

مذكرة رياض 263



تم تحميل هذا الملف من موقع مناهج مملكة البحرين

موقع المناهج ← مناهج مملكة البحرين ← الصف الثاني الثانوي ← رياضيات ← الفصل الثاني ← مذكرات وبنوك ← الملف

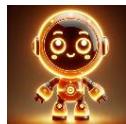
تاريخ إضافة الملف على موقع المناهج: 2026-06-08 16:30:05

ملفات اكتب للمعلم اكتب للطالب | اختبارات الكترونية | اختبارات | حلول | عروض بوربوينت | أوراق عمل
منهج انجليزي | ملخصات وتقارير | مذكرات وبنوك | الامتحان النهائي | للمدرس

المزيد من مادة
رياضيات:

إعداد: عابدين حامد

التواصل الاجتماعي حسب الصف الثاني الثانوي



صفحة مناهج مملكة
البحرين على
فيسبوك

الرياضيات

اللغة الانجليزية

اللغة العربية

التربية الاسلامية

المواد على تلغرام

المزيد من الملفات بحسب الصف الثاني الثانوي والمادة رياضيات في الفصل الثاني

مراجعة نهائي رياض 261

1

مذكرة رياض 263 العمليات على كثيرات الحدود

2

إجابة مراجعة شاملة مقرر رياض 262

3

حلول مراجعة ملف انجاز الطالب رياض 262 لعام 2023-2024م

4

إجابة المراجعة النهائية الشاملة 2024-2025م رياض 262

5



2 / ث



مملكة البحرين

وزارة التربية و التعليم

مدرسة النعيم الثانوية للبنين

قسم الرياضيات

رياض 263



الفصل الأول

كثيرات الحدود

رياض 263

إعداد الأستاذ : عابدين حامد

اسم الطالب :

الرقم الأكاديمي :

الصف :

العمليات على كثيرات الحدود

ضرب وحيدات الحد وقسمتها تعني عملية تبسيط تعابير تتضمن قوى، إعادة كتابتها دون أقواس أو أسس سالبة. والأسس السالبة هي طريقة للتعبير عن النظير الضربي لعدد، ويلخص الجدول أدناه خصائص الأسس.

ملخص المفهوم		
خصائص الأسس		
لأي عددين حقيقيين x, y وعددين صحيحين a, b		
الخاصية	التعريف	مثال
ضرب القوى	$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$	$3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4} = 3^6$ $p^2 \cdot p^9 = p^{2+9} = p^{11}$
قسمة القوى	$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}, x \neq 0$	$\frac{9^5}{9^2} = 9^{5-2} = 9^3$ $\frac{b^6}{b^4} = b^{6-4} = b^2$
الأسس السالبة	$x^a = \frac{1}{x^{-a}}, x^{-a} = \frac{1}{x^a}, x \neq 0$	$3^{-5} = \frac{1}{3^5}$ $\frac{1}{b^{-7}} = b^7$
قوة القوة	$(x^a)^b = x^{ab}$	$(3^3)^2 = 3^{3 \cdot 2} = 3^6$ $(d^2)^4 = d^{2 \cdot 4} = d^8$
قوة ناتج الضرب	$(xy)^a = x^a y^a$	$(2k)^4 = 2^4 k^4 = 16k^4$ $(ab)^3 = a^3 b^3$
قوة ناتج القسمة	$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}, y \neq 0,$ $\left(\frac{x}{y}\right)^{-a} = \left(\frac{y}{x}\right)^a = \frac{y^a}{x^a}, x \neq 0, y \neq 0$	$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-5} = \frac{b^5}{a^5}$
القوة الصفرية	$x^0 = 1, x \neq 0$	$7^0 = 1$

تذكر أن وحيدة الحد هي عدد، أو متغير، أو تعبير ناتج عن ضرب ثابت في متغير أو أكثر، وأسسها أعداد صحيحة غير سالبة.

تابع : العمليات على كثيرات الحدود

عند تبسيط وحيدة الحد، تأكد أنك قد بسطتها على نحوٍ كامل.

أضف إلى

مطوبتك

مفهوم أساسي

تبسيط وحيدات الحد

تكون وحيدة الحد في أبسط صورة عندما:

- لا تتضمن قوى القوة.
- يظهر كل أساس مرة واحدة.
- تكون جميع الكسور المتضمنة في أبسط صورة.
- لا تتضمن أسًا سالبة.

العمليات على كثيرات الحدود درجة كثيرة الحدود هي درجة وحيدة الحد ذات الدرجة الأكبر. فمثلاً درجة كثيرة الحدود $x^2 + 4x + 58$ هي 2.

إرشادات للدراسة

إرشادات للدراسة

كثيرة الحدود

تذكر أن كثيرة الحدود هي وحيدة حد، أو مجموع وحيدات حدود.

درجة وحيدة الحد

تذكر أن درجة وحيدة الحد هي مجموع الأسس لجميع متغيراتها. وعندما تكون وحيدة الحد ثابتاً لا يساوي الصفر، فدرجتها صفر.

إرشادات للدراسة

الأس 1 تذكر أن

المتغير الذي لا يظهر عليه أس يكون أسه 1.

حدّد ما إذا كان كل تعبير مما يأتي كثيرة حدود أو لا، وإن كان كذلك فاذكر درجتها:

$$(a) \frac{1}{4}x^4y^3 - 8x^5$$

يعد هذا التعبير كثيرة حدود؛ لأن كل حد فيه هو وحيدة حد، ودرجة الحد الأول فيه تساوي $4 + 3 = 7$ ، ودرجة الحد الثاني 5، لذا فإن درجة كثيرة الحدود 7.

$$(b) \sqrt{x} + x + 4$$

هذا التعبير ليس كثيرة حدود؛ لأن $\sqrt{x}$ ليست وحيدة حد،

$$(c) x^{-3} + 2x^{-2} + 6$$

هذا التعبير ليس كثيرة حدود؛ لأن كلا من x^{-3} ، x^{-2} ليست وحيدة حد

حيث $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$ ، $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ ، ووحيدات الحد لا تتضمن متغيرات في المقام.

تبسيط التعبيرات

بسّط كل تعبير مما يأتي مفترضاً أن أيّاً من المتغيرات لا يساوي صفراً :

$$\frac{15 a^5 b^3}{-3 a^2 b^7}$$

٢

$$(2x^{-3}y^3)(-7x^5y^{-6})$$

١

$$(-2 x^3 y^2)^5$$

٤

$$\left(\frac{-2 a^4}{3 b^2}\right)^3$$

٣

$$\frac{(2 x^2)^3}{12 x^4}$$

٦

$$(a^2 b^3)(ab)^{-2}$$

٥

$$\frac{(3 c^2 d)(2 c^3 d^5)}{15 c^4 d^2}$$

٨

$$\left(\frac{4 x^{-2} y^3}{x y^{-4}}\right)^{-2}$$

٧

تابع : العميات على كثيرات الحدود

درجة كثيرة الحدود : هي درجة وحيدة الحد ذات الدرجة الأكبر .

حدد إذا كان كل تعبير مما يأتي كثيرة حدود أو لا ، وإن كان كذلك فاذكر درجتها :

$$a^5b + 9a^3b^2 - 2ab$$

٢

$$\frac{1}{4}x^4y^3 - 8x^5$$

١

$$x^{-3} + 2x^{-2} + 6$$

٤

$$x^2 + \sqrt{x}$$

٣

$$\frac{5np}{n^2} - \frac{2g}{h}$$

٦

$$\frac{x}{y} + 3x^2$$

٥

تبسيط تعابير كثيرات الحدود

بسّط كلّاً من التعابير الآتية :

$$(3a + 4b) + (6a - 6b)$$

٨

$$(x^2 - 5x + 2) - (3x^2 + x - 1)$$

٧

$$-2a(-3a^2 - 11a + 20)$$

١٠

$$\frac{4}{3}x^2(6x^2 + 9x - 12)$$

٩

ضرب كثيرات الحدود + تبسيط التعابير

بسّط كلّاً من التعابير الآتية :

$$(n^2 + 4n - 6)(n + 2)$$

٢

$$(3x - 1)(2x^2 - 4x + 5)$$

١

$$5x^{-2}(x^4 - 3x^3 + x^{-1})$$

٤

$$(a + b)(a^3 - 3ab - b^2)$$

٣

- ٥ استثمار فيصل مبلغ BD 90000 في مشروعين أحدهما صناعي نسبة ربحه السنوي % 18 ، والآخر عقاري نسبة ربحه السنوي % 42 ، إذا كانت x تمثل المبلغ الذي استثمره فيصل في المشروع العقاري ، فاكتب كثيرة حدود تمثل ربحه في المشروعين بعد عام واحد .

الجواب : $0.24x + 16200$

- ٦ يمارس عثمان رياضتي الركض السريع ورفع الأثقال مدة 75 min يومياً . وعند ركضه يحرق 10 سعرات حرارية في الدقيقة ، أما عندما يرفع الأثقال يحرق 7.5 سعرات حرارية في الدقيقة . إذا مارس رفع الأثقال x min في أحد الأيام ، فاكتب كثيرة حدود تمثل عدد السعرات الحرارية التي حرقها في ممارسته للرياضتين ذلك اليوم .

الجواب : $750 - 2.5x$

قسمة كثيرات الحدود

قسمة كثيرة حدود على وحيدة حد

بسّط كل مقدار مما يأتي :

$$(3a^2b - 6ab + 15ab^2)(3ab)^{-1} \quad \textcircled{٢}$$

$$\frac{6x^4y^3 + 12x^3y^2 - 18x^2y}{3xy} \quad \textcircled{١}$$

القسمة المطوّلة (خوارزمية القسمة)

استعمل القسمة المطوّلة لإيجاد ناتج :

$$(3x^3 + 4x^2 - 5x - 2) \div (3x + 1) \quad \textcircled{٤}$$

استعمل القسمة المطوّلة لإيجاد ناتج :

$$(x^2 + 7x - 30) \div (x - 3) \quad \textcircled{٣}$$

$$\frac{(x^3 + 3x^2 - 2x) - (x^3 + 2x^2 - 3x + 2)}{2 + x} \quad \textcircled{٥} \text{ أي مما يأتي يُكافئ } , \text{ حيث } x \neq -2 \text{ ؟}$$

$$x^2 - 2 \quad \text{B}$$

$$x + 1 \quad \text{A}$$

$$2 - x^2 \quad \text{D}$$

$$x - 1 \quad \text{C}$$

ملحوظة : $\frac{\text{المقسوم}}{\text{المقسوم عليه}} = \text{ناتج القسمة} + \frac{\text{الباقى}}{\text{المقسوم عليه}}$

القسمة المطولة (خوارزمية القسمة)

٢ استعمال القسمة المطولة لإيجاد ناتج :
 $(x^2 + 5x + 7)(1 - x)^{-1}$

١ استعمال القسمة المطولة لإيجاد ناتج :
 $(a^2 + 7a - 11)(3 - a)^{-1}$

٤ ما باقى قسمة $(2x^3 + 7x^2 - x + 1)$ على $(x - 5)$ ؟

71 B -69 A

421 D 43 C

٣ استعمال القسمة المطولة لإيجاد ناتج :
 $(-3y^3 + 8y^2 - 7y + 2) \div (2 - 3y)$

تابع : القسمة (القسمة التركيبية)

ملحوظة : $\frac{\text{المقسوم}}{\text{المقسوم عليه}} = \text{ناتج القسمة} + \frac{\text{الباقى}}{\text{المقسوم عليه}}$

ملحوظة : إذا كان المقسوم لا يحتوي على حد ثابت ، فضع مكانه صفراً

٢ استعمال القسمة التركيبية لإيجاد ناتج :
 $(4b^4 + 2b^2 - 4b) \div (b + 2)$

١ استعمال القسمة التركيبية لإيجاد ناتج :
 $(2x^3 - 13x^2 + 26x - 24) \div (x - 4)$

القسمة التركيبية (معامل x في المقسوم عليه لا يساوي 1)

نجعل معامل x في المقسوم عليه يساوي 1 وذلك بقسمة البسط والمقام على معامل x بالمقسوم عليه

٤ استعمال القسمة التركيبية لإيجاد ناتج :
 $(15b^3 + 8b^2 - 21b + 6)(5b - 4)^{-1}$

٣ استعمال القسمة التركيبية لإيجاد ناتج :
 $(8x^4 - 4x^2 + x + 4) \div (2x + 1)$

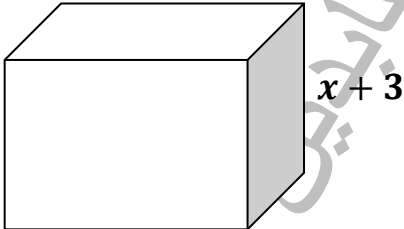
تطبيقات على قسمة كثيرات الحدود

تطبيقات على (القسمة المطولة - القسمة المركبة)

- ١ تُعطى مساحة سطح مستطيل بالتعبير $(2x^2 - 11x + 15)$ قدماً مربعاً .
إذا كان طول المستطيل $(2x - 5)$ ft ، فأوجد عرضه ؟

- ٢ تُعطى مساحة مثلث بالتعبير $(15x^4 + 3x^3 + 4x^2 - x - 3)$ متراً مربعاً .
إذا كان طول قاعدته $(6x^2 - 2)$ m ، فأوجد ارتفاعه ؟

- ٣ إذا علمت أن حجم متوازي المستطيلات في الشكل المجاور هو : $6x^3 + 19x^2 + 2x - 3$
فأي كثيرة حدود مما يأتي تمثل مساحة قاعدته ؟



A $6x^2 + x + 1$

B $6x^2 + x - 1$

C $6x^2 + 1$

D $6x + 1$

تطبيقات على قسمة كثيرات الحدود

تابع : تطبيقات على (القسمة المطولة - القسمة المركبة)

- ❶ بركة سباحة على شكل متوازي مستطيلات مملوءة بالماء ، إذا مُثل حجم الماء بكثيرة الحدود : $m^2 (c^3 + 2c^2 - c - 2)$ ، وكان عمق البركة $m(c + 2)$. فاستعمل القسمة التركيبية لإيجاد كثيرتي الحدود اللتان تُمثّلان كل من طول وعرض البركة .

- ❷ صنع نجار خزانة لأدواته على شكل متوازي مستطيل حجمها 1056 in^3 ، ويزيد طولها على عرضها بمقدار 1 in ، ويقل ارتفاعها عن عرضها بمقدار 3 in . بين أن : $V = x^3 - 2x^2 - 3x$ يُعبّر عن حجم الخزانة ، حيث x هو عرضها .

- ❸ أيّ مما يأتي يكافئ : $(2a^3 - a^2 - 4a)(a - 1)^{-1}$

$$A \quad 2a^2 - 3a - \frac{1}{a-1}$$

$$B \quad 2a^2 + a - \frac{3}{a-1}$$

$$C \quad 2a^2 - 3a - 1 + \frac{1}{a-1}$$

$$D \quad 2a^2 + a - 3 - \frac{3}{a-1}$$

- ❹ استعمل القسمة التركيبية لإيجاد ناتج : $(8y^5 - 2y^4 - 16y^2 + 4)(4y - 1)^{-1}$

العمليات على كثيرات الحدود - القسمة المطولة - القسمة المركبة

١ أيّ تعبير مما يأتي يُمثّل كثيرة حدود ؟

B $5x^4 + 2x^2 - x^{-1}$

A $8x^2 + 5xy^3 - 4x + 1$

D $\frac{a+b^2}{b-1}$

C $x^2y + \sqrt{y}$

٢ ما درجة ، والمعامل الرئيس لكثيرة الحدود الناتجة عن :

$(2x^7 - 5x^5 + 12) - (4x^6 + 5x + 2x^7 - 11)$

B الدرجة 5 ، والمعامل الرئيس -5

A الدرجة 7 ، والمعامل الرئيس 4

D الدرجة 6 ، والمعامل الرئيس -4

C الدرجة 4 ، والمعامل الرئيس 3

٣ ما قيمة k التي تجعل باقي قسمة $(x^5 + kx^2 + 2)$ على $(x + 1)$ يساوي 8 ؟

B 5

A 1

D 7

C 2

٤ ما قيمة m التي تجعل باقي قسمة $(2x^3 + mx^2 - 4x)$ على $(x + 2)$ يساوي 12 ؟

B 2

A 1

D 5

C 3

٥ ما قيمة k التي تجعل باقي قسمة $(x^4 + kx^3 + 1)$ على $(x - 2)$ يساوي 9 ؟

B 1

A 2

D -2

C -1

٦ ما قيم k التي تجعل باقي قسمة $(x^2 - 5x + 6)$ على $(x - k)$ يساوي 0 ؟

B 2 , 3

A -2 , -3

D 1 , 6

C -1 , -6

دوال كثيرات الحدود

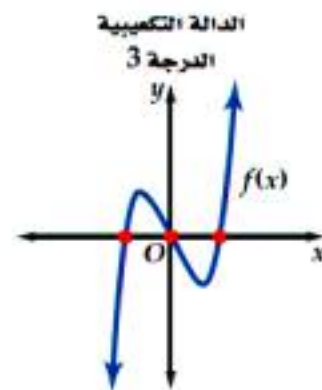
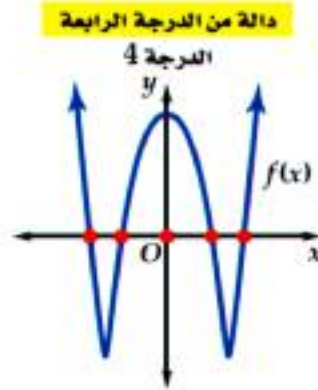
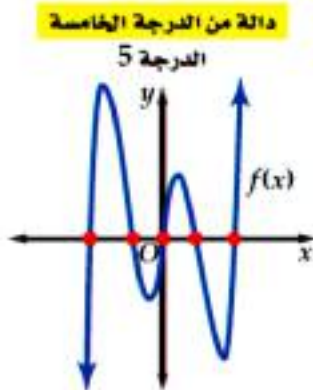
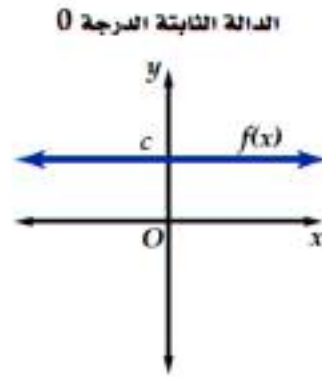
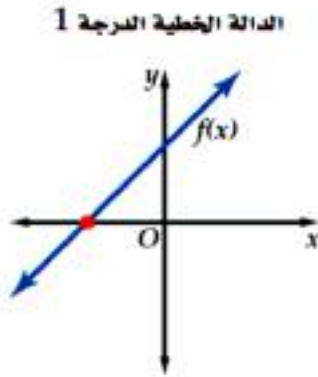
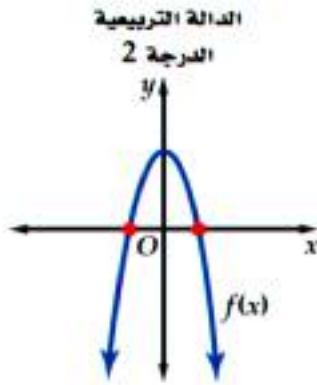
دوال كثيرات الحدود كثيرة الحدود في متغير واحد هي تعبير جبري على الصورة:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

حيث $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ أعداد حقيقية، $a_n \neq 0$ ، n عدد صحيح غير سالب.

وتكون كثيرة الحدود مكتوبة بالصيغة القياسية إذا كانت أسس المتغير في حدودها مرتبة ترتيباً تنازلياً، ودرجة كثيرة الحدود هي قيمة أكبر أس فيها، ويُسمى معامل الحد الأول في كثيرة الحدود المكتوبة بالصيغة القياسية **المعامل الرئيس**.

تمثيل دوال كثيرات الحدود بيانياً إن التمثيل البياني العام لدالة كثيرة حدود يظهر أكبر عدد من المرات التي قد يقطع فيها هذا التمثيل المحور x ، وهذا العدد يمثل درجة كثيرة الحدود.



مراجعة المفردات

صفردالة هو

الإحداثي x لنقطة

تقاطع التمثيل البياني

للدالة مع المحور x .

سلوك طرفي التمثيل البياني

المعامل الرئيس ودرجة كثيرة الحدود هما العاملان

الوحيدان في تحديد سلوك طرفي التمثيل البياني

① إذا كان لطرفي التمثيل البياني الاتجاه نفسه فالدالة زوجية الدرجة.

② إذا كان لطرفي التمثيل البياني اتجاهين مختلفين فالدالة فردية الدرجة.

إرشادات للدراسة

الصفردالمكرر مرتين

عندما يمس التمثيل

البياني المحور x

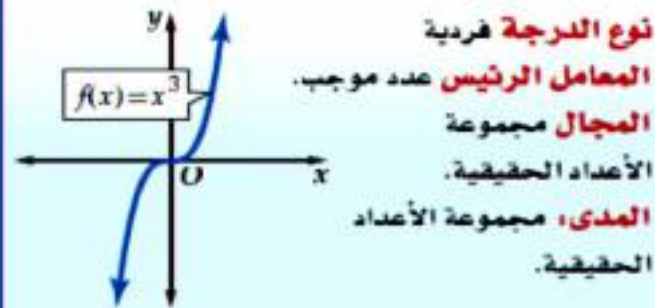
يكون للدالة صفران

متساويان.

دوال كثيرات الحدود

مفهوم أساسي

سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود

أضف إلى
مطوبتك

سلوك طرفي التمثيل البياني

$$x \rightarrow -\infty \text{ عندما } f(x) \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow +\infty \text{ عندما } f(x) \rightarrow +\infty$$



سلوك طرفي التمثيل البياني

$$x \rightarrow -\infty \text{ عندما } f(x) \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty \text{ عندما } f(x) \rightarrow +\infty$$



سلوك طرفي التمثيل البياني

$$x \rightarrow -\infty \text{ عندما } f(x) \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty \text{ عندما } f(x) \rightarrow -\infty$$



سلوك طرفي التمثيل البياني

$$x \rightarrow -\infty \text{ عندما } f(x) \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow +\infty \text{ عندما } f(x) \rightarrow -\infty$$

أضف إلى

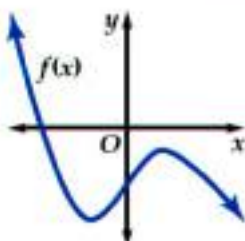
مطوبتك

أصفار الدوال الفردية الدرجة والزوجية الدرجة

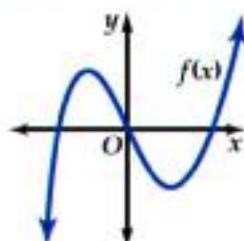
مفهوم أساسي

يكون للدوال الفردية الدرجة عدد فردي من الأصفار المنتمية إلى مجموعة الأعداد الحقيقية، ويكون للدوال الزوجية الدرجة عدد زوجي من الأصفار أو لا يكون لها أصفار تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية.

