مذكرة ريض263 العمليات على كثيرات الحدود

نشاط (1) : العمليات على كثيرات الحدود

الأهداف :

1- تعريف وحيدة الحد وكثيرات الحدود ودرجتها ، 2- تحديد التعبير كونه كثيرة حدود من عدمه

3- تبسيط وإجراء العمليات على تعابير تتضمن قوى ، 4- تطبيق كثيرات الحدود لحل تمارين لفظية وحياتية

تذكر (قوانين الأسس)

بشرط المقامات معرفة

$1)\ x^m . x^n = x^{m+n}$	$2)\ \dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$
$3)\ (x^m)^n = x^{m.n}$	
$4)\ (x.y)^n = x^n . y^n$	$5)\ (\dfrac{x}{y})^n = \dfrac{x^n}{y^n}$
$6)\ x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$	$7)\ \left(\dfrac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\dfrac{y}{x}\right)^n$
$8)\ x^0 = 1$	
الصورة الجذرية	الصورة الأسية
$\sqrt[m]{x^n}$	$x^{\frac{n}{m}}$

وحيدة الحد

تكون إما	مثال
عدد	$5 , -\frac{1}{2} , \sqrt{3} , ..$
متغير أسه عدد طبيعي	x^2 , x^5 , y^7
تعبير يتكون من ناتج ضرب ثابت في متغير أو أكثر وأسسها أعداد صحيحة موجبة	$5x , -3y^2$ $6xy$ $\frac{1}{2}mn^3$

درجة وحيدة الحد : مجموع الأسس لجميع متغيراتها

تبسيط وحيدة الحد : أنظر مفهوم أساسي ص13

ثنائية الحد : هي مجموع أو فرق وحيدتي حد

كثيرة الحدود

تعريف	هي وحيدة حد أو مجموع وحيدات حد
درجتها	هي درجة وحيدة الحد ذات أكبر درجة

تمارين (1) : حدد إذا كان كل تعبير فيما يأتي كثيرة حدود أو لا ، وإن كان كذلك فاذكر درجتها :

التعبير	نعم أم لا	درجتها
$1)\ 5x^4 - 3x^3 + 7x - 1$	✓	4
$2)\ \frac{2}{3}x^5 + 3y$	✓	5
$3)\ \frac{6}{x} + 3xy - 10$	لا	لأنه تحوي الحد $6x^{-1}$ أسه سالب
$4)\ 2x^3y - 3yx + 7x$	نعم	4
$5)\ \sqrt{x} + 7$	لا	لأنه $x^{\frac{1}{2}}$
$6)\ \frac{1}{x^{-2}y^{-4}} - 3x^5 \to x^2y^4$	نعم	6
$7)\ 5x^2 - 3$	نعم	2
$8)\ 0.5 \to 0.5x^0$	نعم	0

الكتاب | 5-8 صـــ 10 | 18-21 صـــ 10

تمارين (2) : بسط التعابير التالية مفترضاً أن أي من المتغيرات لا يساوي الصفر :

$1)\ (-2x^3y^2)^5 = (-2)^5(x^3)^5(y^2)^5 = -32x^{15}y^{10}$

$2)\ \left(\frac{a}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{a}\right)^3 = \frac{64}{a^3}$

$3)\ (2x^{-2}y^3m)(-5x^3y^{-6}m^{-1})$

$= -10x^{-2+3}y^{3-6}m^{1-1}$

$= -10x\,y^{-3}(1) = \frac{-10x}{y^3}$

4) $\dfrac{(2x^2)^3}{12x^4} = \dfrac{8x^6}{12x^4} = \dfrac{2}{3}x^2$

5) $\left(\dfrac{x^{-2}y^3}{4xy^{-4}}\right) = \dfrac{x^{-2-1}y^{3-(-4)}}{4} = \dfrac{x^{-3}y^7}{4} = \dfrac{y^7}{4x^3}$

6) $\dfrac{3c^2d(2cd^2)^3}{8c^5d^{-3}} = \dfrac{3c^2d(8c^3d^6)}{8c^5d^{-3}}$

$= \dfrac{24\,c^{2+3-5}\,d^{1+6+3}}{8} = 3c^0d^{10} = 3d^{10}$

الكراسة	17-1 صـ 4

7) $(3x-4y)+(6y-4x)$

$= -x+2y$

$\begin{array}{r} 3x-4y \\ -4x+6y \\ \hline -x+2y \end{array}$

8) $(x^2-5x+2)-(3x^2+x-1)$

$= -2x^2-6x+3$

$\begin{array}{r} x^2-5x+2 \\ (-)\,3x^2+x-1 \\ \hline \end{array}$

9) $\dfrac{4}{3}(6x^2+9x-12) = 8x^2+12x-16$

10) $a^{-3}b^2\left(ba^3+b^{-1}a^2+\dfrac{a}{b^2}\right)$ ab^{-2}

$= a^0b^3 + a^{-1}b + a^{-2}b^0 = b^3 + \dfrac{b}{a} + \dfrac{1}{a^2}$

11) $(x^2-3y)(x^2+3y) = x^4 - 9y^2$

فرق بين مربعين

12) $(2x^2-4x+5)(3x-1)$

$= 6x^3 - 2x^2 - 12x^2 + 4x + 15x - 5$

$= 6x^3 - 14x^2 + 19x - 5$

$2x^2 \to 3x, -1$; $-4x \to 3x, -1$; $+5 \to 3x, -1$

الكراسة	صـ 10	18 - 20

تمرين (3) :

استأجر سلمان عاملين لطلاء منزله ، حيث تقاضى الأول BD1.2 والثاني BD1.1 عن كل ساعة عمل .
اذا علمت أن المنزل احتاج الى 15 ساعة عمل لطلائه
اولا : اكتب كثيرة حدود تمثل تكلفة طلاء المنزل اذا عمل الأول مدة x ساعة .

الحل:

	الأول	الثاني
المبلغ	1.2	1.1
عدد الساعات	x	$15-x$

التكلفة:

$1.2x + 1.1(15-x)$

$= 1.2x + 16.5 - 1.1x$

$= 0.1x + 16.5$

ثانيا : احسب تكلفة طلاء المنزل اذا عمل الثاني 5ساعات

الأول: ١٠ ساعات ، الثاني: 5 ساعات

نعوض عن $x=10$ { التكلفة $= 0.1(10)+16.5$

$= 17.5$ BD

تمرين (4) : BD90000؟

استثمر فيصل مبلغ في مشروعين أحدهما صناعي نسبة ربحه السنوي 18% والأخر عقاري نسبة ربحه السنوي 42% . اذا كانت x تمثل المبلغ الذي استثمره فيصل في المشروع العقاري فاكتب كثيرة حدود تمثل تكلفة ربحه في المشروعين بعد عام واحد .

الحل:

العقاري : x

الصناعي : $90000-x$

الربح:

$\dfrac{18}{100}(90000-x) + \dfrac{42}{100}x$

$= 16200 - 0.18x + 0.42x$

$= 16200 + 0.24x$

الكراسة	22 صـ 4

نشاط (2) : قسمة كثيرات الحدود - 1

الأهداف :

1- قسمة كثيرة حدود على وحيدة حد ، 2- قسمة كثيرة حدود على كثيرة حدود أخرى باستخدام القسمة المطولة

3- تطبيق قسمة كثيرات الحدود لحل تمارين لفظية

أولاً : قسمة كثيرة حدود على وحيدة حد	نستخدم القاعدة الرياضية : $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$

تمارين (1) : بسط كلاً مما يلي :

(1) $\frac{9n^3p^3 - 18n^2p^2 + 21n^2p^2}{3n^2p^2}$

$= \frac{9n^3p^3}{3n^2p^2} - \frac{18n^2p^2}{3n^2p^2} + \frac{21n^2p^2}{3n^2p^2}$

$= 3np - 6 + 7 = 3np + 1$

(2) $(20c^4d^2f - 16cdf^2 + 4cdf) \div (4cdf)$

$= \frac{20c^4d^2f}{4cdf} - \frac{16cdf^2}{4cdf} + \frac{4cdf}{4cdf}$

$= 5c^3d - 4f + 1$

(3) $(18x^2y + 27x^3y^2z + 6y)(3xy)^{-1}$

$= \frac{18x^2y + 27x^3y^2z + 6y}{3xy} = 6x + 9x^2yz + \frac{6y}{3xy} = 6x + 9x^2yz + \frac{2}{x}$

ثانياً : القسمة المطولة (خوارزمية القسمة) :

تمارين (2) : استعمل القسمة المطولة (خوارزمية القسمة) لإيجاد ناتج :

(1) $(2x^3 + 3x^2 - 4x + 15) \div (x + 3)$

الحل :

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 - 3x + 5 \\
\hline
x+3 & 2x^3 + 3x^2 - 4x + 15 \\
(-) & 2x^3 + 6x^2 \\
\hline
 & -3x^2 - 4x + 15 \\
(-) & -3x^2 - 9x \\
\hline
 & 5x + 15 \\
(-) & 5x + 15 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

الناتج هو

$2x^2 - 3x + 5 + \frac{0}{x+3}$

$= 2x^2 - 3x + 5$

(2) $(2x^3 + 6x + 152)(x + 4)^{-1}$

الحل :

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 - 8x + 38 \\
\hline
x+4 & 2x^3 \quad + 6x + 152 \\
(-) & 2x^3 + 8x^2 \\
\hline
 & -8x^2 + 6x + 152 \\
(-) & -8x^2 - 32x \\
\hline
 & 38x + 152 \\
(-) & 38x + 152 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

الناتج

$2x^2 - 8x + 38$

(3) $(a^2 - 8a - 26) \div (2 + a)$

الحل

$$a - 10$$
$$a + 2 \,\big)\, a^2 - 8a - 26$$
$$(-)\; a^2 + 2a$$
$$-10a - 26$$
$$(-)\; -10a - 20$$
$$-6$$

الناتج :

$$a - 10 - \frac{6}{a + 2}$$

(4) $\dfrac{y^4 - 3y^2 - 18}{-2 + y}$

الحل

$$y^3 + 2y^2 + y + 2$$
$$y - 2 \,\big)\, y^4 \quad - 3y^2 \quad - 18$$
$$(-)\; y^4 - 2y^3$$
$$2y^3 - 3y^2 \quad - 18$$
$$(-)\; 2y^3 - 4y^2$$
$$y^2 \quad - 18$$
$$(-)\; y^2 - 2y$$
$$2y - 18$$
$$(-)\; 2y - 4$$
$$-14$$

الناتج :

$$y^3 + 2y^2 + y + 2 \quad \frac{-14}{y - 2}$$

(5) $(2b^3 - 6b^2 + 8b) \div (2b + 2)$

الحل

$$b^2 - 4b + 8$$
$$2b + 2 \,\big)\, 2b^3 - 6b^2 + 8b$$
$$(-)\; 2b^3 + 2b^2$$
$$-8b^2 + 8b$$
$$(-)\; -8b^2 - 8b$$
$$16b$$
$$(-)\; 16b + 16$$
$$-16$$

الناتج :

$$b^2 - 4b + 8 \quad - \frac{\overset{8}{\cancel{16}}}{2b + 2 \rightarrow \cancel{2}(b+1)}$$

$$= b^2 - 4b + 8 - \frac{8}{b + 1}$$

تمرين (3) : تعطى مساحة سطح مستطيل بالتعبير $(2x^2 - 11x + 15)\, ft^2$.
إذا كان طول المستطيل $(2x - 5)\, ft$ فأوجد عرضه .

الحل: المساحة = الطول × العرض

$$x - 3$$
$$2x - 5 \,\big)\, 2x^2 - 11x + 15$$
$$(-)\; 2x^2 - 5x$$
$$-6x + 15$$
$$(-)\; -6x + 15$$
$$0$$

العرض هو $(x - 3)ft$

نشاط (3) : قسمة كثيرات الحدود - 2

الأهداف :

1- قسمة كثيرة حدود على كثيرة حدود أخرى بإستخدام القسمة التركيبية ، 2- تطبيق القسمة التركيبية لحل مسائل لفظية

القسمة التركيبية : هي طريقة مبسطة لقسمة كثيرة حدود على ولا تصلح إلا إذا كان المقسوم عليه من الدرجة الأولى، وتنتج كثير حدود أقل بدرجة من درجة المقسوم

ملاحظة : يجب ترتيب الحدود بحسب الدرجات تنازليًا، ووضع صفر محل الحدّ غير الموجود .

تمارين (1) : استعمل القسمة التركيبية (خوارزمية القسمة) لإيجاد الناتج لكل مما يأتي :

(1) $(x^3 - 4x^2 + 6x - 4) \div (x - 2)$

الحل :

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

2	1	-4	6	-4
	↓	2	-4	4
	1	-2	2	$\boxed{0}$ → الباقي

1 = معامل x المقسوم عليه

الناتج هو :

$x^2 - 2x + 2$

(3) $\dfrac{2x^2 + 4x^4 - 4x + 12}{x + 2}$ → رتب أولاً

الحل :

$\dfrac{4x^4 + 2x^2 - 4x + 12}{x + 2}$ $\left\}\begin{array}{l} x + 2 = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$

-2	4	0	2	-4	12
	↓	-8	16	-36	80
	4	-8	18	-40	$\boxed{92}$

الناتج هو

$4x^3 - 8x^2 + 18x - 40 + \dfrac{92}{x+2}$

(2) $(z^4 - 3z^3 + 2z^2 - 4z + 4) \div (z - 1)$

الحل

$z - 1 = 0 \Rightarrow z = 1$

1	1	-3	2	-4	4
	↓	1	-2	0	-4
	1	-2	0	-4	$\boxed{0}$

الناتج هو

$z^3 - 2z^2 - 4$

(4) $(6b^4 - 8b^3 + 12b - 14).(b - 2)^{-1}$

الحل

2	6	-8	0	12	-14
	↓	12	8	16	56
	6	4	8	28	$\boxed{42}$

الناتج هو

$6b^3 + 4b^2 + 8b + 28 + \dfrac{42}{b-2}$

(5) $(4x^3-6x^2+4x-1)\div(2x-1)$

الحل: $2x-1=0 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{1}{2} & 4 & -6 & 4 & -1 \\ & \downarrow & 2 & -2 & 1 \\ \hline & 4 & -4 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

نق ÷ 2

معامل x بالمقسوم = 2

الناتج هو $2x^2-2x+1$

(6) $(8x^4-4x^2+x+4).(1+2x)^{-1}$

الحل: $1+2x=0 \Rightarrow 2x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{c|ccccc} -\frac{1}{2} & 8 & 0 & -4 & 1 & 4 \\ & \downarrow & -4 & 2 & 1 & -1 \\ \hline & 8 & -4 & -2 & 2 & \boxed{3} \end{array}$$

نق ÷ 2

معامل x بالمقسوم عليه = 2

الناتج هو $4x^3-2x^2-x+1+\frac{3}{1+2x}$

(7) $(6x^2-3x+9)\div(3x-2)$

الحل: $3x-2=0 \Rightarrow 3x=2 \Rightarrow x=\frac{2}{3}$

$$\begin{array}{c|ccc} \frac{2}{3} & 6 & -3 & 9 \\ & \downarrow & 4 & \frac{2}{3} \\ \hline & 6 & 1 & \boxed{\frac{29}{3}} \end{array}$$

نق ÷ 3

الناتج هو $2x+\frac{1}{3}+\frac{\frac{29}{3}}{3x-2}=2x+\frac{1}{3}+\frac{29}{9x-6}$

(7) $(15b^3+8b^2-21b+6)\div(5b-4)$

الحل: $5b-4=0 \Rightarrow 5b=4 \Rightarrow b=\frac{4}{5}$

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{4}{5} & 15 & 8 & -21 & 6 \\ & \downarrow & 12 & 16 & -4 \\ \hline & 15 & 20 & -5 & \boxed{2} \end{array}$$

نق ÷ 5

الناتج هو $3b^2+4b-1+\frac{2}{5b-4}$

تمرين (2) - الكتاب 30 صـ 23:

يرتبط فرق جهد التيار V بشدة التيار I والقدرة P بالمعادلة $V=\frac{P}{I}$. إذا كانت القدرة معطاة بالتعبير $P=t^3+9t^2+26t+24$، وشدة التيار $I=t+4$. إكتب تعبير بأبسط صورة يمثل فرق الجهد

الحل: $V=\frac{P}{I}=\frac{t^3+9t^2+26t+24}{t+4}$

$$\begin{array}{c|cccc} -4 & 1 & 9 & 26 & 24 \\ & \downarrow & -4 & -20 & -24 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore V=t^2+5t+6$

إعداد : أ.عبدالرزاق حسن أحمد

نشاط (4) : دوال كثيرات الحدود

الأهداف :
1- التعريف بكثيرة الحدود في متغير واحد ، 2- تحديد كون التعبير كثيرة حدود في متغير واحد من عدمه
3- إيجاد الدرجة والمعامل الرئيس لكثيرة الحدود في متغير واحد ، 4- إيجاد قيم دوال كثيرات الحدود
5- وصف سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة وتحديد درجتها بيانياً ، 6- وصف سلوك الطرفين جبرياً

كثيرة الحدود في متغير واحد	الصورة القياسية	$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ حيث $a_n \neq 0$		
	أمثلة عليها أنظر الكتاب صـ 27	النوع	مثال	درجتها
		ثابتة	$5 , 6 , 2.5 , \ldots$	صفر
		خطية	$2x+3$	1
		تربيعية	$6x^2-5x+4$	2
	درجتها	قيمة أكبر أس فيها	المعامل الرئيس	معامل أكبر أس فيها

تمارين (1) :

حدد إذا كان كل تعبير كثيرة حدود في متغير واحد أم لا ، وإن كان كذلك حدد درجتها والمعامل الرئيس :

التعبير	الدرجة	المعامل الرئيس
1) $5x^5 - 4x^3 + 7xy - 1$ ليس كثيرة حدود في متغير واحد		
2) 7 نعم	0	7
3) $\frac{1}{2}x^5 - 3x^2 + 8$ نعم	5	$\frac{1}{2}$
4) $x^4 - \frac{5}{x} + 7x^3 + 8x$ لا		
5) $8x^4 + 5x^6 + x + 1$ نعم	6	5
6) $(2y-3)(4-5y^2)$ $= 8y - 10y^3 - 12 + 15y^2$	3	-10

الكتاب	1 - 4 + 13 - 20 صـ 29
الكراسة	1 - 4 صـ 6

تمارين (2) :

أولاً : إذا كانت $f(x) = x^2 - 5x + 8$

فاوجد $f(5a-2) + 3f(2a) - f(2)$

الحل

$f(5a-2) = (5a-2)^2 - 5(5a-2) + 8$

$= 25a^2 - 20a + 4 - 25a + 10 + 8$

$= 25a^2 - 45a + 22$

$3f(2a) = 3[4a^2 - 10a + 8]$

$= 12a^2 - 30a + 24$, $f(2) = 2$

الناتج $= 25a^2 - 45a + 22 + 12a^2 - 30a + 24 - 2$

$= 37a^2 - 75a + 44$

ثانياً : إذا كانت

$c(x) = x^2 - 3 , d(x) = x^3 + 4x - 1$

فاوجد $5c(a+1) - d(3a)$

الحل

$5c(a+1) = 5[(a+1)^2 - 3]$

$= 5[a^2 + 2a + 1 - 3] = 5[a^2 + 2a - 2]$

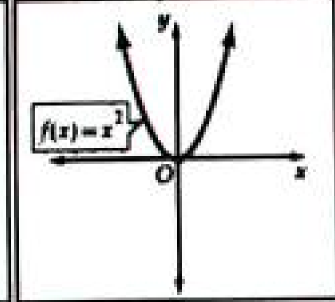
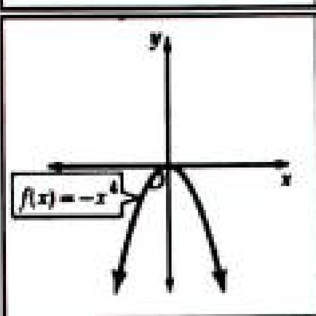
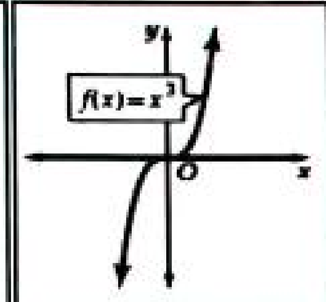
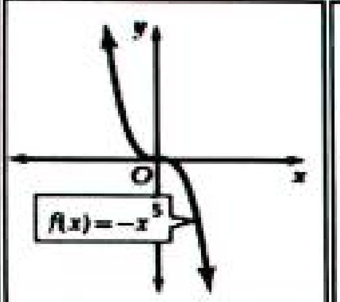
$= 5a^2 + 10a - 10$

$d(3a) = (3a)^3 + 4(3a) - 1 = 27a^3 + 12a - 1$

الناتج $= 5a^2 + 10a - 10 - 27a^3 - 12a + 1$

$= -27a^3 + 5a^2 - 2a - 9$

خواص التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود

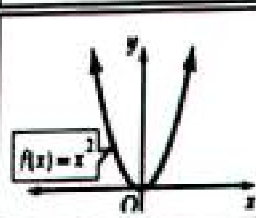
الصورة القياسية : $a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$			المجال : مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathfrak{R}$	
النوع	**زوجية الدرجة**		**فردية الدرجة**	
المعامل الرئيس	موجب $a_n>0$	سالب $a_n<0$	موجب $a_n>0$	سالب $a_n<0$
مثال				
سلوك طرفي التمثيل البياني	$x\to\infty \Rightarrow f(x)\to\infty$ $x\to-\infty \Rightarrow f(x)\to\infty$	$x\to\infty \Rightarrow f(x)\to-\infty$ $x\to-\infty \Rightarrow f(x)\to-\infty$	$x\to\infty \Rightarrow f(x)\to\infty$ $x\to-\infty \Rightarrow f(x)\to-\infty$	$x\to\infty \Rightarrow f(x)\to-\infty$ $x\to-\infty \Rightarrow f(x)\to\infty$
	طرفي الدالة يذهبان باتجاه واحد (مع إشارة a_n)		طرفي الدالة يذهبان باتجاهين مختلفين (إشارة a_n مع ∞)	
المدى	هي الأعداد الحقيقية التي أكبر من أو تساوي القيمة الصغرى	هي الأعداد الحقيقية التي أقل من أو تساوي القيمة العظمى	مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathfrak{R}$	

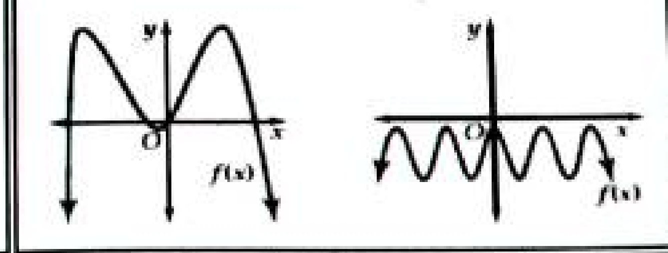
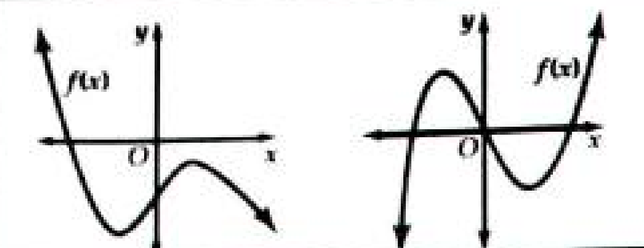
أصفار الدالة الحقيقية

تعريف: هي الإحداثي x لنقطة تقاطع تمثيل البياني للدالة مع محور X

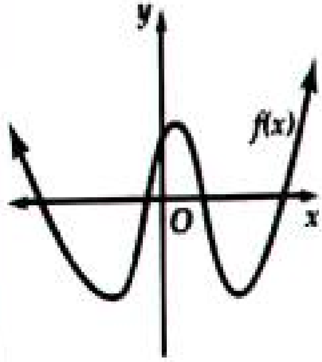
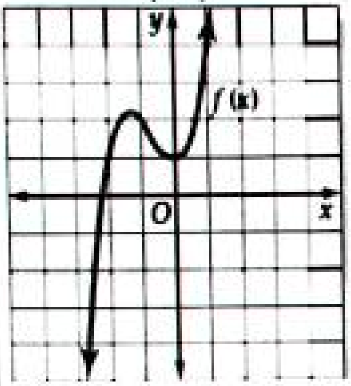
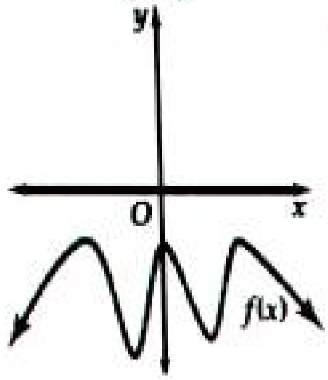
ملاحظة: اذا قطع التمثيل البياني للدالة للمحور X فإنه يعطينا أكبر عدد ممكن من الأصفار لهذه الدالة، وهذا يرتبط بدرجة الدالة بشكل مباشر، فدالة الدرجة الخامسة قد تحتوي على 5 أصفار حقيقية (أي تقطع المحور X خمس مرات) وهذا هو أكبر عدد مكن وليس شرطاً أن تقطع بهذا العدد
أنظر الكتاب صـ 27

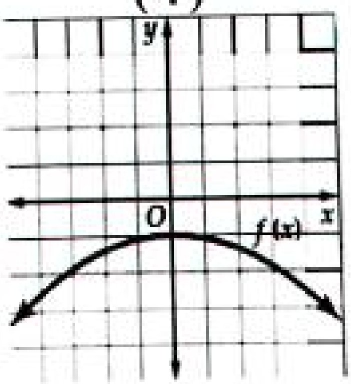
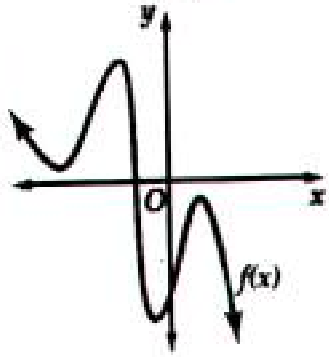
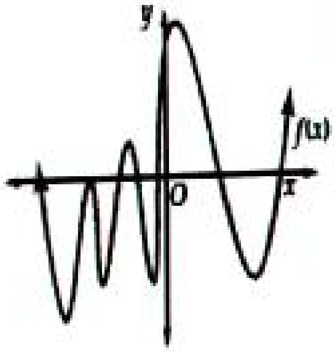
الصفر المكرر: يكون عندما يمس التمثيل البياني البياني للدالة محور X ، فيكون للدالة صفر مكرر
(صفرين حقيقيين متساويين أو 4 أو 6 وهكذا ....)



