$x^2 = 8$$

$$x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2} \quad 1$$

وبما أن x تمثل طول فإن $x = 2\sqrt{2}$ (1)

وعندها $y = 24 - 8 = 16$ (1)

$$A'' = -12x \quad 1$$

$$A''\Big|_{x=2\sqrt{2}} = -24\sqrt{2} < 0 \quad 1$$

(1) ∴ مساحة المستطيل أكبر ما يمكن عندما $x = 2\sqrt{2}$ ، $y = 16$

أي أن الطول $= 16$ والعرض $= 4\sqrt{2}$

18 درجة

السؤال الرابع:

إذا كانت $f(x) = (1-x)^3$،

1) أوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f (إن وجدت).

2) أوجد القيم العظمى والقيم الصغرى المحلية للدالة f (إن وجدت).

3) أوجد فترات التقعّر إلى أعلى وفترات التقعّر إلى أسفل ونقاط الانقلاب للدالة f (إن وجدت).

4) مثّل الدالة f بيانيًا بصورة تقريبية في المستوى الإحداثي أدناه.

الحل:

$f'(x) = 3(-1)(1-x)^2$ (1)

$-3(1-x)^2 = 0$ (1) $\Longrightarrow x = 1$ (1)

إشارة f' (3)

$- - - - - \quad 1 \quad - - - - -$

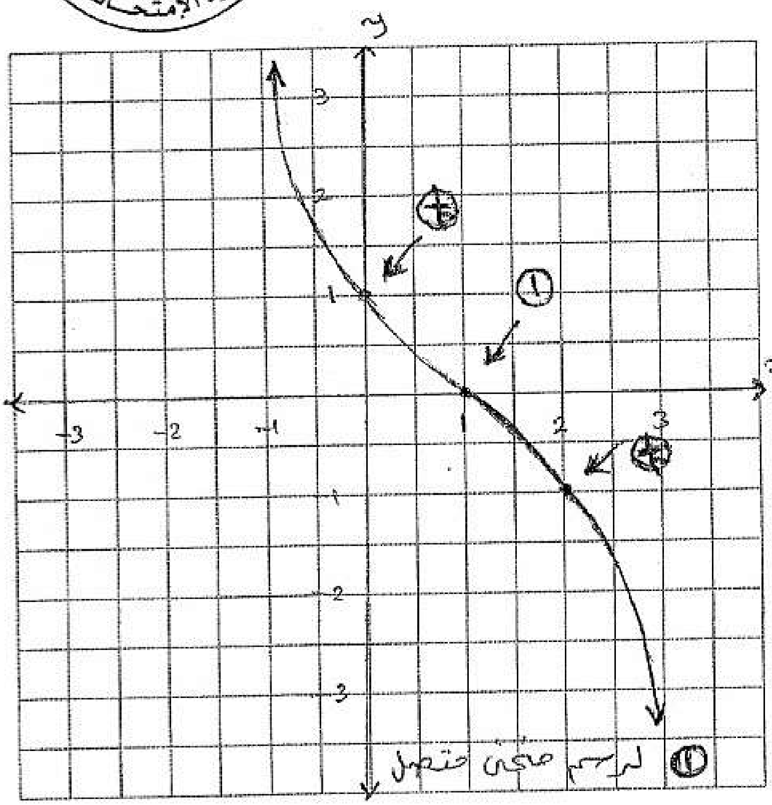
$f''(x) = -3(2)(-1)(1-x)$ (1)

$= 6(1-x)$

$6(1-x) = 0$ (1) $\Longrightarrow x = 1$ (1)

إشارة f'' (3)

$+ + + + + \quad 1 \quad - - - - - -$



1) f متناقصة في $(-\infty, \infty)$ (1)

2) لا يوجد قيم عظمى أو قيم صغرى (1)

(لا يوجد قيم قصوى)

3) f مقعر إلى أعلى في $(-\infty, 1)$ (1)

ومقعر إلى أسفل في $(1, \infty)$ (1)

يوجد نقطة انعطاف هي $(1, f(1)) = (1, 0)$ (1)

ويمر فيها، ويمر في $(2, -1)$ ، $(0, 1)$

16 درجة

السؤال الخامس:

11 1) أوجد كلاً مما يأتي:

A) 6 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x (\cos^2 x) dx$ ①

الحل:

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x (1 - \sin^2 x) dx$ ①

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \cos x \sin^2 x) dx$ ①

$= \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = (1 - \frac{1}{3}) - (0) = \frac{2}{3}$ ① ① ①