كثيرتا حدود فرديتا الدرجة

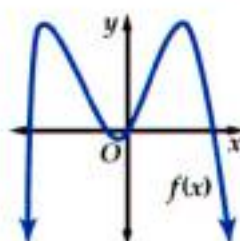


لها صفر واحد ينتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية

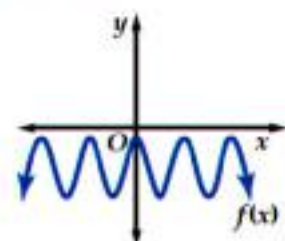


لها 3 أصفار تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية

كثيرتا حدود زوجيتا الدرجة



لها 4 أصفار تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية



ليس لها أصفار تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية

دوال كثيرات الحدود

كثيرة الحدود في متغير واحد : $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$

حدد الدرجة والمعامل الرئيس لكل كثيرة حدود في متغير واحد ، وإن كانت غير ذلك ، فاذكر السبب :

٢ $f(a) = -12 - 8a^2 + 5a - a^7$

١ $5x^4 + 3x^6 - 12x^3 - 14$

٤ $12x^2 - 3xy + 8x$

٣ $5x^3 - 4x^2 - 8x + \frac{4}{x}$

٦ ما معامل الحد الرئيس لنتاج كثيرة الحدود
 $(2x^7 - 5x^5 + 12) - (4x^6 + 2x^7)$

٥ $f(y) = (5 - 2y)(4 + 3y)$

6 A -4 C

2 B -5 D

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

إيجاد قيم الدالة (للأعداد ، للمتغيرات ، للتعبير جبرية)

٨ إذا كانت : $f(x) = x^2 + 3x$

$h(x) = 2x^2 - 3x + 5$

، فأوجد قيمة : $3f(a+4) - 2h(a)$

٧ إذا كانت : $g(x) = x^2 - 5x + 8$

فأوجد : $g(k+2) + 3g(k)$

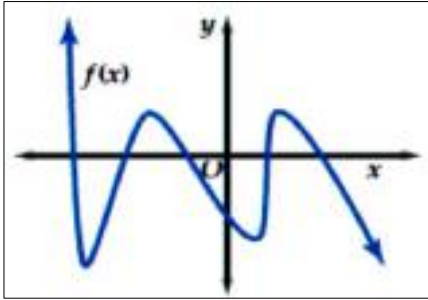
ملحوظة ① : عدد الأصفار الحقيقية يساوي عدد مرات تقاطع التمثيل البياني مع المحور x .

ملحوظة ② : عندما يمس التمثيل البياني المحور x يكون للدالة صفران متساويان

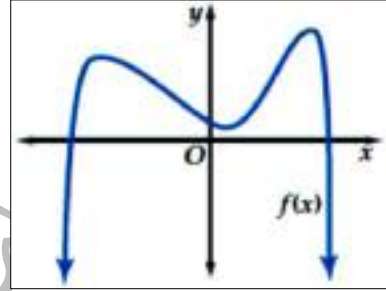
ملحوظة ③ : أكبر عدد ممكن من الأصفار الحقيقية = درجة كثيرة الحدود

أجب عما يأتي لكل من التمثيلات البيانية : (A صف سلوك طرفي التمثيل البياني .

(B حدد إذا كانت درجة دالة كثيرة الحدود فردية أو زوجية . (C حدد عدد الأصفار الحقيقية للدالة .



②



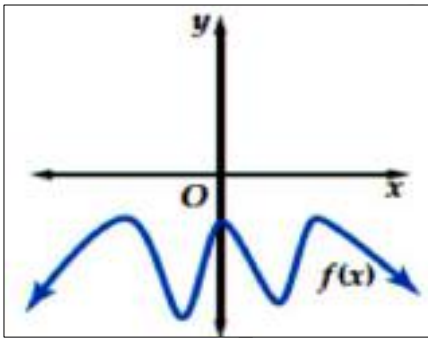
①

• السلوك : $f(x) \rightarrow -\infty$ عندما $x \rightarrow -\infty$

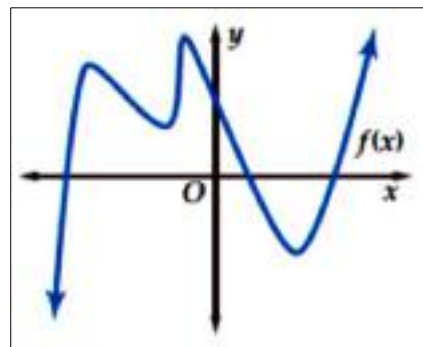
$f(x) \rightarrow -\infty$ عندما $x \rightarrow +\infty$

• الدرجة : الدالة زوجية الدرجة
لأن سلوك طرفي التمثيل البياني في الاتجاه نفسه

• الأصفار : للدالة صفران حقيقيان
لأن التمثيل البياني يقطع محور x في نقطتين



④



③

الدوال الزوجية الدرجة : ① طرفي التمثيل للدالة الزوجية الدرجة لهما نفس الاتجاه .

② يكون للدالة الزوجية الدرجة عدد زوجي من الأصفار الحقيقية أو لا يوجد .

أقل عدد ممكن من الأصفار الحقيقية = 0 ، أكبر عدد ممكن من الأصفار الحقيقية = الدرجة

الدوال الفردية الدرجة : ① طرفي التمثيل للدالة الفردية الدرجة لهما اتجاهين مختلفين .

② يكون للدالة الفردية الدرجة عدد فردي من الأصفار الحقيقية .

أقل عدد ممكن من الأصفار الحقيقية = 1 ، أكبر عدد ممكن من الأصفار الحقيقية = الدرجة

① إذا كانت g كثيرة حدود من الدرجة الرابعة ، والمعامل الرئيس لها يساوي 3 - :

(a) ما أقل عدد ممكن للأصفار الحقيقية للدالة g ؟

(b) ما أكبر عدد ممكن للأصفار الحقيقية للدالة g ؟

(c) ما الدرجة والمعامل الرئيس للدالة : $f(x) = 4x \cdot g(x)$ ؟

(d) ما الدرجة والمعامل الرئيس للدالة : $f(x) = x^3 + g(x)$ ؟

(e) صف سلوك طرفي الدالة g ؟

② إذا كانت f كثيرة حدود من الدرجة الثالثة ، والمعامل الرئيس لها يساوي 5 :

(a) ما أقل عدد ممكن للأصفار الحقيقية للدالة f ؟

(b) ما أكبر عدد ممكن للأصفار الحقيقية للدالة f ؟

(c) ما الدرجة والمعامل الرئيس للدالة : $p(x) = 3x^2 \cdot f(x)$ ؟

(d) ما الدرجة والمعامل الرئيس للدالة : $p(x) = 4x^6 + f(x)$ ؟

(e) صف سلوك طرفي الدالة f ؟

③ إذا كانت : $p(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - 5x$ ، فما قيمة $p(-3)$ ؟

36 D

30 B

11 C

0 A

- لإيجاد مقطع المحور x (أصفار الدالة) : نضع $f(x) = 0$ ونحل المعادلة الناتجة .
- لإيجاد مقطع المحور y : نضع $x = 0$ أي نوجد قيمة $f(0)$

٦ صف سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة f :
 $f(x) = -4x^7 + 8x^6 - 4x$

١ صف سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة f :
 $f(x) = 4x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 4x$

٣ افترض أن : $f(x) = (x - 2)(x + 1)(x - 3)(x + 4)$

(a) حدّد مقطع المحور x ؟

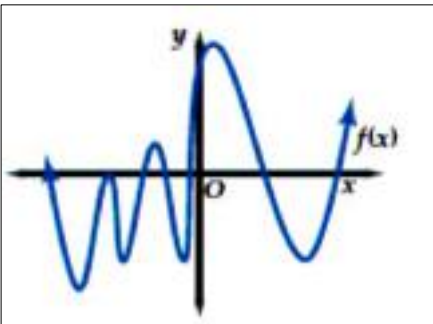
(b) حدّد مقطع المحور y ؟

(c) حدّد الأصفار ؟

(d) حدّد درجة الدالة f ؟

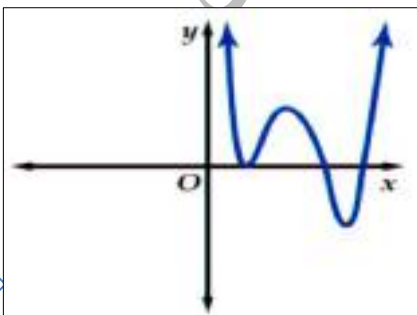
(e) صف سلوك طرفي الدالة f ؟

٤ اكتشف الخطأ : حدّد كل من ماجد وبدر عدد الأصفار الحقيقية للدالة الممثلة بيانياً في الشكل الجاور أيهما إجابته صحيحة ؟ فسّر إجابتك .



بدر
 يوجد 7 أصفار حقيقية ، لأن
 التمثيل البياني للدالة يقطع
 المحور x 7 مرات .

ماجد
 يوجد 8 أصفار حقيقية ، لأن التمثيل
 البياني للدالة يقطع المحور x 7
 مرات وأحد الأصفار مكرر مرتين .



٥ في الشكل المجاور :

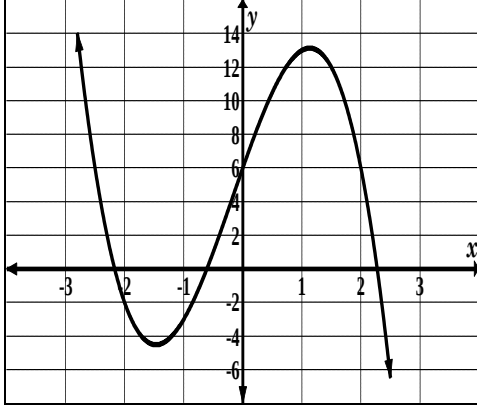
كم صفراً حقيقياً مختلفاً للدالة المُمثلة بيانياً ؟

0 A 2 B

3 C 5 D

تابع : تمارين على دوال كثيرات الحدود

١ إذا كان التمثيل البياني للدالة : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ كما في الشكل أدناه فأَيُّ مما يأتي صحيح ؟



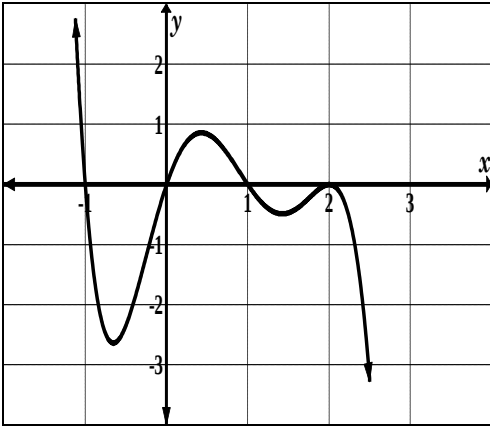
A $a > 0, d < 0$

B $a > 0, d > 0$

C $a < 0, d < 0$

D $a < 0, d > 0$

٢ ما الدالة f التي تمثيلها البياني الشكل المجاور ؟



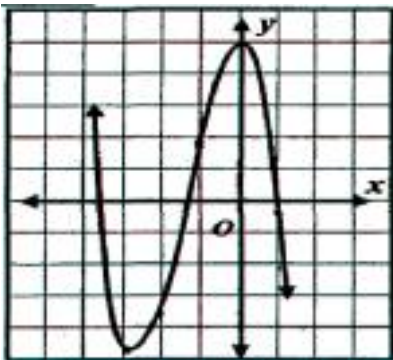
A $f(x) = x(x - 2)^2(x - 1)(x + 1)$

B $f(x) = -x(x - 2)^2(x - 1)(x + 1)$

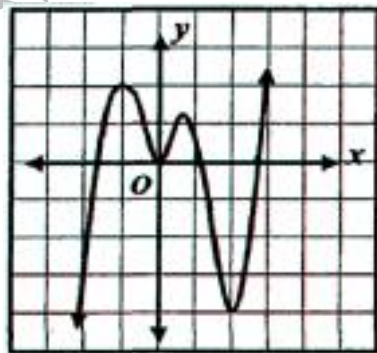
C $f(x) = -(x - 2)^2(x - 1)(x + 1)$

D $f(x) = (x - 2)^2(1 - x)(x + 1)^2$

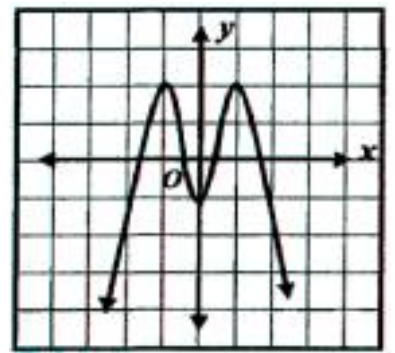
٣ قابل بين كل دالة وتمثيلها البياني في كل مما يأتي :



شكل (3)



شكل (2)



شكل (1)

(.....) $\Leftarrow$

A $f(x) = -x^3 - 4x^2 + 5$

(.....) $\Leftarrow$

B $f(x) = -x^4 + 4x^2 - 1$

(.....) $\Leftarrow$

C $f(x) = x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 3x^2$

تحليل التمثيلات البيانية لدوال كثيرات الحدود

إرشادات للدراسة

درجة الدالة

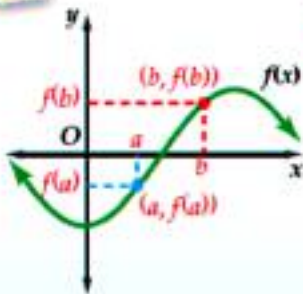
تذكر أن درجة الدالة
تساوي أكبر عدد ممكن
لأصفار الدالة.

تمثيل دوال كثيرات الحدود بيانياً لتمثيل دالة كثيرة

الحدود بيانياً، كَوْن جدول قيم لتحديد بعض النقاط المختلفة،
ثم صل بينها لرسم منحنى متصل. وتساعدك معرفة سلوك
طرفي التمثيل البياني على إكمال التمثيل البياني.

ويمكن القول إنه إذا تغيرت إشارة الدالة عند قيمتين مختلفتين
للمتغير x فإن للدالة صفراً بين هاتين القيمتين للمتغير x ، وتسمى
هذه النتيجة **مبدأ موقع الأصفار**.

أضف إلى مطوياتك



مبدأ موقع الأصفار

التمودج

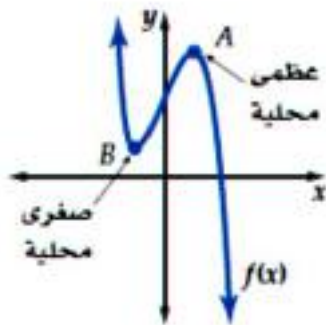
تغيير
الإشارة
+ إلى -
- إلى +

التعبير اللفظي

إذا كانت $y = f(x)$ دالة
كثيرة حدود، حيث $f(a) < 0$
و $f(b) > 0$ و a, b عددين
حقيقيين، فعندئذ يكون للدالة
صفر حقيقي واحد على الأقل
بين a, b .

النقاط العظمى والصغرى

يوضح الشكل المجاور التمثيل البياني العام لدالة كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة.



النقطة A على منحنى الدالة **عظمى محلية**؛ حيث لا توجد بجوارها نقاط
الإحداثي y لها أكبر من الإحداثي y للنقطة A . ونلاحظ أن التمثيل البياني للدالة
متزايد قبل النقطة A ، ويتحول بعد النقطة A إلى متناقص.

وبالمثل، فإن النقطة B **صغرى محلية** للدالة، حيث لا توجد بجوارها نقاط
الإحداثي y لها أقل من الإحداثي y للنقطة B . ونلاحظ أن التمثيل البياني للدالة
متناقص قبل النقطة B ، ويتحول بعد النقطة B إلى متزايد.

وتسمى القيم العظمى والصغرى لدالة **قيماً قصوى**. وتسمى النقاط عندها **نقاط التحول**، ويكون لمنحنى دالة
كثيرة الحدود من الدرجة n ، على الأكثر $n - 1$ نقطة تحول.

إرشادات للدراسة

الدوال الفردية

بعض الدوال الفردية
مثل $f(x) = x^3$ ليس لها
نقاط تحول.

إرشادات للدراسة

القيم النسبية

قد لا تكون أصفار
الدوال ونقاط التحول
عند قيم صحيحة
للمتغير x .

إرشادات للدراسة

القيم العظمى والصغرى

الدالة $f(x)$ متزايدة

الدالة $f(x)$ متناقصة

عظمى محلية

صغرى محلية

نقاط التحول

أصفار الدالة

القيم العظمى والصغرى

الدالة $f(x)$ متزايدة

الدالة $f(x)$ متناقصة

عظمى محلية

صغرى محلية

نقاط التحول

أصفار الدالة

إرشادات للدراسة

القيم العظمى والصغرى

الدالة $f(x)$ متزايدة

الدالة $f(x)$ متناقصة

عظمى محلية

صغرى محلية

نقاط التحول

أصفار الدالة

القيم العظمى والصغرى

الدالة $f(x)$ متزايدة

الدالة $f(x)$ متناقصة

عظمى محلية

صغرى محلية

تابع : تحليل التمثيلات البيانية

تحديد مواقع أصفار الدالة

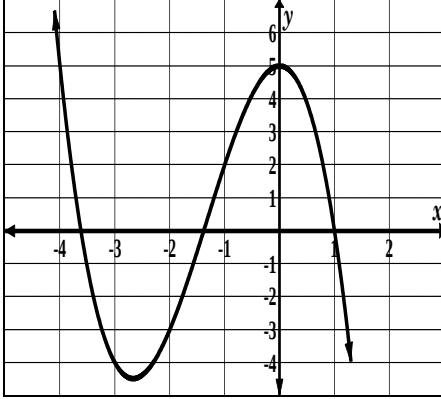
١ أكمل الجدول أدناه ، واستعمله لتحديد كل قيمتين صحيحتين للمتغير x يقع بينهما صفر حقيقي

وقيم x الصحيحة التي يوجد عندها أصفار حقيقية (إن وجدت) للدالة :

$f(x) = -x^3 - 4x^2 + 5$ ثم استعمل ما توصلت إليه لتمثيل الدالة f في المستوى الإحداثي

أدناه بصورة تقريبية .

الحل :



x	$f(x)$
-4	5
-3	-4
-2	-3
-1	2
0	5
1	0
2	-19

تغيير الإشارة

تغيير الإشارة

صفر للدالة

يوجد للدالة f أصفار حقيقية

① بين -3 , -4

② بين -1 , -2

③ وعند $x = 1$

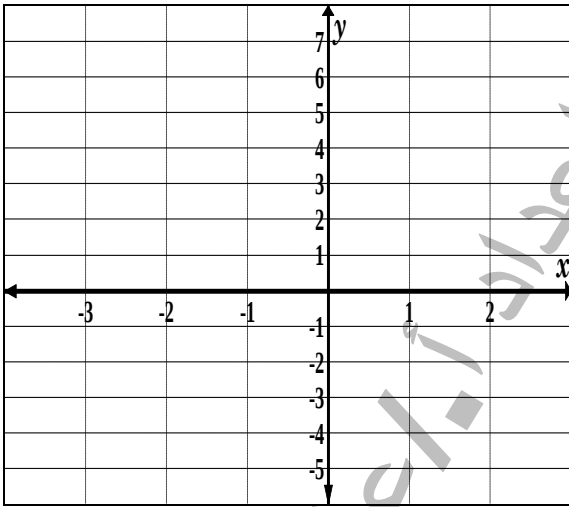
٢ أكمل الجدول أدناه ، واستعمله لتحديد كل قيمتين صحيحتين للمتغير x يقع بينهما صفر حقيقي

وقيم x الصحيحة التي يوجد عندها أصفار حقيقية (إن وجدت) للدالة :

$f(x) = 3x^3 + 9x^2 - 5$ ثم استعمل ما توصلت إليه لتمثيل الدالة f في المستوى الإحداثي

أدناه بصورة تقريبية .

الحل :



x	$f(x)$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	

٣ إذا كانت : $f(x) = 2x^4 - x^3 - 42x^2 + 160$

، فهل يوجد صفر حقيقي للدالة f بين العددين 3 و 2 ؟ وضّح إجابتك .

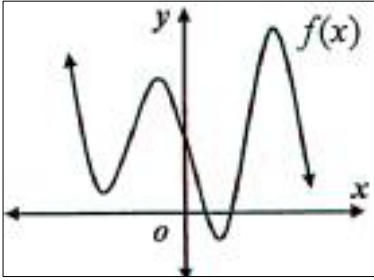
٤ إذا كانت : $f(x) = -4x^3 + 10x^2 - 8$

، فهل يوجد صفر حقيقي للدالة f بين العددين -1 و 0 ؟ وضّح إجابتك .

نقاط التحول : هي نقاط القيم القصوى المحلية (عظمى أو صغرى) $\Leftarrow$ (عندها قمة أو عندها قاع) .

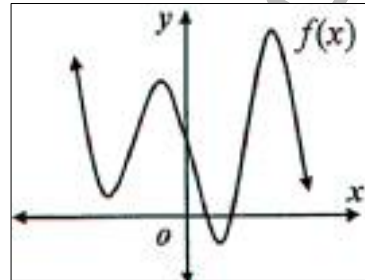
منحنى دالة كثيرة الحدود من الدرجة (n) له على الأكثر $(n - 1)$ نقطة تحول .
مثلاً إذا كان عدد نقاط التحول 4 نقاط $\Leftarrow$ أقل درجة ممكنة للدالة هي 5

١ كم صفراً حقيقياً للدالة f ؟



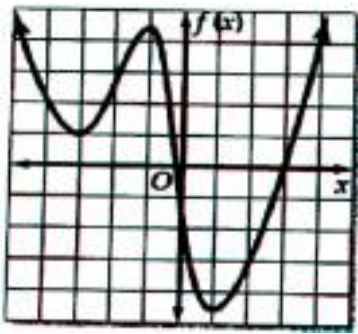
- 2 A
3 B
4 C
5 D

١ ما أقل درجة ممكنة للدالة f ؟



- 3 A
4 B
5 C
7 D

٣ ما أقل درجة ممكنة للدالة f ؟

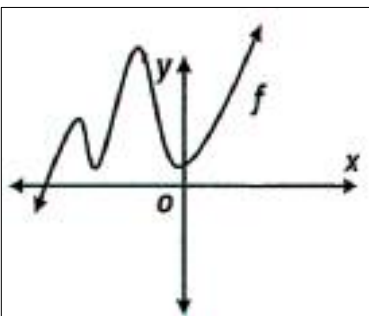


- 2 A
3 B
4 C
5 D

٢ إذا كانت g كثيرة حدود من الدرجة الرابعة فما عدد نقاط التحول للدالة $f(x) = 3x \cdot g(x)$ ؟

- 2 A على الأكثر .
3 B على الأكثر .
4 C على الأكثر .
5 D على الأكثر .