الدالة زوجية الدرجة	الدالة فردية الدرجة
	
يكون لها عدد زوجي من الأصفار الحقيقية أو لايكون لها أصفار	يكون لها عدد فردي من الأصفار الحقيقية

تمارين (3) : للتمثيلات البيانية التالية أكمل ما يأتي :

	(1)	(2)	(3)
			
نوع الدرجة	زوجية	فردية	زوجية
إشارة المعامل الرئيس	+	+	−
سلوك طرفي التمثيل البياني	$x\to\infty \Rightarrow f(x)\to\infty$ $x\to-\infty \Rightarrow f(x)\to\infty$	$x\to\infty \Rightarrow f(x)\to\infty$ $x\to-\infty \Rightarrow f(x)\to-\infty$	$x\to\infty \Rightarrow f(x)\to-\infty$ $x\to-\infty \Rightarrow f(x)\to-\infty$
عدد الأصفار الحقيقية	٤	١	لا يوجد

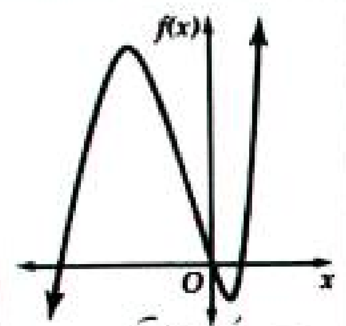
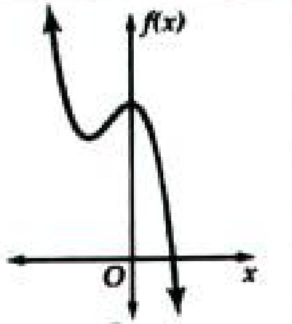
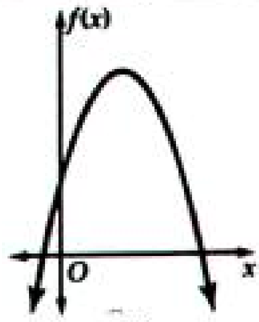
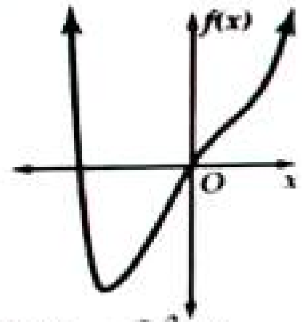
	(4)	(5)	(6)
			
نوع الدرجة	زوجية	فردية	زوجية
إشارة المعامل الرئيس	−	−	+
سلوك طرفي التمثيل البياني	$x\to\infty \Rightarrow f(x)\to-\infty$ $x\to-\infty \Rightarrow f(x)\to-\infty$	$x\to\infty \Rightarrow f(x)\to-\infty$ $x\to-\infty \Rightarrow f(x)\to\infty$	$x\to\infty \Rightarrow f(x)\to\infty$ $x\to-\infty \Rightarrow f(x)\to\infty$
عدد الأصفار الحقيقية	لا يوجد	١	8 أصفار منها صفر مكرر مرتين

$-14x^8$

تمارين (4) : أوجد درجة كل دالة مع بيان سلوك طرفي التمثيل البياني :

$a)\ 5x^4-8x+5$	$b)\ 8x^6-3x^7+6x$	$c)\ (2x^3-1)(8x^2-7x^5)$	
زوجية	فردية	زوجية	نوع درجة الدالة
$x\to\infty \Rightarrow f(x)\to\infty$ $x\to-\infty \Rightarrow f(x)\to\infty$	$x\to\infty \Rightarrow f(x)\to-\infty$ $x\to-\infty \Rightarrow f(x)\to\infty$	$x\to\infty \Rightarrow f(x)\to-\infty$ $x\to-\infty \Rightarrow f(x)\to-\infty$	سلوك الطرفين

تمارين (5) : قابل بين كل دالة وتمثيلها البياني مما يأتي :

زوجية	زوجية	فردية	فردية
$a)\ -2x^2+8x+5$	$b)\ x^4-3x^2+6x$	$c)\ x^3+3x^2-4x$	$d)\ -4x^3-4x^2+8$
 فردية c	 فردية d	 زوجية a	 زوجية b

تمرين (6) تمرين 48 صـ 31 :

للدالة $f(x)=(x-2)(x+1)(x-3)$

أولاً : حدد مقطع المحور y	نعوض عن $x=0$ $y=(-2)(1)(-3)=6$
ثانياً : حدد مقطع المحور x	$(x-2)(x+1)(x-3)=0$ $x=2\ ,\ x=-1\ ,\ x=3$
ثالثاً : الأصفار	$\{2,-1,3\}$

رابعاً : إكتب الدالة بالصيغة القياسية

$f(x)=(x^2-x-2)(x-3)$

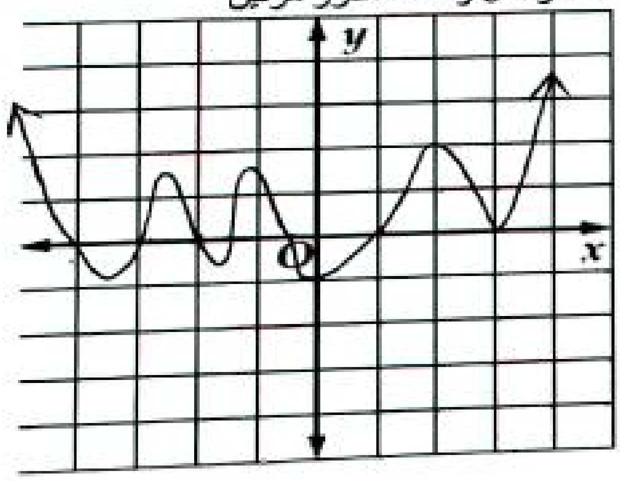
$=x^3-3x^2-x^2+3x-2x+6$

$=x^3-4x^2+x+6$

خامساً : صف سلوك طرفي التمثيل البياني	$x\to\infty \Rightarrow f(x)\to\infty$ $x\to-\infty \Rightarrow f(x)\to-\infty$

تمرين (7) مسألة مفتوحة صـ 31 :

مثل بيانياً بصورة تقريبية دالة كثيرة حدود زوجية الدرجة عدد أصفارها 8 وأحدها مكرر مرتين



تمرين (8) مسألة مفتوحة:

إكتب دالة كثيرة حدود فردية الدرجة سلوك طرفيها

$f(x)\to-\infty$ عندما $x\to\infty$

$f(x)\to\infty$ عندما $x\to-\infty$

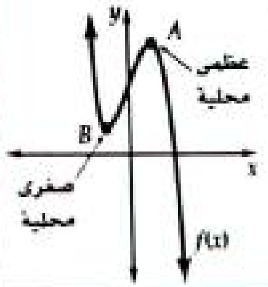
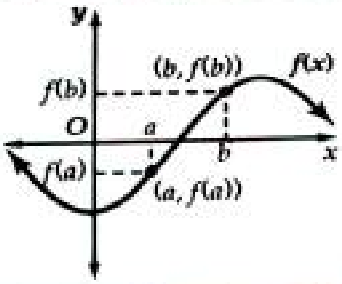
$f(x)=-4x^5+8x^3-8$

نشاط (5) : تحليل التمثيلات البيانية لدوال كثيرات الحدود

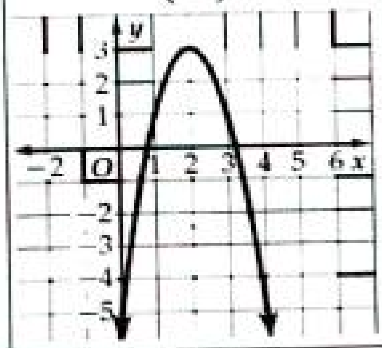
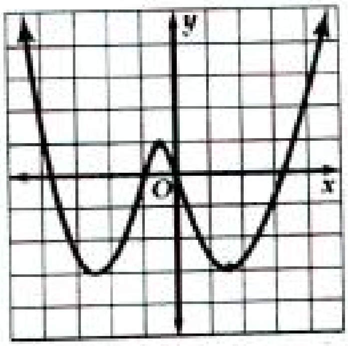
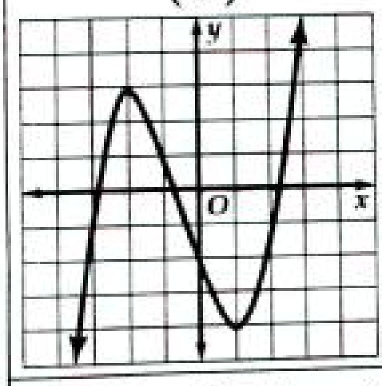
الأهداف :

1- تمثيل دالة كثيرة حدود بيانياً ، 2- تحديد الأصفار الحقيقية ومواقعها لدالة كثيرة الحدود

3- إيجاد نقاط التحول لدالة كثيرة الحدود بيانياً ، 4- تطبيق التمثيل البياني لكثيرات الحدود في حل مسائل حياتية

نقاط التحول (النقط القصوى)		أصفار الدالة
	الاحداثي y للنقطة A تسمى : **قيمة عظمى محلية** الاحداثي y للنقطة B تسمى : **قيمة صغرى محلية**	
لمنحنى دالة كثيرة الحدود من الدرجة n على الأكثر $(n-1)$ نقطة تحول	إذا تغيرت إشارة الدالة بين نقطتين فإن هناك صفراً واحداً حقيقياً (على الأقل) بين هذين العددين	**مبدأ موقع الأصفار**

تمارين (1) : أكمل كلاً مما يأتي لكل من التمثيلات البيانية لدوال كثيرات الحدود :

	(1)	(2)	(3)
			
قدر الإحداثي x لكل نقطة تحول ، مع تحديد قيمتها مبيناً نوعها	قيمة عظمى محلية هي 3 عندما x = 2	صغرى محلية هي 3- عندما x = 2.5 2) صغرى محلية هي 3- عندما x = -2.5 3) عظمى محلية هي 1 عندما x = 0.5	1) صغرى محلية هي 4- عندما x = +1 2) عظمى محلية هي 3 عندما x = -2
أقل درجة ممكنة	2	4	3
مقطع محور y	y = -5	y = 0	y = -2
أصفار الدالة	x = 1 , x = 3	{-3.5 , -1 , 0 , 3.5}	{-3 , -0.5 , 2.5}
مدى الدالة	{y | y ≤ 3}	{y | y ≥ -3}	R

تمارين (2) : لكل دالة فيما يأتي حدد كل قيمتين صحيحتين للمتغير x يقع بينهما صفر حقيقي ثم مثلها بيانياً:

(1) $f(x) = 3x^3 + 9x^2 - 5$

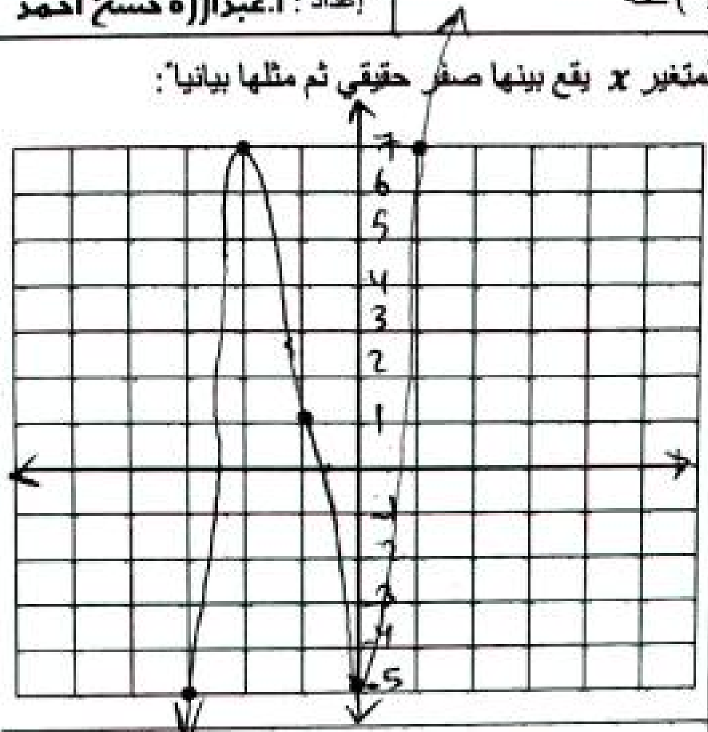
x	$f(x)$
−3	-5
−2	7
−1	1
0	-5
1	7
2	55

يوجد صفر حقيقي بينه

$x=-3, x=-2$

و $x=-1, x=0$

و $x=0, x=1$



(2) $f(x) = -x^3 - 4x^2 + 5$

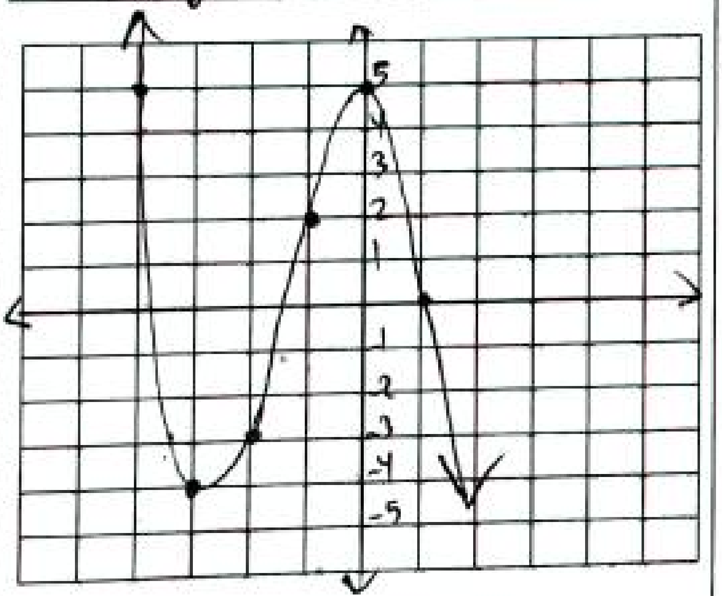
x	$f(x)$
−4	5
−3	-4
−2	-3
−1	2
0	5
1	0 صفر
2	-19

يوجد صفر حقيقي للدالة هو $x=1$

وأيضاً صفر حقيقي بينه

$x=-4, x=-3$

و $x=-2, x=-1$



(3) $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 1$

x	$f(x)$
−2	9
−1	-1
0	1
1	-3
2	-7
3	19

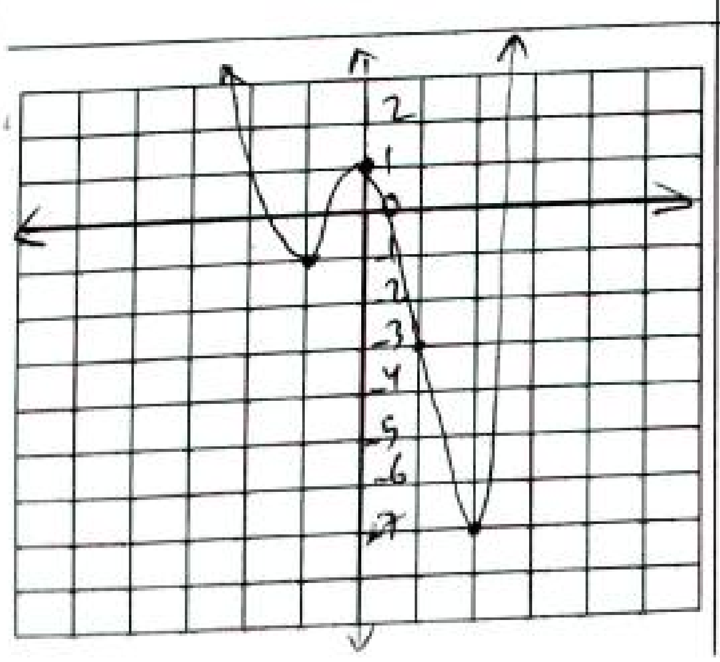
يوجد صفر حقيقي للدالة بينه

$x=-2, x=-1$

و $x=-1, x=0$

و $x=0, x=1$

و $x=2, x=3$



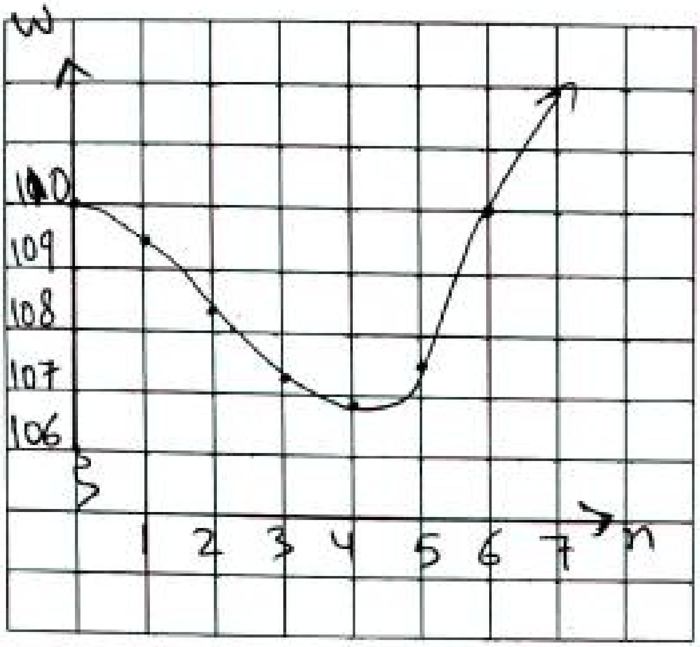
* **أنظر مثال 4 صـ 35 بالكتاب**

تمرين (3) : يمثل وزن شخص مريض w بالباوندات خلال 7 أسابيع من المرض بالدالة :

$$w(n) = 0.1n^3 - 0.6n^2 + 110$$

حيث n عدد أسابيع مرضه .

أولاً : مثل الدالة بيانياً



n	$f(x)$
0	110
1	109.5
2	108.4
3	107.3
4	106.8
5	107.5
6	110

ثانياً : صف نقاط التحول وسلوك طرفي التمثيل البياني

توجد قيمة صغرى محلية هي 106.8 عندما w=4 أي انه اقل وزن للشخص يكون تقريباً 106kg في الأسبوع الرابع وبعدها يزداد الوزن مع مرور الأسابيع

ثالثاً : ما الاتجاه العام لمعادلة وزن المريض الذي يظهره التمثيل البياني .

في أول الأسابيع فقد المريض وزناً وبعد الأسبوع الرابع بدأ يزيد وزنه

رابعاً : هل من المعقول أن يستمر هذا الاتجاه إلى ما لا نهاية .

ربما يستمر لعدة أسابيع هذه الزيادة بالوزن لكنه ليس الى المالانهاية

تمرين (4) تمرين 31 صـ 69 :

تتبع أحمد المبيعات اليومية لمتجره في الأيام الستة الأولى في الشهر ، وقدر أنه يمكن تمثيلها باستعمال النقاط الست التالية :

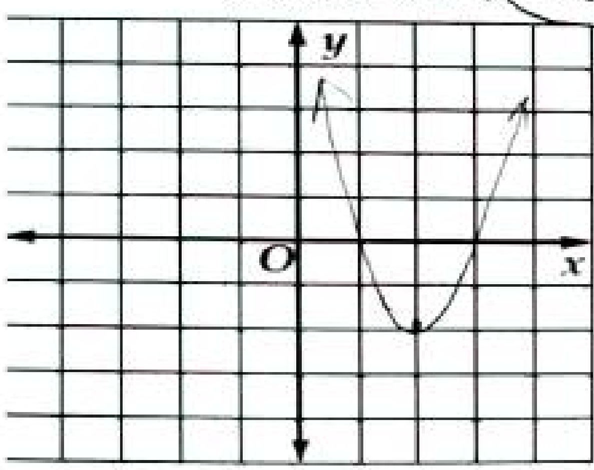
$(1,675)$ ،$(2,950)$ ،$(3,550)$ ،$(4,250)$ ،$(5,600)$ ،$(6,400)$

كم نقطة تحول توجد في التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود الممثلة بالنقاط أعلاه .