B) 5 $\int_3^4 \frac{x}{\sqrt{25-x^2}} dx = \int_3^4 x (25 - x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$ ①

الحل:

$= -\frac{1}{2} \int_3^4 -2x (25 - x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$ ①

$= \frac{-1}{2} \frac{(25 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \Big]_3^4 = -\sqrt{25 - x^2} \Big]_3^4$ ① ①

$= -(3 - 4) = 1$ ①

5 2) يتحرك جسيم من السكون في خط مستقيم بدءًا من نقطة ثابتة O ، بحيث كان تسارعه $a \ m/\sec^2$ يعطى بالعلاقة $a = 4\sin 2t$ ، حيث t الزمن بالثواني . أوجد سرعة الجسم عند $t = \frac{\pi}{2}\sec$.

الحل:

$v = \int a \, dt$ ①

$= \int 4 \sin 2t \, dt = -2 \cos 2t + c$ ①

$0 = -2 \cos(0) + c \Rightarrow c = 2$ ① $(v = 0 \text{ عند } t = 0)$

$\therefore v = -2 \cos 2t + 2$ ①

$v\Big|_{t=\frac{\pi}{2}} = -2 \cos \pi + 2 = 4 \ m/sec$ ½ ½

14 درجة

السؤال السادس:

1) إذا كانت $f(x)=3x|x-2|, x\in[-3,3]$ ، فاحسب $\int_{-1}^{3} f(x)dx$

الحل:

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ 2-x, & x < 2 \end{cases} \quad ①$$

$$3x|x-2| = \begin{cases} 3x^2-6x, & x \geq 2 \\ 6x-3x^2, & x<2 \end{cases} \quad ①$$

$$\therefore \int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{2} (6x-3x^2)\,dx \; ① + \int_{2}^{3} (3x^2-6x)\,dx \; ①$$

$$= 3x^2 - x^3 \Big]_{-1}^{2} \; ① + x^3 - 3x^2 \Big]_{2}^{3} \; ①$$

$$= (12-8)-(3+1)+(27-27)-(8-12)$$

$$= 4 \quad ①$$

2) أوجد مساحة سطح المنطقة المحصورة بين منحنى $y=2-x^2$ ، والمستقيم $y=-x$.

الحل:

$$2-x^2 = -x \quad ①$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x-2) = 0 \quad ①$$

$$\Rightarrow x = -1 \; \tfrac{1}{2} \quad \text{or} \quad x = 2 \; \tfrac{1}{2}$$

$$\therefore A = \int_{-1}^{2} [(2-x^2)-(-x)]\,dx \quad ①$$

$$= \int_{-1}^{2} (2-x^2+x)\,dx \quad ①$$

$$= 2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \Big]_{-1}^{2} \quad ①$$

$$= \left(4-\frac{8}{3}+2\right) - \left(-2+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{9}{2} \quad ①$$ (وحدة مربعة)

مملكة البحرين - وزارة التربية والتعليم - اللجنة الفنية - إدارة الامتحانات

السؤال السابع: 11 درجة

احسب قيمة $\int_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{3}} \frac{18}{x^2+9}\, dx$

الحل:

نعتبر $f(x) = \frac{18}{x^2+9}$ ①

$x = g(\theta) = \sqrt{\frac{9}{1}}\tan\theta = 3\tan\theta$ ①

$dx = g'(\theta) = 3\sec^2\theta\, d\theta$ ①

عندما $x = 3\sqrt{3}$ ، فإن

$3\tan\theta = 3\sqrt{3} \Rightarrow \tan\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$ ①

وعندما $x = \sqrt{3}$ ، فإن ①

$3\tan\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

$\therefore \theta \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ عندما $x \in [\sqrt{3}, 3\sqrt{3}]$

$\therefore \int_{\sqrt{3}}^{3\sqrt{3}} f(x)\,dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{18}{9\tan^2\theta+9} \cdot 3\sec^2\theta\, d\theta$ ④

$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{18}{9(\tan^2\theta+1)} \cdot 3\sec^2\theta\, d\theta$ ①

$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{6}{\sec^2\theta} \cdot \sec^2\theta\, d\theta$ ①

$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 6\, d\theta$ ① $= 6\theta \Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$ ① $= 6(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}) = \pi$ ①

(انتهت الإجابة)

تراعى الحلول الأخرى إن وجدت

مملكة البحرين - وزارة التربية والتعليم * إدارة الامتحانات * اللجنة الفنية