٥ اعتمد الشكل المجاور الذي يمثل التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود f للإجابة عما يأتي :



١ ما أقل درجة ممكنة للدالة f ؟

- 7 D 5 C 4 B 3 A

٢ كم صفراً حقيقياً موجباً للدالة f ؟

- 0 D 5 C 1 B 4 A

٦ ما أكبر عدد ممكن لنقاط التحول لمنحنى دالة كثيرة الحدود من الدرجة k ؟

- $k + 1$ D $k - 1$ C $2k$ B k A

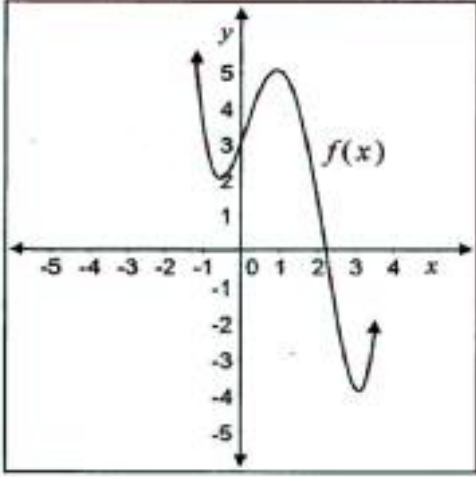
٧ أي القيمتين فيما يأتي يقع بينهما صفر حقيقي للدالة : $g(x) = 2x^3 - 3x + 5$ ؟

- 1, 0 B 0, 1 A
-2, -1 D 2, 3 C

تغيير الإشارة

تابع : تحليل التمثيلات البيانية

تمارين متنوعة على التمثيل البياني لدوال كثيرات الحدود

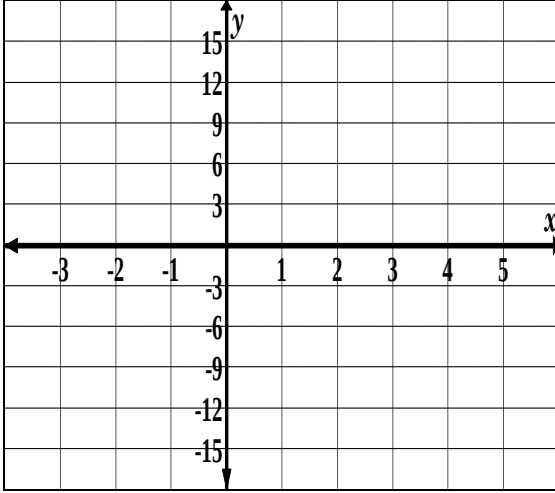
١ اعتمد الشكل أدناه الذي يمثل التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود f للإجابة عما يأتي :(a) حدد مجال الدالة f :(b) حدد مدى الدالة f :(c) حدد أقل درجة ممكنة للدالة f :(d) ما عدد الأصفار الحقيقية للدالة f ؟(e) هل الدالة f زوجية الدرجة أم فردية الدرجة ؟(f) صف سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة f ؟(g) قدر الإحداثي x لنقاط القيم العظمى المحلية والصغرى المحلية ؟٢ للدالة f الممثلة بيانياً في الشكل المجاور :(a) حدد مجال الدالة f :(b) حدد مدى الدالة f :(c) حدد أقل درجة ممكنة للدالة f :(d) هل الدالة f زوجية الدرجة أم فردية الدرجة ؟(e) صف سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة f ؟(f) قدر الإحداثي x لكل صفر حقيقي من أصفار الدالة f ؟(g) قدر الإحداثي x لكل نقطة تحول ، وحدد إذا كانت قيمة عظمى محلية أو صغرى محلية ؟

تابع : تحليل التمثيلات البيانية

تمارين متنوعة على التمثيل البياني لدوال كثيرات الحدود

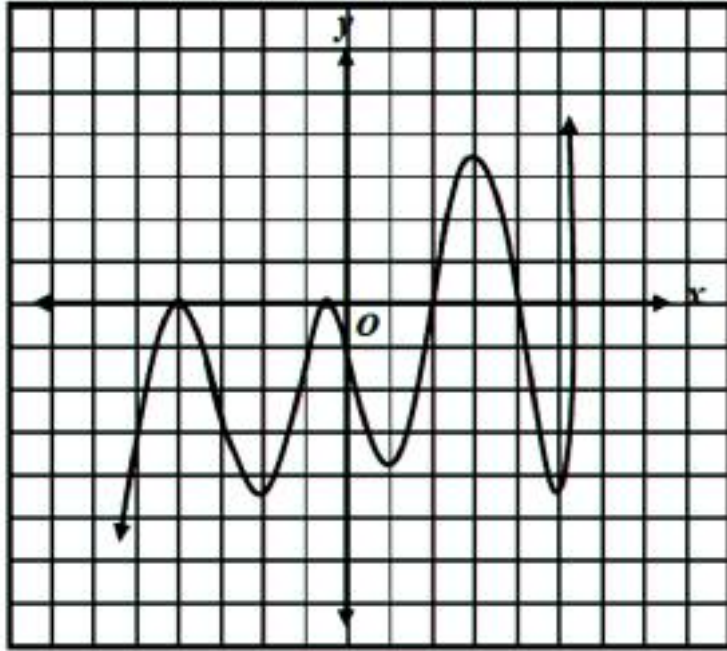
- ١ إذا كانت $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ ، فأكمل الجدول أدناه ، ثم مثل الدالة بيانياً ، ثم حدد الإحداثي x لنقاط القيم العظمى المحلية والصغرى المحلية .

الحل :



x	$f(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	

- ٢ اعتمد الشكل أدناه الذي يمثل التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود f للإجابة عما يأتي :



(a) اذكر ما إذا كانت درجة الدالة فردية أم زوجية .

(b) حدّد أقل درجة ممكنة لهذه الدالة .

(c) ما عدد الأصفار الحقيقية للدالة ، ثم قدر

الإحداثي x لصفر حقيقي مكرر (إن وجد) ؟

(d) قدر الإحداثي x للنقاط العظمى المحلية ، والنقاط الصغرى المحلية .

(e) صف سلوك طرفي التمثيل البياني .

ملخص المفهوم		
طرائق التحليل		
عدد الحدود	طريقة التحليل	الحالة العامة
أي عدد	إخراج العامل المشترك الأكبر	$4a^3b^2 - 8ab = 4ab(a^2b - 2)$
حذان	الفرق بين مربعين مجموع مكعبين الفرق بين مكعبين	$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
ثلاثة حدود	ثلاثية حدود على صورة المربع الكامل	$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
أربعة حدود أو أكثر	ثلاثية الحدود على الصورة العامة تجميع الحدود	$acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$ $ax + bx + ay + by = x(a + b) + y(a + b)$ $= (a + b)(x + y)$

تعد طريقة التحليل بتجميع الحدود هي الطريقة الوحيدة لتحليل كثيرات الحدود المكونة من أربعة حدود أو أكثر. أما كثيرات الحدود المتضمنة حدين أو ثلاثة حدود فيمكن تحليلها اعتماداً على إحدى الطرائق الموجودة في الجدول أعلاه.

كثيرة الحدود الأولية : كثيرة الحدود التي لا يمكن تحليلها تسمى كثيرة الحدود الأولية .
فمثلاً : $x^2 + 9$ كثيرة حدود أولية (لأنه لا يمكن تحليلها) .

تستطيع أحياناً أن تكتب كثيرة حدود في المتغير x على الصورة $au^2 + bu + c$ ، فمثلاً بفرض أن $u = x^2$ ، يمكن كتابة كثيرة الحدود $x^4 + 12x^2 + 32$ على الصورة $(x^2)^2 + 12(x^2) + 32$ أو $u^2 + 12u + 32$. وكثيرة الحدود هذه تكافئ كثيرة الحدود الأصلية ، وتسمى كثيرة حدود على الصورة التربيعية.

مفهوم أساسي	
الصورة التربيعية	
التعبير اللفظي	الصورة التربيعية لكثيرة الحدود في متغير x هي $au^2 + bu + c$ حيث $a, b, c, a \neq 0$ أعداد حقيقية، u هو تعبير جبري بدلالة المتغير x .
مثال	$12x^6 + 8x^3 + 1 = 3u^2 + 4u + 1, u = 2x^3$

حل معادلات كثيرات الحدود يمكنك تطبيق طرائق حل المعادلات التربيعية في حل معادلات كثيرات الحدود ذات الدرجات الأعلى من الدرجة الثانية.

التحليل (العامل المشترك الأعلى - تجميع - فرق بين مربعين - مجموع وفرق بين مكعبين)

حل كلاً مما يأتي ، وإذا لم يكن ذلك ممكناً ، فاكتب " كثيرة حدود أولية " :

① $5a^2 - 5b^2$

أي كثيرة حدود مما يأتي كثيرة حدود أولية ؟

A $x^3 - 4x$ B $x^2 + 25$

C $36x^2 - 1$ D $12xy - 15y^2$

④ $8c^3 - 27d^3$

③ $12qw^3 - 12q^4$

⑥ $x^5 - 6x^4 + 9x^3 + x^2y^3 - 6xy^3 + 9y^3$

⑤ $30ax - 24bx + 6cx - 5ay^2 + 4by^2 - cy^2$

الصورة التربيعية لكثيرة الحدود

اكتب التعابير الآتية على الصورة التربيعية (إن أمكن ذلك) :

⑧ $4x^6 - 2x^3 + 8$

⑦ $2x^6 - x^3 + 9$

الحل : $(x^3)^2 = x^6 \Leftrightarrow$ يمكن كتابتها

بفرض $u = x^3 \Leftrightarrow 2u^2 - u + 9$

⑩ $y^8 + 12y^3 + 8$

⑨ $x^4 - 2x^3 - 1$

الحل : بما أن $(x^3)^2 \neq x^4$

لذا فلا يمكن كتابته على الصورة التربيعية .

القانون العام لحل المعادلة التربيعية : $ax^2 + bx + c = 0$ هو $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

٢ حل المعادلة : $x^3 + 27 = 0$

[الجواب : $-3, \frac{3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$]

١ حل المعادلة : $x^3 - 64 = 0$

[$4, -2 \pm 2\sqrt{3}i$]

٤ إذا كان : $f(t) = t^3 + 5t^2 - 4t - 20$

فأوجد قيم t عندما $f(t) = 0$

[الجواب : $-5, \pm 2$]

٣ أوجد الجذور الحقيقية للمعادلة :

$$x^6 - 3x^3 = 88$$

[الجواب : $-2, \sqrt[3]{11}$]

تابع : حل معادلات كثيرات الحدود

تمارين على حل معادلات كثيرات الحدود باستعمال الصورة التربيعية

٦ حل المعادلة : $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$
 [الجواب : $\pm 3i, \pm 2$]

١ حل المعادلة : $x^4 + 225 = 34x^2$
 [الجواب : $\pm 3, \pm 5$]

٤ حل المعادلة : $15x^4 - 8x^2 + 1 = 0$
 [الجواب : $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$]

٣ حل المعادلة : $18x^4 + 3 = 21x^2$
 [الجواب : $\pm 1, \pm \frac{\sqrt{6}}{6}$]

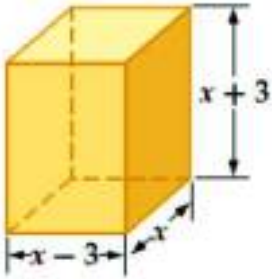
تطبيقات على حل معادلات كثيرات الحدود

تطبيقات على حل معادلات كثيرات الحدود



- ١ صنع أنس ممرًا خشبيًا عرضه x ft حول بركة مستطيلة الشكل .
إذا كان طول البركة 40 ft ، وعرضها 30 ft ، ومساحة سطحها
مع الممر 2000 ft^2 ، فما عرض الممر الخشبي ؟ [الجواب : 5 ft]

- ٢ حديقة مستطيلة الشكل بُعِداها 40 ft , 32 ft ، تم توسعتها لتصبح مساحة سطحها 4.5 أمثال
مساحة سطحها الأصلية بزيادة كل من طرفي طولها وعرضها بالمقدار نفسه . اكتب معادلة كثيرة حدود
تُمثل مساحة المنطقة الجديدة ، وحلها بالتحليل إلى العوامل . [الجواب : 20 ft]



- ٣ إذا كان حجم متوازي المستطيلات في الشكل أدناه يساوي 440 cm^3
، فأوجد أبعاد متوازي المستطيلات ؟ [الجواب : 5 , 8 , 11 cm]

- ٤ قُدِّر أن عدد الفيروسات في إحدى التجارب بالدالة :

$$p(t) = -0.012t^3 - 0.24t^2 + 6.3t + 8000$$

حيث t الزمن بالساعات ، $p(t)$ عدد

الفيروسات ، فما الزمن الذي يصبح فيه عدد الفيروسات 8000 فيروس . [الجواب : 0 , 15 h]

نظرية الباقي – نظرية العوامل

نظرية

نظرية الباقي

أضف إلى

مطوبتك

التعبير اللفظي إذا قسمت كثيرة حدود $P(x)$ على $x - r$ ، فإن الباقي ثابت ويساوي $P(r)$ ، وكذلك :

$$\begin{array}{ccccccc} & & \text{الباقي} & + & \text{المقسوم عليه} & \cdot & \text{ناتج القسمة} \\ P(x) & = & P(r) & + & (x - r) & \cdot & Q(x) \end{array}$$

حيث $Q(x)$ دالة كثيرة حدود تقل درجتها بواحد عن درجة $P(x)$.

$$x^2 + 6x + 2 = (x - 4) \cdot (x + 10) + 42$$

مثال

تُسمى عملية تطبيق نظرية الباقي باستعمال القسمة التركيبية لإيجاد قيمة الدالة **التعويض التركيبي**. وهي طريقة سهلة لإيجاد قيمة دالة، خصوصاً عندما تكون درجة كثيرة الحدود أكبر من الدرجة الثانية.

عوامل كثيرات الحدود تبين القسمة التركيبية أدناه أن ناتج قسمة $2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$ على $x + 3$ هو $2x^2 - 9x + 10$.

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 2 & -3 & -17 & 30 \\ & & -6 & 27 & -30 \\ \hline & 2 & -9 & 10 & 0 \end{array}$$

عند قسمة كثيرة حدود على أحد عواملها ثنائية الحد، يكون ناتج القسمة كثيرة حدود تقل درجتها بواحد عن درجة كثيرة الحدود الأصلية.

بناءً على عملية القسمة وباستعمال نظرية الباقي فإن:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \text{الباقي} & + & \text{المقسوم عليه} & \cdot & \text{ناتج القسمة} \\ 2x^3 - 3x^2 - 17x + 30 & = & 0 & + & (x + 3) & \cdot & (2x^2 - 9x + 10) \end{array}$$

وبما أن باقي القسمة يساوي صفراً، فإن $f(-3) = 0$. وهذا يعني أن $x + 3$ عامل لكثيرة الحدود $2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$. وهذا يوضح نظرية العوامل، التي تعدُّ حالة خاصة من نظرية الباقي.

نظرية

نظرية العوامل

أضف إلى

مطوبتك

تكون ثنائية الحد $x - r$ عاملاً من عوامل كثيرة الحدود $P(x)$ إذا وفقط إذا كان $P(r) = 0$.

يمكن استعمال نظرية العوامل للتحقق من أن ثنائية حد معينة عامل من عوامل كثيرة حدود معطاة، ويمكن استعمالها أيضاً لتحديد جميع عوامل كثيرة الحدود.

إرشاد : التحليل إلى العوامل ليس شرطاً أن تكون عوامل كثيرات الحدود ثنائيات حد .

فمثلاً : عاملا كثيرات الحدود $x^3 + x^2 - x + 15$ هما $x + 3$ ، $x^2 - 2x + 5$

أولاً : نظرية الباقي

قيمة الدالة (التعويض المباشر – التعويض التركيبي)

١ إذا كانت : $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x + 2$ فأوجد $f(4)$

[الجواب : 662]

بطريقة التعويض المباشر وبطريقة التعويض التركيبي .

٢ إذا كانت : $g(x) = 4x^5 + 2x^3 + x^2 - 1$ فأوجد $g(-1)$

[الجواب : -6]

بطريقة التعويض المباشر وبطريقة التعويض التركيبي .

٣ يمكن استعمال الدالة : $c(x) = 2.4x^3 - 22.3x^2 + 53.8x + 548.2$ لتقدير عدد الطلبةفي إحدى الجامعات منذ عام 2000 م ، حيث تمثل x عدد السنوات ، $c(x)$ عدد الطلبة بالآلاف .

قدّر عدد طلبة الجامعة عام 2012 م مستعملاً التعويض التركيبي . [الجواب : 2129800]

٤ إذا كانت القوة التي تولدها طاحونة تعمل بطاقة الرياح هي : $p(s) = 4s^3 + 6s^2 - 2s + 15$ ، حيث s سرعة الرياح بالكيلو متر لكل ساعة . مستعملاً التعويض التركيبي احسب القوة التي تولدها

[الجواب : 9791 وحدة]

الطاحونة عندما تكون $s = 13 \text{ km/h}$.

ثانياً : نظرية العوامل

$$\frac{\text{المقسوم عليه}}{\text{المقسوم}} = \frac{\text{الباقى}}{\text{ناتج القسمة}} + \frac{\text{المقسوم عليه}}{\text{المقسوم}}$$

$$P(a) = 0 \Leftrightarrow x - a \text{ عامل من عوامل } P(x)$$

$$x = a \Leftrightarrow \text{صفر من أصفار } P(x)$$

١ بيّن أن $(x - 2)$ أحد عوامل كثيرة الحدود : $P(x) = x^3 - 7x^2 + 4x + 12$

$$[(x - 2)(x - 6)(x + 1)]$$

باستعمال نظرية العوامل ، ثم أوجد عواملها الأخرى .

٢ بيّن أن $(x - 3)$ أحد عوامل كثيرة الحدود : $P(x) = 2x^3 - 13x^2 + 27x - 18$

$$[(x - 3)(x - 2)(2x - 3)]$$

باستعمال نظرية العوامل ، ثم أوجد عواملها الأخرى .

٣ استعمل التعويض التركيبي لإيجاد ناتج وباقي قسمة : $P(x) = x^5 + 4x^4 - 13x^3 + x + 6$

$$[x^4 + 6x^3 - x^2 - 2x - 3]$$

على $(x - 2)$ ، ثم اكتب ماذا تستنتج من ذلك .

نظرية الباقي – نظرية العامل

نظرية الباقي : إذا قسمت $P(x)$ على $(x - a)$ فإن الباقي $P(a)$

$$P(a) = 0 \Leftrightarrow x - a \text{ عامل من عوامل } P(x) \text{ أو } x = a \text{ صفر من أصفار } P(x)$$

❶ إذا كان عدد المليجرامات من مسكن الألم الموجود في الدم بعد الدالة x ساعة من تناول جرعة دواء يعطى بالدالة : $f(x) = 0.5x^4 + 3.45x^3 - 96.65x^2 + 347.7x$ مستعملاً التعويض التركيبي احسب عدد المليجرامات من المسكن الموجود في الدم بعد ساعتين . [344.4 mg]

❷ إذا كان 3 صفراً للدالة :

❸ إذا كان 1 صفراً للدالة :

$$g(x) = 2x^4 - 2ax^2 + bx$$

$$f(x) = x^4 + bx^2 + c$$

وكان باقي قسمة $2x^4 - 2ax^2 + bx$

وكان باقي قسمة $x^4 + bx^2 + c$

على $x + 1$ يساوي 3 ، فأوجد كلاً من a, b ؟

على $x - 1$ يساوي 8 ، فأوجد كلاً من c, b ؟

الجواب

$$a = \frac{1}{4}$$

$$b = \frac{-3}{2}$$

الجواب

$$b = -11$$

$$c = 18$$

نظرية الباقي - نظرية العامل

$$P(a) = 0 \Leftrightarrow x - a \text{ عامل من عوامل } P(x) \text{ أو } x = a \text{ صفر من أصفار } P(x)$$

١ استعمل نظريتي الباقي والعوامل لبيان ما إذا كانت :

$$f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 12x - 4$$

تقبل القسمة على $(x^2 - 4)$ دون باقي ، أو لا تقبل القسمة عليها دون باقي .

الحل : $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ ، ثم باستعمال التعويض المباشر أو التعويض التركيبي

$$f(2) = 32 + 24 - 28 - 24 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2) \text{ من عوامل } f$$

$$f(-2) = 32 - 24 - 28 + 24 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 2) \text{ من عوامل } f$$

مما سبق ينتج أن f تقبل القسمة على $(x^2 - 4)$ دون باقي .

٢ إذا كان $(x - 3)$ أحد عوامل الدالة : $f(x) = x^3 + 4x^2 - 15x + k$ فما قيمة k ؟

$$9 \quad A \quad -9 \quad B$$

$$18 \quad C \quad -18 \quad D$$

٣ إذا كان $(x + 2)$ عاملاً من عوامل : $f(x) = 3x^3 + x^2 + qx - 4$ ، فما قيمة q ؟

$$-12 \quad A \quad 12 \quad B$$

$$-8 \quad C \quad 16 \quad D$$

٤ أي مما يأتي ليس عاملاً لكثيرة الحدود : $x^3 - 3x^2 + 2x$ ؟

$$x - 2 \quad A \quad x - 1 \quad B$$

$$x + 1 \quad C \quad x \quad D$$

٥ أي مما يأتي ليس عاملاً لكثيرة الحدود : $x^3 - x^2 - 2x$ ؟

$$x - 2 \quad A \quad x - 1 \quad B$$

$$x + 1 \quad C \quad x \quad D$$

٦ استعمل نظريتي الباقي والعوامل لبيان ما إذا كانت : $f(x) = x^5 + 4x^4 + 2x^3 - 6x - 1$

تقبل القسمة على $(x^2 - 1)$ دون باقي ، أو لا تقبل القسمة عليها دون باقي . [الجواب : لا]

ملخص المفهوم

الأصفار، والعوامل، والجذور، والمقاطع

التعبير اللفظي

إذا كانت $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ دالة كثيرة حدود،

فإن العبارات الآتية متكافئة،

- c صفر للدالة $P(x)$.
- c جذر أو حل للمعادلة $P(x) = 0$.
- $x - c$ عامل من عوامل كثيرة الحدود $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$.
- إذا كان c عددًا حقيقيًا، فإن $(c, 0)$ هي نقطة تقاطع التمثيل البياني للدالة $P(x)$ مع المحور x .

مثال

افترض أن دالة كثيرة الحدود هي $P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$.

فإن أصفار هذه الدالة هي $2, 1, -2, -3$.

وجذور المعادلة $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0$ هي

$2, 1, -2, -3$.

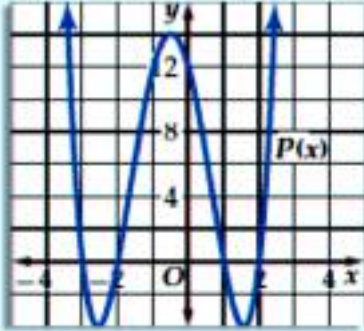
عوامل كثيرة الحدود $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$

هي $(x + 3), (x + 2), (x - 1), (x - 2)$

ونقاط تقاطع التمثيل البياني للدالة

$P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$

مع المحور x هي $(-3, 0), (-2, 0), (1, 0), (2, 0)$.