الحل : 3 نقاط تحول : قيمة عظمى محلية عند x=2 و x=5
قيمة صغرى محلية عند x=4

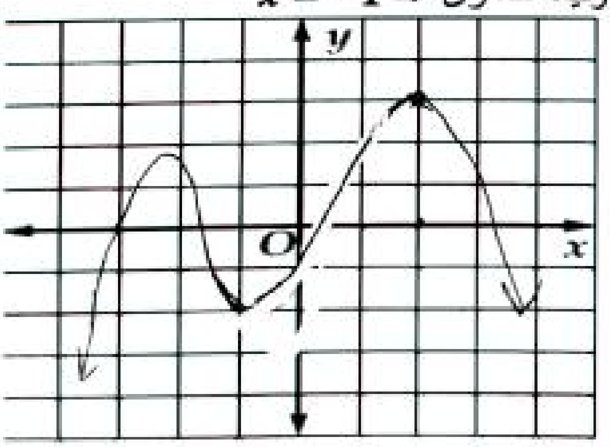
تمرين (5) مسألة مفتوحة 26 صـ 37 :

مثل بيانياً دالة كثيرة حدود درجتها زوجية ولها قيمة صغرى عند x=2 ومعاملها الرئيس موجب



تمرين (6) مسألة مفتوحة 23 صـ 31 :

مثل بيانياً دالة كثيرة من الدرجة الرابعة ولها صفر عند $x = -3$ وقيمة عظمى عند $x = 2$ وقيمة صغرى عند $x = -1$



نشاط (6) : حل معادلات كثيرات الحدود-1

الأهداف :

1- إسترجاع طرق تحليل كثيرات الحدود ، 2- تحليل كثيرات حدود

تذكر : طرق التحليل		
التحليل بأخذ العامل المشترك	$8x^2y - 4x^3y^5 = 4x^2y(2 - xy^4)$	
تحليل الفرق بين مربعين	$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$	$9x^2 - 25y^2 = (3x-5y)(3x+5y)$
تحليل مجموع مكعبين والفرق بينهما	$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$ $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$	$x^3 + 8y^3 = (x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$ $64a^3 - 125b^3 = (4a-5b)(16a^2+20ab+25b^2)$
تحليل الحدودية الثلاثية على الصورة العامة	$x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$, $x^2 - 7x + 10 = (x-5)(x-2)$ $2x^2 + 5x - 3 = (2x-1)(x+3)$, $6x^2 - 11x - 2 = (x-2)(6x+1)$	
المربع الكامل	$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$	$x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$
التحليل بالتقسيم	$ab + 4a^2b + 3cd + 12acd = ab(1+4a) + 3cd(1+4a)$ $= (1+4a)[ab + 3cd]$	
ملاحظة	كثيرة الحدود الأولية : هي كثيرة الحدود التي لا يمكن تحليلها	

تمارين : حلل كلاً مما يلي تحليلاً تاماً أو اكتب كثيرة حدود أولية : (● : واجب)

1) $8x^3 - 4x = 4x(2x^2-1)$

2) $27x^2y - 12y^3$
$= 3y(9x^2-4y^2)$
$= 3y(3x-2y)(3x+2y)$

3) $9x - 10y^2$ كثيرة حدود أولية

● 4) $-16x^2 + 25$
$= 25 - 16x^2 = (5-4x)(5+4x)$

5) $x^2 - 10x + 7$
كثيرة حدود أولية

6) $6x^3 - 26x^2 - 20x$
$= 2x(3x^2-13x-10)$
$= 2x(x-5)(3x+2)$

● 7) $16x^4 - y^8$
$= (4x^2-y^4)(4x^2+y^4)$
$(2x-y^2)(2x+y^2)(4x^2+y^4)$

8) $8c^3 - 27d^3$
$= (2c-3d)(4c^2+6cd+9d^2)$

9) $16g^3 + 2h^3 = 2(8g^3+h^3)$
$= 2(2g+h)(4g^2-2gh+h^2)$

10) $64x^4 + xy^3 = x(64x^3+y^3) = x(4x+y)(16x^2-4xy+y^2)$

11) $18x^6 + 5y^6 \Rightarrow$ أولية

12) $a^6 + b^6 = (a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$

فرق بين مربعين

13) $64x^6 - y^6 = (8x^3-y^3)(8x^3+y^3)$

$= (2x-y)(4x^2+2xy+y^2)(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)$

● 14) $(x-2)^3 - 27 = [(x-2)-3][(x-2)^2+3(x-2)+9]$

$= (x-5)(x^2-4x+4+3x-6+9) = (x-5)(x^2-x+7)$

15) $ab + 3cd + 4a^2b + 12acd = ab + 4a^2b + 3cd + 12acd$

$= ab(1+4a) + 3cd(1+4a) = (1+4a)[ab+3cd]$

● 16) $12ax^2 - 20cy^2 - 18bx^2 - 10ay^2 + 15by^2 + 24cx^2$

$= 12ax^2 - 18bx^2 + 24cx^2 - 20cy^2 - 10ay^2 + 15by^2$

$= 6x^2(2a-3b+4c) - 5y^2(4c+2a-3b) = (2a-3b+4c)[6x^2-5y^2]$

17) $gx^2 - 3hx^2 - 6fy^2 - gy^2 + 6fx^2 + 3hy^2$

$= gx^2 - 3hx^2 + 6fx^2 - 6fy^2 - gy^2 + 3hy^2$

$= x^2(g-3h+6f) - y^2(6f+g-3h) = (g-3h+6f)[x^2-y^2]$

$= (g-3h+6f)(x-y)(x+y)$

18) $x^2y^3 - 3xy^3 + 2y^3 + x^2z^3 - 3xz^3 + 2z^3$

$= y^3(x^2-3x+2) + z^3(x^2-3x+2) = (x^2-3x+2)[y^3+z^3]$

$= (x-2)(x-1)(y+z)(y^2-yz+z^2)$

نشاط (7) : حل معادلات كثيرات الحدود -2

الأهداف :

1- إسترجاع طرق حل معادلات كثيرات الحدود ، 2- حل معادلات كثيرات حدود

القانون العام لحل المعادلة التربيعية	حل المعادلات
لحل المعادلة التربيعية على الصورة $ax^2 + bx + c = 0$ فإن : $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	لحل معادلات كثيرة الحدود : أولاً : نقوم بعملية التحليل ان أمكن ثانياً : نستخدم العلاقة الرياضية $ab = 0$ فيكون إما $a = 0$ أو $b = 0$

تمارين (1) : حل المعادلات التالية :

1) $9x^2 - 4 = 0$

الحل :

$9x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{4}{9}}$

$\therefore x = \pm\frac{2}{3}$

أو بالتحليل

$(3x-2)(3x+2) = 0$

$x = \frac{2}{3}$, $x = -\frac{2}{3}$

2) $3x^2 + 4x - 7 = 0$

$(x-1)(3x+7) = 0$

$x = 1$, $x = -\frac{7}{3}$

$S.S = \{1, -\frac{7}{3}\}$

2) $5x^2 - 7x + 1 = 0$

$a = 5$, $b = -7$, $c = 1$

$x = \dfrac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(5)(1)}}{2(5)}$

$= \dfrac{7 \pm \sqrt{29}}{10}$

$S.S = \{\dfrac{7 \pm \sqrt{29}}{10}\}$

2) $2x^2 + 8 = 0$

$2x^2 = -8 \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow x = \pm 2i$

$S.S = \{\pm 2i\}$

3) $x^3 + 8 = 0$

الحل :

$(x+2)(x^2 - 2x + 4) = 0$

$x = -2$

$x = \dfrac{2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(4)}}{2(1)}$

$= \dfrac{2 \pm 2\sqrt{3}i}{2} = 1 \pm \sqrt{3}i$

$S.S = \{-2, 1 \pm \sqrt{3}i\}$

9) $y^3 = 125$

$y^3 - 125 = 0$

$(y-5)(y^2 + 5y + 25) = 0$

$y = 5$

$y = \dfrac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4(1)(25)}}{2(1)}$

$= \dfrac{-5 \pm 5\sqrt{3}i}{2}$

$S.S = \{5, \dfrac{-5 \pm 5\sqrt{3}i}{2}\}$

الصورة التربيعية	يمكن حل معادلات كثيرات حدود بالمتغير x درجتها أكبر من يساوي 4 بتحويلها الى الصورة $au^2 + bu + c$

تمارين (2) : اكتب التعابير التالية على الصورة التربيعية إن أمكن :

1) $x^4 + 5x + 6$

لا يمكن

2) $5x^4 + 3x^2 + 1$

$u = x^2$

$= 5u^2 + 3u + 1$

3) $4x^6 - 2x^3 + 8$

$u = x^3$

$6\cancel{u}^2 - 2u + 8$

4) $(x+2)^8 + (2x+4)^4 + 5$

$u = (x+2)^4$

$[2(\cancel{x}+2)]^4$

$= 16(x+2)^4$

$= u^2 + 16u + 5$

تمارين (3) : حل المعادلات التالية :

1) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

الحل: نضع $u = x^2$

$u^2 - 6u + 8 = 0$

$(u-2)(u-4) = 0$

$u = 2$ | $u = 4$

$x^2 = 2$ | $x^2 = 4$

$x = \pm\sqrt{2}$ | $x = \pm 2$

$S.S = \{\pm\sqrt{2}, \pm 2\}$

2) $8x^4 - 18x^2 + 4 = 0$

الحل: نضع $u = x^2$

$8u^2 - 18u + 4 = 0$

$2(\cancel{u}-2)(4u-1) = 0$

$u = 2$ | $u = \frac{1}{4}$

$x^2 = 2$ | $x^2 = \frac{1}{4}$

$x = \pm\sqrt{2}$ | $x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$

$S.S = \{\pm\sqrt{2}, \pm\frac{1}{2}\}$

3) $x^4 + 6x^2 - 91 = 0$

$u = x^2$

الحل: $(\cancel{u} - 7)(u + 13) = 0$

$u = 7$ | $u = -13$

$x^2 = 7$ | $\cancel{x}^2 = -13$

$x = \pm\sqrt{7}$ | $x = \pm\sqrt{-13}$

$= \pm\sqrt{13}\, i$

$S.S = \{\pm\sqrt{7}, \pm\sqrt{13}\, i\}$

4) $x^4 + 6x^2 + 5 = 0$

الحل:

$u = x^2$

$(u+5)(u+1) = 0$

$u = -5$ | $u = -1$

$x^2 = -5$ | $x^2 = -1$

$x = \pm\sqrt{-5}$ | $x = \pm\sqrt{-1}$

$= \pm\sqrt{5}\, i$ | $= \pm i$

$S.S = \{\pm\sqrt{5}\, i, \pm i\}$

نشاط (8): حل معادلات كثيرات الحدود -3

الأهداف :

1- حل معادلات كثيرات الحدود ، 2- تطبيق معادلات كثيرات الحدود لحل تمارين حياتية

تمارين (1) : حل المعادلات التالية :

1) $x^4 + 6x^2 + 9 = 0$

الحل: لتكن $u = x^2$

$u^2 + 6u + 9 = 0$

$(u+3)^2 = 0$

$\therefore u + 3 = 0 \Rightarrow u = -3$

$x^2 = -3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-3}$

$\therefore x = \pm\sqrt{3}\, i$

2) $x^3 + 5x^2 - 4x - 20 = 0$

الحل:

$x^2(x+5) - 4(x+5) = 0$

$(x+5)(x^2-4) = 0$

$(x+5)(x-2)(x+2) = 0$

$x = -5 \quad x = 2 \quad x = -2$

$S.S = \{-5, 2, -2\}$

3) $x^5 - 16x = 0$

الحل:

$x(x^4 - 16) = 0$

$x(x^2-4)(x^2+4) = 0$

$x(x-2)(x+2)(x^2+4) = 0$

$x = 0 \quad x = 2 \quad x = -2 \quad x^2 = -4$

$x = \pm\sqrt{-4}$

$= \pm 2i$

$S.S = \{0, \pm 2, \pm 2i\}$

4) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$

الحل: لتكن $u = x^3$

$u^2 + 7u - 8 = 0$

$(u+8)(u-1) = 0$

$u = -8$

$x^3 = -8$

$x^3 + 8 = 0$

$(x+2)(x^2-2x+4) = 0$

$x = -2$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(4)}}{2(1)}$

$= 1 \pm \sqrt{3}\, i$

$u = 1$

$x^3 = 1$

$x^3 - 1 = 0$

$(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$x = 1$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$

$= -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$S.S = \{-2, 1, 1 \pm \sqrt{3}\, i, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i\}$

تمارين (2) : أوجد الجذور الحقيقية للمعادلات التالية :

1) $x^6 - 9x^4 - x^2 + 9 = 0$

الحل:

$x^4(x^2-9) - (x^2-9) = 0$

$(x^2-9)(x^4-1) = 0$

$(x-3)(x+3)(x^2-1)(x^2+1) = 0$

$(x-3)(x+3)(x-1)(x+1)(x^2+1) = 0$

$x=3 \qquad x=-3 \qquad x=1 \qquad x=-1 \qquad x^2=-1$

مرفوض لا يوجد جذور حقيقية

$S.S = \{\pm 3, \pm 1\}$

2) $x^6 - 26x^3 - 27 = 0$

الحل: لتكن $u = x^3$

$u^2 - 26u - 27 = 0$

$(u-27)(u+1) = 0$

$u = 27 \qquad u = -1$

$x^3 = 27 \qquad x^3 = -1$

$\Rightarrow x = 3 \qquad \Rightarrow x = -1$

$S.S = \{-1, 3\}$

3) $(x-2)^6 - 9(x-2)^3 + 8 = 0$

الحل: لتكن $u = (x-2)^3$

$u^2 - 9u + 8 = 0$

$(u-1)(u-8) = 0$

$u = 1 \qquad u = 8$

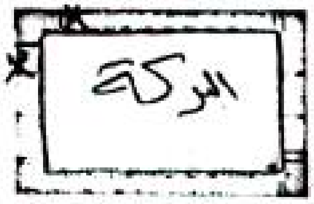
$(x-2)^3 = 1 \qquad (x-2)^3 = 8$

$x-2 = 1 \qquad x-2 = 2$

$x = 3 \qquad x = 4$

$S.S = \{3, 4\}$

تمرين (3) 13 صـ 45 بالكتاب : صنع أنس ممر خشبي عرضه $x\ ft$ حول بركة مستطيلة الشكل . اذا كان طول البركة $40\ ft$ وعرضها $30\ ft$ ، ومساحة سطحها $2000\ ft$ مع الممر ، فما عرض الممر الخشبي



الحل:

المساحة الكلية $= (2x+30)(2x+40)$

$4x^2 + 80x + 60x + 1200 = 2000$

$4x^2 + 140x - 800 = 0$

$4(x-5)(x+40) = 0$

$x = 5 \qquad x = -40$ مرفوض

$5ft =$ عرض الممر الخشبي

تمرين (4) : صنع حسين صندوقا للتخزين على شكل متوازي مستطيلات أبعاده $x-2, x-4, x-6$ أوجد أبعاده إذا علمت أن حجمه $40x$ وحدة مكعبة

الحل: الحجم = الطول × العرض × الارتفاع

$(x-2)(x-4)(x-6) = 40x$

$(x^2-6x+8)(x-6) = 40x$

$x^3 - 6x^2 - 6x^2 + 36x + 8x - 48 = 40x$

$x^3 - 12x^2 + 4x - 48 = 0$

$x^2(x-12) + 4(x-12) = 0$

$(x-12)(x^2+4) = 0$

$\boxed{x = 12} \qquad x^2 = -4 \Rightarrow$ لا يوجد جذور حقيقية

الأبعاد هي $(x-2, x-4, x-6)$

$(12-2, 12-4, 12-6)$

$(10, 8, 6)$

نشاط (9) : نظريتا الباقي والعوامل -1

الأهداف :

1- التعرف على نظرية الباقي ، 2- استخدام التعويض التركيبي لإيجاد قيمة الدالة عند نقطة

نظرية الباقي	إذا قسمت كثيرة حدود $P(x)$ على $(x-r)$ فإنّ الباقي عدد ثابت يساوي $P(r)$ أي أنّ: $P(x) = Q(x) \cdot (x-r) + P(r)$ المقسوم ناتج القسمة المقسوم عليه الباقي
التعويض التركيبي	هي عملية تطبيق نظرية الباقي باستعمال القسمة التركيبية لإيجاد قيمة الدالة

تمارين (1) : أوجد ناتج ما يلي باستخدام التعويض التركيبي ثم تأكد من إجابتك باستخدام التعويض المباشر :

1) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1 \quad , f(6)$

الحل: نقوم بالقسمة على $(x-6)$

$$\begin{array}{r|rrrr} 6 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ & \downarrow & 6 & 48 & 270 \\ \hline & 1 & 8 & 45 & \boxed{271} \end{array}$$

الباقي

$\therefore f(6) = 271$

التعويض المباشر $f(6) = (6)^3 + 2(6)^2 - 3(6) + 1 = 271$

2) $f(x) = 5x^2 - x^3 + 7x + 2 \quad , f(4)$

ترتيبها

الحل:

$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & -1 & 5 & 7 & 2 \\ & \downarrow & -4 & 4 & 44 \\ \hline & -1 & 1 & 11 & \boxed{46} \end{array}$$

الباقي

$\therefore f(4) = 46$

التعويض المباشر $f(4) = 5(4)^2 - (4)^3 + 7(4) + 2 = 46$

3) $f(x) = x^4 - 6x - 8 \quad , f(-5)$

الحل:

$$\begin{array}{r|rrrrr} -5 & 1 & 0 & 0 & -6 & -8 \\ & \downarrow & -5 & 25 & -125 & 655 \\ \hline & 1 & -5 & 25 & -131 & \boxed{647} \end{array}$$

الباقي

$\therefore f(-5) = 647$

بالتعويض المباشر $f(-5) = (-5)^4 - 6(-5) - 8 = 647$

4) $f(x) = x^5 - 6x^3 + 9x^2 + 10 \quad , f(-3)$

الحل:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -3 & 1 & 0 & -6 & 9 & 0 & 10 \\ & \downarrow & -3 & 9 & -9 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & -3 & 3 & 0 & 0 & \boxed{10} \end{array}$$

الباقي

$\therefore f(-3) = 10$

بالتعويض المباشر $f(-3) = 10$ ارضنا

تمرين (2) تأكد 2 صـ 50 : يمكن استعمال الدالة $C(x) = 2.4x^3 - 22.3x^2 + 53.8x + 548.2$ لتقدير عدد الطلبة بالآلاف في إحدى الجامعات منذ عام 2000 م حيث تمثل x عدد السنوات .
استخدم التعويض التركيبي لتقدير عدد طلبة الجامعات عام 2012 م

الحل

نعوض عند $x = 2012 - 2000 = 12$

$$\begin{array}{r|rrrr} 12 & 2.4 & -22.3 & 53.8 & 548.2 \\ & \downarrow & 28.8 & 78 & 1581.6 \\ \hline & 2.4 & 6.5 & 131.8 & \boxed{2129.8} \end{array}$$

عدد الطلاب هو .

$2129.8 \times 1000 = 2129800$ طالب

نشاط (10) : نظريتا الباقي والعوامل -2

الأهداف :
1- التعرف على نظرية العوامل ، 2- تحديد كون ثنائية حد عاملاً من عوامل الدالة باستخدام التعويض التركيبي
3- استخدام التمثيل البياني لإيجاد عوامل الدالة

نظرية العوامل	تكون ثنائية الحد $x - r$ عاملاً من عوامل كثيرة الحدود $P(x) \Leftrightarrow P(r) = 0$

تمارين (1) : فيما يلي أثبت بالتعويض التركيبي أن كل ثنائية حد عامل من عوامل كثيرة الحدود ، ثم أوجد عواملها الأخرى:

1) $2x^3 + 17x^2 + 23x - 42 \;,\; x - 1$

نقسم $(x-1) \div P(x)$

الحل: $x-1=0$ ، $x=1$

1	2	17	23	-42
	↓	2	19	42
	2	19	42	$\boxed{0}$ → الباقي

$\therefore (x-1)$ عامل من عوامل $P(x)$

$\therefore P(x) = (x-1)(2x^2+19x+42) \pm 0$

$2x^2+19x+42$
$= (2x+7)(x+6)$ ⇐ العوامل الأخرى

2) $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 \;,\; x + 2$

الحل: $x+2=0$ ، $x=-2$

-2	1	2	-1	-2
	↓	-2	0	2
	1	0	-1	$\boxed{0}$ → الباقي

$\therefore (x+2)$ عامل من عوامل $f(x)$

$f(x) = (x+2)(x^2-1) \pm 0$

$x^2-1 = (x-1)(x+1)$ ⇐ العوامل الأخرى

3) $6x^3 - 25x^2 + 2x + 8 \;,\; 2x + 1$

الحل: $2x+1=0$ ، $x=-\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2}$	6	-25	2	8
	↓	-3	14	-8
÷2	6	-28	16	$\boxed{0}$ → الباقي

$\therefore (2x+1)$ عامل من عوامل $P(x)$

$P(x) = (2x+1)(3x^2 - 14x + 8)$

$3x^2-14x+8$
$= (x-4)(3x-2)$ العوامل الأخرى

4) $2x^4 + 9x^3 + x^2 - 36x - 36 \;,\; 2x + 3$

الحل: $2x+3=0$ ، $x=-\frac{3}{2}$

$-\frac{3}{2}$	2	9	1	-36	-36
	↓	-3	-9	12	36
	2	6	-8	-24	$\boxed{0}$ → الباقي

$\therefore (2x+3)$ عامل من عوامل $P(x)$

$P(x) = (2x+3)(x^3+3x^2-4x-12)$

$x^3+3x^2-4x-12$
$= x^2(x+3) - 4(x+3)$
$= (x+3)(x^2-4)$
$= (x+3)(x-2)(x+2)$ العوامل الأخرى

تمارين (2) : أوجد قيم التي تجعل باقي القسمة في كل مما يأتي يساوي 3

1) $(x^3+4x^2+x+k) \div (x+2)$

الحل: حسب نظرية الباقي

$P(-2)=3$

$(-2)^3+4(-2)^2+(-2)+k=3$

$6+k=3 \Rightarrow \boxed{k=-3}$

2) $(x^2+5x+7) \div (x-k)$

الحل

$P(k)=3$

$k^2+5k+7=3 \Rightarrow k^2+5k+4=0$

$(k+1)(k+4)=0$

$k=-1$, $k=4$

تمرين (3): استخدم التعويض التركيبي لإيجاد قيمة k التي تجعل باقي قسمة x^4+kx^3+1 على $x-2$ يساوي 9

الحل

$P(2)=9$

$$\begin{array}{c|ccccc} 2 & 1 & k & 0 & 0 & 1 \\ & \downarrow & 2 & 2k+4 & 4k+8 & 8k+16 \\ \hline & 1 & k+2 & 2k+4 & 4k+8 & \boxed{8k+17} \end{array}$$

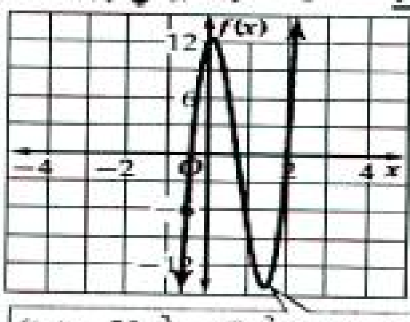
الباقي $= 9$

$\therefore 8k+17=9$

$8k=-8 \Rightarrow k=-1$

تمارين (4) : استعمل التمثيل البياني لإيجاد جميع عوامل كل دالة كثيرة حدود فيما يلي:

(A)



$f(x)=20x^3-47x^2+8x+12$

الحل: واضح أن $x=2$ صفر للدالة

$\therefore x-2$ عامل من عوامل الدالة

نقسم $f(x) \div (x-2)$

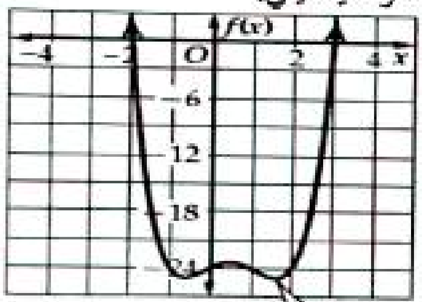
$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 20 & -47 & 8 & 12 \\ & \downarrow & 40 & -14 & -12 \\ \hline & 20 & -7 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

ناتج القسمة: $20x^2-7x-6$

$=(4x-3)(5x+2)$

العوامل هي: $(x-2)$, $(4x-3)$, $(5x+2)$

(B)



$f(x)=x^4-2x^3-x^2+2x-24$

الحل: صفرا الدالة $x=-2$, $x=+3$

نقسم $f(x) \div (x+2)$

$$\begin{array}{c|ccccc} -2 & 1 & -2 & -1 & 2 & -24 \\ & \downarrow & -2 & 8 & -14 & 24 \\ \hline & 1 & -4 & 7 & -12 & \boxed{0} \end{array}$$

ناتج القسمة هو $x^3-4x^2+7x-12$

نقسم $\div (x-3)$

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 1 & -4 & 7 & -12 \\ & \downarrow & 3 & -3 & 12 \\ \hline & 1 & -1 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

الناتج x^2-x+4 لا يتحلل

العوامل هي

$(x+2)$, $(x-3)$

(x^2-x+4)

تمرين (5) : اكتب دالة كثيرة حدود يكون فيها كل من العددين -5 , 0 صفرين مكررين مرتين

$P(x)=x^2(x+5)^2$

نشاط (11) : الجذور والأصفار -1

الأهداف :

1- إيجاد الجذور وأنواعها لمعادلات كثيرات الحدود ، 2- التعرف على قاعدة ديكارت للإشارات

3- إيجاد العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة والسالبة والتخيلية بإستخدام قاعدة ديكارت

مصطلحات أنظر التفاصيل صـ 55	لأي كثيرة حدود $p(x)$ اذا كان صفر للدالة فإن جميع ما يلي صحيح : $x=c$ **أولاً :** c جذر أو حل للمعادلة $p(x)=0$ ، **ثانياً :** $x-c$ عامل من عوامل الدالة $p(x)$ **ثالثاً :** $(c,0)$ هي نقطة التقاطع للتمثيل البياني للدالة مع محور X