عند حل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من صفر سيكون هناك جذر حقيقي واحد أو أكثر، وقد لا يوجد جذور حقيقية (أي أن الجذور أعداد تخيلية). وبما أن الأعداد الحقيقية والتخيلية جميعها تنتمي إلى مجموعة الأعداد المركبة، يمكن القول: إن أية معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من الصفر لها جذر واحد على الأقل ينتمي إلى مجموعة الأعداد المركبة، وهذه هي النظرية الأساسية في الجبر.

نظرية

النظرية الأساسية في الجبر

أضف إلى

مطويتك

كل معادلة كثيرة حدود درجتها أكبر من صفر لها جذر واحد على الأقل ينتمي لمجموعة الأعداد المركبة.

نتيجة

نتيجة للنظرية الأساسية في الجبر

أضف إلى

مطويتك

يكون لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة n العدد n فقط من الجذور المنتمية إلى

مجموعة الأعداد المركبة بما في ذلك الجذور المكررة.

$$x^3 + 2x^2 + 6 \quad 4x^4 - 3x^3 + 5x - 6 \quad -2x^5 - 3x^2 + 8$$

مثال

3 جذور

4 جذور

5 جذور

قراءة الرياضيات

الجذور المكررة

يمكن أن يكون لمعادلات
كثيرات الحدود جذور
مكرر مرتين أو ثلاث
أو أربع مرات وهكذا.

تابع : الجذور والأصفار

تحديد عدد الجذور وأنواعها

حل كل معادلة مما يأتي ، وحدد عدد جذورها ، وأنواعها :

$x^2 + 6x + 9 = 0$

②

$x^2 + 2x - 48 = 0$

①

$x^4 - 81 = 0$

④

$x^3 + 16x = 0$

③

$3x^3 - x^2 + 9x - 3 = 0$

⑥

$x^3 - 8 = 0$

⑤

⑦ إذا كان $2i$ أحد أصفار الدالة $f(x) = x^3 + mx^2 + 4x + 8$ ، فما قيمة m ؟

A -2 B 2

C -6 D 6



قانون ديكارت للإشارات

أضف إلى

طوبتك

إذا كانت $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية، فإن :

- عدد الأصفار الحقيقية الموجبة للدالة $P(x)$ يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود الدالة $P(x)$ ، أو أقل منه بعدد زوجي.

- عدد الأصفار الحقيقية السالبة للدالة $P(x)$ يساوي عدد مرات تغير إشارة معاملات حدود الدالة $P(-x)$ ، أو أقل منه بعدد زوجي.

إرشادات للدراسة

الصفحة عند نقطة
الأصل إذا كان أحد
أصفار دالة يقع عند
نقطة الأصل فإن مجموع
عدد الأصفار الحقيقية
الموجبة والأصفار
الحقيقية السالبة
والأصفار التخيلية
يتناقص بعدد مرات كون
العدد 0 صفراً للدالة.

ملحوظة : إذا لم يوجد تغير في إشارات معاملات حدود $f(x)$ أو $f(-x)$ فلا يوجد أصفار حقيقية .

عدد الأصفار الموجبة والسالبة بقانون ديكارت للإشارات

مثال : حدّد العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة والأصفار الحقيقية السالبة والأصفار التخيلية

للدالة : $f(x) = x^6 + 3x^5 - 4x^4 - 6x^3 + x^2 - 8x + 5$

الحل : درجة $f(x)$ تساوي 6 فإن لها 6 أصفار مركبة فقط ، حقيقية أو تخيلية أو كليهما

احسب عدد مرات تغير إشارة معاملات الدالة $f(x)$.

$$f(x) = x^6 + 3x^5 - 4x^4 - 6x^3 + x^2 - 8x + 5$$

$\begin{array}{cccccccc} & + & & - & & + & & - & & + \\ \text{نعم} & & \text{نعم} & & \text{نعم} & & \text{نعم} & & \text{نعم} & \\ & + & + & & - & - & & - & + & \end{array}$

نجد أن هناك 4 تغيرات في إشارة المعاملات، لذا فإن عدد الأصفار الحقيقية الموجبة سيكون 4 أو 2 أو 0.

احسب عدد مرات تغير إشارة معاملات الدالة $f(-x)$.

$$f(-x) = (-x)^6 + 3(-x)^5 - 4(-x)^4 - 6(-x)^3 + (-x)^2 - 8(-x) + 5$$

$$= x^6 - 3x^5 - 4x^4 + 6x^3 + x^2 + 8x + 5$$

$\begin{array}{cccccccc} & - & & - & & + & & + & & + \\ \text{نعم} & & \text{نعم} & & \text{نعم} & & \text{نعم} & & \text{نعم} & \\ & + & - & & - & - & & + & + & \end{array}$

نجد أن هناك تغيرين في إشارة المعاملات، لذا فإن عدد الأصفار الحقيقية السالبة سيكون 2 أو 0.

كوّن جدولاً يبين عدد الأصفار الحقيقية والتخيلية الممكنة.

عدد الأصفار الحقيقية الموجبة	عدد الأصفار الحقيقية السالبة	عدد الأصفار التخيلية	مجموع عدد الأصفار
4	2	0	$4 + 2 + 0 = 6$
4	0	2	$4 + 0 + 2 = 6$
2	2	2	$2 + 2 + 2 = 6$
2	0	4	$2 + 0 + 4 = 6$
0	2	4	$0 + 2 + 4 = 6$
0	0	6	$0 + 0 + 6 = 6$

① لإيجاد عدد الأصفار التخيلية بـ :

جمع عدد الأصفار الحقيقية الموجبة

وعدد الأصفار الحقيقية السالبة ثم

طرحه من عدد الأصفار المركبة الممكنة

② لاحظ أن عدد الأصفار التخيلية عدد

زوجي لأنها تأتي بأزواج مترافقة .

تابع : قانون ديكارت للإشارات

عدد الأصفار الموجبة والسالبة بقانون ديكارت للإشارات

١ حدّد العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة والأصفار الحقيقية السالبة والأصفار التخيلية للدالة :

$$f(x) = 2x^5 + x^4 + 3x^3 - 4x^2 - x + 9$$

[الجواب : الحقيقية الموجبة 2 أو 0 ، الحقيقية السالبة 3 أو 1 ، التخيلية 4 أو 2 أو 0]

٢ حدّد العدد الممكن للأصفار الحقيقية الموجبة ، والأصفار الحقيقية السالبة للدالة :

$$P(x) = -x^6 + 4x^3 - 2x^2 - x - 1$$

[الجواب : الحقيقية الموجبة 2 أو 0 ، الحقيقية السالبة 2 أو 0]

٣ إذا كانت : $P(x) = 2x^4 - x^3 - 42x^2 + 16x + 160$

باستعمال قانون ديكارت للإشارات ، حدّد العدد الممكن للأصفار الحقيقية السالبة

ملحوظة : يمكنك استعمال التعويض التركيبي أو التعويض المباشر لاختبار الأصفار ما لم يُحدد في المسألة .

استعمال التعويض التركيبي لإيجاد الأصفار (طريقة اختبار الأصفار الممكنة)

❶ أوجد جميع أصفار الدالة : $f(x) = x^3 - x^2 + 2x + 4$

الحل : $f(x)$ من الدرجة الثالثة ، لذا يوجد 3 أصفار فقط (أصفار مركبة) .

$$f(-x) = \underbrace{-x^3}_{\text{لا}} - \underbrace{x^2}_{\text{لا}} - \underbrace{2x}_{\text{نعم}} + 4$$

عدد الأصفار الحقيقية السالبة 1

$$f(x) = \underbrace{x^3}_{\text{نعم}} - \underbrace{x^2}_{\text{نعم}} + \underbrace{2x}_{\text{لا}} + 4$$

عدد الأصفار الحقيقية الموجبة 2 أو 0

يمكن اختبار القيم بالتعويض المباشر

x	1	-1	2	4
-2	1	-3	8	-12
-1	1	-2	4	0
0	1	-1	2	4
1	1	0	2	6

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & -4 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & 0 \end{array}$$

• لذا فإن للدالة $f(x)$ ، 3 أصفار حقيقية ، أو صفر حقيقي وصفران تخيليان .

• باختبار قيم (موجبة / سالبة / صفر) لتحديد الأصفار الحقيقية

• باستعمال التعويض التركيبي (أو التعويض المباشر) :

$$f(-1) = 0 \text{ ، لذا فإن أحد الأصفار يقع عند } x = -1$$

$$\text{وناتج القسمة هو : } x^2 - 2x + 4$$

• لإيجاد باقي الأصفار نستعمل القانون العام لحل المعادلة :

$$x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(4)}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}i$$

• فتكون الأصفار هي : -1 ، $1 \pm \sqrt{3}i$

❷ أوجد جميع أصفار الدالة : $f(x) = x^3 + 2x^2 + 9x + 18$

[**الجواب :** للدالة صفر حقيقي واحد عند $x = -2$ ، وصفران تخيليان عند $x = \pm 3i$]

يمكن الحل بالتحليل بالتقسيم

نظرية الأعداد المركبة المترافقة

نظرية

نظرية الأعداد المركبة المترافقة

أضالي

مطوبتك

التعبير اللفظي

إذا كان a, b عددين حقيقيين حيث $b \neq 0$ ، وكان $a + bi$ صفراً لدالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد حقيقية، فإن $a - bi$ صفراً للدالة أيضاً.

مثال

إذا كان $3 + 4i$ صفراً للدالة $f(x) = x^3 - 4x^2 + 13x + 50$ فإن $3 - 4i$ صفراً للدالة أيضاً.

مراجعة المفردات

الأعداد المركبة

المترافقة

العددان المركبان

 $a + bi, a - bi$

مترافقان.

$$i^2 = -1$$

عندما تعطى جميع أصفار دالة كثيرة حدود، ويطلب إليك تحديد الدالة، حوّل الأصفار إلى عوامل، ثم اضرب جميع العوامل بعضها في بعض لتحصل على الدالة كثيرة الحدود المطلوبة.

استعمال الأصفار لكتابة دالة كثيرة الحدود

- ١ أوجد دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كانت الأعداد $6, -1, 4$ من أصفارها. الجواب: $P(x) = x^3 - 9x^2 + 14x + 24$

- ٢ أوجد دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كان العددان $3i, -i$ من أصفارها. الجواب: $P(x) = x^4 + 10x^2 + 9$

- ٣ أوجد دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن ومعاملات حدودها أعداد صحيحة، إذا كان العددان $-1, \sqrt{3}i$ من أصفارها. الجواب: $f(x) = x^3 + x^2 + 3x + 3$

نظرية الأعداد المركبة المترافقة

تابع : استعمال الأصفار لكتابة دالة كثيرة الحدود

١ أوجد دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن ومعاملات حدودها أعداد صحيحة ، إذا كان العدان $1 + 2i$, -1 من أصفارها .

الحل : بما أن $1 + 2i$ صفر للدالة ، فإن $1 - 2i$ أيضاً صفر للدالة (نظرية الأعداد المركبة المترافقة)

• ضرب العوامل : $f(x) = (x + 1)[x - (1 + 2i)][x - (1 - 2i)]$

• بإعادة تجميع الحدود : $f(x) = (x + 1)[(x - 1) - 2i][(x - 1) + 2i]$

• الفرق بين مربعين : $f(x) = (x + 1)[(x - 1)^2 - (2i)^2]$

• فك التربيع : $f(x) = (x + 1)[x^2 - 2x + 1 - 4(-1)]$

• بالتبسيط : $f(x) = (x + 1)[x^2 - 2x + 5]$

• بالضرب وجمع الحدود المتشابهة : $f(x) = x^3 - x^2 + 3x + 5$

٢ أوجد دالة كثيرة حدود درجتها أقل ما يمكن ومعاملات حدودها أعداد صحيحة ، إذا كان العدان 3 , $2 - i$ من أصفارها .
[الجواب : $P(x) = x^3 - 7x^2 + 17x - 15$]

٣ ما عدد الأصفار الحقيقية السالبة للدالة : $f(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 6x$ ؟

A 1 B 0 أو 2

C 0 D 4

٤ إذا كانت $p(x) = 4x^7 + 2x^4 - 10x^3 - 5$ ، فأَيّ مما يأتي لا يُمثّل صفراً نسبياً ممكناً من الأصفار التي تحددها نظرية الصفر النسبي ؟

A -1 B $\frac{5}{4}$ C $\frac{4}{5}$ D 5

تحديد الأصفار النسبية إن عملية اختبار جميع الأصفار الممكنة لدالة كثيرة حدود من خلال التعويض التركيبي ليست عملية سهلة. وتساعد نظرية الصفر النسبي على اختيار بعض الأعداد النسبية لاختبارها. وإذا كان المعامل الرئيس للدالة 1، تستعمل نتيجة النظرية لاختيار بعض الأصفار

نظرية

نظرية الصفر النسبي

أضف إلى

مطوبتك

التعبير اللفظي إذا كانت $P(x)$ دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد صحيحة، فإن أي صفر نسبي للدالة، $P(x)$ سيكون على صورة العدد النسبي $\frac{p}{q}$ في أبسط صورة، حيث p أحد عوامل الحد الثابت، q أحد عوامل المعامل الرئيس.

مثال لتكن $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 17x + 12$ ، فإذا كان العدد النسبي $\frac{3}{2}$ صفر للدالة $f(x)$ فإن 3 أحد عوامل العدد 12، و 2 أحد عوامل العدد 2.

نتيجة نظرية الصفر النسبي

إذا كانت $P(x)$ دالة كثيرة حدود معاملات حدودها أعداد صحيحة، والمعامل الرئيس لها 1، وحدها الثابت لا يساوي صفراً، فإن أي صفر نسبي للدالة $P(x)$ يجب أن يكون أحد عوامل الحد الثابت.

إيجاد الأصفار النسبية عندما تكتب جميع الأصفار النسبية الممكنة، يمكنك اختبار كل عدد باستعمال التعويض التركيبي، واستعمال الطرائق الأخرى التي تعلمتها لإيجاد أصفار الدالة.

يمكن اختبار الأصفار النسبية الممكنة بالتعويض المباشر : $x = a \iff f(a) = 0$ صفر للدالة

تحديد الأصفار النسبية الممكنة (باستعمال نظرية الصفر النسبي)

أوجد جميع الأصفار النسبية الممكنة التي تحددتها نظرية الصفر النسبي للدالة :

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 12 \quad \text{②}$$

$$f(x) = 3x^3 - 4x + 10 \quad \text{①}$$

الحل : عوامل الحد الثابت 10 هي :

$$p = \pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$$

عوامل المعامل الرئيس 3 هي : $q = \pm 1, \pm 3$

لذا فإن الأصفار النسبية الممكنة هي :

$$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$$

$$, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{5}{3}, \pm \frac{10}{3}$$

$$g(x) = (2x^2 - 1)(5 + x - 3x^2) \quad \text{③}$$

[الجواب : $\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 5, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{5}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{5}{3}, \pm \frac{1}{6}, \pm \frac{5}{6}$]

تابع : نظرية الصفر النسبي

إيجاد الأصفار النسبية : عندما تكتب جميع الأصفار النسبية الممكنة ، يمكنك اختبار كل عدد باستعمال التعويض التركيبي (أو المباشر) ما لم يُحدّد ، واستعمال الطرائق الأخرى لإيجاد أصفار الدالة .

إيجاد
جميع
الأصفار
النسبية

- ① من المفيد استعمال قانون ديكارت للإشارات في الحل للتقليل من الأعداد المُختبرة .
- ② فإذا لم تستعمل قانون ديكارت فيجب اختبار جميع الأصفار النسبية الممكنة .
- ③ ليس من الضروري في العادة اختبار جميع الأصفار الممكنة ، فعند إيجاد أحدها ، حل الدالة الناتجة من قسمة كثيرة الحدود على أحد عواملها لتجد الأصفار الأخرى .

② أوجد جميع الأصفار النسبية للدالة :

$$f(x) = x^3 - 6x^2 - 13x + 42$$

[الجواب : 7 , 2 , -3]

① أوجد جميع الأصفار النسبية للدالة :

$$f(x) = x^4 + x^3 - 8x - 8$$

الحل : عوامل الحد الثابت - 8 هي :

$$p = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$$

عوامل المعامل الرئيس 1 هي : $q = \pm 1$

• لذا فإن الأصفار النسبية الممكنة هي :

$$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$$

• من قانون ديكارت للإشارات :

$$f(x) = x^4 + x^3 - 8x - 8$$

$$f(-x) = x^4 - x^3 + 8x - 8$$

يوجد تغيير واحد في إشارة معاملات $f(x)$

لذلك يكون عدد الأصفار الموجبة 1 ، كما

يوجد 3 تغييرات في إشارة معاملات $f(-x)$

لذلك يكون عدد الأصفار السالبة 3 أو 1 .

• اختبار الأصفار النسبية (بتكوين جدول) :

$\frac{p}{q}$	1	1	0	-8	-8
-1	1	0	0	-8	0
1	1	2	2	-6	-14
-2	1	-1	2	-12	16
2	1	3	6	4	0
-4	1	-3	12	-56	216

• من الجدول : $f(-1) = 0$, $f(2) = 0$

يوجد صفران نسبيا أحدهما سالب هو -1

والآخر موجب هو 2 .

• يمكن نختبر الأصفار بالتعويض المباشر .

• باستعمال قانون ديكارت تم حذف 4 ، 8 ، -8

تابع : نظرية الصفر النسبي

إيجاد جميع الأصفار (الأصفار المركبة)

١ لتكن : $f(x) = x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 4x - 4$ ، دالة كثيرة حدودA أوجد جميع الأصفار الممكنة التي تحددها نظرية الصفر النسبي لكثيرة الحدود $f(x)$.عوامل الحد الثابت : $p = \pm 1, \pm 2, \pm 4$ ، عوامل المعامل الرئيس : $q = \pm 1$ يمكن استعمال التعويض لمباشر
لكن السؤال ينص على استعمال
التعويض التركيبيلذا فإن الأصفار النسبية الممكنة هي : $\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm 4$ B باستعمال التعويض التركيبي بين أن -1 هو أحد هذه الأصفار .بما أن $f(-1) = 0$ -1 هو أحد الأصفار للدالة

	1	1	-3	-3	-4	-4
-1	0	-1	0	3	0	4
	1	0	-3	0	-4	0

C أوجد بقية الأصفار الأربعة للدالة $f(x)$.نوجد أصفار كثيرة الحدود الناتجة عن القسمة $x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \Leftarrow$

$$(x^2 + 1)(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm i$$

يمكن الحل بفرض : $u = x^2$

$$أو \quad x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

للدالة f خمسة أصفار مركبة فقط $\Leftarrow$ جميع الأصفار للدالة هي : $-1, \pm 2, \pm i$ ٢ لتكن : $g(x) = -4x^5 + 8x^4 - 3x^3 + 6x^2 + x - 2$ دالة كثيرة حدودA أوجد جميع الأصفار الممكنة التي تحددها نظرية الصفر النسبي لكثيرة الحدود $g(x)$.

B باستعمال التعويض التركيبي بين أن 2 هو أحد هذه الأصفار .

C أوجد بقية الأصفار الأربعة للدالة $g(x)$.

تابع : إيجاد جميع الأصفار (الأصفار المركبة)

٧ أوجد جميع الأصفار للدالة :

$$f(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$$

[الجواب : $\pm i$, -1 , 2]

١ أوجد جميع الأصفار للدالة :

$$f(x) = x^3 + 5x^2 + 17x + 13$$

الحل : للدالة f ثلاثة أصفار مركبة فقط .• عوامل الحد الثابت 13 هي : ± 1 , ± 13 p عوامل المعامل الرئيس 1 هي : ± 1 q • الأصفار النسبية الممكنة : ± 1 , ± 13 $\frac{p}{q}$

• من قانون ديكرت للإشارات :

$$f(x) = x^3 + 5x^2 + 17x + 13$$

$$f(-x) = -x^3 + 5x^2 - 17x + 13$$

بحسب القانون لا يوجد أصفار حقيقية موجبة

، عدد الأصفار الحقيقية السالبة 3 أو 1

• اختبار الأصفار النسبية (السالبة فقط) :

(باستعمال التعويض التركيبي أو بالتعويض المباشر)

	1	5	17	13
-1		-1	-4	-13
	1	4	13	0

نكتفي بـ -1 بالتعويض
 $f(-1) = 0$

$$f(x) \text{ صفر للدالة } x = -1 \Leftrightarrow f(-1) = 0$$

$$f(x) = (x + 1)(x^2 + 4x + 13)$$

• نوجد أصفار العامل الآخر (ناتج القسمة) :

$$x^2 + 4x + 13 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2(1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{(4)^2 - 4(1)(13)}}{2}$$

$$x = -2 \pm 3i$$

• جميع أصفار الدالة (الأصفار المركبة) هي :

$$-1 , -2 + 3i , -2 - 3i$$

خذ x عامل مشترك ينتج عامل
نوجد أصفار هذا العامل كما سبق .
[الجواب : $\pm i$, 3 , 0]

$$٢ \text{ أوجد جميع الأصفار : } f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 - 3x$$

$$٤ \text{ أوجد جميع الأصفار : } f(x) = x^3 + 5x^2 + 24x + 20$$

$$[-1 , -2 \pm 4i]$$

تطبيقات على الأعداد النسبية

٢ صنع نجار صندوقاً لتخزين على شكل متوازي مستطيلات حجمه 96 ft^3 . ويزيد طوله على عرضه بمقدار 8 ft ، ويقل ارتفاعه عن عرضه بمقدار 2 ft ، فأوجد أبعاد الصندوق .

[العرض = 4 ft ، الطول = 12 ft ، الارتفاع = 2 ft]

١ قدم أحمد هدية لأمه وضعها في صندوق على شكل متوازي مستطيلات حجمه 1001 cm^3 ويزيد طوله على عرضه بمقدار 2 cm ، ويقل ارتفاعه عن عرضه بمقدار 4 cm . فأوجد أبعاد الصندوق .

الحل : بفرض x هو عرض الصندوق .

الطول = $x + 2$ ، الارتفاع = $x - 4$

• الحجم : $V = (x + 2)(x)(x - 4)$

$$V = x^3 - 2x^2 - 8x = 1001$$

$$x^3 - 2x^2 - 8x - 1001 = 0$$

• الدالة المرافقة للمعادلة :

$$p(x) = x^3 - 2x^2 - 8x - 1001$$

• الأعداد النسبية الممكنة للدالة المرافقة هي :

$$\frac{p}{q} = \pm 1 , \pm 7 , \pm 11 , \pm 13$$

$$, \pm 77 , \pm 91 , \pm 143 , \pm 1001$$

بما أن الأبعاد موجبة ، لذا نختار الأعداد الموجبة

• من قانون ديكارت للإشارات :

$$p(x) = x^3 - 2x^2 - 8x - 1001$$

يوجد تغيير واحد في إشارة معاملات $p(x)$

لذلك يوجد صفر حقيقي موجب واحد .