النظرية الأساسية في الجبر	كل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من صفر لها جذر واحد على الأقل ينتمي لمجموعة الأعداد المركبة .
نتيجة لها	يكون لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة n العدد n فقط من الجذور المركبة (شاملة المكررة)

تمارين (1) : حل كل معادلة فيما يلي وحدد عدد جذورها وأنواعها :

1) $-3x^3-5x^2+8x=0$

الحل :

$-x(3x^2+5x-8)=0$

$-x(x-1)(3x+8)=0$

$x=0$ ، $x=1$ ، $x=-\frac{8}{3}$

عدد الجذور : 3 جذور حقيقية

هي $-\frac{8}{3}, 0, 1$

2) $16x^4-625=0$

الحل :

$(4x^2-25)(4x^2+25)=0$

$(2x-5)(2x+5)(4x^2+25)=0$

$x=\frac{5}{2}$ ، $x=-\frac{5}{2}$ ، $4x^2=-25$

$x^2=-\frac{25}{4}$

$x=\pm\frac{5}{2}i$

عدد الجذور 4

جذران حقيقيان هما $\pm\frac{5}{2}$

" تخيليان هما $\pm\frac{5}{2}i$

3) $8x^3=27$

الحل :

$8x^3-27=0$

$(2x-3)(4x^2+6x+9)=0$

$x=\frac{3}{2}$ حقيقي

$x=\frac{-6\pm\sqrt{(6)^2-4(4)(9)}}{2(4)}$

$=\frac{-6\pm6\sqrt{3}i}{8}=\frac{-3\pm3\sqrt{3}i}{4}$

عدد الجذور 3

1 حقيقي هو $\frac{3}{2}$

2 مركبان هما $\frac{-3\pm3\sqrt{3}i}{4}$

4) $x^5+2x^3+x=0$

الحل :

$x(x^4+2x^2+1)=0$

$x=0$

$u^2+2u+1=0$ ← نكتب $u=x^2$

$(u+1)^2=0 \Rightarrow u=-1$

$\Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-1}=\pm i$

عدد الجذور 5

1 حقيقي هو 0

2 تخيليان مكرران هما $\pm i$

قانون ديكارت للإشارات	عدد الأصفار الحقيقية لكثيرة حدود $p(x)$	الموجبة	عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود $p(x)$ أو أقل منه بعدد زوجي
		السالبة	عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود $p(-x)$ أو أقل منه بعدد زوجي
			قاعدة ديكارت تعطينا الاحتمالات الممكنة لعدد الأصفار وليس إيجاد الأصفار نفسها

تمارين (2) : حدد العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة والسالبة والتخيلية للدوال التالية :

1) $f(x) = 2x^6 - x^5 + 4x^3 + x^2 - 3x + 1$

الحل:

عدد الأصفار الحقيقية الموجبة : 4 أو 2 أو 0

$f(-x) = 2x^6 + x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1$

عدد الأصفار الحقيقية السالبة : 2 أو 0

حقيقي +	حقيقي -	تخيلي
4	2	0
4	0	2
2	2	2
2	0	4
0	2	4
0	0	6

2) $f(x) = 2x^5 + x^4 + 4x^3 - 5x^2 - x + 7$

الحل:

عدد الأصفار الحقيقية الموجبة : 2 أو 0

$f(-x) = -2x^5 + x^4 - 4x^3 - 5x^2 + x + 7$

عدد الأصفار الحقيقية السالبة : 3 أو 1

حقيقي +	حقيقي -	تخيلي
2	3	0
2	1	2
0	3	2
0	1	4

3) $f(x) = 6x^4 + 4x^3 - x^2 - 2x - 5$

الحل:

عدد الأصفار الحقيقية الموجبة : 1

$f(-x) = 6x^4 - 4x^3 - x^2 + 2x - 5$

عدد الأصفار الحقيقية السالبة : 3 أو 1

حقيقي +	حقيقي -	تخيلي
1	3	0
1	1	2

4) $f(x) = 2x^4 - x^3 + 7x^2 - x - 1$

الحل:

عدد الأصفار الحقيقية الموجبة : 3 أو 1

$f(-x) = 2x^4 + x^3 + 7x^2 + x - 1$

عدد الأصفار الحقيقية السالبة : 1

حقيقي +	حقيقي -	تخيلي
3	1	0
1	1	2

نشاط (12) : الجذور و الأصفار - 2

الأهداف :

1- التعرف على نظرية الأعداد المركبة المترافقة ، 2- كتابة دالة كثيرة حدود بمعلومية أصفارها

استعمال التعويض التركيبي لإيجاد الأصفار	سيتم الطرق لشرحه بشكل أفضل بالدرس الأخير من الفصل الأول

نظرية الأعداد المركبة المترافقة	إذا كان $a, b \in \mathbb{R}$ حيث $b \neq 0$ فإذا كان $a + bi$ صفرًا للدالة $f(x)$ فإن $a - bi$ صفر آخر لهذه الدالة (بشرط أن يكون معاملات حدودها أعداد حقيقية) .
مثال	إذا كان $5 + 2i$ صفر للدالة فان .... صفر لنفس الدالة أيضاً

المعادلة التي أصفارها p, q	$(x - p)(x - q) = 0$ أي $x^2 - (p + q)x + pq = 0$	تذكر أن	$(a - bi)(a + bi) = a^2 + b^2$

حاصل ضرب العوامل الناتجة من العددين المركبين المترافقين	$[(x - (a + bi)].[(x - (a - bi)] = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$

تمارين (1) : أوجد دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن ومعاملات حدودها أعداد صحيحة إذا كانت أصفارها كالتالي :

1) $5, -2, -1$

الحل: $P(x) = (x-5)(x+2)(x+1)$

$= (x-5)(x^2+3x+2)$

$= x^3+3x^2+2x-5x^2-15x-10$

$= x^3-2x^2-13x-10$

2) $1, 2i$

الحل: $-2i$ صفر آخر للدالة

$P(x) = (x-1)(x-2i)(x+2i)$

$= (x-1)(x^2-4i^2) = (x-1)(x^2+4)$

$= x^3+4x-x^2-4$

$= x^3-x^2+4x-4$

3) $0, -5i$

الحل: $5i$ صفر آخر للدالة

$P(x) = x(x-5i)(x+5i)$

$= x(x^2+25)$

$= x^3+25x$

4) $-1, -1, 3i$

الحل: $-3i$ صفر آخر للدالة

$P(x) = (x+1)^2(x-3i)(x+3i)$

$= (x^2+2x+1)(x^2+9)$

$= x^4+9x^2+2x^3+18x+x^2+9$

$= x^4+2x^3+10x^2+18x+9$

$(x-p)(x-q) = x^2 -$ مجموع الجذرين $x +$ حاصل ضرب الجذرين

5) 7 , 2 − i

الحل: $(2+i)$ صفر آخر للدالة

$P(x) = (x-7)[x-(2-i)][x-(2+i)]$

$= (x-7)[x^2-4x+(4+1)]$

$= (x-7)[x^2-4x+5]$

$P(x) = x^3-4x^2+5x-7x^2+28x-35$

$= x^3-11x^2+33x-35$

6) −5 , 0 , 3 + i

الحل: $(3-i)$ صفر آخر للدالة

$P(x) = (x-0)(x+5)[x-(3+i)][x-(3-i)]$

$= (x^2+5x)[x^2-6x+(9+1)]$

$= (x^2+5x)(x^2-6x+10)$

$= x^4-6x^3+10x^2+5x^3-30x^2+50x$

$= x^4-x^3-20x^2+50x$

7) −2 , −3 , 4 − 3i

الحل: $(4+3i)$ صفر آخر للدالة

$P(x) = (x+2)(x+3)[x-(4+3i)][x-(4-3i)]$

$= (x^2+5x+6)[x^2-8x+(16+9)]$

$= (x^2+5x+6)(x^2-8x+25)$

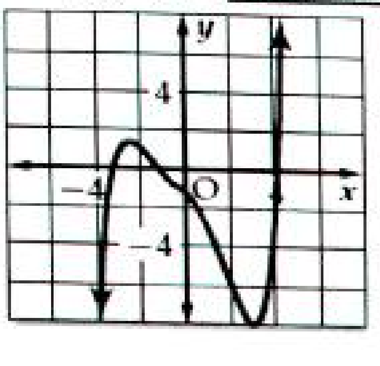
$P(x) =$

$= x^4-8x^3+25x^2+5x^3-40x^2+125x$

$+6x^2-48x+150$

$= x^4-3x^3-9x^2+77x+150$

تمرين (2) : أكمل الفراغ اذا علمت أن الدالة المبينة من الدرجة الخامسة :



عدد الأصفار الحقيقية الموجبة : ....1....

عدد الأصفار الحقيقية السالبة : ....2....

عدد الأصفار الحقيقية التخيلية : $5 - $....3.... $= 2$

أجب عن التمارين التالية بالكتاب :

54 + 47 + 46 + 45 + 44

صـــ 60

نشاط (13): الصفر النسبي -1

الأهداف :

1- التعرف على نظرية الصفر النسبي ونتيجتها ، 2- إيجاد جميع الأصفار النسبية الممكنة

3- تطبيق نظرية الصفر النسبي لإيجاد جميع أصفار الدالة

نظرية الصفر النسبي	إذا كانت $p(x)$ كثيرة حدود بمعاملات صحيحة، فإن أي صفر نسبي للدالة سيكون على الصورة $\frac{p}{q}$ (في أبسط صورة) حيث p أحد عوامل الحد الثابت (a_0) ، q أحد عوامل المعامل الرئيس (a_n)
نتيجة لها	إذا كان المعامل الرئيس 1 وحدها الثابت لا يساوي صفرفإن أي صفر نسبي للدالة يكون أحد عوامل الحد الثابت.

تمارين (1) : أوجد جميع الأصفار النسبية الممكنة التي تحددها نظرية الصفر النسبي :

1) $f(x) = x^4+11x^2+12$

الحل : p عوامل 12 ، q عوامل 1

$\pm\frac{p}{q} = \pm\frac{1, 2, 3, 4, 6, 12}{1}$

∴ الأصفار النسبية الممكنة هي :

$\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$

2) $f(x) = x^3-6x^2-8x+24$

الحل : p عوامل 24 ، q عوامل 1

$\pm\frac{p}{q} = \pm\frac{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}{1}$

∴ الأصفار النسبية الممكنة هي :

$\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8$

$\pm12, \pm24$

3) $f(x) = 3x^3-4x-10$

الحل : p عوامل 10 ، q عوامل 3

$\pm\frac{p}{q} = \pm\frac{1, 2, 5, 10}{1, 3}$

∴ الأصفار النسبية الممكنة هي :

$\pm1, \pm2, \pm5, \pm10$

$\pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{10}{3}$

4) $f(x) = 6x^5+10x^4-4x+18$

الحل : p عوامل 18 ، q عوامل 6

$\pm\frac{p}{q} = \pm\frac{1, 2, 3, 6, 9, 18}{1, 2, 3, 6}$

∴ الأصفار النسبية الممكنة هي :

$\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm9, \pm18$

$\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{9}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{1}{6}$

5) $f(x) = 2x^4+3x^2-4+15$

الحل : p عوامل 15 ، q عوامل 2

$\pm\frac{p}{q} = \pm\frac{1, 3, 5, 15}{1, 2}$

∴ الأصفار النسبية الممكنة هي :

$\pm1, \pm3, \pm5, \pm15, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$

$\pm\frac{5}{2}, \pm\frac{15}{2}$

تمارين (2) : أوجد جميع أصفار الدوال التالية :

1) $f(x) = x^3 - 10x + 3$

الحل: p عوامل 3 ، q: عوامل 1

$\pm\frac{p}{q} = \pm\frac{1,3}{1}$

الأصفار النسبية الممكنة هي ±1 و ±3

$f(3)=0 \Leftarrow$ نقسم $\div (x-3)$

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & 0 & -10 & 3 \\ & \downarrow & 3 & 9 & -3 \\ \hline & 1 & 3 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

ناتج القسمة هو : x^2+3x-1

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2-4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

الأصفار هي $\left\{3, \frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}\right\}$

2) $f(x) = x^3 - x^2 - 6x - 4$

الحل: p عوامل -4 ، q عوامل 1

$\pm\frac{p}{q} = \pm\frac{1,2,4}{1}$

الأصفار النسبية الممكنة هي $\pm1, \pm2, \pm4$

$f(-1)=0 \Leftarrow$ نقسم $\div (x+1)$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -1 & -6 & -4 \\ & \downarrow & -1 & 2 & 4 \\ \hline & 1 & -2 & -4 & \boxed{0} \end{array}$$

ناتج القسمة هو x^2-2x-4

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-4(1)(-4)}}{2} = \frac{2\pm\sqrt{20}}{2} = 1\pm\sqrt{5}$$

الأصفار هي $\{-1, 1\pm\sqrt{5}\}$

3) $f(x) = 10x^3 - 17x^2 - 7x + 2$

الحل: p عوامل 2 ، q عوامل 10

$\pm\frac{p}{q} = \pm\frac{1,2}{1,2,5,10}$

الأصفار النسبية الممكنة هي :

$\pm\left(1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{10}\right)$.

$f(2)=0$

$f\left(\frac{1}{5}\right)=0$

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$

الأصفار هي $\left\{2, \frac{1}{5}, -\frac{1}{2}\right\}$

4) $f(x) = 4x^3 + x^2 + 16x + 4$

الحل: p عوامل 4 ، q عوامل 4

$\pm\frac{p}{q} = \pm\frac{1,2,4}{1,2,4}$

الأصفار النسبية الممكنة هي :

$\pm\left(1, 2, 4, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

$f\left(-\frac{1}{4}\right)=0 \Leftarrow$ نقسم $\div (4x+1)$

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{1}{4} & 4 & 1 & 16 & 4 \\ & \downarrow & -1 & 0 & -4 \\ \hline & 4 & 0 & 16 & \boxed{0} \end{array}$$

ناتج القسمة هو x^2+4

نحل المعادلة $x^2+4=0$

$\Rightarrow x^2=-4 \Rightarrow x=\pm2i$

الأصفار هي

$\left\{-\frac{1}{4}, \pm2i\right\}$

نشاط (14) : نظرية الصفر النسبي -2

الأهداف :
1- تطبيق نظرية الصفر النسبي والتعويض التركيبي لإيجاد أصفار الدالة ، 2- تطبيق الصفر النسبي لحل مسائل لفظية

تمارين (1) : للدوال التالية أوجد جميع الأصفار النسبية الممكنة ثم استخدمها لإيجاد حلول المعادلة $f(x) = 0$:

1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 13x - 10$

الحل : p عوامل -10 ، q عوامل 1

$\pm\frac{p}{q} = \pm\frac{1, 2, 5, 10}{1}$

الأصفار النسبية الممكنة هي
$\pm(1, 2, 5, 10)$

$f(2) = 0 \Leftarrow$ تقسم ÷ $(x-2)$

2	1	-6	13	-10
	↓	2	-8	10
	1	-4	5	$\boxed{0}$

ناتج القسمة هو $x^2 - 4x + 5$

نحل المعادلة $x^2 - 4x + 5 = 0$

$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)}$

$= \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$

$= \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$

الأصفار (الحلول) هي :
$\{2, 2 \pm i\}$

2) $f(x) = x^4 + x^3 - 19x^2 + 11x + 30$

الحل : p عوامل 30 ، q عوامل 1

$\pm\frac{p}{q} = \pm\frac{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}{1}$

الأصفار النسبية الممكنة هي
$\pm(1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 15, 30)$

$f(2) = 0 \Leftarrow$ نقسم $f(x) \div (x-2)$

2	1	1	-19	11	30
	↓	2	6	-26	30
	1	3	-13	-15	$\boxed{0}$

ناتج القسمة $x^3 + 3x^2 - 13x - 15$

$f(3) = 0$
$f(-5) = 0$
$f(-1) = 0$

حلول المعادلة :

$x = 2 , x = 3, x = -5, x = -1$

3) $f(x) = 9x^4+5x^2-4$

الحل: p: عوامل -4 ، q: عوامل 9

$\pm\frac{p}{q} = \pm\frac{1,2,4}{1,3,9}$

الأصفار النسبية الممكنة هي:

$\pm(1,2,4,\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{1}{9},\frac{2}{9},\frac{4}{9})$

$f(-\frac{2}{3})=0 \Leftarrow$ نقسم ÷ $(3x+2)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -\frac{2}{3} & 9 & 0 & 5 & 0 & -4 \\ & \downarrow & -6 & +4 & -6 & 4 \\ \hline & 9 & -6 & 9 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

ناتج القسمة هو: $9x^3-6x^2+9x-6$

$f(\frac{2}{3})=0 \Leftarrow$ نقسم ÷ $(3x-2)$

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{2}{3} & 9 & -6 & 9 & -6 \\ & \downarrow & 6 & 0 & 6 \\ \hline & 9 & 0 & 9 & \boxed{0} \end{array}$$

ناتج القسمة هو x^2+1

نحل المعادلة $x^2+1=0$

$\Rightarrow x^2=-1$

$\therefore x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$

$\therefore$ حلول المعادلة $f(x)=0$

$\{\pm\frac{2}{3}, \pm i\}$

4) $f(x) = 6x^4+22x^3+11x^2-38x-40$

الحل: p: عوامل 40 ، q: عوامل 6

$\pm\frac{p}{q} = \pm\frac{1,2,4,5,8,10,20,40}{1,2,3,6}$

الأصفار النسبية الممكنة هي:

$\pm(1,2,4,5,8,10,20,40,\frac{1}{2},\frac{5}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{8}{3},\frac{10}{3},\frac{20}{3},\frac{40}{3},\frac{1}{6},\frac{5}{6})$

$f(-2)=0 \Leftarrow$ نقسم ÷ $(x+2)$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 6 & 22 & 11 & -38 & -40 \\ & \downarrow & -12 & -20 & 18 & 40 \\ \hline & 6 & 10 & -9 & -20 & \boxed{0} \end{array}$$

ناتج القسمة $6x^3+10x^2-9x-20$

$f(+\frac{4}{3})=0 \Leftarrow$ نقسم ÷ $(3x-4)$

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{4}{3} & 6 & +10 & -9 & -20 \\ & \downarrow & 8 & 24 & 20 \\ \hline & 6 & 18 & 15 & \boxed{0} \end{array}$$

ناتج القسمة $2x^2+6x+5$

$a=2$, $b=6$, $c=5$

$x = \frac{-6\pm\sqrt{(6)^2-4(2)(5)}}{2(2)}$

$\therefore \frac{-6\pm 2i}{4} = \frac{-3\pm i}{2}$

$\therefore$ حلول المعادلة $f(x)=0$

$\{-2, \frac{4}{3}, \frac{-3\pm i}{2}\}$

تمرين (2) :

صندوق على شكل متوازي مستطيلات حجمه $440ft^3$ ، أوجد أبعاد الصندوق اذا كان طوله يزيد على عرضه بمقدار $3cm$، ويقل ارتفاعه عن عرضه بمقدار $3cm$.

أولاً : بين أن $V = x^3 - 9x$ تعبر عن حجم الصندوق حيث x هو عرضه .

الحل

الحجم = الطول × العرض × الارتفاع

العرض $= x$

الطول $= x+3$

الارتفاع $= x-3$

$V = x(x+3)(x-3)$

$= x(x^2 - 9)$

$= x^3 - 9x$

ثانياً : حدد جميع الأصفار النسبية الممكنة للمعادلة

$x^3 - 9x - 440 = 0$

الحل : p عوامل 440- ، q عوامل 1

440	2
220	2
110	2
55	5
11	11
1	

$440 = 2^3 \times 5 \times 11$

$2^x \times 5^y \times 11^z$

$x = 0, 1, 2, 3$

$y = 0, 1$

$z = 0, 1$

عدد العوامل $= 4 \times 2 \times 2 = 16$

الأصفار النسبية الممكنة هي :

$\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 5, \pm 10, \pm 20, \pm 40, \pm 11, \pm 22, \pm 44, \pm 88, \pm 55, \pm 110, \pm 220, \pm 440\}$

ثالثاً : أوجد أبعاد الصندوق .

$f(8) = 0 \Leftarrow x = 8$ صفر للمعادلة

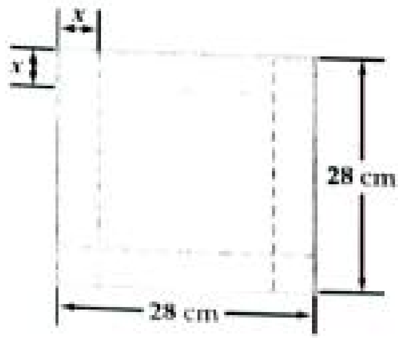
العرض $= x = 8\,cm$

الطول $= x + 3 = 8 + 3 = 11\,cm$

الارتفاع $= x - 3 = 8 - 3 = 5\,cm$

تمرين (3) :

يراد عمل صندوق بقص مربعات صغيرة ، متساوية في المساحة من زوايا ورقة مقواة مربعة الشكل، ثم ثني الجوانب الى الأعلى



العرض $= x$

الطول $= 28 - 2x$

الارتفاع $= 28 - 2x$

أولاً : اكتب الدالة $V(x)$ التي تمثل حجم الصندوق

$V = x(28 - 2x)(28 - 2x)$

$= x(784 - 112x + 4x^2)$

$= 784x - 112x^2 + 4x^3$

$= 4x^3 - 112x^2 + 784x$

ثانياً : ما قيمة x التي تجعل حجم الصندوق $1152cm^3$

الحل

$V = 1152$

$\Rightarrow 4x^3 - 112x^2 + 784x - 1152 = 0$

$\div 4 \Rightarrow x^3 - 28x^2 + 196x - 288 = 0$

288	2
144	2
72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$288 = 2^5 \times 3^2$

عدد العوامل $6 \times 3 = 18$

الأصفار النسبية الممكنة

$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm 32$

$\pm 3, \pm 6, \pm 12$

$\pm 24, \pm 48, \pm 96$

$\pm 9, \pm 18, \pm 36$

$\pm 72, \pm 144, \pm 288$

$V(2) = 0, \ V(8) = 0$

$x = 18$ مرفوض

$28 - 2(18) = -8$ لأنه

$x \in \{2, 8\}$

بطاقة (15) : القطوع المكافئة - 1

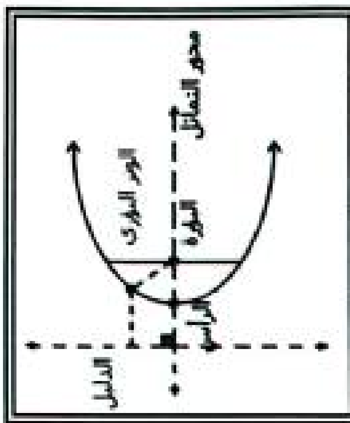
الأهداف :

1- تعريف القطع المكافئ وبيان عناصره ، 2- بيان الصورة القياسية لقطوع مكافئة رأسها نقطة الأصل

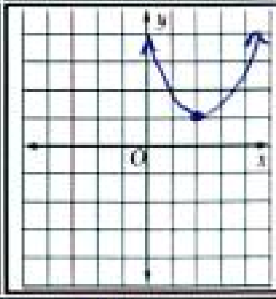
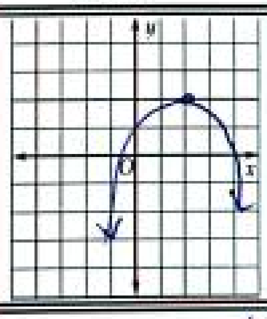
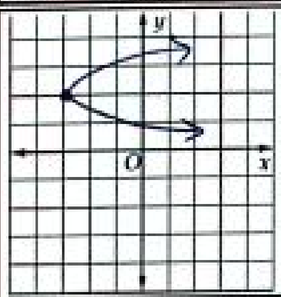
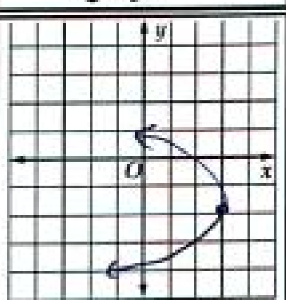
3- بيان الصورة القياسية لقطوع مكافئة رأسها نقطة الأصل ، 4- إيجاد رأس وبؤرة ودليل قطوع مكافئة بالصورة القياسية

القطع المكافئ: أنظر الكتاب صـ 78

تعريف	مجموعة النقاط جميعها في المستوى التي يكون بعد كل منها عن نقطة معطاة تسمى البؤرة مساوياً دائماً لبعدها عن مستقيم معلوم يسمى الدليل .
الوتر البؤري	القطعة المستقيمة المارة بالبؤرة والعمودية على محور التماثل .
ملاحظات	أولاً: يقع طرفي الوتر البؤري على القطع المكافئ ثانياً: تقع البؤرة على محور التماثل وفي منتصف الوتر البؤري

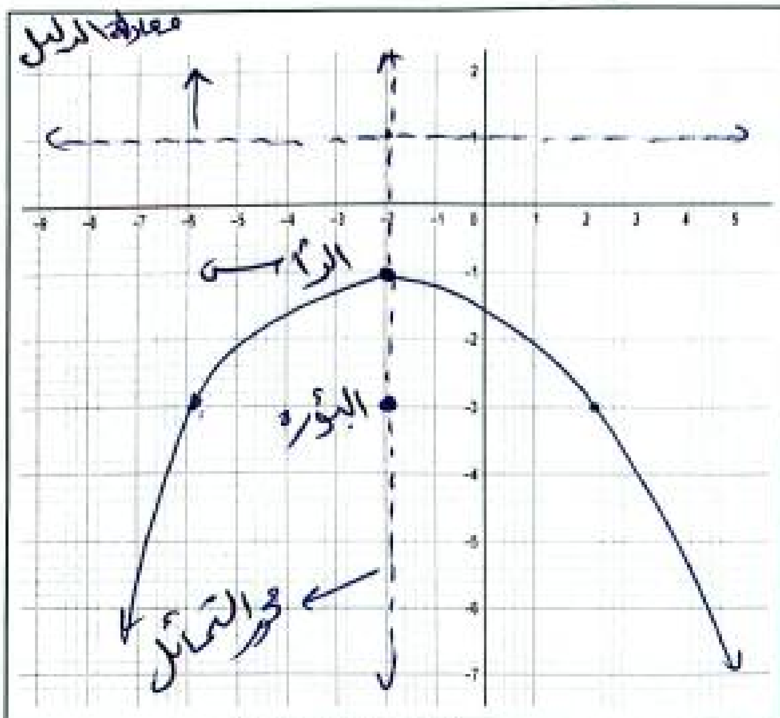


معادلات القطوع المكافئة

النوع	محور التماثل رأسي		محور التماثل أفقي	
الصورة القياسية	$y = a(x-h)^2 + k$		$x = a(y-k)^2 + h$	
الصورة العامة	$y = ax^2 + bx + c$		$x = ay^2 + by + c$	
اتجاه فتحة القطع	موجب $a > 0$ للأعلى	سالب $a < 0$ للأسفل	موجب $a > 0$ لليمين	سالب $a < 0$ لليسار
مثال				
الرأس	(h, k)		(h, k)	
معادلة محور التماثل	$x = h$		$y = k$	
البؤرة	$\left(h, k + \frac{1}{4a}\right)$		$\left(h + \frac{1}{4a}, k\right)$	
معادلة الدليل	$y = k - \frac{1}{4a}$		$x = h - \frac{1}{4a}$	
طول الوتر البؤري	$\left\lvert \frac{1}{a} \right\rvert$		$\left\lvert \frac{1}{a} \right\rvert$	

***تمرين (1):** لمعادلة القطع المكافئ أوجد المطلوب ثم مثل القطع بيانياً:

$$y = -\frac{1}{8}(x+2)^2 - 1$$



نوجد الثوابت

$a = -\frac{1}{8}, h = -2, k = -1$

(1) اتجاه فتحة المنحنى: للأسفل

(2) الرأس:

$(h, k) = (-2, -1)$

(3) معادلة محور التماثل:

$x = h \Rightarrow x = -2$

(4) البؤرة:

$(h, k + \frac{1}{4a})$

$= (-2, -1 + \frac{1}{4(-\frac{1}{8})}) = (-2, -3)$

(5) معادلة الدليل:

$y = k - \frac{1}{4a}$

$\Rightarrow y = -1 - \frac{1}{4(-\frac{1}{8})} \Rightarrow y = 1$

(6) طول الوتر البؤري:

$|\frac{1}{a}| = |\frac{1}{-\frac{1}{8}}| = 8$

***تمارين (2):** لمعادلات القطوع المكافئة أوجد المطلوب:

	المعادلة	المطلوب	الحل
1	$y = 5(x-2)^2 + 3$	الرأس	$(h, k) = (2, 3)$
2	$y = \frac{1}{2}(x-2)^2$	معادلة محور التماثل	$x = h \Rightarrow x = 2$
3	$y = 5 - x^2$	اتجاه فتحة القطع	$a = -1 \Rightarrow$ للأسفل
4	$y = \frac{1}{8}(x-2)^2$	معادلة الدليل	$a = \frac{1}{8}, h = 2, k = 0$ $y = k - \frac{1}{4a} = 0 - \frac{1}{4(\frac{1}{8})}$ $\therefore y = -2$

***تمرين (3):** لمعادلة القطع المكافئ أوجد المطلوب ثم مثل القطع بيانياً:

$$x = \frac{1}{4}(y+1)^2 + 3$$

نوجد الثوابت

$a = \frac{1}{4} , h = 3 , K = -1$

(1) اتجاه فتحة المنحنى: لليمين

(2) الرأس:

$(h, K) = (3, -1)$

(3) معادلة محور التماثل:

$y = K \Rightarrow y = -1$

(4) البؤرة:

$\left(h + \frac{1}{4a}, K\right)$

$= \left(3 + \frac{1}{4(\frac{1}{4})}, -1\right) = (4, -1)$

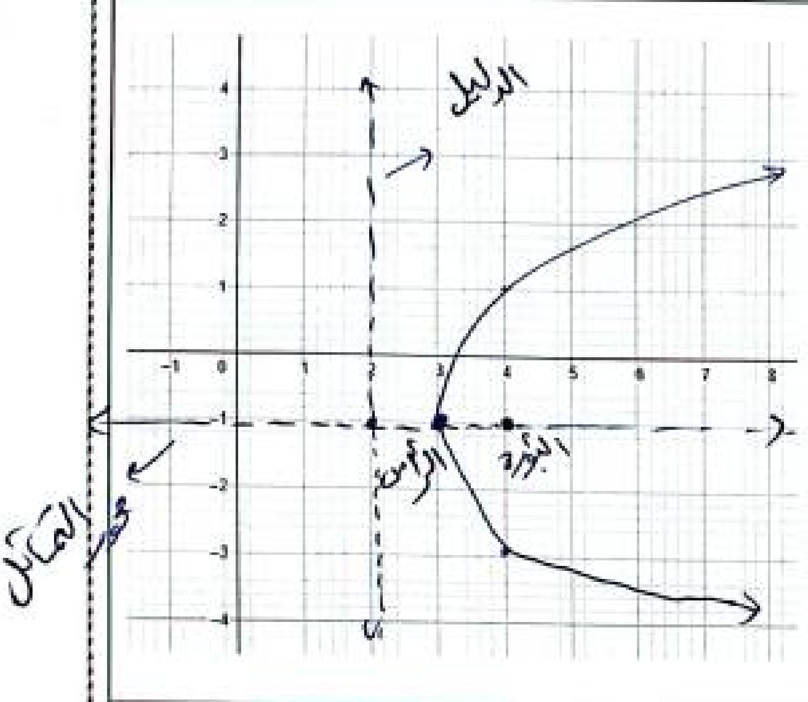
(5) معادلة الدليل:

$x = h - \frac{1}{4a} = 3 - \frac{1}{4(\frac{1}{4})}$

$\Rightarrow x = 2$

(6) طول الوتر البؤري:

$\left|\frac{1}{a}\right| = \left|\frac{1}{\frac{1}{4}}\right| = 4$



***تمارين (4):** لمعادلات القطوع المكافئة أوجد المطلوب:

	المعادلة	المطلوب	الحل
1	$x = -3 + 2(y-1)^2$	اتجاه فتحة القطع	$a = 2 \Rightarrow$ لليمين
2	$x - 1 = (y+7)^2$	الرأس	$x = (y+7)^2 + 1$; $a = 1, h = 1, K = -7$ ∴ الرأس $(h,K) = (1, -7)$
3	$x = -\frac{1}{5}y^2$	طول الوتر البؤري	$\left\|\frac{1}{a}\right\| = \left\|\frac{1}{-\frac{1}{5}}\right\| = 5$
4	$x = \frac{1}{2}(x+1)^2$; $a = \frac{1}{2}, h = -1, K = 0$	البؤرة	$\left(h + \frac{1}{4a}, K\right) = \left(-1 + \frac{1}{4(\frac{1}{2})}, 0\right) = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

بطاقة (16): القطوع المكافئة -2

الأهداف :

1- كتابة معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية ، 2- إيجاد رأس وبؤرة ودليل قطوع مكافئة بالصورة القياسية

3- تمثيل القطوع المكافئة على الصورة القياسية بيانياً

تمارين (1): اكتب معادلات القطوع المكافئة التالية على الصورة القياسية:

1) $y = x^2 - 6x + 5$

الحل:

$\left(-\frac{6}{2}\right)^2 = (-3)^2 = 9$

$y = (x^2 - 6x) + 5 = (x^2 - 6x + 9) + 5 - 9$

$\therefore y = (x-3)^2 - 4$

2) $x = y^2 - 8y + 17$

الحل

$\left(-\frac{8}{2}\right)^2 = (-4)^2 = 16$

$x = (y^2 - 8y) + 17 = (y^2 - 8y + 16) + 17 - 16$

$\therefore x = (y-4)^2 + 1$

3) $x = 4y^2 + 18 + 16y$ $\Rightarrow x = (4y^2 + 16y) + 18$

الحل:

$\left(\frac{4}{2}\right)^2 = (2)^2 = 4$

$x = 4(y^2 + 4y) + 18$

$= 4(y^2 + 4y + 4) + 18 - 4(4)$

$x = 4(y+2)^2 + 2$

4) $y = 2x^2 - 12x + 15$

$\left(\frac{-6}{2}\right)^2 = (-3)^2 = 9$

$y = 2(x^2 - 6x) + 15$

$= 2(x^2 - 6x + 9) + 15 - 2(9)$

$= 2(x-3)^2 - 3$

للصورة القياسية أنظر الصفحة السابقة

***تمارين (2):** اكتب معادلات القطوع المكافئة التالية على الصورة القياسية ثم حدد كل من اتجاه فتحة القطع، الرأس، معادلة محور التماثل، البؤرة، معادلة الدليل وطول الوتر البؤري ومثلها بيانياً : **(1-4: واجب)**

1) $y = x^2 - 6x + 5$

الحل :

الكتابة على الصورة القياسية :

$y = (x-3)^2 - 4$

$a = 1 , h = 3 , k = -4$

القطع رأسي

اتجاه فتحة القطع : للأعلى

الرأس : $(h, k) = (3, -4)$

معادلة محور التماثل : $x = h \Rightarrow x = 3$

البؤرة :

$\left(h, k + \frac{1}{4a}\right) = \left(3, -4 + \frac{1}{4(1)}\right)$

$= \left(3, -\frac{15}{4}\right)$

معادلة الدليل :

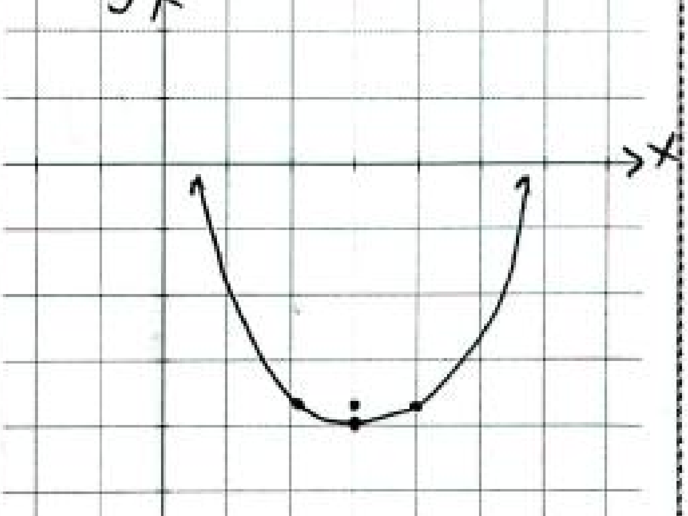
$y = k - \frac{1}{4a} = -4 - \frac{1}{4(1)} \Rightarrow$

$y = -\frac{17}{4}$

طول الوتر البؤري :

$\left|\frac{1}{a}\right| = \left|\frac{1}{1}\right| = 1$

التمثيل بيانياً :



2) $x = y^2 - 8x + 17$

الحل :

الكتابة على الصورة القياسية :

$x = (y-4)^2 + 1$

$a = 1 , h = 1 , k = 4$

القطع أفقي

اتجاه فتحة القطع : لليمين

الرأس : $(h, k) = (1, 4)$

معادلة محور التماثل : $y = k \Rightarrow y = 4$

البؤرة :

$\left(h + \frac{1}{4a}, k\right) = \left(1 + \frac{1}{4(1)}, 4\right)$

$= \left(\frac{5}{4}, 4\right)$

معادلة الدليل :

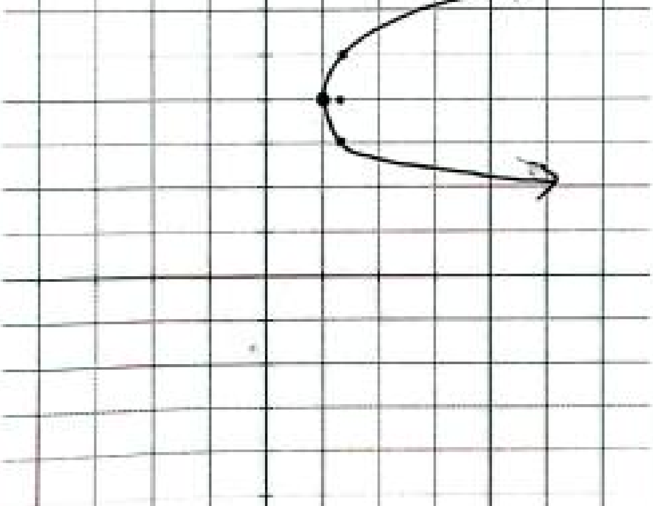
$x = h - \frac{1}{4a} = 1 - \frac{1}{4(1)}$

$\Rightarrow x = \frac{3}{4}$

طول الوتر البؤري :

$\left|\frac{1}{a}\right| = \left|\frac{1}{1}\right| = 1$

التمثيل بيانياً :



3) $y = 4x^2 + 16x + 18$

الحل :

الكتابة على الصورة القياسية :

$y = 4(x^2+4x) + 18$

$= 4(x^2+4x+4) + 18 - 4(4)$

$\therefore y = 4(x+2)^2 + 2$

$a = 4 , h = -2 , k = 2$

القطع رأسي

اتجاه فتحة القطع : للأعلى

الرأس : $(h,k) = (-2,2)$

معادلة محور التماثل : $x = h \Rightarrow x = -2$

البؤرة :

$(h, k+\frac{1}{4a}) = (-2, 2+\frac{1}{4(4)})$

$= (-2, \frac{33}{16})$

معادلة الدليل :

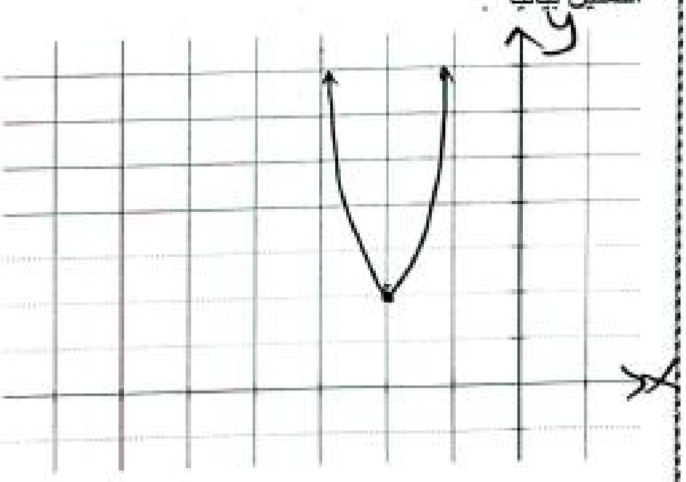
$y = k - \frac{1}{4a} = 2 - \frac{1}{4(4)}$

$\therefore y = \frac{31}{16}$

طول الوتر البؤري :

$|\frac{1}{a}| = |\frac{1}{4}| = \frac{1}{4}$

التمثيل بيانياً :



4) $x = 2y^2 - 12y + 15$

الحل :

الكتابة على الصورة القياسية :

$x = 2(y^2-6y) + 15$

$= 2(y^2-6y+9) + 15 - 2(9)$

$x = 2(y-3)^2 - 3$

$a = 2 , h = -3 , k = 3$

القطع أفقي

اتجاه فتحة القطع : لليمين

الرأس : $(h,k) = (-3,3)$

معادلة محور التماثل : $y = k \Rightarrow y = 3$

البؤرة :

$(h+\frac{1}{4a}, k) = (-3+\frac{1}{4(2)}, 3)$

$= (\frac{-23}{8}, 3)$

معادلة الدليل :

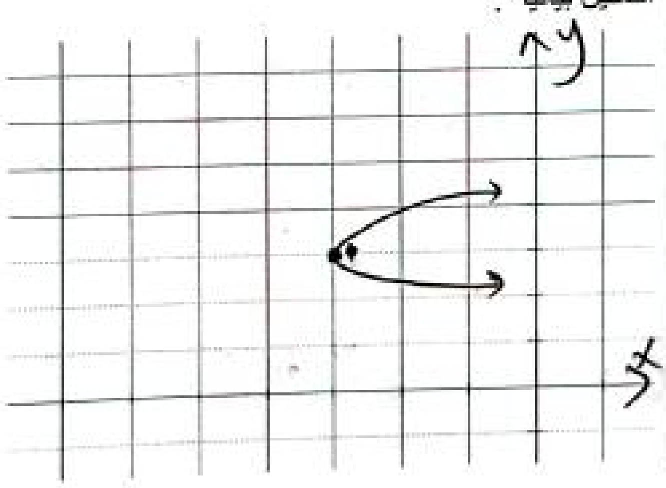
$x = h - \frac{1}{4a} = -3 - \frac{1}{4(2)}$

$\therefore x = \frac{-25}{8}$

طول الوتر البؤري :

$|\frac{1}{a}| = |\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$

التمثيل بيانياً :



$5)\ x + 3y^2 + 12y = -5$

الحل :

الكتابة على الصورة القياسية :

$x = (-3y^2 - 12y) - 5$

$= -3(y^2 + 4y) - 5$

$= -3(y^2 + 4y + 4) - 5 - 4(-3)$

$x = -3(y+2)^2 + 7$

القطع أفقي

$a = -3,\ h = 7,\ k = -2$

اتجاه فتحة القطع : لليسار

الرأس : $(h,k) = (7, -2)$

معادلة محور التماثل : $y = k \Rightarrow y = -2$

البؤرة :

$\left(h + \frac{1}{4a}, k\right) = \left(7 + \frac{1}{4(-3)}, -2\right)$

$= \left(\frac{83}{12}, -2\right)$

معادلة الدليل :

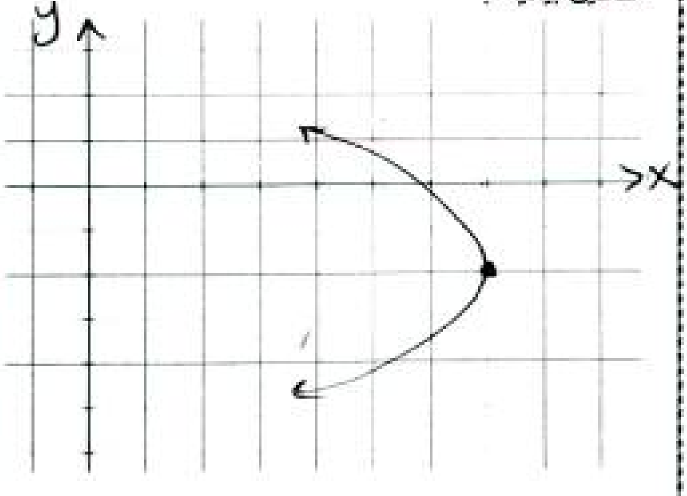
$x = h - \frac{1}{4a} = 7 - \frac{1}{4(-3)}$

$x = \frac{85}{12}$

طول الوتر البؤري :

$\left|\frac{1}{a}\right| = \left|\frac{1}{-3}\right| = \frac{1}{3}$

التمثيل بيانيا :



$6)\ 3x - y^2 = 5x - 4y + 6$

الحل :

الكتابة على الصورة القياسية :

$3x - 5x = (y^2 - 4y) + 6$

$-2x = (y^2 - 4y + 4) + 6 - 4$

$-2x = (y-2)^2 + 2$

$\xrightarrow{\div -2}\ x = -\frac{1}{2}(y-2)^2 - 1$

القطع أفقي

$a = -\frac{1}{2},\ h = -1,\ k = 2$

اتجاه فتحة القطع : لليسار

الرأس : $(h,k) = (-1, 2)$

معادلة محور التماثل : $y = k \Rightarrow y = 2$

البؤرة :

$\left(h + \frac{1}{4a}, k\right) = \left(-1 + \frac{1}{4(-\frac{1}{2})}, 2\right)$

$= \left(-\frac{3}{2}, 2\right)$

معادلة الدليل :

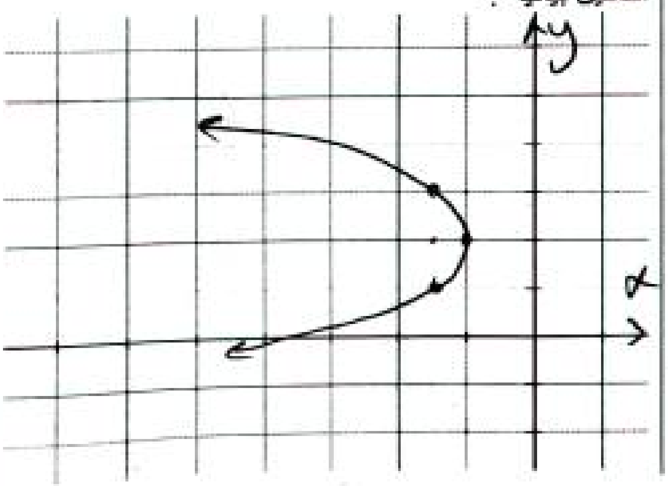
$x = h - \frac{1}{4a} = -1 - \frac{1}{4(-\frac{1}{2})}$

$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

طول الوتر البؤري :

$\left|\frac{1}{a}\right| = \left|\frac{1}{\frac{1}{2}}\right| = 2$

التمثيل بيانيا :



إعداد: أ.عبدالرزاه حسن أحمد | صف (41) صحة | ريض ٢٦٣

بطاقة (17): القطوع المكافئة -3

الأهداف :

1- إيجاد معادلة قطع مكافئ بمعلومية بعض عناصره ، 2- تطبيق القطع المكافئ في حل مسائل حياتية

تمارين (1): أوجد معادلة كل قطع مكافئ فيما يأتي ثم مثلها بيانياً:

أولاً : الرأس $(0,2)$ والبؤرة $(0,4)$

الحل :

معادلة القطع: $y=a(x-h)^2+k$

الرأس $(0,2) \Leftarrow h=0, k=2$

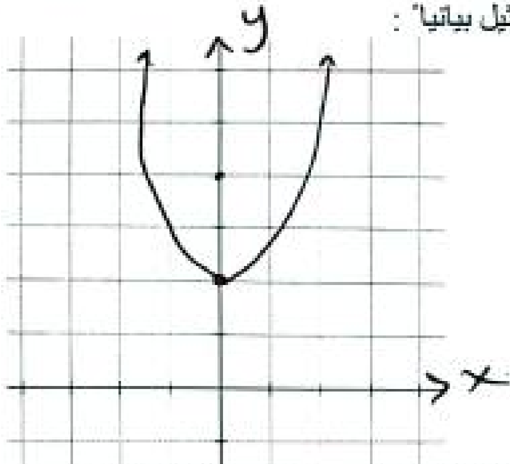
المسافة بين الرأس والبؤرة $= 2$

$\therefore \frac{1}{4a}=2 \Rightarrow 8a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{8}$