• اختبار الأعداد النسبية (بالتعويض) :

$$p(1) = -1010 \neq 0$$

$$p(7) = -812 \neq 0$$

$$p(11) = 0$$

بالتعويض
المباشر
أو
بالتعويض
التركيبى

(بالتوقف عن اختبار باقي الأعداد)

أي أن : $x = 11 \Leftrightarrow$ العرض = 11 cm

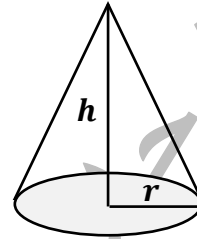
، الطول = 13 cm ، الارتفاع = 7 cm

تابع : تطبيقات على الأعداد النسبية

٧ يُراد تكوين شمعة على شكل هرم قاعدته مربعة ، بحيث يقل ارتفاعه عن طول قاعدته بمقدار 2 cm ، إذا كان حجم الشمع المستعمل لصناعتها 25 cm^3 ، فأوجد أبعاد الشمعة .
(حجم الهرم $= \frac{1}{3}$ مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع)

[طول القاعدة = 5 cm ، الارتفاع = 3 cm]

١ يريد أحمد صناعة مجسم بالرمال باستعمال قالب على شكل مخروط قائم . إذا كان ارتفاع المخروط يزيد عن طول نصف قطر قاعدته بمقدار 5 cm ، أوجد أبعاد المخروط إذا علمت حجم الرمال التي يحملها القالب هو : $48\pi \text{ cm}^2$.
(علماً بأن حجم المخروط : $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$)



الحل : الارتفاع $h = r + 5$

• الحجم : $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$48\pi = \frac{1}{3}\pi r^2(r + 5)$$

$$r^3 + 5r^2 - 144 = 0$$

• الدالة المرافقة للمعادلة :

$$p(r) = r^3 + 5r^2 - 144$$

• الأعداد النسبية الممكنة للدالة المرافقة هي :

$$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 9$$

$$, \pm 12, \pm 16, \pm 18, \pm 24, \pm 36$$

$$, \pm 48, \pm 72, \pm 144$$

بما أن الأبعاد موجبة ، لذا نختار الأعداد الموجبة
• من قانون ديكارت للإشارات :

$$p(r) = r^3 + 5r^2 - 144$$

يوجد تغيير واحد في إشارة معاملات $p(x)$
لذلك يوجد صفر حقيقي موجب واحد .

• اختبار الأعداد النسبية (بالتعويض) :

$$p(1) = -138 \neq 0$$

$$p(2) = -116 \neq 0$$

$$p(3) = -72 \neq 0$$

$$p(4) = 0$$

بالتعويض
المباشر
أو
بالتعويض
التركيبى

(بالتوقف عن اختبار باقي الأعداد)

أي أن : $r = 4$ صفر للدالة (جذر للمعادلة)

↔ نصف القطر : $r = 4 \text{ cm}$

الارتفاع : $h = r + 5 = 9 \text{ cm}$



2 / ث



مملكة البحرين
وزارة التربية و التعليم
مدرسة النعيم الثانوية للبنين
قسم الرياضيات

رياض 263

الفصل الثاني القطوع المخروطية

رياض 263

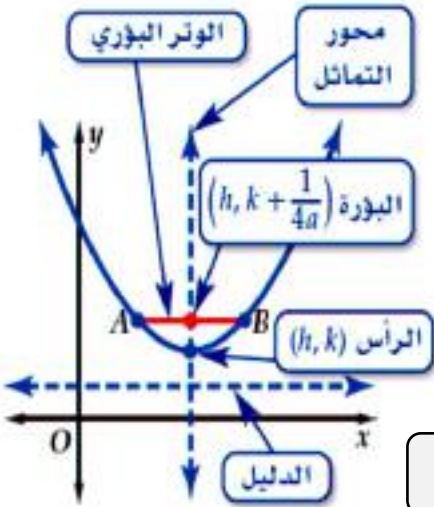
إعداد الأستاذ : عابدين حامد

اسم الطالب :

الرقم الأكاديمي :

الصف :

القطوع المكافئة Parabolas



معادلات القطوع المكافئة القطع المكافئ هو مجموعة النقاط جميعها في المستوى التي يكون بُعد كل منها عن نقطة معطاة تُسمى **البؤرة** مساوياً دائماً لبُعدها عن مستقيم معلوم يُسمى **الدليل**.

الوتر البؤري : هو القطعة المستقيمة المارة بالبؤرة والعمودية على محور التماثل ، ويقع طرفي الوتر البؤري على القطع المكافئ

ملحوظة : بُعد الرأس عن البؤرة = بُعد الرأس عن الدليل

بُعد أي نقطة تقع على القطع المكافئ عن البؤرة = بُعدها عن الدليل

مفهوم أساسي		
معادلات القطوع المكافئة		
الصورة القياسية	$y = a(x - h)^2 + k$	$x = a(y - k)^2 + h$
اتجاه فتحة القطع	إلى أعلى إذا كان $a > 0$ إلى أسفل إذا كان $a < 0$	إلى اليمين إذا كان $a > 0$ إلى اليسار إذا كان $a < 0$
الرأس	(h, k)	(h, k)
معادلة محور التماثل	$x = h$	$y = k$
البؤرة	$(h, k + \frac{1}{4a})$	$(h + \frac{1}{4a}, k)$
معادلة الدليل	$y = k - \frac{1}{4a}$	$x = h - \frac{1}{4a}$
طول الوتر البؤري	وحدة $ \frac{1}{a} $	وحدة $ \frac{1}{a} $

الصورة القياسية لمعادلة قطع مكافئ رأسه النقطة (h, k) ، ومعادلة محور التماثل $x = h$ هي $y = a(x - h)^2 + k$.

- إذا كانت $a > 0$ ، فإن k هي القيمة الصغرى للدالة، ويكون القطع المكافئ مفتوحاً إلى أعلى.
- إذا كانت $a < 0$ ، فإن k هي القيمة العظمى للدالة، ويكون القطع المكافئ مفتوحاً إلى أسفل.

الصورة العامة لمعادلة القطع المكافئ تكون على الصورة $y = ax^2 + bx + c$. ويمكن كتابة الصورة العامة لمعادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية. ويعتمد شكل القطع المكافئ والمسافة بين البؤرة والدليل على قيمة a في المعادلة.

لمعادلات القطوع المكافئة ذات محور التماثل الرأسي دالة أم $y = x^2$. والصورة العامة للمعادلات هي $y = a(x - h)^2 + k$ وتمثل هذه المعادلات دوالاً. في حين أن معادلات القطوع المكافئة ذات محور التماثل الأفقي، تكون على الصورة $x = a(y - k)^2 + h$ وهي لا تمثل دالة. والمعادلة الأم لمثل هذه المعادلات هي $x = y^2$.

تحليل القطوع المكافئة

التربيع على x

إكمال المربع : يعني إعادة كتابة تعبير تربيعي على صورة مقدار ثلاثي مربع كامل

- ① بدمج الحدود التي تحوي x ، x^2 . ② نأخذ العامل المشترك لجعل معامل x^2 بـ 1 .
 ③ بإضافة وطرح (مربع نصف معامل x) . ④ بالترتيب والتعديل في صورة مربع كامل .

القياسية : $y = a(x - h)^2 + k$

إكمال المربع

العامة : $y = ax^2 + bx + c$

تحليل معادلة القطع المكافئ

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ ، ثم حدد كلاً من اتجاه فتحة القطع ، والرأس ، والبؤرة ، ومعادلة محور التماثل ، ومعادلة الدليل ، طول الوتر البؤري ؟

$$y = -x^2 - 2x + 3 \quad \textcircled{2}$$

$$y = 2x^2 - 12x + 6 \quad \textcircled{1}$$

الحل : $y = (2x^2 - 12x) + 6$

$$y = 2(x^2 - 6x) + 6$$

$$y = 2(x^2 - 6x + 9 - 9) + 6$$

$$y = 2(x^2 - 6x + 9) - 18 + 6$$

$$y = 2(x - 3)^2 - 12$$

$$a = 2 , h = 3 , k = -12 \quad \bullet$$

• اتجاه فتحة القطع :

مفتوح إلى أعلى (لأن $a = 2 > 0$)

• الرأس : $(h, k) = (3, -12)$

• البؤرة : $(h, k + \frac{1}{4a})$

$$(3, -12 + \frac{1}{4(2)}) = (3, -\frac{95}{8})$$

• معادلة محور التماثل :

$$x = h \Rightarrow x = 3$$

• معادلة الدليل : $y = k - \frac{1}{4a}$

$$y = -12 - \frac{1}{4(2)} \Rightarrow y = -\frac{97}{8}$$

• طول الوتر البؤري : وحدة $|\frac{1}{a}| = \frac{1}{2}$

تابع : تحليل القطوع المكافئة

التربيع على y

إكمال المربع : يعني إعادة كتابة تعبير تربيعي على صورة مقدار ثلاثي مربع كامل

- ① بدمج الحدود التي تحوي y ، y^2 . ② نأخذ العامل المشترك لجعل معامل y^2 بـ 1 .
 ③ بإضافة وطرح (مربع نصف معامل y) . ④ بالترتيب والتعديل في صورة مربع كامل .

$$x = a(y - k)^2 + h \quad \text{القياسية :}$$

إكمال المربع

$$x = ay^2 + by + c \quad \text{العامة :}$$

تابع : تحليل معادلة القطع المكافئ

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ ، ثم حدد كلاً من اتجاه فتحة القطع ، والرأس ، والبؤرة ، ومعادلة محور التماثل ، ومعادلة الدليل ، طول الوتر البؤري ؟

$$x = \frac{2}{3}y^2 - 4y + 12 \quad \text{②}$$

$$x + 3y^2 + 12y = 18 \quad \text{①}$$

$$\text{الحل : } x = -3y^2 - 12y + 18$$

$$x = -3(y^2 + 4y) + 18$$

$$x = -3(y^2 + 4y + 4 - 4) + 18$$

$$x = -3(y^2 + 4y + 4) + 12 + 18$$

$$x = -3(y + 2)^2 + 30$$

$$a = -3 , h = 30 , k = -2$$

• اتجاه فتحة القطع :

• مفتوح إلى اليسار (لأن $a = -3 < 0$)

$$\text{• الرأس : } (h, k) = (30, -2)$$

$$\text{• البؤرة : } (h + \frac{1}{4a}, k)$$

$$(30 + \frac{1}{4(-3)}, -2) = (\frac{359}{12}, -2)$$

• معادلة محور التماثل :

$$y = k \Rightarrow y = -2$$

$$\text{• معادلة الدليل : } x = h - \frac{1}{4a}$$

$$x = 30 - \frac{1}{4(-3)} \Rightarrow x = \frac{361}{12}$$

$$\text{• طول الوتر البؤري : وحدة } \left| \frac{1}{a} \right| = \frac{1}{3}$$

التمثيل البياني القطوع المكافئة

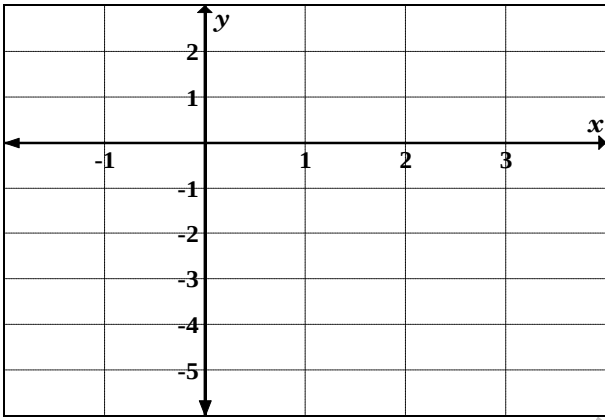
① ضع المعادلة على الصورة القياسية (إن كانت المعادلة ليست في الصورة القياسية)

② حدد اتجاه فتحة القطع (من إشارة a) . ③ حدد رأس القطع المكافئ (h, k) .

④ حدد محور التماثل $(y = k / x = h)$. ⑤ يمكن اختيار نقاط مساعدة بجانب الرأس .

② أوجد طول الوتر البؤري للقطع المكافئ

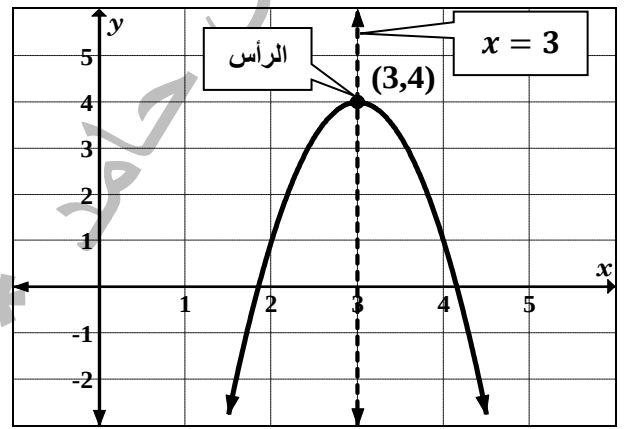
$y = 2(x - 1)^2 - 4$ ، ثم مثله بيانياً



① أوجد طول الوتر البؤري للقطع المكافئ

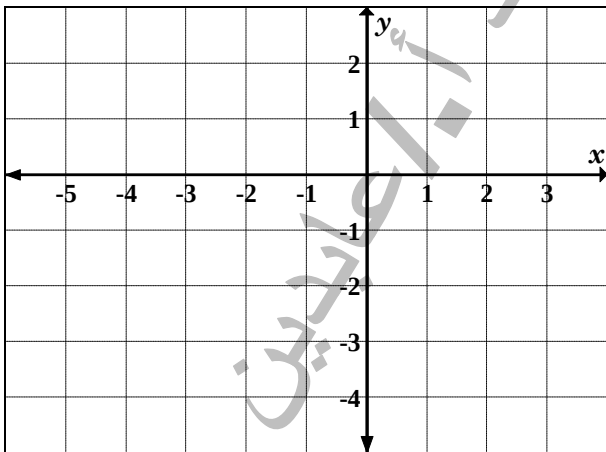
$y = -3(x - 3)^2 + 4$ ، ثم مثله بيانياً

طول الوتر البؤري : وحدة $\frac{1}{3}$ $\left| \frac{1}{a} \right| = \left| \frac{1}{-3} \right| = \frac{1}{3}$



④ أوجد طول الوتر البؤري للقطع المكافئ

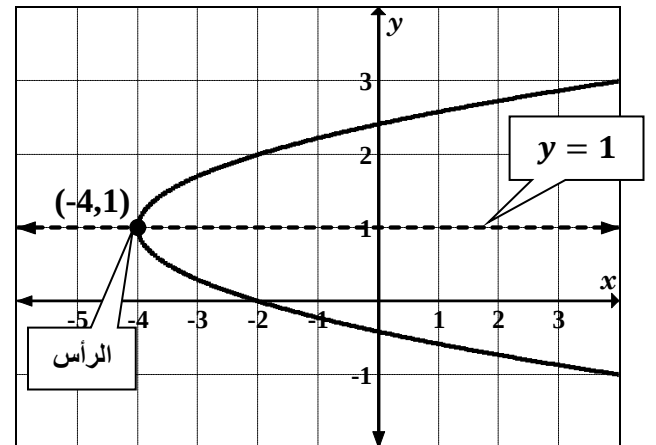
$x = -\frac{1}{2}(y + 1)^2 + 2$ ، ثم مثله بيانياً



③ أوجد طول الوتر البؤري للقطع المكافئ

$x = 2(y - 1)^2 - 4$ ، ثم مثله بيانياً

طول الوتر البؤري : وحدة $\frac{1}{2}$ $\left| \frac{1}{a} \right| = \left| \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$



⑤ إذا كان بؤرة القطع المكافئ : $y = \frac{1}{4}(x + 1)^2 + k$ هي $(-1, 3)$ ، فما قيمة k ؟

A -1 B 2

C 3 D 4

تابع : تمثيل القطوع المكافئة

ملحوظة : عند التمثيل البياني للقطوع المكافئة يجب وضع المعادلة على الصورة القياسية أولاً .

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ ، ثم حدد كلاً من إحداثيي الرأس وإحداثيي البؤرة ، ومعادلتَي كل من المحور والدليل ، ثم مثله بيانياً بصورة تقريبية ؟

$$y = x^2 - 8x + 13$$

②

$$y + 2x^2 + 10 = 8x + 5$$

①

الحل : $y = (-2x^2 + 8x) - 5$

$$y = -2(x^2 - 4x) - 5$$

$$y = -2(x^2 - 4x + 4 - 4) - 5$$

$$y = -2(x^2 - 4x + 4) + 8 - 5$$

$$y = -2(x - 2)^2 + 3$$

$$a = -2 , h = 2 , k = 3$$

• اتجاه فتحة القطع :

• مفتوح إلى أسفل (لأن $a = -2 < 0$)

• الرأس : $(h, k) = (2, 3)$

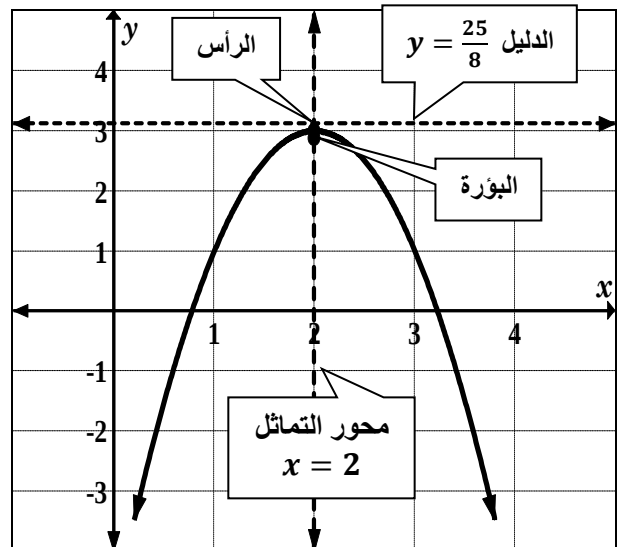
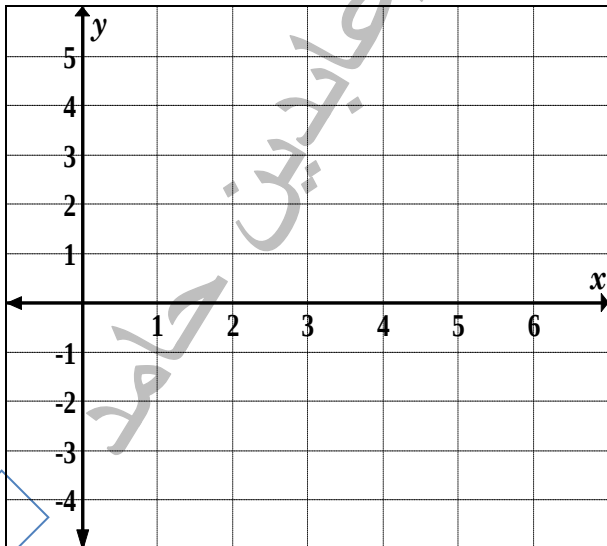
• البؤرة : $(h, k + \frac{1}{4a}) = (2, \frac{23}{8})$

• معادلة محور التماثل :

$$x = h \Rightarrow x = 2$$

• معادلة الدليل :

$$y = k - \frac{1}{4a} \Rightarrow y = 3 - \frac{1}{4(-2)} \Rightarrow y = \frac{25}{8}$$



تابع : تمثيل القطوع المكافئة

ملحوظة : عند التمثيل البياني للقطوع المكافئة يجب وضع المعادلة على الصورة القياسية أولاً .