المعادلة هي :

$y=\frac{1}{8}x^2+2$

التمثيل بيانياً :



ثانياً : الرأس $(8,6)$ والبؤرة $(2,6)$

الحل :

معادلة القطع: $x=a(y-k)^2+h$

الرأس $(8,6) \Rightarrow h=8, k=6$

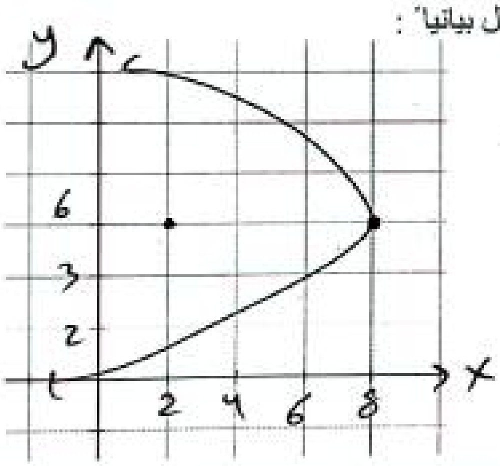
المسافة بين الرأس والبؤرة $= 6$

$-\frac{1}{4a}=6 \Rightarrow 24a=-1$

$\Rightarrow a=-\frac{1}{24}$

المعادلة هي : $x=-\frac{1}{24}(y-6)^2+8$

التمثيل بيانياً :



ثالثاً : الرأس $(-2,4)$ ومعادلة الدليل $x=-1$

الحل :

معادلة القطع: $x=a(y-k)^2+h$

الرأس $(-2,4) \Leftarrow h=-2, k=4$

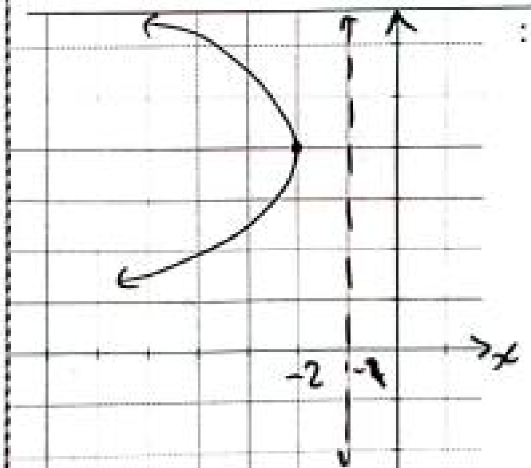
المسافة بين الرأس والدليل $= 1$

$-\frac{1}{4a}=1 \Rightarrow 4a=-1 \Rightarrow a=-\frac{1}{4}$

معادلة هي :

$x=-\frac{1}{4}(y-4)^2-2$

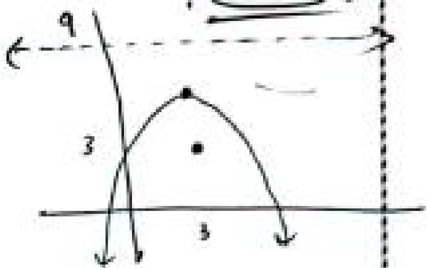
التمثيل بيانياً :



***تمارين (2):** أوجد معادلة كل قطع مكافئ فيما يأتي:

أولاً : البؤرة $(3,3)$ ومعادلة الدليل $y = 9$

الحل :



معادلة القطع

$y = a(x-h)^2 + k$

الرأس : $\left(3, \frac{3+9}{2}\right) = (3,6)$

$\therefore h = 3 , k = 6$

المسافة بين الرأس $(3,6)$ و البؤرة $(3,3)$ تساوي 3

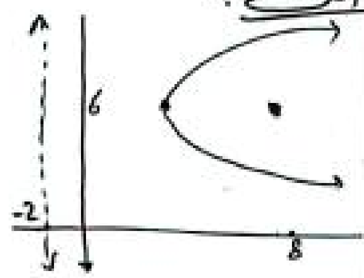
$-\frac{1}{4a} = 3 \Rightarrow 12a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{12}$

$\therefore$ المعادلة هي :

$y = -\frac{1}{12}(x-3)^2 + 6$

ثانياً : البؤرة $(8,6)$ ومعادلة الدليل $x = -2$

الحل :



معادلة القطع

$x = a(y-k)^2 + h$

الرأس : $\left(\frac{8+-2}{2}, 6\right) = (3,6)$

$\therefore h = 3 , k = 6$

المسافة بين الرأس $(3,6)$ والبؤرة $(8,6) = 5$

$\frac{1}{4a} = 5 \Rightarrow 20a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{20}$

$\therefore$ معادلة القطع

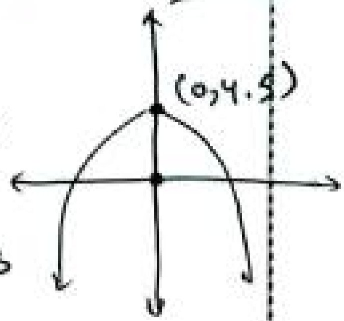
$x = \frac{1}{20}(y-6)^2 + 3$

***تمرين (3):** أوجد المعادلة لمرآة قطع مكافئ تقع بؤرتها أسفل رأس القطع بمقدار $4.5ft$، علماً بأن طول الوتر البؤري $18ft$ ، وأن البؤرة تمثل نقطة الأصل.

الحل :

المعادلة هي :

$y = a(x-h)^2 + k$



الرأس $(0,4.5)$

$h = 0 , k = 4.5$

طول الوتر البؤري $= 18$

$\left|\frac{1}{a}\right| = 18$

$-\frac{1}{a} = 18 \Rightarrow 18a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{18}$

المعادلة هي :

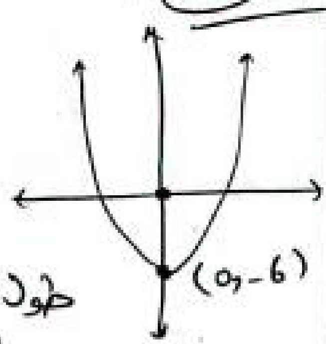
$y = -\frac{1}{18}x^2 + 4.5$

***تمرين (4):** لدينا سطح زئبقي على صورة قطع مكافئ، اذا وقعت البؤرة أعلى الرأس وعلى بعد $6ft$ وكان طول الوتر البؤري $24ft$. اكتب معادلة للقطع المكافئ على افتراض أن البؤرة عند نقطة الأصل.

الحل :

المعادلة هي :

$y = a(x-h)^2 + k$



الرأس $(0,-6)$

$h = 0 , k = -6$

طول الوتر البؤري $= 24$

$\left|\frac{1}{a}\right| = 24$

$\frac{1}{a} = 24 \Rightarrow 24a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{24}$

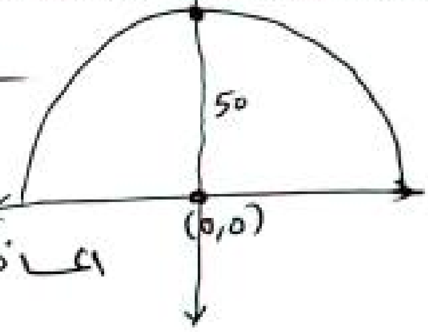
المعادلة هي :

$y = +\frac{1}{24}x^2 - 6$

***تمرين (5): 32 من الكتاب المدرسي صـ 82**

عند قذف كرة سلة، فإن المسار الذي تسلكه يكون قطعاً مكافئاً. افترض أن كرة قذفت من سطح الأرض وكان أقصى ارتفاع وصلت إليه $50ft$ ، وافترض أن نقطة وصولها للأرض تبعد عن النقطة التي قذفت منها $200ft$.

افترض كذلك أن هذا الوضع يمكن تمثيله على مستوى إحداثيات، حيث تقع البؤرة عند نقطة الأصل ، فأوجد معادلة للمسار الذي سلكته الكرة على افتراض أن البؤرة تقع على سطح الأرض.



الحل : القطع رأسي

$\Leftarrow$ $y=a(x-h)^2+k$

الرأس $(0,50) \Leftarrow$ $h=0 , k=50$

المسافة بين الرأس و البؤرة $= -\frac{1}{4a}$

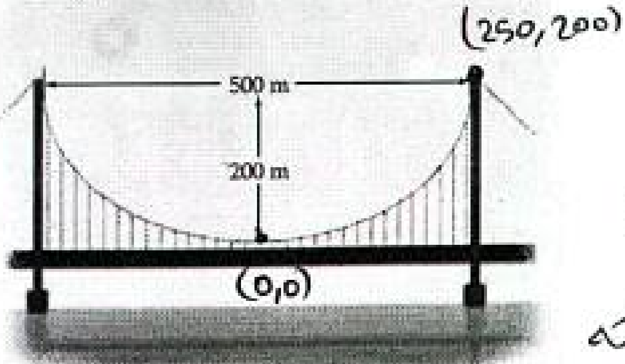
$-\frac{1}{4a}=50 \Rightarrow 200a=-1 \Rightarrow a=-\frac{1}{200}$

$\therefore$ المعادلة هي : $y=-\frac{1}{200}x^2+50$

***تمرين (6): 5 من الكتاب المدرسي صـ 102**

اكتب معادلة قطع مكافئ لتمثل السلك المعلق للجسر كما هو موضح بالشكل.

افترض أن نقطة الأصل تقع عند أدنى نقطة من السلك



الحل :

معادلة القطع : $y=a(x-h)^2+k$

الرأس $(0,0) \Leftarrow h=k=0$

$(250,200)$ تقع على القطع $\Leftarrow$ $\therefore$ تحقق معادلته

$200=a(250)^2 \Rightarrow a=\frac{200}{(250)^2}=\frac{2}{625}$

$\Leftarrow$ المعادلة هي : $y=\frac{2}{625}x^2$

***تمرين (7): 19 من الكتاب المدرسي صـ 123**

عندما تركل الكرة يكون مسارها على شكل قطع مكافئ. افترض أنه تم ركل كرة من مستوى الأرض ووصلت أقصى ارتفاع لها هو $50ft$ ، ولامست الأرض على بعد $200ft$ من النقطة التي ركلت منها، وافترض أن الكرة ركلت من نقطة الأصل. أوجد معادلة القطع المكافئ الذي يمثل مسار الكرة.

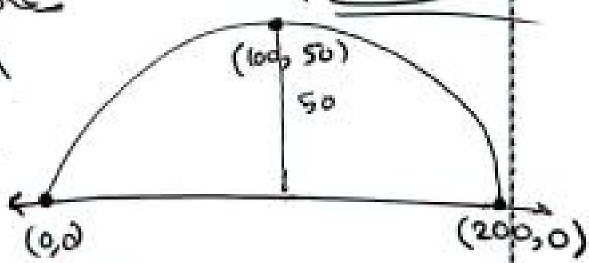
الحل :

معادلة القطع : $y=a(x-h)^2+k$

الرأس $(100,50) \Leftarrow h=100 , k=50$

النقطة $(200,0)$ تقع على القطع

نعوض في المعادلة $y=a(x-100)^2+50$



$\Rightarrow 0=a(200-100)^2+50 \Rightarrow 10000a=-50$

$\Rightarrow a=\frac{-50}{10000}=-\frac{1}{200} \Rightarrow y=-\frac{1}{200}(x-100)^2+50$ المعادلة هي

بطاقة (18) : الدوائر -1

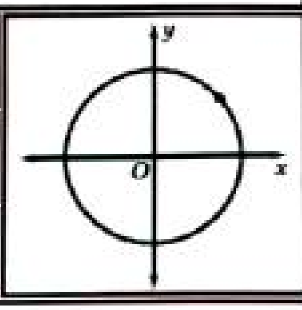
الأهداف :

1- التعرف على الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة ، 2- إيجاد معادلة الدائرة من التمثيل البياني

3- إيجاد معادلة الدائرة بمعلومية نهايتي قطر فيه ، 4- إيجاد مركز ونصف قطر دائرة بمعلومية الصيغة القياسية لها

5- كتابة معادلة الدائرة بإكمال المربع وتمثيلها بيانياً ، 6- تطبيق معادلة الدائرة في حل مسائل حياتية

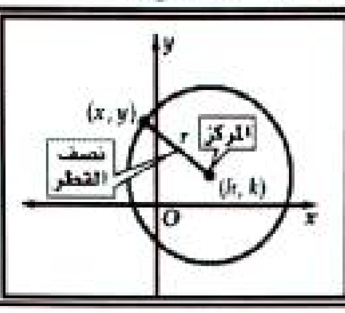
معادلة الدائرة



المعادلة : $x^2 + y^2 = r^2$

المركز : $(0,0)$

نصف القطر : r



المعادلة : $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

المركز : (h, k)

نصف القطر : r

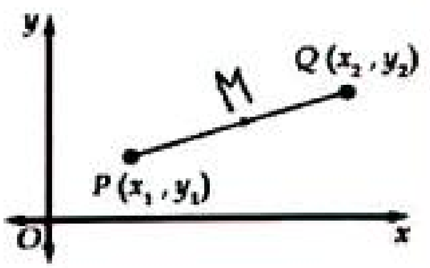
تذكر أن

المسافة بين نقطتين

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

نقطة المنتصف

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



***تمارين (1):** أوجد معادلة الدائرة اذا علمت أن :

أولاً: المركز (3-, 1) وطول نصف القطر 4 ← r

h k

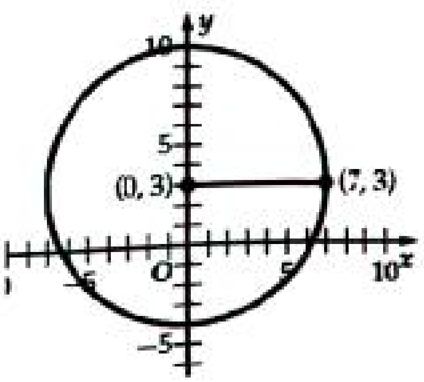
الحل :

المعادلة هي

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$(x+3)^2 + (y-1)^2 = 16$$

ثانياً:

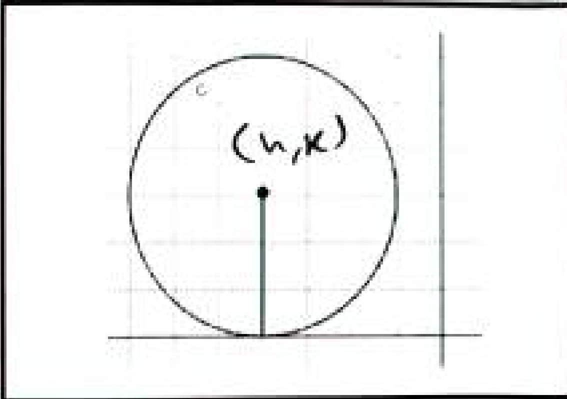
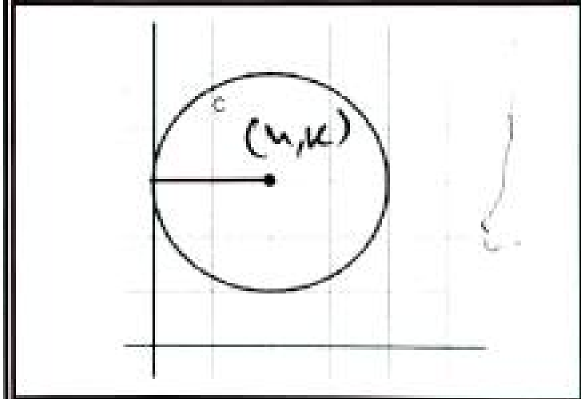


المركز $(0,3)$ ، $r = |7-0| = 7$

المعادلة هي

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$x^2 + (y-3)^2 = 49$$

حالات تماس الدائرة للمحورين	إذا مست الدائرة محور x	إذا مست الدائرة محور y
		
	$r = \lvert k \rvert$	$r = \lvert h \rvert$

***تمارين (2):** أوجد معادلة الدائرة اذا علمت أن :

أولاً: المركز $(-4, 5)$ وتمس المحور Y

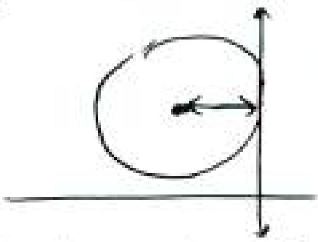
الحل :

$r = |h| = 4$

المعادلة هي :

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$(x+4)^2 + (y-5)^2 = 16$



ثانياً: المركز $(2, 4)$ وتمس المحور x

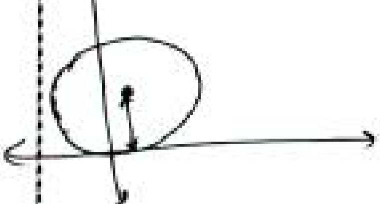
الحل :

$r = |k| = 4$

المعادلة هي :

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 16$



ثالثاً: يقع المركز في الربع الثاني وتمس المستقيمين $y = 5$, $y = 1$ والمحور Y

الحل :

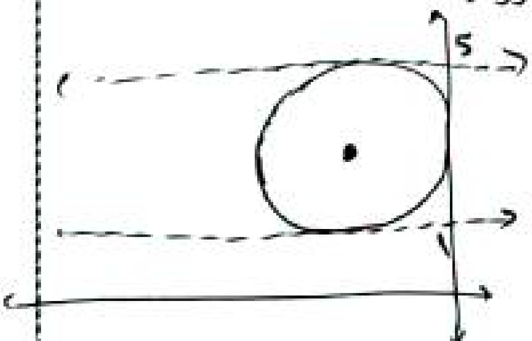
$|5-1| = 4$ طول القطر

$r = 2$ ، المركز $(-2, 3)$

المعادلة هي :

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$



رابعاً: مركزها $\overset{h\ \ k}{(-3 , 1)}$ وتمر بالنقطة $(2 , -1)$

الحل :

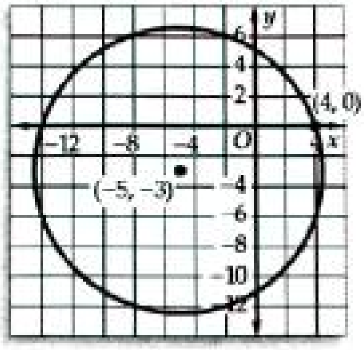
$$r=\sqrt{(2+3)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{29}$$

المعادلة هي :

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

$$(x+3)^2+(y-1)^2=29$$

خامساً :



المركز $\overset{h\ \ k}{(-5,-3)}$

$$r=\sqrt{(-5-4)^2+(-3-0)^2}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$$

المعادلة هي :

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

$$(x+5)^2+(y+3)^2=90$$

سادساً: طرفا قطر فيها $(1 , 5) , (3 , -3)$

الحل :

المركز :

$$\left(\frac{3+1}{2},\frac{-3+5}{2}\right)=\overset{h\ \ k}{(2,1)}$$

نصف القطر :

توجد المسافة بين المركز $(2,1)$ وأحد النقطتين ولتكن $(1,5)$

$$r=\sqrt{(5-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{17}$$

المعادلة هي :

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

$$(x-2)^2+(y-1)^2=17$$

سابعاً: طرفا قطر فيها $(6 , 3) , (2 , -5)$

الحل :

المركز

$$\left(\frac{2+6}{2},\frac{-5+3}{2}\right)=\underset{h\ \ k}{(4,-1)}$$

نصف القطر :

المسافة بين المركز $(4,-1)$ والنقطة $(6,3)$

$$r=\sqrt{(3+1)^2+(6-4)^2}=\sqrt{20}$$

المعادلة هي :

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

$$(x-4)^2+(y+1)^2=20$$

بطاقة (19) : الدوائر-2

الأهداف :

1- إيجاد مركز ونصف قطر دائرة بمعلومية الصيغة القياسية لها

2- كتابة معادلة الدائرة على الصورة القياسية مع تمثيلها بيانياً

3- تطبيق معادلة الدائرة في حل مسائل حياتية

***تمارين (1):** أوجد المركز ونصف قطر كل دائرة مبين معادلتها فيما يأتي ثم مثلها بيانياً :

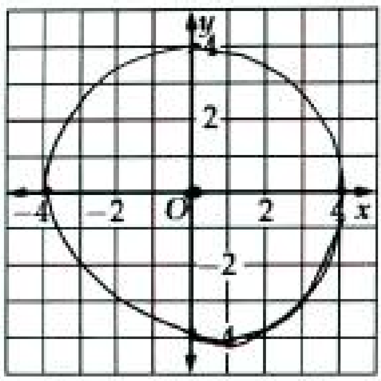
1) $x^2 + y^2 - 16 = 0$

الحل :

$x^2 + y^2 = 16$

المركز $(0,0)$

نصف القطر : $r = \sqrt{16} = 4$

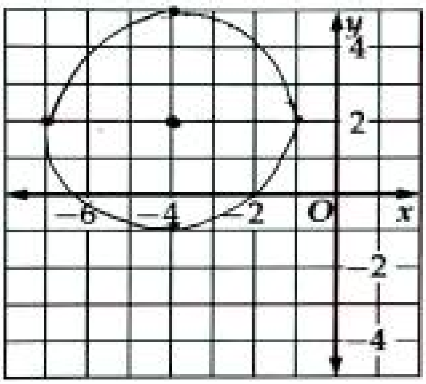


2) $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 9$

الحل

المركز $(-4, 2)$

نصف القطر $r = 3$



3) $4x^2 + 4(y-2)^2 = 16$

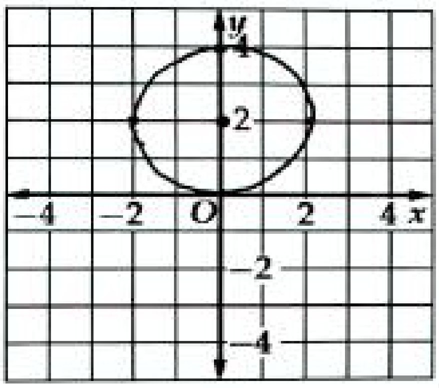
÷٤

الحل :

$x^2 + (y-2)^2 = 4$

المركز $(0,2)$

نصف القطر : $r = 2$



***تمارين (2):** اكتب معادلات الدائرة التالية على الصورة القياسية ثم أوجد المركز ونصف القطر لها :

1) $x^2 + y^2 - 6y + 8x = 0$

الحل :

$(x^2 + 8x) + (y^2 - 6y) = 0$

$\left(\frac{8}{2}\right)^2 = 16$

$\left(-\frac{6}{2}\right)^2 = 9$

$(x^2 + 8x + 16) + (y^2 - 6y + 9)$

$= 0 + 16 + 9$

$(x+4)^2 + (y-3)^2 = 25$

المركز : $(-4, 3)$

نصف القطر : $r = 5$

2) $x^2 + y^2 + 2x + 4y = 9$

الحل :

$(x^2 + 2x) + (y^2 + 4y) = 9$

$\left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1$

$\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4$

$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4)$

$= 9 + 1 + 4$

$(x+1)^2 + (y+2)^2 = 14$

المركز $(-1, -2)$

نصف القطر $r = \sqrt{14}$

مربع كامل

3) $x^2 + 2\sqrt{7}x + 7 + (y - \sqrt{11})^2 = 11$

الحل:

$(x+\sqrt{7})^2 + (y-\sqrt{11})^2 = 11$

المركز: $(-\sqrt{7}, \sqrt{11})$

نصف القطر: $r = \sqrt{11}$

4) $3x^2 + 3y^2 - 6y + 12x = 24$

الحل:

$(3x^2+12x) + (3y^2-6y) = 24$

$3(x^2+4x) + 3(y^2-2y) = 24$

$3(x^2+4x+4) + 3(y^2-2y+1) = 24 + 3(4) + 3(1)$

$3(x+2)^2 + 3(y-1)^2 = 39$

$\xRightarrow{\div 3} (x+2)^2 + (y-1)^2 = 13$

المركز: $(-2, 1)$

نصف القطر: $r = \sqrt{13}$

5) $4x^2 + (4y^2 + 36y) = -5$

الحل:

$4x^2 + 4(y^2+9y) = -5$

$4x^2 + 4(y^2+9y+\frac{81}{4}) = -5 + 4(\frac{81}{4})$

$\left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}$

$4x^2 + 4(y+\frac{9}{2})^2 = 76$

$\xRightarrow{\div 4} x^2 + (y+\frac{9}{2})^2 = 19$

المركز: $(0, -\frac{9}{2})$

نصف القطر: $r = \sqrt{19}$

***تمرين (3):**

موقع الرادار لبرج المراقبة في أحد المطارات عند النقطة $(5, 10)$ فإذا كان الرادار يستطيع كشف الطائرة على بعد $20\ mi$ ، فاكتب معادلة للحدود الخارجية لمنطقة الكشف.

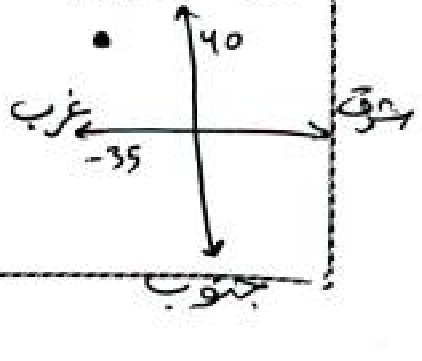
الحل: المركز $(\overset{h}{5}, \overset{k}{10})$ ، نصف القطر: $r = 20$

المعادلة هي: $(x-5)^2 + (y-10)^2 = 400$

***تمرين (4):**

افترض أن قرية تقع على بعد $35\ mi$ تقريباً غرب عاصمة دولة ما وإلى جهة الشمال من العاصمة بمقدار $40\ mi$ وأنه توجد هزة أرضية مركزها القرية وأثرها يكون على بعد $55\ mi$ من العاصمة. مفترضاً أن العاصمة تقع عند نقطة الأصل، فاكتب معادلة لمجموعة النقاط جميعها التي تمثل حدوداً لأثر هذه الهزة.

الحل: المركز $(-35, 40)$ ، $r = 55$



المعادلة هي:

$(x+35)^2 + (y-40)^2 = (55)^2$

$(x+35)^2 + (y-40)^2 = 3025$

$$\frac{\sum (x_i - \mu)^2}{n}$$

◄ هامش خطأ المعاينة

عند سحب عينة حجمها n من مجتمع كلي، فإنّه يمكن تقريب هامش الخطأ في المعاينة بالقيمة $\pm \frac{1}{\sqrt{n}}$

تمرين (5): في دراسة مسحية شملت 3247 شخصاً، قال 41% منهم أنهما مرتاحون للنهضة العلمية.

أولاً : ما هامش خطأ المعاينة ؟

$n = 3247$

هامش خطأ المعاينة :

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{n}} = \pm \frac{1}{\sqrt{3247}} \approx \pm 0.0175 \approx \pm 1.75\%$$

هامش خطأ المعاينة $\approx \pm 1.75\%$

ثانياً : ما الفترة الممكنة التي تحتوي على نسبة أفراد المجتمع المرتاحين للنهضة العلمية؟

$(41 - 1.75)\% = 39.25\%$

$(41 + 1.75)\% = 42.75\%$

إذاً الفترة الممكنة التي تحتوي على نسبة أفراد المجتمع المرتاحين للنهضة العلمية بين 39.25% و 42.75%

تمارين (6): في دراسة مسحية شملت 5669 شخصاً قال 31% أنهم يشاهدون مباراة واحدة على الأقل في كرة القدم شهرياً .

n

أولاً : ما هامش خطأ المعاينة ؟

$$\pm \frac{1}{\sqrt{n}} = \pm \frac{1}{\sqrt{5669}} \approx \pm 0.0133$$

$$= \pm 1.33\%$$

ثانياً : ما الفترة الممكنة التي تحتوي على نسبة المجتمع الكلي الذين يشاهدون مباراة واحدة على الأقل في كرة القدم شهرياً ؟

$(31 - 1.33)\% = 29.67\%$

$(31 + 1.33)\% = 32.33\%$

الفترة الممكنة هي بين 29.67% و 32.33%

تمرين (7): احسب عدد الأشخاص الذين شملتهم دراسة مسحية عشوائية هامش خطأ المعاينة فيها 1.54% $\pm$

هامش الخطأ $= \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\pm \frac{1}{\sqrt{n}} = \pm 0.0154$

$\frac{1}{n} = (0.0154)^2$

$n = \frac{1}{(0.0154)^2}$

≈ 4217 شخص

تمرين (2):
القيم التالية تبين أطوال 5 لاعبين لفريق في كرة السلة :
180 , 177 , 188 , 170 , 192 cm.
أوجد الانحراف المعياري لهذه المجتمع .

الحل :

$$\mu = \frac{180 + 177 + 188 + 170 + 192}{5}$$

الوسط $\mu = 181.4$

$$\sigma^2 = \frac{(180 - 181.4)^2 + (177 - 181.4)^2 + (188 - 181.4)^2 + (170 - 181.4)^2 + (192 - 181.4)^2}{5}$$

$\sigma^2 = 61.44$ التباين

الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{61.44} \approx 7.8$

تمرين (3):
احسب الإنحراف المعياري لعينة تتكون من 5 قيم ومجموع مربعات الإنحرافات عن الوسط يساوي 2500

n

الحل

$$S = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{2500}{4}} = 25$$

تمرين (4): احسب عدد قيم مجتمع إنحرافها المعياري 7 و مجموع مربعات إنحرافات قيمها عن الوسط 735

الحل.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \mu)^2}{n}}$$

$$7 = \sqrt{\frac{735}{n}} \xrightarrow{\text{بالتربيع}} 49 = \frac{735}{n}$$

$$49n = 735 \Rightarrow n = \frac{735}{49} = 15$$

بطاقة (22) : الإحتمال المشروط-1

الأهداف :

1- بيان قوانين الإحتمال الأساسية ، 2- بيان قانون الإحتمال المشروط ، 3- حل مسائل على الإحتمال المشروط

قوانين الإحتمال

◄ **الاحتمال :** هو نسبة تقيس فرصة وقوع حدث معين

◄ **القانون الأساسي للإحتمال :**

احتمال وقوع الحدث A

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{عدد عناصر الحدث } A}{\text{عدد عناصر فضاء العينة}}$$

◄ **قوانين احتمالات الأحداث المركبة**

A , B حدثان مستقلان	$P(A \cap B) = P(A).P(B)$
A , B حدثان متنافيان	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
A , B حدثان غير متنافيان	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

◄ **الاحتمال المشروط**

إحتمال وقوع الحدث B بشرط وقوع A

$$P(B \backslash A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, P(A) \neq 0$$

***تمرين (1):**

ألقى حسين حجر نرد مرةً واحدة ، فما احتمال :

$n = 6$

أولاً: ظهور عدد فردي A

$\{1, 3, 5\}$ $K = 3$

$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

ثانياً: ظهور عدد أصغر من 4

$B = \{1, 2, 3\}$

$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

ثالثاً:ظهور العدد 5 A علماً بأن العدد الظاهر فردي B

$A = \{5\}$

$B = \{1, 3, 5\}$

$A \cap B = \{5\}$

$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$

حل آخر (الفضاء المشروط)

$B = \{1, 3, 5\}$

$P = \frac{1}{3}$

رابعاً: ظهور عدد أكبر من 3 علماً بأن العدد الظاهر زوجي

$\{2, 4, 6\}$

$P = \frac{2}{3}$

خامساً : ظهور العدد 2 علماً بأن العدد الظاهر أقل من 5 .

$\{1, 2, 3, 4\}$

$P = \frac{1}{4}$

***تمرين (2):** صندوق به بطاقات مرقمة من 1 إلى 10 . تم سحب بطاقة عشوائياً فأوجد إحتمال

$n = 10$

أولاً: ظهور عدد زوجي أكبر من 5 A

$A: \{6, 8, 10\}$

$P(A) = \frac{3}{10}$

ثانياً: ظهور عدد لا يزيد عن 7 علماً بأن ما تم سحبه فردي

$\{1, 3, 5, 7, 9\}$

$P = \frac{4}{5}$

ثالثاً: ظهور عدد فردي علماً بأن ما تم سحبه ليس عدداولي

$\{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$

$P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

***تمرين (3):** يحتوي كيس على 52 بطاقة مقسمة إلى 4 مجموعات لكل منها لون من الألوان الآتية : الأحمر و الأخضر والأزرق والأصفر ، ورقمت بطاقات كل لون بالأرقام من 1 إلى 13 .

إذا سحبت نوال بطاقة ، فما احتمال أن تكون البطاقة

أولاً: تحمل رقم 13 علماً بأن ما سحبته كان رقم 11 أو 12 أو 13 ؟

الحل :

٤ بطاقات تحمل رقم 11، 12، 13 ⟸ $n = 4 \times 3 = 12$

تحمل الرقم 13 ⟵ ٤ بطاقات

$$P = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

ثانياً: تحمل الرقم 7 علماً بأن ما سحبته كان بطاقة تحمل رقم فردي .

$$\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\} \Rightarrow n = 7 \times 4 = 28$$

$$P = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}$$

***تمرين (4):** يحتوي كيس على 8 كرات زرقاء (B) و 6 كرات حمراء (R) و 5 كرات خضراء (G) .

سحبت كرة واحدة في كل مرة فأوجد إحتمال أن الكرة:

$$n = 8 + 6 + 5 = 19$$

أولاً: الثانية خضراء علماً بأن الأولى زرقاء دون إرجاع .

$G = 5$, $R = 6$, $B = 7$

$$P = \frac{5}{18}$$

ثانياً: الثانية حمراء علماً بأن الأولى خضراء مع الإرجاع

$R = 6$, $B = 8$, $G = 5$

$$P = \frac{6}{19}$$

ثالثاً: الثالثة حمراء علماً بأن الأولى حمراء و الثانية زرقاء و دون إرجاع .

$R = 5$, $B = 7$, $G = 5$

$$P = \frac{5}{17}$$

بطاقة (23) : الاحتمال المشروط - 2

الأهداف :
حل مسائل على الإحتمال المشروط للجداول التوافقية

*__تمرين (1):__ يوضح الجدول أداء الطلاب في إمتحان القيادة الأول ، علماً بأن البعض أخذ حصصاً تحضيراً للإمتحان و البعض الأخر لم يأخذ :

$n = 64+48+18+32 = 162$

	أخذ حصصاً (C)	لم يأخذ حصصاً (D)
ناجح (A)	64	48
راسب (B)	18	32

لم يأخذ حصص

أولاً: إختير أحد الطلاب عشوائياً ، ما احتمال أن يكون لم يأخذ حصصاً للتحضير للإمتحان ؟

$$P(D) = \frac{48+32}{162} = \frac{80}{162} \simeq 0.49 = 49\%$$

عدد الطلاب الكلي

ثانياً: ما احتمال أن ينجح راشد، علما بأنه أخذ حصصا؟

$$P(A/C) = \frac{P(A\cap C)}{P(C)} = \frac{64}{64+18} \simeq 0.78$$

أخذ حصص

ثالثاً: ما احتمال أن يرسب خالد، علما بأنه لم يأخذ حصصا؟

$$P(B/D) = \frac{P(B\cap D)}{P(D)} = \frac{32}{48+32} = 0.4$$

رابعاً: ما احتمال ألا يأخذ جميل حصصنا، علما بأنه ناجح؟

$$P(D/A) = \frac{P(D\cap A)}{P(A)} = \frac{48}{64+48} \simeq 0.43$$

*__تمرين (2):__

	أولى (C)	ثانية (D)	ثالثة (E)	رابعة (F)
الحضور (A)	48	90	224	254
الغياب (B)	182	141	36	8

إختير أحد الطلبة عشوائياً ، فما احتمال أن يكون الطالب قد حضر المباراة علماً بأنه من السنة الثالثة .

91.6% D 86.2% C 77.6% B 48.6% A

$$P(A/E) = \frac{P(A\cap E)}{P(E)} = \frac{224}{224+36} \simeq 0.862$$

***تمرين (3):**

$n = 156 + 242 + 312 + 108 = 818$

	مشارك (C)	غير مشارك (D)
الثاني الإعدادي (A)	156	242
الثالث الإعدادي (B)	312	108

إختير أحد الطلاب عشوائياً ، أوجد احتمال أن الطالب :

أولاً: في صف ثالث إعدادي

$$P(B) = \frac{312+108}{818} \simeq 0.51 = 51\%$$

ثانياً: مشارك بالنادي ، علماً بانه في صف ثاني إعدادي

$$P(C/A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{156}{156+242} \simeq 0.39$$

ثالثاً: غير مشارك بالنادي، علماً بانه في ثالث إعدادي

$$P(D/B) = \frac{P(D \cap B)}{P(B)} = \frac{108}{312+108} \simeq 0.26$$

رابعاً: في صف ثالث إعدادي ،علماً بانه غير مشارك .

$$P(B/D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{108}{242+108} \simeq 0.31$$

***تمرين (4):**

	فكاهي ( )	اجتماعي ( )	خليط ( )
عادل ( )	521	316	44
إبراهيم ( )	119	145	302
سعود ( )	244	4	182

اختير مثل عشوائياً ، فما احتمال أن يكون المثل اجتماعياً علماً بانه ليس مما جمعه عادل ← ناقد إبراهيم وسعود

15% (D) 17.2% C 24.8% B 35.9% A

$$P = \frac{145+4}{119+145+302+244+4+182} \simeq 0.15 = 15\%$$

بطاقة (24) : الاحتمال المشروط - 3

الأهداف :
تطبيق الاحتمال المشروط في حل مسائل متنوعة

*__تمرين (1):__ إذا ألقي مكعبان متمايزان مرقمان بالأعداد من 1 إلى 6 مرة واحدة ، فما احتمال كل مما يأتي

$n = 6 \times 6 = 36$

أولاً: ظهور عددين زوجيين علماً بأن مجموع العددين الظاهرين يساوي 6

$\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$

$P = \frac{2}{5}$

ثانياً: ظهور عدد فردي على أحد المكعبين فقط ، علماً بأن العدد 3 ظهر مرة واحدة على الأقل؟

3 مرة ، 3 مرتين

$\{(1,3),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,3),(5,3),(6,3)\}$

$P = \frac{6}{11}$

ثالثاً: ظهور العدد 4 على أحد المكعبين فقط ، علماً بأن أحد العددين كان زوجياً؟

$\{(1,2),(1,4),(1,6),(2,1),(2,3),(2,5),(3,2),(3,4),(3,6),(4,1),(4,3),(4,6),(5,2),(5,4),(5,6),(6,1),(6,3),(6,5)\}$

$P = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

رابعاً: كلا العددين الظاهرين على المكعبين كان زوجيا ، علماً بأن واحداً على الأقل كان 2 ؟

2 مرة ، 2 مرتين

$\{(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2)\}$

$P = \frac{5}{11}$

*تمرين (2): إذا ألقيت أربع قطع نقدية متمايزة مرة واحدة .

H : صورة ، T : كتابة

عدد الطرق : $n = 2\times2\times2\times2 = 16$

أولاً: ما احتمال ظهور صورتين ، علماً بوجود كتابة على قطعة واحدة على الأقل؟

$T,\ TT,\ TTT,\ TTTT \Rightarrow HHHH$ المحذوف ١

عدد طرق ظهور صورتين $TTHH$: $\frac{(4!)}{(2!)(2!)} = 6$

$$P = \frac{6}{16-1} = \frac{6}{15}$$

ثانياً: ما احتمال ظهور ثلاث كتابات ، علماً بوجود صورة واحدة على الأقل؟

$TTTT$ المحذوف

ثلاث كتابات وصورة $TTTH$

عدد الطرق $\frac{4!}{(3!)(1!)} = 4$

$$P = \frac{4}{16-1} = \frac{4}{15}$$

ثالثاً: ما احتمال عدم ظهور أية صورة ، علماً بانه توجد كتابة واحدة على الأقل؟

$TTTT$

$HHHH$ المحذوف

$$P = \frac{1}{16-1} = \frac{1}{15}$$

رابعاً: ما احتمال عدم ظهور أية كتابة ، علماً بانه يوجد 3 صور على الأقل؟

$HHHH$

$HHHH,\ HHH$

$$P = \frac{1}{1+\frac{4!}{(3!)(1!)}} = \frac{1}{5}$$

*تمرين (3): R , T حدثان غير مستقلان في فضاء العينة لتجربة عشوائية ما ،

فإذا كان $P(R\setminus T) = 0.6$, $P(T) = 0.4$ ، فأوجد قيمة $P(R\cap T)$

$$P(R|T) = \frac{P(R\cap T)}{P(T)} \Rightarrow 0.6 = \frac{P(R\cap T)}{0.4}$$

$$\therefore P(R\cap T) = 0.6\times 0.4 = 0.24$$

*تمرين (4): إذا كان $P(A\cup B) = 0.4$, $P(B) = 0.5$, $P(A) = 0.2$ أوجد قيمة $P(A|B)$

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

$$0.4 = 0.2 + 0.5 - P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cap B) = 0.7 - 0.4 = 0.3$$

$$\therefore P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0.3}{0.5} = \frac{3}{5} = 0.6$$

بطاقة (25) : الاحتمال و التوزيعات الاحتمالية - 1

الأهداف :

1- إيجاد الاحتمالات باستخدام التباديل ، 2- إيجاد الاحتمالات باستخدام التوافيق .

الاحتمال باستخدام التوافيق	يستخدم عندما نختار r من بين n من الأشياء بحيث يكون ترتيب الأشياء غير مهم nC_r
الاحتمال باستخدام التباديل	يستخدم عندما نختار r من بين n من الأشياء بحيث يكون ترتيب الأشياء مهماً nP_r

***تمرين (1) (تأكد 2 صـ 158):** رشح 3 طلاب من الصفوف الإعدادية ، و 11 طالباً من الصفوف الثانوية في إحدى المدارس الإعدادية الثانوية، واختير اربعة منهم لتمثيل المدرسة في احدى المسابقات. اذا اختير المترشحون الأربعة بطريقة عشوائية فما احتمال أن يفوز طالبان من الصفوف الإعدادية وطالبان من الصفوف الثانوية ؟

الحل :

$$P=\frac{(3C_2)(11C_2)}{(14C_4)}=\frac{15}{91}\approx 0.165=16.5\%$$

14 ، 3 إعدادي ، 11 ثانوي

***تمرين (2) (2 كتاب المعلم صـ 158):**

لدى بثينة 26 كتاباً ، منها 16 قصة والبقية كتب أخرى ، إذا أخذت معها في رحلة 8 كتب اختارتهم بصورة عشوائية ، فما احتمال أن يكون من بين هذه الكتب 4 قصص ؟

الحل :

$$P=\frac{(16C_4)(10C_4)}{(26C_8)}=\frac{1176}{4807}\approx 0.245$$

26 ، 10 كتب أخرى ، 16 قصص

***تمرين (3) (تأكد 3 صـ 159):** اشترك صلاح وعبدالله وسليم في سباق 400m مع خمسة رياضيين آخرين ، ما احتمال ان ينهي هؤلاء الثلاثة السباق في المراكز الأولى ؟

الحل :

$$P=\frac{(3P_3)(5P_5)}{8P_8}=\frac{1}{56}\approx 0.02$$

حل آخر :

$$P=\frac{3P_3}{8P_3}=\frac{1}{56}$$

***تمرين (4) (*تمرين 12 صـ 163):**

تجلس الطالبات حسب أرقام المقاعد في الصف الذي يتسع الى 26 طالبة بصورة عشوائية. ما احتمال ان تجلس جميلة وآمنة و خديجة في المقاعد الثلاثة الأولى على الترتيب ؟

الحل :

$$P=\frac{1\times(23P_{23})}{26P_{26}}=\frac{1}{15600}$$

حل آخر :

$$P=\frac{1}{26P_3}=\frac{1}{15600}$$

***تمرين (5):** اختار حسن الذي يدرس بالجامعة المواد الآتية : (لغة عربية ، كيمياء ، رياضيات ، رياضة ، جغرافيا) . إذا تم تحديد ترتيب جدول المحاضرات عشوائياً ، وكانت لهذه المواد الفرصة نفسها لتكون في أي وقت من اليوم ، فما احتمال أن تكون أول محاضرتين لأحمد هما الرياضيات ثم اللغة العربية ؟

الحل :

$$P=\frac{1\times 3P_3}{5P_5}=\frac{1}{20}=0.05$$

حل آخر :

$$P=\frac{1}{5P_2}=\frac{1}{20}$$

***تمرين (6) (*تمرين 14 صـ 163):**

إذا سحب حمد 4 بطاقات معاً من بين 52 بطاقة موزعة بالتساوي على الألوان الأبيض والأحمر والأصفر والأزرق ، فما احتمال أن تكون بطاقتان من اللون الأبيض والبطاقتان الأخريان حمراوان ؟

الحل:

$$P = \frac{({}_{13}C_2)({}_{13}C_2)}{{}_{52}C_4} = \frac{468}{20825} \simeq 0.022$$

عدد بطاقات كل لون: $\frac{52}{4} = 13$

***تمرين (7) (*تمرين 14 صـ 163):**

يحتوي كيس على 48 بالوناً موزعة بالتساوي على الألوان: الأبيض والأحمر والأزرق والأخضر . إذا أخذت لطيفة عدداً من البالونات بشكل عشوائية لنفخها ،فما احتمال أن يكون لديها 3 بالونات من لون معين و 4 بالونات من لون آخر ؟

الحل:

$$P = \frac{({}_{12}C_3)({}_{12}C_4)({}_{4}P_2)}{{}_{48}C_7}$$

عدد طرق اختيار الألوان

عدد بطاقات كل لون: $\frac{48}{4} = 12$

***تمرين (8):**

سحب هشام 8 بطاقات من مجموعة تحتوي على 52 بطاقة ، خصص لكل 13 بطاقة لون مختلف . ما احتمال أن تكون بطاقتان من اللون الأحمر وثلاث بطاقات من لون مختلف والبطاقات الثلاث الأخرى من لون مختلف آخر ؟

الحل:

$$P = \frac{({}_{13}C_2)({}_{13}C_3)({}_{13}C_3)({}_{3}C_2)}{{}_{52}C_8}$$

عدد طرق اختيار الألوان

$$\simeq 0.025$$

ريض ٢٦٣	صف (63) حة	إعداد : أ.عبدالرزاق حسن أحمد

بطاقة (26) : الإحتمال و التوزيعات الإحتمالية -2

الأهداف :

1- إيجاد الاحتمالات باستخدام المتغيرات العشوائية ، 2- اثبات كون المتغير العشوائي توزيعاً احتمالياً من عدمه

3- إستخدام التوزيعات الإحتمالية لتكوين الرسوم البيانية ، 4- إيجاد قيم احتمالات معينة في توزيعات احتمالية.

المتغير العشوائي	المتغير العشوائي المنفصل	المتغير العشوائي المتصل
هو المتغير الذي يأخذ مجموعة قيم لها احتمالات معلومة	لها عدد محدود (منتهي) من القيم الممكنة (المحددة)	لها عدد غير محدود (غير منتهي) من القيم الممكنة ضمن فترة محددة

***تمرين (1):**

قام طلاب الصف الثاني ثانوي في مدرسة يجمع بعض الأطعمة في طرود للتبرع بها للأسر الفقيرة.

عدد الطرود	النوع
36	وجبات الطعام
22	معكرونة
12	عصير
45	حساء

$n = 36+22+12+45 = 115$

أولاً: أوجد إحتمال أن يحتوي طرد إختير عشوائياً على حساء

$P = \frac{45}{115} \approx 0.39$

ثانياً: أوجد إحتمال أن يحتوي طرد إختير عشوائياً على وجبة طعام أو عصير .

$P = \frac{36+12}{115} \approx 0.42$

ثالثاً: أوجد إحتمال أن الطرد الذي تم إختياره عشوائياً لا يحتوي معكرونة

$P = \frac{36+12+45}{115} \approx 0.81$

حل آخر:

$P(\text{معكرونة}) = \frac{22}{115}$

$P(\text{لا معكرونة}) = 1 - \frac{22}{115} = \frac{93}{115} \approx 0.81$

***تمرين (2):**

حصل 7 طلاب في إختبار الرياضيات على التقدير **A** ، و 9 طلاب على التقدير **B** ، و 11 على التقدير **C** ، و 3 على التقدير **D** ، و 2 على التقدير **F**

ممتاز   جيد جداً   جيد   متوسط   راسب

$n = 7+9+11+3+2 = 32$

أولاً: أوجد إحتمال أن يحصل طالب تم إختياره عشوائياً على التقدير C .