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ ، ثم حدد كلاً من إحداثيي الرأس وإحداثيي البؤرة ، ومعادلتَي كل من المحور والدليل ، ثم مثله بيانياً بصورة تقريبية ؟

$$x + y^2 = 4y - 1$$

②

$$2x - y^2 = 4y + 10$$

①

الحل : $x = \frac{1}{2}y^2 + 2y + 5$

$$x = \left(\frac{1}{2}y^2 + 2y\right) + 5$$

$$x = \frac{1}{2}(y^2 + 4y + 4 - 4) + 5$$

$$x = \frac{1}{2}(y^2 + 4y + y) - 2 + 5$$

$$x = \frac{1}{2}(y + 2)^2 + 3$$

$$a = \frac{1}{2}, h = 3, k = -2$$

• اتجاه فتحة القطع :

مفتوح إلى اليمين (لأن $a > 0$)

• الرأس : $(h, k) = (3, -2)$

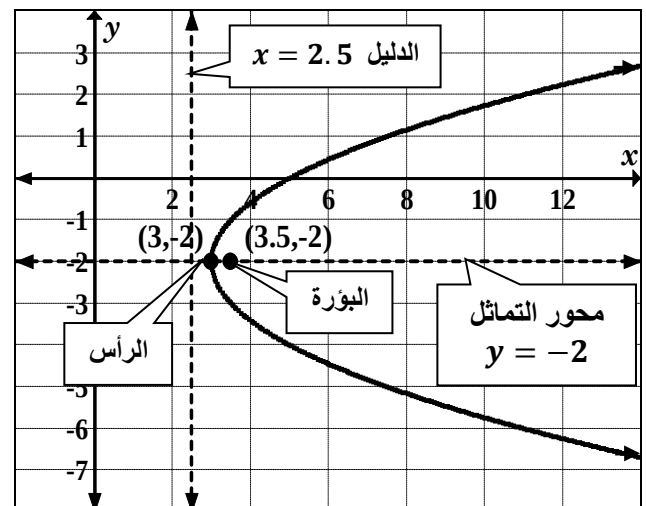
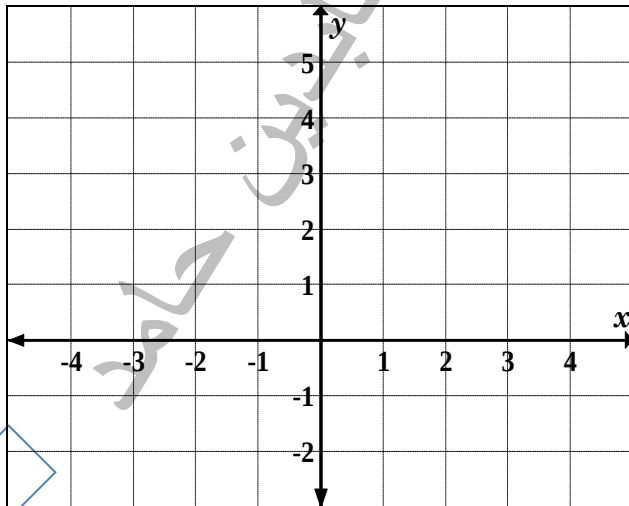
• البؤرة : $(h + \frac{1}{4a}, k) = (3.5, -2)$

• معادلة محور التماثل :

$$y = k \Rightarrow y = -2$$

• معادلة الدليل : $x = h - \frac{1}{4a}$

$$x = 3 - \frac{1}{4(\frac{1}{2})} \Rightarrow x = 2.5$$



تمارين على كتابة معادلة القطع المكافئ

٢ أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه

 $(-2, 4)$ ، ومعادلة دليله $x = -1$ الحل :

$$x = -\frac{1}{4} (y - 4)^2 - 2$$

١ أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه

 $(-2, -4)$ ، ومعادلة دليله $y = 1$ الحل : الدليل أفقي ، فالمعادلة على الصورة

$$y = a (x - h)^2 + k$$

• الرأس : $(h, k) = (-2, -4)$

$$h = -2 , k = -4$$

• معادلة الدليل : $y = k - \frac{1}{4a}$

$$1 = -4 - \frac{1}{4a} \Rightarrow \frac{1}{4a} = -5$$

$$-20a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{20}$$

• مما سبق معادلة القطع المكافئ هي :

$$y = -\frac{1}{20} (x + 2)^2 - 4$$

٣ أوجد معادلة مسار النقطة التي تتحرك بحيث

يكون بُعدها عن النقطة $(3, 2)$ مساوياً لبُعدها

البؤرة

الدليل

 $y = 8$ عن المستقيمالحل :

$$y = -\frac{1}{12} (x - 3)^2 + 5$$

٣ أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته

 $(2, 3)$ ، ومعادلة دليله $x = -4$ الحل : الدليل رأسي ، فالمعادلة على الصورة

$$x = a (y - k)^2 + h$$

• البؤرة : $(h + \frac{1}{4a}, k) = (2, 3)$

$$k = 3 , h + \frac{1}{4a} = 2 \quad (1)$$

• معادلة الدليل : $x = h - \frac{1}{4a}$

$$h - \frac{1}{4a} = -4 \quad (2)$$

بجمع (1) ، (2) : $h = -1$ بالتعويض في (1) : $-1 + \frac{1}{4a} = 2$

$$\frac{1}{4a} = 3 \Rightarrow a = \frac{1}{12}$$

• مما سبق معادلة القطع المكافئ هي :

$$x = \frac{1}{12} (y - 3)^2 - 1$$

تمارين على كتابة معادلة القطع المكافئ

٦ أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه
(8, 6) ، البؤرة (2, 6) ؟

$$x = -\frac{1}{24} (y - 6)^2 + 8$$

الحل :

١ أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه
(1, 3) ، البؤرة (1, 5) ؟

الحل : الاحداثي x لنقطتي الرأس والبؤرة متساوي
فالمحور رأسي ، والدليل أفقي ، فالمعادلة

$$y = a (x - h)^2 + k \text{ : على الصورة}$$

$$\bullet \text{ الرأس : } (h, k) = (1, 3)$$

$$h = 1 , \quad k = 3$$

$$\bullet \text{ البؤرة : } (h, k + \frac{1}{4a}) = (1, 5)$$

$$3 + \frac{1}{4a} = 5 \Rightarrow a = \frac{1}{8}$$

• مما سبق معادلة القطع المكافئ هي :

$$y = \frac{1}{8} (x - 1)^2 + 3$$

٣ قطع مكافئ بؤرته تقع عند نقطة الأصل ، فإذا علمت أن البؤرة تقع أعلى الرأس وعلى بُعد منها
يساوي 6 ft ، وأن طول الوتر البؤري 24 ft . فما معادلة هذا القطع المكافئ ؟

$$\bullet \text{ البؤرة : } (0, 0) \text{ ، أعلى الرأس بمقدار 6 ft}$$

$$\bullet \text{ الرأس : } (h, k) = (0, -6)$$

$$h = 0 , \quad k = -6$$

• مما سبق معادلة القطع المكافئ هي :

$$y = \frac{1}{24} x^2 - 6$$

• البؤرة أعلى الرأس $\Leftarrow$ القطع مفتوح لأعلى

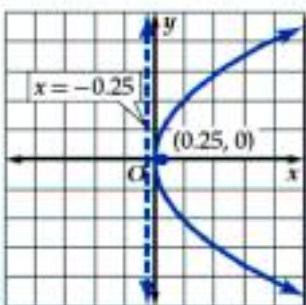
$$y = a (x - h)^2 + k \text{ : فالمعادلة هي}$$

$$\bullet \text{ طول الوتر البؤري : } \left| \frac{1}{a} \right| = 24$$

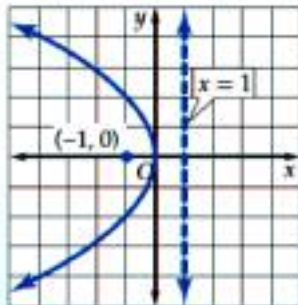
$$\frac{1}{a} = 24 \Rightarrow a = \frac{1}{24} \quad (a > 0)$$

$$\text{يمكن الحصول على } a \text{ من البؤرة : } k + \frac{1}{4a} = 0$$

نجلاء



هيفاء



٤ اكتشف الخطأ :

إذا مثلت كل من هيفاء ونجلاء

$$\text{المعادلة : } \frac{1}{4} y^2 + x = 0$$

فأيّ منهما تمثيلها صحيح ؟

فسّر إجابتك .

تطبيقات على معادلة القطع المكافئ

تطبيقات حياتية على معادلة القطع المكافئ

- ١ يظهر في الصورة المجاورة جسر الأمير الشيخ خليفة بن سلمان آل خليفة ، والجسر مدعم بأقواس متطابقة على شكل قطع مكافئ . بفرض أن أعلى نقطة على أحد الأقواس تقع على المحور y ، وأن الجسر يقع على المحور x ، وأن أعلى نقطة على هذا القوس ترتفع 25 m فوق الجسر ، وتقع بؤرة القوس على ارتفاع 18 m فوق الجسر ، فأوجد معادلة القوس ؟



المعادلة على الصورة : $y = a(x - h)^2 + k$

الرأس : $(h, k) = (0, 25) \Rightarrow h = 0, k = 25$

البؤرة : $(h, k + \frac{1}{4a}) = (0, 18)$

$25 + \frac{1}{4a} = 18 \Rightarrow a = -\frac{1}{28}$

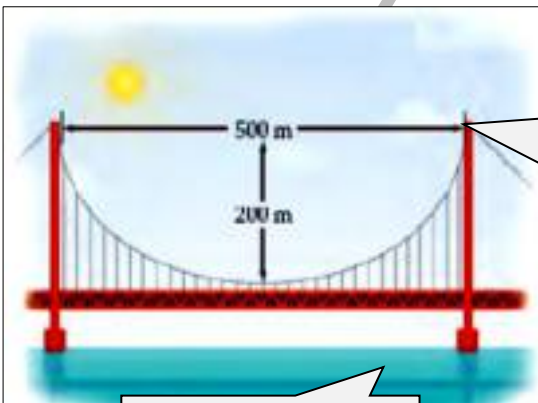
المعادلة هي : $y = -\frac{1}{28}x^2 + 25$

- ٢ يظهر في الصورة المجاورة قوس على شكل قطع مكافئ يُزيّن شاطئ مدينة سانت لويس في ولاية ميزوري الأمريكية . بفرض أن أعلى نقطة على القوس تقع على المحور y وترتفع 60 m فوق مستوى سطح البحر ، وأن مستوى سطح البحر يقع على المحور x ، وتقع بؤرة القوس على ارتفاع 48 m فوق مستوى سطح البحر . فأوجد معادلة القوس ؟



الجواب : $y = -\frac{1}{48}x^2 + 60$

- ٣ اكتب معادلة قطع مكافئ لتمثيل السلك المعلق للجسر كما موضح بالشكل أدناه . افترض أن نقطة الأصل تقع عند أدنى نقطة من السلك .



النقطة
(250, 200)
تحقق
المعادلة

الجواب : $y = \frac{2}{625}x^2$

تطبيقات على معادلة القطع المكافئ

تطبيقات حياتية على معادلة القطع المكافئ

④ عندما تُركل الكرة يكون مسارها على شكل قطع مكافئ . افترض أنه تم ركل كرة من مستوى الأرض فوصلت إلى أقصى ارتفاع لها 50 ft ، ولامست الأرض على بُعد 200 ft من النقطة التي رُكلت منها ، وافترض أن الكرة رُكلت من نقطة الأصل ، فأوجد معادلة القطع المكافئ الذي يُمثل مسار الكرة .

$$y = -\frac{1}{200} (x - 100)^2 + 50$$

⑤ تُستعمل مرآة على شكل قطع مكافئ لجمع الطاقة الشمسية ، حيث تقوم المرآة بعكس الأشعة القادمة من الشمس إلى بؤرة القطع المكافئ ، إذا كانت بؤرة المرآة تقع على بُعد 9 ft أعلى الرأس ، وطول الوتر البؤري يساوي 36 ft . فاكتب معادلة القطع المكافئ الذي ستكونه المرآة بافتراض أن البؤرة عند نقطة الأصل .

يمكن إيجاد a

من الوتر البؤري

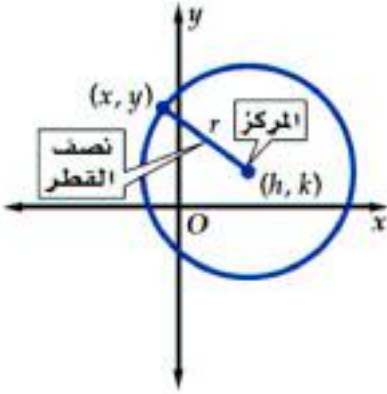
أو من البؤرة

$$y = \frac{1}{36} x^2 - 9$$

⑥ يحتوي المصباح الأمامي لسيارة على مرآة عاكسة على صورة قطع مكافئ فيرتد الضوء القادم من المصدر مبتعداً عن المرآة ويضيء مقدمة السيارة ، فإذا كان مصدر الضوء يقع عند البؤرة ، وكانت معادلة المقطع العرضي للمرآة هي : $y = \frac{1}{12} x^2$ ، فكم يبعد مصدر الضوء عن رأس المرآة ؟

يبعد مصدر الضوء 3 وحدات أعلى الرأس

معادلات الدوائر الدائرة هي مجموعة النقاط جميعها في المستوى التي لها البعد نفسه عن نقطة معطاة تسمى **المركز**. ونصف قطر الدائرة، هو أي قطعة مستقيمة يقع أحد طرفيها عند المركز، والطرف الآخر على الدائرة.



افترض أن (x, y) تقع على الدائرة في الشكل المجاور. وافترض أيضًا أن المركز عند النقطة (h, k) وأن طول نصف القطر r . يمكنك استعمال قانون المسافة بين نقطتين لإيجاد معادلة الدائرة.

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = d$$

قانون المسافة بين نقطتين

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r$$

$$(x_1, y_1) = (h, k),$$

$$(x_2, y_2) = (x, y), d = r$$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

بترتيب الطرفين

مفهوم أساسي		
معادلات الدوائر		
$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$	$x^2 + y^2 = r^2$	الصورة القياسية للمعادلة
(h, k)	$(0, 0)$	المركز
r	r	طول نصف القطر

ملحوظة: تسمى الصورة القياسية أحياناً بصورة (نصف القطر - المركز)

محور التماثل: كل قطر في دائرة يُمثّل محور تماثل لها ، لذا يوجد عدد لا نهائي من محاور التماثل للدائرة

• الدائرة مركزها (h, k) وتمس محور x $r = |k|$

• الدائرة مركزها (h, k) وتمس محور y $r = |h|$

محيط الدائرة: $C = 2\pi r$

مساحة سطح الدائرة: $A = \pi r^2$

قانون المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي

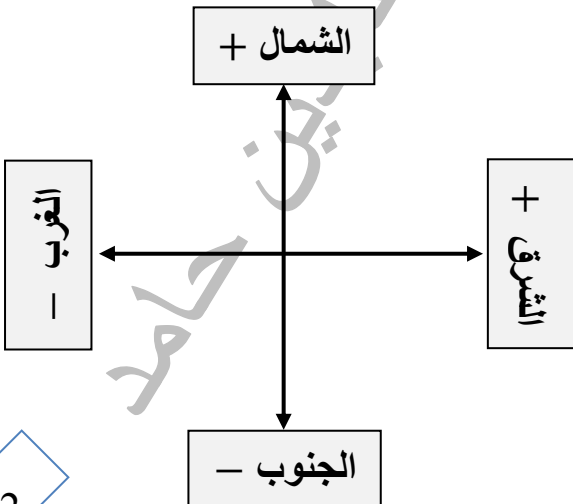
إذا كان: $P(x_1, y_1)$ ، $Q(x_2, y_2)$ فإن

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

قانون نقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى

إذا كان: $P(x_1, y_1)$ ، $Q(x_2, y_2)$ فإن

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$



تابع : معادلة الدائرة

إيجاد معادلة الدائرة إذا عُلم المركز ونصف القطر

٢ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها $(-3, 1)$ ،
وطول قطرها 16 .

١ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها $(8, -9)$ ،
وطول نصف قطرها $\sqrt{11}$.

٤ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل
، ومحيطها يساوي 10π cm .

٣ أوجد معادلة مسار النقطة التي تتحرك بحيث
يكون بُعدها عن النقطة $(-3, 1)$ مساوياً 4 .

٦ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها $(8, -9)$ ،
وتمس المحور y .

$$r = |h|$$

٥ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها $(2, 4)$ ،
وتمس المحور x .

$$r = |k|$$

تابع : معادلة الدائرة

إيجاد معادلة دائرة معلوم مركزها وتمر بنقطة معلومة

١ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها $(-3, 1)$ ،
وتمر بالنقطة $(2, -1)$.

١ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها $(-2, 4)$ ،
وتمر بالنقطة $(-6, 7)$.

إيجاد معادلة دائرة معلوم طرفي قطرها

٣ أوجد معادلة الدائرة التي طرفا قطر فيها هما
النقطتان $(1, 5)$ ، $(3, -3)$.

٣ أوجد معادلة الدائرة التي طرفا قطر فيها هما
النقطتان $(0, 4)$ ، $(6, -4)$.

٦ ما مركز ، ومحيط الدائرة التي معادلتها :

$$(y - 2)^2 + (x + 4)^2 - 9 = 0$$

A 6π ، $(2, -4)$

B 9π ، $(2, -4)$

C 6π ، $(-4, 2)$

D 9π ، $(-4, 2)$

٥ ما معادلة الدائرة التي تمس المستقيمين :

$$y = 7 ، y = 5$$

المستقيم : $y = -x$ ؟

A $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 = 1$

B $(x - 6)^2 + (y + 6)^2 = 1$

C $(x + 6)^2 + (y - 6)^2 = 1$

تابع : معادلة الدائرة

إيجاد معادلة دائرة لها علاقة بالقطع المكافئ

❶ أوجد معادلة الدائرة التي تمس المحور y ويقع مركزها في بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته : $y = -\frac{1}{20}(x+2)^2 - 4$

الدائرة تمس محور y $r = |h| \Leftrightarrow$
الجواب : $(x+2)^2 + (y+9)^2 = 4$

❶ أوجد معادلة الدائرة التي تمر في $(2, 4)$ ، ويقع مركزها في بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته : $(x+2)^2 = 12(y-2)$

• نضع معادلة القطع على الصورة القياسية

$$y = a(x-h)^2 + k$$

$$y-2 = \frac{1}{12}(x+2)^2$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{12}(x+2)^2 + 2$$

$$(\text{ للقطع }) \quad a = \frac{1}{12} , \quad h = -2 , \quad k = 2$$

• البؤرة : $(h, k + \frac{1}{4a})$

$$\left(-2, 2 + \frac{1}{4(\frac{1}{12})}\right) = (-2, 5)$$

• مركز الدائرة : $(h, k) = (-2, 5)$

• نصف القطر : (h, k) مركز الدائرة وليس رأس القطع

$$r = \sqrt{(2+2)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{17}$$

• معادلة الدائرة :

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$(x+2)^2 + (y-5)^2 = 17$$

❷ إذا كانت الدائرة M تمس المحور x ومركزها النقطة $(1, -3)$ ، فأَيّ النقاط تنتمي للدائرة ؟

نوجد معادلة الدائرة ثم عوض
أو البعد عن المركز r

$$A \quad (4, -6)$$

$$B \quad (-1, -3)$$

$$C \quad (-2, -3)$$

$$D \quad (-3, -2)$$

❸ إذا كانت الدائرة M تمس المحور y ومركزها النقطة $(-2, 4)$ ، فأَيّ النقاط تنتمي للدائرة ؟

نوجد معادلة الدائرة ثم عوض
أو البعد عن المركز r

$$A \quad (-6, 2)$$

$$B \quad (-4, 4)$$

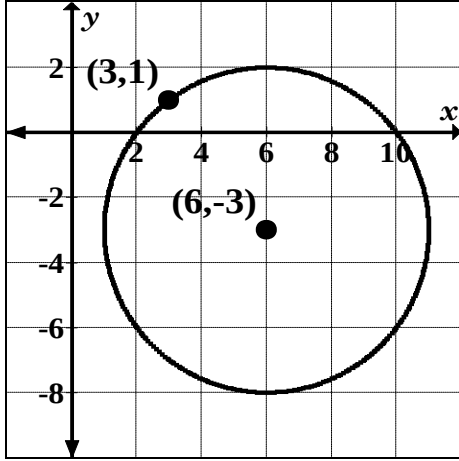
$$C \quad (-6, 4)$$

$$D \quad (2, 4)$$

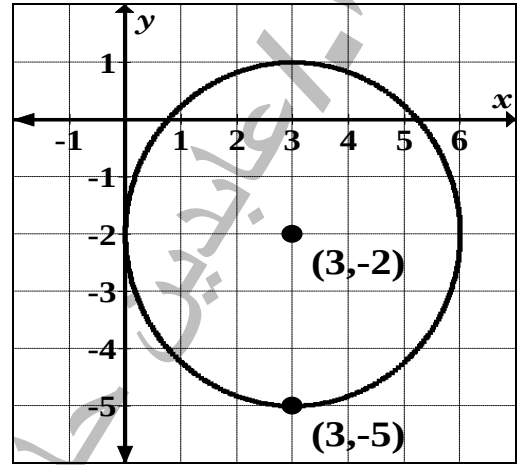
تابع : معادلة الدائرة

كتابة معادلة الدائرة من التمثيل البياني

٢ أوجد معادلة الدائرة في الشكل أدناه :



١ أوجد معادلة الدائرة في الشكل أدناه :



٤ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها يقع في الربع الثاني ، وتمس كلاً من المستقيمين $y = 1$ ، $y = 5$ ، والمحور y .

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$$

٣ أوجد معادلة الدائرة التي مركزها يقع في الربع الأول وتمس كلاً من المستقيم $x = 6$ ، والمحور x ، والمحور y .

$$(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$$

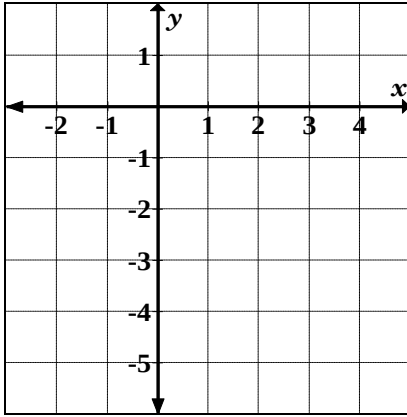
تابع : معادلة الدائرة

تمثيل معادلة دائرة على الصورة القياسية بيانياً

٢ أوجد المركز وطول نصف القطر للدائرة التي

معادلتها : $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$

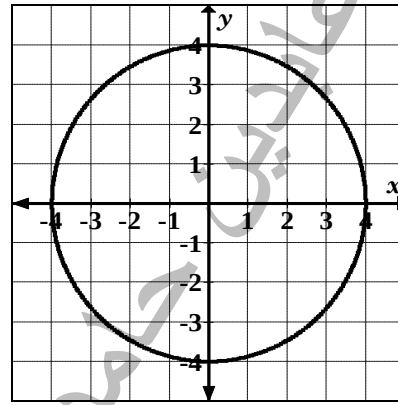
، ثم مثلها بيانياً ؟



١ أوجد المركز وطول نصف القطر للدائرة

التي معادلتها : $x^2 + y^2 = 16$

، ثم مثلها بيانياً ؟



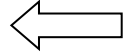
• المركز :

$(0, 0)$

• نصف القطر :

$r = 4$

• بالفرجار

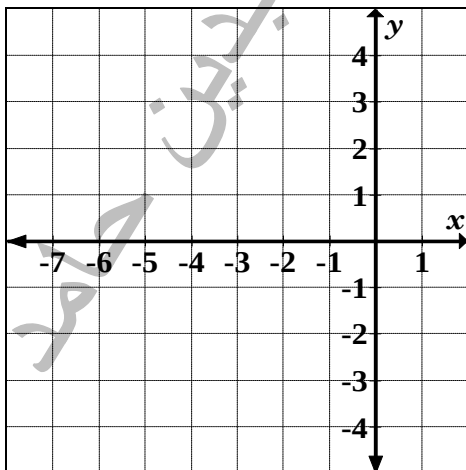


تمثيل معادلة دائرة ليست على الصورة القياسية بيانياً

٤ أوجد المركز وطول نصف القطر للدائرة التي

معادلتها : $x^2 + y^2 + 6x - 7 = 0$

، ثم مثلها بيانياً ؟



٣ أوجد المركز وطول نصف القطر للدائرة :

$x^2 + y^2 - 8x + 12y - 12 = 0$

، ثم مثلها بيانياً ؟

بإكمال المربع : $(x^2 - 8x + 16) - 16 +$

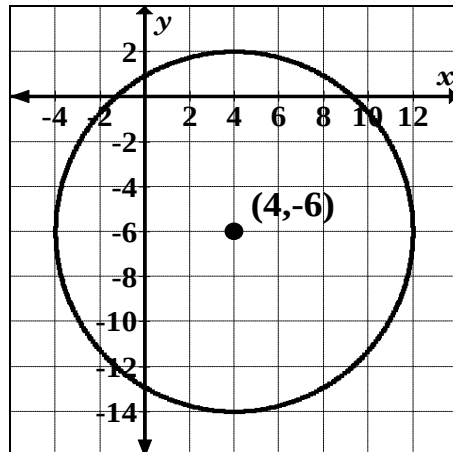
$(y^2 + 12y + 36) - 36 - 12 = 0$

$(x - 4)^2 + (y + 6)^2 = 12 + 16 + 36$

$(x - 4)^2 + (y + 6)^2 = 64$

• المركز : $(h, k) = (4, -6)$

• نصف القطر : $r = \sqrt{64} = 8$



بالفرجار

تطبيقات على معادلة الدائرة

تطبيقات حياتية على معادلة الدائرة

١ يسقي رشاش ماء منطقة دائرية طول قطرها 10 ft . إذا كان بُعد رشاش الماء عن المنزل 20 ft إلى الشمال ، ويقع المنزل عند نقطة الأصل ، فما معادلة الدائرة التي تمثل المنطقة التي تُسقى .

$$x^2 + (y - 20)^2 = 25$$

٢ إذا كان موقع الرادار لبرج المراقبة في مطار بلد ما على خريطة عند النقطة (5, 10) ، إذا كان الرادار يستطيع كشف الطائرة التي على بُعد 20 mi ، فاكتب معادلة تمثل الحدود الخارجية لمنطقة الكشف .

$$(x - 5)^2 + (y - 10)^2 = 400$$

٣ افترض أن قرية تقع على بُعد 35 mi تقريباً غرب عاصمة دولة ما ، وإلى جهة الشمال من العاصمة بمقدار 40 mi ، وأنه توجد هزة أرضية مركزها القرية وأثرها يكون على بُعد 55 mi من القرية ، افترض أن العاصمة تقع عند نقطة الأصل ، فاكتب معادلة تمثل حدوداً لأثر هذه الهزة .

$$(x + 35)^2 + (y - 40)^2 = 3025$$

٤ إذا كان مدى نوع مُعَيّن من الهواتف اللاسلكية 30 mi في أي اتجاه ، إذا كان الهاتف يقع على بُعد 4 mi جنوب المركز الرئيس ، وإلى الغرب منه بمقدار 3 mi . فاكتب معادلة تمثل نهاية حدود الإرسال ، مُفترضاً أن المركز الرئيس يقع عند نقطة الأصل .

$$(x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 900$$

٥ يدور قمر صناعي في مدار دائري حول الأرض ، ويبعد عنها 25000 mi . أوجد معادلة لمدار القمر الصناعي ، إذا كانت نقطة الأصل عند مركز الأرض . مفترضاً أن قطر الأرض 8000 mi

$$x^2 + y^2 = 841000000$$

٦ قدّم مطعم عرضاً للتوصيل المجاني للمناطق التي تبعد عنه 6 km . ويقع المطعم على بُعد 4 km غرباً ، و 5 km شمالاً من منزل خالد الذي يقع عند نقطة الأصل في المستوى الاحداثي ، فما معادلة الدائرة التي تمثل الموقع .

$$(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 36$$



2 / ث



رياض 263



مملكة البحرين
وزارة التربية و التعليم
مدرسة النعيم الثانوية للبنين
قسم الرياضيات

الفصل الثالث

الاحتمال والإحصاء

رياض 263

إعداد الأستاذ : عابدين حامد

اسم الطالب :

الرقم الأكاديمي :

الصف :

الدراسات التجريبية والمسحبة وبالملاحظة

أ. عابدين

ريض 263

أولاً : العينة المتحيزة وغير المتحيزة

- **العينة المتحيزة (غير عشوائية) :** يتم فيها تفضيل بعض أقسام المجتمع على باقي الأقسام .
- **العينة غير المتحيزة (عشوائية) :** هي العينة التي يتم اختيارها عشوائياً (بدون تفضيل) .

تدريب : حدّد إذا كانت كل دراسة مسحية فيما يأتي تتبنى عينة متحيزة أو غير متحيزة ؟

م	التعبير (الدراسة المسحبة)	الإجابة
1	الذهاب إلى ملعب كرة القدم وسؤال 100 شخص اختيروا عشوائياً عن رياضتهم المفضلة .	متحيزة
2	الاتصال بـ 100 شخص اختيرت أرقام هواتفهم عشوائياً وسؤالهم عن رأيهم في الجمارك .	غير متحيزة
3	استطلاع رأي كل ثالث شخص يخرج من مطعم للمشويات لمعرفة الوجبة المفضلة للناس .	متحيزة
4	استطلاع آراء نساء في سوق الذهب ، لمعرفة إذا كن يفضلن الذهب أو لا .	متحيزة
5	اختيار 200 طالب عشوائياً من مدرسة ، وسؤالهم عن الرياضة المفضلة لديهم .	غير متحيزة
6	الاستفسار من طلبة صف مُعين من المتميزين في مادة الرياضيات عن أفضل المواد لديهم .	متحيزة
7	يرسل صاحب محل استبانة دراسة مسحية لكل شخص ينتهي رقم هاتفه برقم معين .	غير متحيزة

ثانياً : الدراسات المسحبة والتجريبية وبالملاحظة

- **الدراسة المسحبة :** هي الدراسة التي تهتم بجمع البيانات فقط ، دون القيام بأي إجراءات فيها .
- **الدراسة بالملاحظة :** هي الدراسة التي تتم فيها ملاحظة الأفراد دون أية محاولة للتأثير في النتائج .
- **الدراسة التجريبية :** هي الدراسة التي يتم فيها تعديل معتمد على الأشخاص أو الحيوانات أو الأشياء قيد الدراسة وتجرى ملاحظة استجاباتهم .
- اختيار الدراسة المناسبة :

الدراسة المسحبة	الدراسة بالملاحظة	الدراسة التجريبية
عندما تتطلب الدراسة جمعاً للبيانات أو أخذ الآراء فقط .	عندما تتطلب الدراسة ملاحظة تأثير شيئاً ما دون أن نقوم بالمعالجة .	عندما تتطلب الدراسة إجراء اختبار على الأشياء قيد الدراسة بوجود مجموعة تجريبية وأخرى ضابطة .

ملاحظة : ① في الدراسات التجريبية يُسمى الأشخاص أو الحيوانات أو الأشياء التي تخضع للمعالجة بـ (المجموعة التجريبية) ، أما النصف الثاني ممن لا يخضعون للمعالجة أو يخضعون لمعالجة شكلية فيُسمون بـ (المجموعة الضابطة) .

② تكون الدراسة التجريبية غير متحيزة عندما لا يُعرف المشارك بها إلى أي مجموعة ينتمي .

الدراسات التجريبية والمسحية وبالملاحظة

١ أي الأسئلة الآتية يحدد أفضل الأماكن للرحلة المدرسية في هذه الدراسة المسحية دون تحيز ؟

- A هل تحب الذهاب إلى البحر ؟
B هل تحب الذهاب إلى متنزه عين عذاري ؟
C أين تفضل أن تذهب في الرحلة ؟
D هل تحب الذهاب إلى محمية العرين ؟

٢ أي الأسئلة الآتية يحدد اللعبة الرياضية المفضلة لدى طلبة إحدى المدارس دون تحيز ؟

- A أيهما تفضل : كرة القدم أم كرة السلة ؟
B ما اللعبة الرياضية المفضلة لديك ؟
C هل تحب لعبة الكرة الطائرة ؟
D هل تعتقد بأن كرة التنس هي اللعبة المفضلة ؟

تمرين : حدّد إذا كان كل مما يأتي يتطلب دراسة مسحية أو دراسة بالملاحظة أو دراسة تجريبية ؟

م	التعبير (الدراسة)	الإجابة
1	تريد استطلاع آراء أشخاص حول سياسة جديدة للشركة .	دراسة مسحية
2	تريد اختبار علاج لمعالجة الصلع عند الرجال .	دراسة تجريبية
3	اختر 100 طالب نصفهم يعمل جزئياً بعد الدراسة ، وقارن بين الأوساط لدرجاتهم .	دراسة بالملاحظة
4	تريد مقارنة صحّة الطلبة الذين يذهبون إلى المدرسة سيراً على الأقدام والذين يأتون بالحافلات المدرسية .	دراسة بالملاحظة

ثالثاً : التمييز بين الارتباط والسببية

- **السببية :** وجود علاقة بين ظاهرتين بحيث وقوع ظاهرة معينة يكون سبباً مباشراً في وقوع الظاهرة الأخرى .
- **الارتباط :** وجود علاقة بين ظاهرتين بحيث كلاً من الظاهرتين تؤثر في الأخرى .
- **ملاحظة :** إذا لم يوجد أي سبب آخر يعطي النتيجة فإنك تفترض السببية .

تمرين : حدّد إذا كانت العبارات الآتية تُظهر ارتباطاً أو سببية .

1	عندما ترى الشمس يكون النهار قد طلع .	سببية
2	ممارسة الرياضة بانتظام يساعد على بناء جسم معافى من الأمراض .	ارتباط
3	عندما أدرس أحصل على تقدير ممتاز .	ارتباط
4	عندما أمارس الرياضة أكون في وضع نفسي أفضل .	ارتباط
5	عندما لا تكون السماء غائمة ، فلن تُمطر .	سببية
6	كثرة القراءة تجعلك أكثر ذكاءً .	ارتباط
7	النوم بحدائك يؤدي إلى شعورك بالصداع .	ارتباط
8	عندما يرى محمد البرق ، فإنه يسمع الرعد بعد ذلك .	سببية
9	يكون مد البحر أعلى ما يمكن ، عندما يكون القمر بدرأ (أو محاقاً) .	سببية

الدراسات التجريبية والمسحبية وبالملاحظة

تمرين : حدّد إذا كان كل موقف مما يأتي يمثل دراسة تجريبية أو دراسة بالملاحظة ، وفي حالة الدراسة التجريبية اذكر كلاً من المجموعة الضابطة و المجموعة التجريبية ، ثم حدّد إن وجد تحيز أو لا .

م	التعبير	الإجابة	المجموعة الضابطة والمجموعة التجريبية	متحيزة أم غير متحيزة
1	اختر 200 طالب نصفهم خضع لأنشطة إضافية في مادة معينة ، وقارن بين درجاتهم في تلك المادة .	دراسة بالملاحظة	-	-
2	قبل الاختبار ، قام المعلم بإجراء مراجعة المادة لطلبة الصف A ، بينما لا يراجع المادة لطلبة الصف B ، ثم قام المعلم بمقارنة النتيجة .	دراسة تجريبية	التجريبية طلاب الصف A الضابطة طلاب الصف B	متحيزة لأن كل طالب يعرف مجموعته
3	وجد عادل 100 شخص ، نصفهم متطوعون في مأوى للمحرومين الفقراء ، وقارن وسطي الدخل السنوي لأفراد المجموعتين .	دراسة بالملاحظة	-	-
4	اختر 200 طالب وقسمهم عشوائياً إلى نصفين ، وأخضع إحدى المجموعتين إلى برنامج تدريبي مُعَيّن ، أما الأخرى فلا تخضعها لأي برنامج تدريبي .	دراسة تجريبية	التجريبية التي خضعت للتدريب الضابطة لم تخضع للتدريب	متحيزة لأن كل طالب يعرف مجموعته
5	اختر 100 شخص وقسمهم عشوائياً إلى نصفين ودع إحدى المجموعتين تتناول وجبات قليلة الدسم ، بينما تتناول الأخرى وجبات عادية ، وقارن النتائج لمعرفة أثر الوجبات القليلة الدسم على صحة الجسم .	دراسة تجريبية	التجريبية تتناول قليلة الدسم الضابطة : تتناول وجبات عادية	متحيزة لأن كل طالب يعرف مجموعته

تمارين من الامتحانات السابقة

① ما نوع الدراسة التي يتطلبها الموقف الآتي :

" تريد معرفة إذا كان السكن لمدة 5 سنوات متواصلة في المدن التي تسجل درجات تلوث عالية في الهواء يؤثر في مناعة الجسم أو لا "

B دراسة تجريبية .

A دراسة بالملاحظة .

D دراسة سببية .

C دراسة ارتباط .

② ما نوع الدراسة التي يتطلبها الموقف الآتي :

" اختر 30 شخصاً من المشاركين بنادي رياضي مُعَيّن ، وقسمهم عشوائياً إلى مجموعتين ، وأخضع إحداها لحمية غذائية مُعينة لمدة شهر ، والأخرى لا تخضعها للحمية الغذائية . ثم قارن بين كتلة الجسم لكل من المجموعتين "

B دراسة تجريبية متحيزة .

A دراسة مسحية متحيزة .

D دراسة تجريبية غير متحيزة .

C دراسة بالملاحظة .

١ حدد إذا كانت كل حالة أدناه تحتاج إلى دراسة مسحية أو دراسة بالملاحظة أو دراسة تجريبية :

- A يريد أحمد أن يجمع آراء طلبة مدرسته عن المقصف المدرسي . (دراسة مسحية)
- B اختر 100 شخصاً وقسمهم عشوائياً إلى نصفين ، وأخضع أفراد النصف الأول لنظام غذائي معين ، والنصف الآخر لا تخضع أفراد هذا النظام . ثم قارن بين كتلة الجسم للأفراد في النصفين . (دراسة تجريبية)
- C اختر 100 شخصاً ، نصفهم يمارس الرياضة بصورة منتظمة ، والنصف الآخر لا يمارس الرياضة ثم قارن فترة النوم لدى أفراد المجموعتين . (دراسة بالملاحظة)

٢ حدد إذا كانت كل دراسة مسحية أدناه تتبنى عينة متحيزة أو غير متحيزة :

- A سؤال عينة عشوائية في مهرجان كرة السلة عن الرياضة المفضلة لديهم . (متحيزة)
- B سؤال كل خامس طالب يدخل من بوابة المدرسة عن رأيه في مكتبة المدرسة . (غير متحيزة)
- C اتصال موظف شركة للاتصالات بـ 100 شخص اختيرت أرقام هواتفهم عشوائياً من دليل الهاتف ، وسؤالهم عن رأيهم بمستوى الخدمات التي تقدمها الشركة المشتركين معها . (غير متحيزة)

٣ ما نوع الدراسة التي في الموقف الآتي : " قام معلم الرياضيات بإجراء مراجعة المادة قبل الاختبار

لطلبة الصف A ، بينما لم يراجع المادة لطلبة الصف B ، ثم قام المعلم بمقارنة النتيجة " .

- A دراسة مسحية متحيزة . (B) دراسة تجريبية متحيزة .
- C دراسة بالملاحظة . D دراسة تجريبية غير متحيزة .

٤ يريد باحث إجراء دراسة مسحية يحدد من خلالها الصحيفة اليومية الأكثر شعبية في مملكة البحرين

فأي الأسئلة الآتية يحدد المطلوب في هذه الدراسة دون تحيز ؟

- A هل تفضل قراءة صحيفة الوطن ؟ B أيهما تفضل : صحيفة الوطن أم الوسط ؟
- C هل تفضل قراءة صحيفة الوسط ؟ (D) أي الصحف المحلية تفضل قراءتها ؟

٥ أي مما يأتي يمثل دراسة مسحية تتبنى عينة غير متحيزة ؟

- A سؤال 10 طلاب اختيروا عشوائياً داخل صالة كرة السلة عن الرياضة المفضلة لديهم .
- B سؤال 10 طلاب اختيروا عشوائياً من ذوي التحصيل المرتفع في الرياضيات عن مادتهم المفضلة .
- (C) يرسل باحث استبانة لدراسته المسحية لكل مشترك لدى شركة اتصالات ينتهي رقم هاتفه بـ 6 .
- D يطلب أحد المطاعم إلى زبائنه أن يكملوا استبانة حول المطعم المفضل لديهم .

القيم المتطرفة + مقاييس النزعة المركزية

أولاً : القيم المتطرفة

تعريف : القيمة المتطرفة هي واحدة من البيانات أكبر أو أقل بكثير من بقية البيانات .
ملاحظة : ليس بالضرورة أن تكون ضمن البيانات قيماً متطرفة .

ثانياً : مقاييس النزعة المركزية

المقياس	التعريف (كيف يمكن حساب قيمته)	متى يفضل استعماله
الوسط Mean	الوسط = $\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n}$ = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عدد القيم}}$ حيث n عدد القيم ① $\bar{x}$ ويقرأ ($\bar{x}$ بار) في حالة العينة . ② μ ويقرأ (μ ميو) في حالة المجتمع .	عندما لا يوجد في البيانات قيم متطرفة
الوسيط Median	هي القيمة التي تتوسط مجموعة القيم عند ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً ① إذا كان عدد القيم فردي فتوجد قيمة تتوسط القيم هي قيمة الوسيط . ② إذا كان عدد القيم زوجي فتوجد قيمتان تتوسطان القيم وتكون قيمة الوسيط مساوية الوسط الحسابي للقيمتين ($\frac{\text{مجموعهم}}{2}$) .	عندما يكون في البيانات قيم متطرفة ولكن لا توجد فراغات كبيرة في منتصف البيانات .
المنوال Mode	هي القيمة الأكثر شيوعاً (الأكثر تكراراً) بين مجموعة القيم . ويمكن أن يكون لمجموعة القيم منوال واحد ، أو أكثر من منوال ، أو لا يوجد منوال .	في البيانات التي تتكرر فيها قيم عديدة

تمارين على القيم المتطرفة ومقاييس النزعة المركزية

① رواتب مجموعة من الموظفين بأحد الشهور 380 , 370 , 400 , 900 , 360 , 390 القيم المتطرفة :	② درجات مجموعة من الطلاب في أحد الاختبارات 17 , 20 , 18 , 19 , 17 , 16 , 15 القيم المتطرفة :
---	--

③ القيم التالية تمثل درجات سبعة طلاب في اختبار المنتصف لمادة الرياضيات :
 16 , 8 , 20 , 8 , 15 , 8 , 9 فأوجد كلاً مما يأتي :

- الوسط :
- الوسيط :
- المنوال :

تابع : التحليل الإحصائي

تمرين : حدّد أيّ مقاييس النزعة المركزية يناسب بصورة أفضل البيانات الآتية ؟ ولماذا ؟

م	البيانات	المقياس المناسب	السبب														
١	<table><tr><td>15</td><td>17</td><td>16</td><td>15</td><td>61</td><td>61</td><td>12</td></tr><tr><td>18</td><td>18</td><td>61</td><td>14</td><td>20</td><td>16</td><td>19</td></tr></table>	15	17	16	15	61	61	12	18	18	61	14	20	16	19	الوسيط	لأنه توجد قيمة متطرفة ولا يوجد فجوات كبيرة في منتصف البيانات .
15	17	16	15	61	61	12											
18	18	61	14	20	16	19											
٢	<table><tr><td>30</td><td>18</td><td>20</td><td>24</td><td>18</td><td>20</td><td>27</td></tr><tr><td>29</td><td>19</td><td>29</td><td>22</td><td>25</td><td>26</td><td>28</td></tr></table>	30	18	20	24	18	20	27	29	19	29	22	25	26	28	الوسط	لأنه لا توجد قيم متطرفة
30	18	20	24	18	20	27											
29	19	29	22	25	26	28											
٣	<table><tr><td>17</td><td>11</td><td>10</td><td>13</td><td>18</td><td>20</td><td>9</td></tr><tr><td>18</td><td>9</td><td>15</td><td>12</td><td>14</td><td>16</td><td>97</td></tr></table>	17	11	10	13	18	20	9	18	9	15	12	14	16	97	الوسيط	لأنه توجد قيمة متطرفة ولا يوجد فجوات كبيرة في منتصف البيانات .
17	11	10	13	18	20	9											
18	9	15	12	14	16	97											
٤	درجات 4 طلاب : 95 , 98 , 97 , 100	الوسط	لأنه لا توجد قيم متطرفة														
٥	يمنح بنك جائزة كبرى قيمتها BD 10000 ، و 30 جائزة أخرى قيمة كل منها BD 1000	المنوال	لتكرار القيم														

تمارين من الامتحانات السابقة

18	22	25	18	27
19	20	22	26	28
30	29	24	18	20

١ أيّ مقاييس النزعة المركزية يناسب البيانات في الجدول المجاور ؟

A المنوال . B الوسيط .

C التباين . D الوسط .

٢ أيّ مقاييس النزعة المركزية يناسب بصورة أفضل للبيانات : 51 , 59 , 61 , 10 , 55 , 49 ؟

A الوسيط . B الوسط .

C المنوال . D الوسيط أو المنوال .

11	12	14	7	9
9	10	13	16	97
17	15	8	18	20

٣ أيّ مقاييس النزعة المركزية يناسب البيانات في الجدول المجاور ؟

A المنوال . B الوسيط .

C التباين . D الوسط .

تابع : تمارين من الامتحانات السابقة

10	12	13	54	12
8	12	12	15	11
12	20	21	12	15

٤ أيّ مقاييس النزعة المركزية يناسب البيانات في الجدول المجاور ؟

A الوسط . B الوسيط .

C المنوال . D الوسيط أو المنوال .

٥ أيّ مقاييس النزعة المركزية يناسب بصورة أفضل للبيانات : 35 , 38 , 37 , 40 ؟

A الوسط . B الوسيط .

C المنوال . D الوسيط أو المنوال .

٦ يعمل 4 موظفين في شركة براتب شهري 2000 BD لكل منهم ، ويعمل 8 آخرين براتب شهري

800 BD ، بينما يعمل 40 موظفاً في الشركة براتب شهري 500 BD لكل منهم .

أيّ من مقاييس النزعة المركزية يناسب بصورة أفضل للبيانات :

توجد قيم متطرفة
توجد تكرارات

A الوسط . B المنوال .

C الوسيط . D الوسيط أو المنوال .

٧ في مجموعة من تسعة أعداد مختلفة ، أيّ مما يأتي لا يؤثر في الوسيط ؟

A مضاعفة كل عدد . B زيادة كل عدد بمقدار 10 .

C زيادة القيمة الصغرى فقط . D زيادة القيمة الكبرى فقط .

٨ الوسط لدرجات طلبة صف فيه c طالباً هو 80 ، والوسط لدرجات طلبة صف فيه d طالباً هو 85 .

والوسط لدرجات طلبة الصفين معاً هو 82 . فما النسبة $\frac{c}{d}$ ؟

$$\frac{x}{c} = 80 \Rightarrow x = 80c \quad \text{مجموع درجات الصف الأول}$$

$$\frac{y}{d} = 85 \Rightarrow y = 85d \quad \text{مجموع درجات الصف الأول}$$

$$\frac{x+y}{c+d} = 82 \quad \text{مجموع درجات الصفين}$$

$$x + y = 82(c + d) \Rightarrow 80c + 85d = 82c + 82d$$

$$\Rightarrow 3d = 2c \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2} \quad C$$

$$\frac{2}{3} \quad A$$

$$3 \quad D$$

$$\frac{1}{3} \quad B$$

العينة والمجتمع الكلي + هامش خطأ المعاينة

المُعَلِّمة : هو مقياس يصف خاصية في المجتمع . **مثال :** الوسط لدخل الفرد في مملكة البحرين .
الإحصائي : هو مقياس يصف خاصية في العينة . **مثال :** الوسط لدخل الفرد في مدينة حمد .