$P(C) = \frac{11}{32} \approx 0.34$

ثانياً: أوجد إحتمال أن يكون طالب تم إختياره عشوائياً قد حصل على التقدير B على الأقل .

(A , B ← أكبر من أو تساوي B على الأقل)

$P = P(B) + P(A) = \frac{9+7}{32} = \frac{1}{2}$

ثالثاً: أوجد إحتمال أن يحصل طالب تم إختياره عشوائياً على تقدير لا يزيد عن C .

(F ، D , C ← أو أقل C لا يزيد)

$P = \frac{11+3+2}{32} = \frac{1}{2}$

التوزيع الاحتمالي المنفصل

تعريف	شروط التوزيع الاحتمالي
هو جدول أو معادلة أو تمثيل بياني يربط كل قيمة من قيم X الممكنة مع احتمالها	**أولاً :** جميع الاحتمالات محصورة بين 0 و 1 $\Leftarrow 0 \le p \le 1$ **ثانياً:** مجموع الاحتمالات تساوي 1 $\Leftarrow \sum p(x) = 1$

***تمرين (3):**

يبين الجدول التوزيع الاحتمالي لنتائج اختبار الرياضيات بأحد المواد في أحد الجامعات

نتائج إختبار الرياضيات	
التقدير	الإحتمال
A	0.29
B	0.43
C	0.17
D	0.11
F	0

أولاً: بيّن أنّ التوزيع صحيح .

الحل :

1) $0 \le P \le 1$

2) مجموع الاحتمالات $= 0.29 + 0.43 + 0.17 + 0.11 + 0 = 1$

$\Leftarrow$ ∴ التوزيع صحيح

ثانياً: أوجد P (A أو C)

$P = 0.29 + 0.17 = 0.46$

ثالثاً: إذا إختير طالب عشوائياً ، فأوجد احتمال ألا يزيد تقديره على B

الحل: B أو أقل $\Leftarrow$ B ، C ، D ، F

$P = 0.43 + 0.17 + 0.11 + 0 = 0.71$

أو $P = 1 - P(A) = 1 - 0.29 = 0.71$

رابعاً: إذا إختير طالب عشوائياً ، فأوجد احتمال ألا يقل تقديره عن C

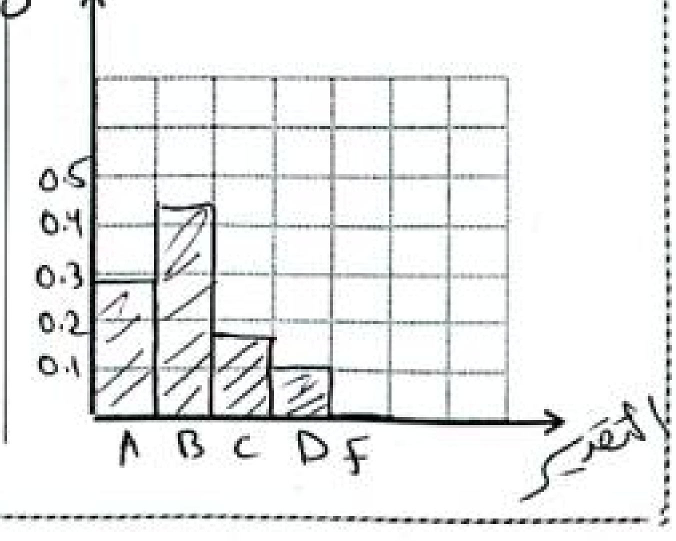
الحل: C أو أكثر $\Leftarrow$ A ، B ، C

$P = 0.29 + 0.43 + 0.17 = 0.89$

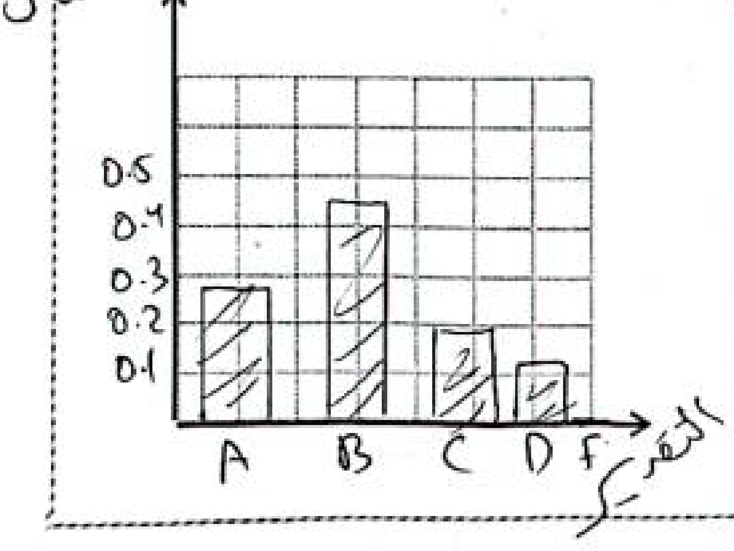
خامساً: إذا إختير طالب عشوائياً ، فأوجد احتمال ألا يكون تقديره D

الحل : $P(D') = 1 - P(D) = 1 - 0.11 = 0.89$

سادساً: مثل البيانات بالمدرج الاحتمالي



سابعاً: مثل البيانات بالأعمدة



الإحتمال	عدد السيارات
0.13	3 فأكثر
0.4	2
0.33	1
0.14	0

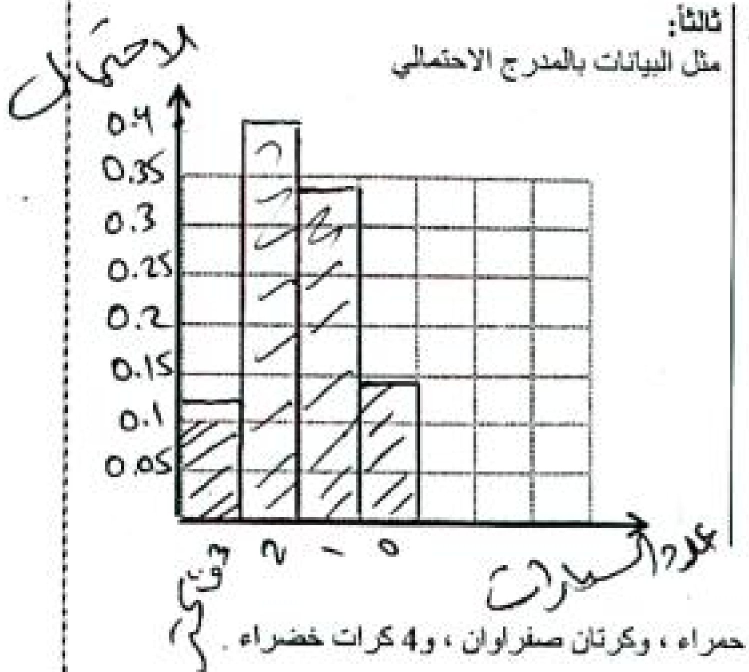
***تمرين (4):**
الجدول المجاور يبين عدد السيارات التي تمتلكها الأسر في أحد الدول العربية
أولاً: بيّن أنّ التوزيع صحيح .

الحل :
1) $0 \le P \le 1$
2) مجموع الاحتمالات $= 0.13 + 0.4 + 0.3 + 0.14 = 1$
∴ التوزيع صحيح

ثانياً: ما احتمال أن يكون لدى الأسرة سيارتان على الأكثر

الحل :
(سيارتين أو أقل)
$P = 0.4 + 0.33 + 0.14$
$= 0.87$

ثالثاً:
مثل البيانات بالمدرج الاحتمالي



***تمرين (5):**
يحتوي كيس على 10 كرات ملونة منها 3 زرقاء ، وواحدة حمراء ، وكرتان صفراوان ، و4 كرات خضراء .
سحبت كرة من الكيس

أولاً: كون التوزيع الاحتمالي للون الكرة المسحوبة

اللون	أزرق	أحمر	أصفر	أخضر
الاحتمال	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$

ثانياً: ما احتمال سحب كرة صفراء أو خضراء

$$P = \frac{2}{10} + \frac{4}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

ثالثاً: ما احتمال عدم سحب كرة حمراء

$$P = 1 - P(\text{أحمر}) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

بطاقة (27) : الإحتمال و التوزيعات الإحتمالية -3

الأهداف :

1- التعرف على القيمة المتوقعة والعدد المتوقع ، 2- إيجاد القيمة المتوقعة و العدد المتوقع لتوزيعات إحتمالية .

القيمة المتوقعة	هي الوسط الموزون للقيم في التوزيع الاحتمالي	$E(X) = \sum[X \bullet P(X)]$
العدد المتوقع	هو عبارة عن حاصل ضرب احتمال نجاح الحدث (p) في عدد مرات التجربة (n)	$E(A) = p \bullet n$

***تمرين (1):** يبين الجدول التوزيع الاحتمالي عدد الطلبة الذين يتنافسون لشغل مركز رئيس الصف في أحد المدارس

عدد الطلبة	1	2	3	4	5	6
الإحتمال	0.05	k	0.1	0.1	0.35	0.2

أولاً: أوجد قيمة **k** .

$0.05 + K + 0.1 + 0.1 + 0.35 + 0.2 = 1 \Rightarrow 0.8 + K = 1 \Rightarrow K = 0.2$

ثانياً: أوجد القيمة المتوقعة لعدد الطلبة الذين يتنافسون على مركز رئيس الصف .

$E(X) = \sum x P(x) = 1(0.05) + 2(0.2) + 3(0.1) + 4(0.1) + 5(0.35) + 6(0.2)$

$= \cancel{3.34}\ 4.1$

A

ثالثاً: أوجد العدد المتوقع لتنافس 5 طلبة على مركز رئيس الصف .

$E(A) = nP = 5 \times 0.35 = 1.75$

***تمرين (2):**

يبين الجدول التوزيع الاحتمالي لعدد الأيام الممطرة في السنة بإحدى الدول :

عدد الأيام	0	1	2	3	4	5	6	7	8
الإحتمال	0.1	0.1	0.15	0.15	0.25	0.1	0.08	0.05	0.02

أولاً: أوجد القيمة المتوقعة لعدد الأيام الممطرة في السنة

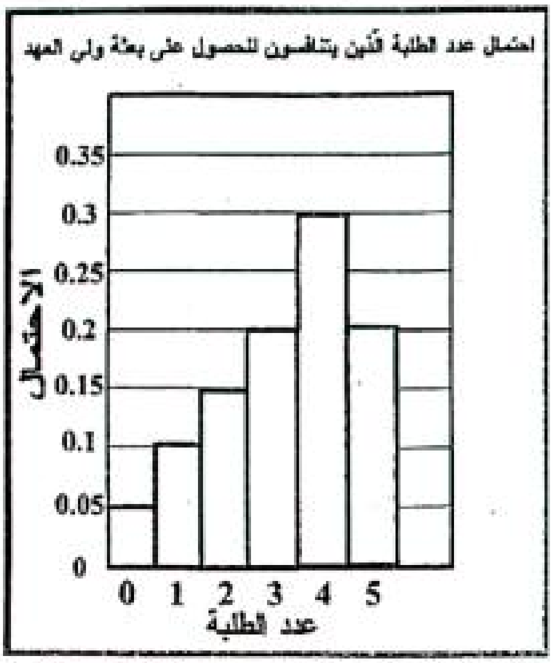
$E(x) = 0(0.1) + 1(0.1) + 2(0.15) + 3(0.15) + 4(0.25) + 5(0.1)$

$+ 6(0.08) + 7(0.05) + 8(0.02) = 3.34$

ثانياً: أوجد العدد المتوقع لهطول الأمطار في أربع أيام .

$E(A) = 4 \times 0.3 = 1.2$

***تمرين (3) - (من إمتحان نهائي سابق):**
يبين المدرج التكراري التوزيع الإحتمالي لعدد طلاب الثانوية الذين يتنافسون على بعثات ولي العهد .



أولاً: بين أن التوزيع صحيح .

1) $0 \leq P \leq 1$

2) مجموع الاحتمالات $= 0.05 + 0.1 + 0.15 + 0.2 + 0.3 + 0.2 = 1$

∴ التوزيع صحيح

ثانياً: ما احتمال أن يتنافس على البعثات طالبين أو خمس طلاب .

$P = 0.15 + 0.2 = 0.35$

ثالثاً: ما احتمال أن يتنافس عدد لا يزيد عن ثلاث طلاب

(3 طلاب و أقل)

$P = P(3) + P(2) + P(1) + P(0) = 0.2 + 0.15 + 0.1 + 0.05 = 0.5$

رابعاً: أوجد القيمة المتوقعة لعدد الطلبة الذين يتنافسون على بعثة ولي العهد .

$E(x) = 0(0.05) + 1(0.1) + 2(0.15) + 3(0.2) + 4(0.3) + 5(0.2) = 3.2$

خامساً: ما العدد المتوقع لتنافس 4 طلاب على بعثة ولي العهد .

$E(A) = 4 \times 0.3 = 1.2$

***تمرين (4) - (من إمتحان نهائي سابق):** مكعب بست أوجه مرقمة بالأعداد 6 , 5 , 4 , 3 , 2 , 1 فأوجد :

أولاً: القيمة المتوقعة عند إلقاء المكعب مرة واحدة

$E(X) = 1(\frac{1}{6}) + 2(\frac{1}{6}) + 3(\frac{1}{6}) + 4(\frac{1}{6}) + 5(\frac{1}{6}) + 6(\frac{1}{6}) = 35$

ثانياً: العدد المتوقع لمرات الحصول على العدد 4 عند إلقاء المكعب 3 مرات متتالية .

$E(A) = n \times P = 3(\frac{1}{6}) = \frac{1}{2}$

ثالثاً: توقع ظهور العدد 1 أو 3 عند إلقاء المكعب 6 مرات متتالية .

$E(A) = n \times P(3 \text{ أو } 1) = 6(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}) = 2$

*تمرين (5) : باع أحد محلات الأجهزة الكهربائية 1000 تذكرة ، ثمن الواحدة BD1 ، ثم أجرى سحب عشوائي على أرقام التذاكر بحيث يربح الرقم الذي يقع عليه الاختيار جهاز تلفاز قيمته BD350

أولاً: كون التوزيع الاحتمالي لربح شخص اشترى تذكرة واحدة

	يربح	لا يربح
x الربح	$350-1=349$	$0-1=-1$
P(x) الاحتمال	$\frac{1}{1000}$	$\frac{999}{1000}$

ثانياً: ما القيمة المتوقعة للربح في هذا الموقف ؟

$$E(x) = 349\left(\frac{1}{1000}\right) + (-1)\left(\frac{999}{1000}\right)$$

$$= -0.65$$

التفسير: معدل خسارة الشخص BD 0.65

*تمرين (6):

ألقي حجرا نرد متمايزين مرة واحدة ، و سُجل مجموع العددين الظاهرين على الوجهين العلويين .

أولاً: كون جدولاً تكرارياً نسبياً للبيانات .

$n = 6 \times 6 = 36$

مجموع العددين	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
الإحتمال	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

ثانياً: ما النواتج الأقل إمكانية للوقوع ؟ وأوجد إحتمالاتها؟

2, 12

$P = \frac{1}{36}$

ثالثاً: أوجد P(11 أو 5) ؟

$$P = \frac{4}{36} + \frac{2}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

رابعاً: أوجد القيمة المتوقعة لهذا الموقف ؟

$$E(x) = 2\left(\frac{1}{36}\right) + 3\left(\frac{2}{36}\right) + 4\left(\frac{3}{36}\right) + 5\left(\frac{4}{36}\right) + 6\left(\frac{5}{36}\right) + 7\left(\frac{6}{36}\right) + 8\left(\frac{5}{36}\right) + 9\left(\frac{4}{36}\right) + 10\left(\frac{3}{36}\right) + 11\left(\frac{2}{36}\right) + 12\left(\frac{1}{36}\right) = 7$$

خامساً : أوجد العدد المتوقع للحصول على المجموع 7 في 100 رمية ؟

$$E(A) = n \times P = 100\left(\frac{6}{36}\right) \approx 17$$

التفسير: في 100 رمية هناك توقع ان يظهر 17 مرة المجموع 7

نشاط (35) : التوزيعات ذات الحدين -1

الأهداف :

1 - بيان خصائص التجربة ذات الحدين ، 2- حل مسائل على الإحتمال برسم الشجرة البيانية .

3- بيان قاعدة احتمال توزيع ذات الحدين ، 4- تطبيق قاعدة توزيع ذات الحدين لحل مسائل احتمالية مرتبطة

التجربة ذات الحدين	تعريف	شروط (خصائص) تجربة ذات الحدين
	هي تجربة عشوائية لها ناتجان فقط	(1) هناك عدد محدد للمحاولات (n) ، (2) هناك حالتان (نجاح أو فشل) لكل محاولة (3) احتمال النجاح (s) ثابت في كل محاولة حيث احتمال الفشل (f) هو $f=1-s$ (4) المحاولات مستقلة ، (5) المتغير العشوائي X هو عدد مرات النجاح في n من المحاولات

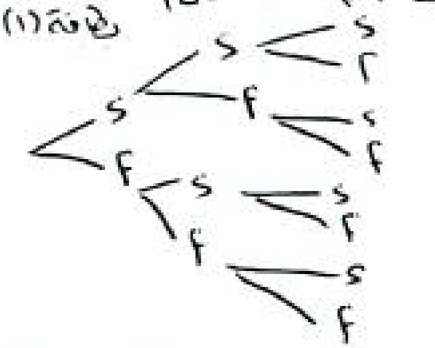
◄ **حل مسائل على الاحتمال باستخدام الشجرة البيانية :**

تمرين (1) : إشترى يونس 3 بطاقات ألعاب ، فإذا كان إحتمال الفوز بجائزة لكل بطاقة يساوي 10% .
إحسب إحتمال أن تكسب بطاقتان على الأقل جائزة .

الحل :

$s=0.1\ ,\ f=1-0.1=0.9$

بطاقة(1) بطاقة(2) بطاقة(3)



$P(X\geq 2)$ = فوزتين أو ثلاث فوز

sss

ssf ,sfs,fss

$=(0.1)(0.1)(0.1)+0.1(0.1)(0.9)$
$+(0.1)(0.9)(0.1)+(0.9)(0.1)(0.1)=0.028$
$=2.8\%$

تمرين (2) : يلعب فريق في كرة المضرب مباراتين ، فإذا كان إحتمال الخسارة لكل مباراة 25% .
إحسب إحتمال أن يكسب مباراة واحدة .

الحل :

$s=0.75\ ,\ f=0.25$

$P(x=1)$. sf أو fs

$=(0.75)(0.25)+(0.25)(0.75)$

$=0.375=37.5\%$

القيمة المتوقعة لتوزيع ذات الحدين	قانون إحتمال ذات الحدين	
	$p(x)=(nC_x)(s)^x(f)^{n-x}$	إحتمال النجاح x مرة في n من المحاولات المستقلة هو :
$E(x)=n.s$	n: عدد المحاولات ، x : عدد مرات النجاح n : احتمال النجاح ، f : احتمال الفشل حيث : $f=1-s$	

تمرين (3) : تبلغ نسبة النجاح في توزيع ذات الحدين 40% ، و توجد 10 محاولات . إحسب إحتمال :

أولاً : أربع نجاحات بالضبط .

$s = 0.4,\ f = 0.6,\ n = 10$

$P(4) = (10C_4)(0.4)^4(0.6)^6 \simeq 0.25$

ثانياً : ثلاث نجاحات على الأقل .

$P(X \geq 3) = P(3) + P(4) + \dots + P(10)$

$= 1 - [P(0) + P(1) + P(2)]$

$= 1 - [(10C_0)(0.4)^0(0.6)^{10} + (10C_1)(0.4)^1(0.6)^9 + (10C_2)(0.4)^2(0.6)^8]$

$\simeq 0.83 = 83\%$

(b) القيمة المتوقعة للنجاح في التوزيع .

$E(X) = n.s = 10(0.4) = 4$

تمرين (4) : تبلغ نسبة النجاح في توزيع ذات الحدين 65% ، و توجد 8 محاولات .
إحسب إحتمال وجود سبع نجاحات على الأكثر .

الحل :

$s = 0.65,\ f = 0.35,\ n = 8$

$P(X \leq 7) = P(7) + P(6) + \dots + P(0)$

$= 1 - P(8)$

$= 1 - [(8C_8)(0.65)^8(0.35)^0]$

$\simeq 0.968 = 96.8\%$

تمرين (5) : إعتماداً على دراسة مسحية ، تبين أن 40% من طلبة الجامعات يملكون سيارات . ما إحتمال أن يملك طالبان على الأقل من بين 6 طلبة تم إختيارهم عشوائياً من تلك الجامعة سيارة ؟

الحل :

$s = 0.4,\ f = 0.6,\ n = 6$

$P(X \geq 2) = P(2) + P(3) + \dots + P(6)$

$= 1 - [P(1) + P(0)]$

$= 1 - [(6C_1)(0.4)^1(0.6)^5 + (6C_0)(0.4)^0(0.6)^6]$

$\simeq 0.77 = 77\%$

تمرين (6) : ينتج مصنع قطعاً من الحلويات بنكهة الفانيلا ، والبعض الأخر بنكهة الفراولة . إذا علمت أن 65% من الإنتاج هو في المتوسط من نكهة الفراولة ، وأن خط الإنتاج يقوم بخلط النوعين بصورة عشوائية ، ويضع كل خمس قطع في رزمة واحدة .

أولاً : ما احتمال أن يكون في الرزمة ثلاث قطع بنكهة الفراولة على الأكثر

$s = 0.65,\ f = 0.35,\ n = 5$

$P(X \leq 3) = P(3) + P(2) + P(1) + P(0)$

$= 1 - [P(4) + P(5)]$

$= 1 - [(5C_4)(0.65)^4(0.35)^1 + (5C_5)(0.65)^5(0.35)^0]$

$\simeq 0.57 = 57\%$

ثانياً : ما العدد المتوقع للقطع بنكهة الفراولة في الكيس

$E(X) = n.s = 5 \times 0.65 = 3.25$

تمرين (7) :

بناءاً على دراسة مسحية تبين أن 70% من زبائن أحد المطاعم يفضلون الأرز كطبق رئيس في وجبة الطعام .
ما إحتمال أن يطلب شخصان على الأقل من بين سبع أشخاص تم إختيارهم عشوائياً من زبائن هذا المطعم في ذلك اليوم ؟

الحل :

$s = 0.7 , f = 0.3 , n = 7$

$P(x \geq 2) = P(2) + P(3) + \dots P(7) = 1 - [P(0) + P(1)]$

$= 1 - [({}_7C_0)(0.7)^0(0.3)^7 + ({}_7C_1)(0.7)^1(0.3)^6]$

$\approx 0.996 = 99.6\%$

تمرين (8) :

خمن فيصل آخر 6 فقرات من نوع اختيار من متعدد بأربعة بدائل
أولاً : أوجد الاحتمالات المرتبطة بعدد الأسئلة التي يجيب عنها بصورة صحيحة من الأسئلة الستة .

$P(X) = ({}_6C_x)(0.25)^x(0.75)^{6-x}$ $\Big\{$ $n = 6 , s = \frac{1}{4} = 0.25 , f = \frac{3}{4} = 0.75$

عدد الإجابات الصحيحة X	0	1	2	3	4	5	6
P(X)	0.1779	0.355	0.297	0.132	0.033	0.004	0.002

أولاً : مثل بيانياً التوزيع الاحتمالي السابق .

ثانياً : صف شكل التوزيع .

ملتوٍ موجب

ثالثاً : أوجد احتمال أن يجيب جميع الفقرات بشكل صحيح

$P(x = 6) = 0.002$

رابعاً : ما احتمال أن يجيب على فقرتين على الأقل بشكل صحيح ؟

$P(X \geq 2) = P(2) + P(3) + \dots P(6)$

$= 1 - [P(0) + P(1)]$

$= 1 - [0.1779 + 0.355]$

$= 0.4671 = 46.71\%$

خامساً : أوجد القيمة المتوقعة للنجاح في هذا التوزيع

$E(X) = n.s = 6(0.25) = 1.5$