تمرين : حدّد إذا كان كل ممّا يأتي يُمثّل عينة أو مجتمعاً كلياً . (على العينة والمجتمع)

م	الموقف	الإجابة
1	تقدير عدد ساعات مشاهدة ربّات البيوت للتلفاز خلال أسبوع في مملكة البحرين .	يُمثّل عينة
2	أعطي اختبار رياضيات للخريجين جميعهم في المملكة ، لتحليل بعض المهارات الرياضية .	يُمثّل مجتمعاً كلياً
3	حساب الوسط لأطوال طلبة المدرسة جميعهم .	يُمثّل مجتمعاً كلياً
4	سأل باحث في مجال التعليم 100 فرد في مجمع تجاري عن رأيهم في التعليم .	يُمثّل عينة
5	يقارن الأستاذ عابدين درجات الاختبار لمادة الرياضيات في صفه .	يُمثّل مجتمعاً كلياً
6	يقارن الأستاذ عابدين درجات طلابه مع مُعدل الدرجات في المملكة لأحد الاختبارات الوطنية .	يُمثّل عينة
7	أجرى محمد دراسة مسحية عبر الإنترنت حول الوسط لدخل الفرد .	يُمثّل عينة

هامش خطأ المعاينة

القانون

مهم

$$\text{هامش خطأ المعاينة} = \pm \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ ، حيث } n = \text{عدد العينة المسحوبة من المجتمع الكلي}$$

تمارين على هامش خطأ المعاينة

❶ ما هامش خطأ المعاينة في دراسة مسحية شملت 1926 شخصاً ، أفاد 53 % منهم أن مادة الرياضيات هي مادتهم المفضلة .

(A) ± 0.74 (B) ± 0.14 (C) ± 0.53 (D) ± 0.02

❷ في دراسة مسحية شملت 784 شخصاً ، أفاد 40 % منهم أنهم يحبون مشاهدة البرامج الثقافية ما هامش خطأ المعاينة (تقريباً) .

(A) $\pm 0.036 \%$ (B) $\pm 0.36 \%$ (C) $\pm 3.6 \%$ (D) $\pm 36 \%$

تابع : التحليل الإحصائي

تابع : هامش خطأ المعاينة

تابع : تمارين على هامش خطأ المعاينة

❸ في دراسة مسحية عشوائية شملت 625 طالباً ، أفاد 45 % منهم أن مادة المحاسبة هي مادتهم المفضلة .
(a) ما هامش خطأ المعاينة ؟

(b) ما الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة المجتمع الكلي من الطلبة الذين يدعون أن مادة المحاسبة هي مادتهم المفضلة ؟

❹ في دراسة مسحية عشوائية شملت 2148 شخصاً ، أفاد 58 % منهم أن كرة القدم هي لعبتهم المفضلة .
(a) ما هامش خطأ المعاينة ؟

$$\text{هامش خطأ المعاينة} = \pm \frac{1}{\sqrt{n}} , n = 2148$$

$$\pm \frac{1}{\sqrt{n}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2148}} \approx \pm 0.0216$$

أو : $\text{هامش خطأ المعاينة} \approx \pm 2.16 \%$

(b) ما الفترة الممكنة التي تتضمن نسبة المجتمع الكلي الذين يدعون أن كرة القدم هي لعبتهم المفضلة ؟

$$58 \% - 2.16 \% = 55.84 \%$$

$$58 \% + 2.16 \% = 60.16 \%$$

أي الفترة الممكنة تقع بين :

$$55.84 \% , 60.16 \%$$

❺ في دراسة مسحية عشوائية ، أفاد 58 % منهم أن السباحة هي رياضتهم المفضلة .
وقد وُجد أن الفترة الممكنة التي تحتوي نسبة أفراد المجتمع الكلي لهذه الدراسة تقع بين 55.85 % ، 60.15 % .
كم شخصاً تناولت رأيهم الدراسة المسحية ؟

❻ في دراسة مسحية عشوائية ، أفاد 48 % منهم أنهم يطالعون الصحف المحلية يومياً .
وقد وُجد أن الفترة الممكنة التي تحتوي نسبة أفراد المجتمع الكلي لهذه الدراسة تقع بين 45.5 % ، 50.5 % .
كم شخصاً تناولت رأيهم الدراسة المسحية ؟

الحل : مقدار هامش خطأ المعاينة يساوي

$$50.5 \% - 48 \% = 2.5 \% = 0.025$$

$$\text{أو } 48 \% - 45.5 \% = 2.5 \% = 0.025$$

$$\text{هامش خطأ المعاينة} \pm \frac{1}{\sqrt{n}} = \pm 0.025$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} = 0.025 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1}{0.025}$$

بالتربيع : $n = 1600$ (عدد الأشخاص)

مقاييس التشتت

(في حالة المجتمع)	(في حالة العينة)
$\sigma^2 = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \mu)^2}{n}$ التباين : $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \mu)^2}{n}}$ الانحراف المعياري : (n عدد قيم المجتمع)	$s^2 = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}{n-1}$ التباين : $s = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}{n-1}}$ الانحراف المعياري : (n عدد قيم العينة)

ملاحظة : كلما كبر الانحراف المعياري زاد تباعد (انحراف) قيم البيانات عن الوسط .

تمارين على الانحراف المعياري (في حالة العينة والمجتمع الكلي)

x_k	$(x_k - \bar{x})$	$(x_k - \bar{x})^2$
85	10	100
100	25	625
75	0	0
40	-35	1225
60	-15	225
90	15	225
450	المجموع	2400

١ إذا كانت درجات 6 طلاب من مدرسة ثانوية في مادة الرياضيات :

85 , 100 , 75 , 40 , 60 , 90

A هل هذه عينة أم مجتمع كلي ؟ البيانات تمثل عينة

B أوجد الوسط للدرجات ؟ $\bar{x} = \frac{\sum x_k}{n} = \frac{450}{6} = 75$

C أوجد التباين لدرجات الطلاب ؟

$$s^2 = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{2400}{6-1} = 480 \quad (\text{من الجدول})$$

D أوجد الانحراف المعياري لدرجات الطلاب ؟

يمكن إيجاد التباين أو الانحراف المعياري بدون الجدول بالتعويض مباشرة

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{2400}{6-1}} = 4\sqrt{30} \approx 21.9$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{(85-75)^2 + (100-75)^2 + \dots + (90-75)^2}{6-1}} = \sqrt{\frac{2400}{5}} \approx 21.9$$

٢ إذا كان الوسط لعينة القيم : 6 , 4 , 8 , 5 , x يساوي 6 ، فما قيمة الانحراف المعياري

لهذه القيم مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة ؟

$$\bar{x} = \frac{\sum x_k}{n} = 6 \Rightarrow \frac{x+5+8+4+6}{5} = 6 \Rightarrow x+23 = 30 \Rightarrow x = 7$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{(7-6)^2 + (5-6)^2 + (8-6)^2 + (4-6)^2 + (6-6)^2}{5-1}} = \sqrt{\frac{10}{4}} \approx 1.6$$

تمارين على الانحراف المعياري (في حالة العينة والمجتمع الكلي)

١ القيم الآتية تمثل المصروف الأسبوعي للغذاء لـ 6 عائلات بحرينية بالدينار البحريني :

85 , 39 , 100 , 63 , 40 , 51

A هل هذه عينة أم مجتمع كلي ؟

B أوجد الوسط للقيم ؟ $[\bar{x} = 63]$

C أوجد التباين للقيم ؟ $[s^2 = 620.4]$

D أوجد الانحراف المعياري للقيم ؟ $[s = 24.9]$

٢ إذا كان الوسط لعينة القيم : 6 , 10 , x , 11 , 8 يساوي 10 ، فما قيمة الانحراف المعياري

لهذه القيم مقرباً إلى أقرب جزء من عشرة ؟ $[s \approx 3.4]$

٣ إذا كان الانحراف المعياري لعينة من القيم يساوي 28 إذا كان مجموع مربعات الانحرافات عن الوسط يساوي 4704 ، فما عدد القيم ؟

A 4

B 5

C 6

D 7

٣ ما قيمة الانحراف المعياري لعينة تتكون من 5 قيم ، إذا كان مجموع مربعات الانحرافات عن الوسط يساوي 2500 ؟

A 10

B 12.5

C 22

D 25

تابع : تمارين على الانحراف المعياري (في حالة العينة والمجتمع الكلي)

١ القيم التالية تبين درجات طلاب صف جميعهم في اختبار الرياضيات :

85	80	75	75	70	75	65	75	75	75
80	75	75	70	80	70	75	75	75	75

A هل هذه البيانات تمثل عينة أم مجتمع كلي ؟ البيانات تمثل مجتمع كلي

B أوجد الوسط للدرجات ؟ $\mu = \frac{\sum x_k}{n} = \frac{1500}{20} = 75$

C أوجد التباين لدرجات الطلاب ؟

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \mu)^2}{n} = \frac{(85-75)^2 + (80-75)^2 + \dots + (75-75)^2}{20} = \frac{350}{20} = 17.5$$

D أوجد الانحراف المعياري لدرجات الطلاب ؟ $\sigma = \sqrt{\text{التباين}} = \sqrt{17.5} \approx 4.2$

٢ الجدول المجاور يوضح درجات جميع الطلبة الذين تقدموا لامتحان القبول بإحدى الجامعات .

A هل هذه عينة أم مجتمع كلي ؟

درجات الطلبة			
88	89	85	86
86	83	86	85

B أوجد الوسط للدرجات ؟ $[\mu = 86]$ C أوجد الانحراف المعياري لدرجات الطلاب ؟ $[\sigma = \sqrt{3}]$

٣ إذا كان الانحراف المعياري لمجتمع ما يساوي 7 إذا كان مجموع مربعات الانحرافات عن الوسط يساوي 735 ، فما عدد قيم هذا المجتمع ؟

A 5

B 10

C 15

D 20

٣ ما قيمة التباين لمجتمع يتكون من 9 قيم إذا كان مجموع مربعات الانحرافات عن الوسط يساوي 324 ؟

A 5

B 6

C 25

D 36

الاحتمال المشروط

قوانين احتمالات الأحداث المركبة

الحدث المُتَمَم (المُكَمَّل)

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

و / معاً

$$① \text{ احتمال وقوع الحدث } A : P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$② \text{ الحدثان } A, B \text{ مستقلان : } P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$③ \text{ الحدثان } A, B \text{ متنافيان : } P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

أو

$$④ \text{ الحدثان } A, B \text{ غير متنافيان : } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

تمارين على احتمالات الأحداث المركبة

② إذا كان A, B حدثين متنافيين في فضاءالعينة لتجربة عشوائية وكان $P(B^c) = \frac{3}{4}$ ، $P(A) = \frac{1}{3}$ فما قيمة $P(A \cup B)$ ؟الجواب : $\frac{7}{12}$ ① إذا كان A, B حدثين في فضاء العينة لتجربةعشوائية وكان $P(A \cup B) = 0.8$ ، $P(B) = 0.6$ ، $P(A \cap B) = 0.25$ فأوجد قيمة $P(A^c)$. الجواب : 0.55

④ إذا كان 60 % من موظفي شركة ما من الذكور

والباقي من الإناث وكان 8 % من الذكور يستعملون

نظارات طبية ، 15 % من الإناث يستعملون نظارات

طبية ، وإذا اختير موظف عشوائياً من الشركة .

فما احتمال أن تكون أنثى ولا تستعمل النظارات الطبية ؟

الجواب : 0.34

③ يحصل حسين على ضربة إرسال صحيحة

بنسبة 65 % عندما يلعب على ملعب عُشبي .

ما احتمال ألا يحصل على ضربة إرسال صحيحة

خلال خمس مرات متتالية يلعب فيها مباريات

على ملعب عُشبي ؟

أحداث مستقلة
 $(0.35)^5 \approx 0.5 \%$

الاحتمال المشروط

الاحتمال المشروط : هو احتمال وقوع حدث مُعَيَّن إذا عُلِمَ وقوع حدث آخر .

بشرط / علماً بأن / إذا كان

إذا كان A, B حدثين غير مستقلين :

(احتمال وقوع الحدث A بشرط وقوع B)

$$P(A \setminus B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0$$

تمارين على الاحتمال المشروط

❶ إذا كان R, T حدثين غير مستقلين في فضاء العينة لتجربة عشوائية ما ، بحيث :
 $P(T) = 50\%$ ، $P(R \setminus T) = 40\%$
 ، فما قيمة $P(R \cap T)$ ؟

A 10 %

B 20 %

C 80 %

D 90 %

❷ إذا كان A, B حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية ما وكان : $P(A) = 0.3$
 $P(A \cup B) = 0.8$ ، $P(B) = 0.6$
 ، فما قيمة $P(A \setminus B)$ ؟

الحل

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$0.8 = 0.3 + 0.6 - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = 0.1$$

$$P(A \setminus B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.1}{0.6} = \frac{1}{6}$$

❸ تدريب : إذا كان A, B حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية ما وكان : $P(A) = 0.2$
 $P(A \cup B) = 0.6$ ، $P(B) = 0.5$
 ، فما قيمة $P(A \setminus B)$ ؟

❹ ألقى حجر نرد مرة واحدة . فما احتمال ظهور عدد زوجي ، علماً بأن العدد الظاهر عدد أولي ؟
الحل : بفرض أن :

$$A = \{2, 4, 6\} : \text{حدث ظهور عدد زوجي .}$$

$$B = \{2, 3, 5\} : \text{حدث ظهور عدد أولي .}$$

$$A \cap B = \{2\} : \text{حدث ظهور عدد زوجي وأولي}$$

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$$P(A \setminus B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow P(A \setminus B) = \frac{1}{6} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

❺ يمتلك 45 % من طلاب مدرسة جهاز حاسوب محمول ، 10 % يمتلكون آلة حاسبة بيانية وجهاز محمول ، ما احتمال أن يمتلك طالب منهم آلة حاسبة بيانية إذا كان يمتلك جهاز حاسوب محمول ؟
 [الجواب : $\frac{2}{9}$]

تابع : الاحتمال المشروط

تابع : تمارين على الاحتمال المشروط

- ٧ إذا أُلقي مكعبان متمايزان مُرقَّمان بالأعداد من 1 إلى 6 مرة واحدة ، فأوجد احتمال ما يأتي :
- (A) ظهور عدد فردي على أحد المكعبين فقط ،
علماً بأن العدد 3 ظهر مرة واحدة على الأقل .

$$P(A \setminus B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{36}{11}}{\frac{36}{11}} = \frac{6}{11}$$

- (B) كلا العددين كان زوجياً ، علماً بأن واحداً على الأقل كان العدد 2 .

$$P(A \setminus B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{36}{11}}{\frac{36}{11}} = \frac{5}{11}$$

- ٨ في تجربة إلقاء حجرين نرد متمايزين مرة واحدة ، وملاحظة الناتج على الوجهين العلويين لهما .
ما احتمال ظهور العدد 3 على أحدهما إذا كان مجموع العددين الظاهريين يساوي 8 ؟ [الجواب : 0.4]

- ٩ أُلقيت ثلاث مكعبات متميزة مُرقَّمة بالأعداد من 1 إلى 6 مرة واحدة ، فأوجد احتمال ما يأتي :
- (A) ظهور عددين زوجيين على الأقل ، علماً بأن الأعداد الظاهرة جميعها متساوية .

$$P(A \setminus B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{216}{6}}{\frac{216}{6}} = \frac{1}{2}$$

- (B) ظهور العدد 6 على أحد الأوجه ، علماً بأن الأعداد الظاهرة جميعها زوجية .

بفرض : A : ظهور العدد 6 على أحد الأوجه .

B : حدث الأعداد الظاهرة جميعها زوجية .

$$P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \quad (\text{الأعداد زوجية})$$

$$P(A \cap B) = 3 \times \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{18}$$

$$P(A \setminus B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{18}{1}}{\frac{1}{8}} = \frac{4}{9}$$

- ٦ يحتوي كيس على 8 كرات زرقاء ، 6 كرات حمراء ، 5 كرات خضراء .

فأوجد الاحتمالات الآتية :

- (A) الثانية خضراء علماً بأن الأولى زرقاء دون إرجاع

$$P(G \setminus B) = \frac{P(G \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{8}{19} \times \frac{5}{18}}{\frac{8}{19}} = \frac{5}{18}$$

- (B) الثانية حمراء علماً بأن الأولى خضراء مع الإرجاع

$$P(R \setminus G) = \frac{P(R \cap G)}{P(G)} = \frac{\frac{5}{19} \times \frac{6}{19}}{\frac{5}{19}} = \frac{6}{19}$$

- (C) الثالثة حمراء علماً بأن الأولى حمراء والثانية زرقاء بدون الإرجاع .

$$P(R \setminus A) = \frac{P(R \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{6}{19} \times \frac{8}{18} \times \frac{5}{17}}{\frac{6}{19} \times \frac{8}{18}} = \frac{5}{17}$$

- ٩ يحتوي كيس على 52 بطاقة مقسمة إلى مجموعتين نصفها لونها أحمر ، والنصف الآخر لونها أخضر ، إذا كان نصف البطاقات الحمراء تحمل الرقم 1 ، والنصف الآخر يحمل الرقم 2 وكذلك الحال بالنسبة للبطاقات الخضراء .
إذا سُحبت بطاقة ، فما احتمال أن تكون تحمل البطاقة رقم 2 علماً بأنها حمراء .

الحل : A : هو حدث تحمل البطاقة الرقم 2 .

B : حدث أن تكون البطاقة حمراء .

$$P(A) = \frac{26}{52} , \quad P(B) = \frac{26}{52}$$

$$P(A \cap B) = \frac{13}{52} \quad (\text{حمراء وتحمل 2})$$

$$P(A \setminus B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \setminus B) = \frac{13}{52} \div \frac{26}{52} = \frac{13}{26} = \frac{1}{2}$$

الاحتمال المشروط (الجداول التوافقية)

تمارين على الجداول التوافقية

٢ يوضح الجدول الآتي عدد لاعبي فريق ما ، الذين يأخذون ساعات تدريب إضافية . أوجد احتمال أن يأخذ أحمد ساعات تدريب إضافية علماً بأنه جديد

	لا يأخذ ساعات إضافية (X)	يأخذ ساعات إضافية (E)
لاعب جديد (N)	1	4
لاعب قديم (O)	23	2

١ يوضح الجدول الآتي أعداد الطلبة الذين يأخذون حصصاً إضافية والذين لا يأخذون . أوجد احتمال أن يأخذ طارق حصة إضافية علماً بأنه طالب جديد

	لا يأخذ حصصاً إضافية (X)	يأخذ حصصاً إضافية (E)
طالب جديد (N)	84	126
طالب قديم (O)	72	98

الحل : $P(E \setminus N) = \frac{P(E \cap N)}{P(N)}$

$P(E \setminus N) = \frac{126}{380} \div \frac{210}{380} = \frac{3}{5} = 60\%$

٤ من الجدول أدناه ، أوجد احتمال أن يرغب شخص لإكمال دراسته العليا ، علماً بأنه ذكر .

	لا يرغب لإكمال الدراسات العليا	نعم يرغب لإكمال الدراسات العليا
ذكور	126	234
إناث	125	270

٣ من الجدول أدناه الذي يُعبّر عن عدد المشاهدين للدوري البحريني ، ما احتمال أن يكون الطالب شاهد المباراة علماً بأنه من الصف الثاني

	لم يشاهد المباريات	شاهد المباريات
الصف الأول	10	18
الصف الثاني	12	20

٥ يبين الجدول المجاور توزيعاً لمجموعة من الهواتف الذكية وفق احتمال بيعها في فترة عيد الأضحى المبارك لدى أحد المحلات إذا اختير هاتف ذكي مُباع من هذا المحل عشوائياً . فما احتمال أن يكون من النوع N علماً بأنه ليس من النوع I أو من النوع H .

نوع الهاتف	الاحتمال
S	0.31
N	0.20
I	0.09
H	0.11
L	0.29

بفرض أن : A : حدث من النوع N

B : حدث ليس من النوع I أو من النوع H

$P(A \setminus B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.20}{0.31+0.20+0.29} = \frac{1}{4}$

(A) 0.80

(B) 0.25

(C) 0.20

(D) 0.10

الاحتمال المشروط (الجداول التوافقية)

تابع : تمارين على الجداول التوافقية

٦ يوضح الجدول أدناه أعداد الطلبة المشاركين من صفين في ثلاثة أنشطة مدرسية اختير أحد الطلبة عشوائياً . فما احتمال أن يكون من الصف الثاني ، علماً بأنه ليس مشارك في نشاط رعاية البيئة .

الحل : بفرض A : حدث من الصف الثاني

B : ليس مشارك في رعاية البيئة

$$P(A \setminus B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

رعاية البيئة	الاحتفالات	الرحلات
13	12	15
12	23	10
الأول الثانوي		
الثاني الثانوي		

الجواب : $\frac{11}{20}$

$$P(A \setminus B) = \frac{33}{85} \div \frac{60}{85} = \frac{33}{60} = \frac{11}{20} = 55\%$$

٧ يوضح الجدول أدناه أعداد الطلبة المتبرعين بالدم خلال اليوم الأول ، ضمن حملة نظمتها إحدى

الجامعات وفق جنسهم والسنة الدراسية :

إذا اختير أحد هؤلاء الطلبة عشوائياً لمنحه

جائزة رمزية . فما احتمال أن يكون من الذكور

، علماً بأنه من طلاب السنة الرابعة .

	سنة أولى	سنة ثانية	سنة ثالثة	سنة رابعة
ذكور	85	63	77	65
إناث	67	54	80	59

٨ يُبين الجدول أدناه أعداد الطلبة المسجلين في مراكز الإبداع في إحدى المدارس الثانوية . اختير طالب عشوائياً . فإن احتمال أن يكون مسجلاً ضمن مركز الرسم ، علماً بأنه من الصف الثاني الثانوي ؟

		مراكز الإبداع		
		الرسم	الخط العربي	المسرح
الصفوف	الأول ث	14	8	5
	الثاني ث	12	22	10
	الثالث ث	10	10	9

الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية

الاحتمال هو نسبة تقيس فرصة وقوع حدث معين. فوقوع الشيء المرغوب يُسمى **نجاحاً**، وعدم وقوعه يُسمى **فشلاً**. ومجموعة النواتج الممكنة تُسمى **فضاء العينة**. فكلما اقترب احتمال وقوع الحدث من 1، كانت فرصة أو إمكانية حدوثه أكبر.

$$P(A) = P(S) = \frac{n(A)}{n(s)} = \frac{s}{s+f}$$

مفهوم أساسي

احتمال النجاح والفشل

التعبير اللفظي إذا كان عدد مرات النجاح لوقوع حدث S من المرات، وعدد مرات الفشل في وقوع الحدث نفسه f من المرات، فإن احتمال النجاح يكتب على النحو $P(S)$ ، كما يكتب احتمال الفشل على النحو $P(F)$. ويعطى كل من احتمال النجاح واحتمال الفشل بالعلاقتين الآتيتين:

$$P(S) = \frac{s}{s+f} , \quad P(F) = \frac{f}{s+f}$$

بالرموز

نستعمل التوافيق : إذا كان الترتيب غير مهم

نستعمل التباديل : إذا كان الترتيب مهماً

تمارين على الاحتمال باستعمال التوافيق

❶ في معرض للمنتجات الزراعية أقيم في إحدى الدول ، اختار مدير المعرض 5 نباتات بشكل عشوائي من بين 24 نبتة ، لإجراء فحوص الهرمونات النباتية عليها .
ما احتمال أن تكون 3 منها بالضبط تعود لمزارع يشارك بـ 7 نباتات في المعرض ؟

الحل : (الترتيب غير مهم) $P(A) = \frac{s}{s+f} = \frac{{}^7C_3 \times {}^{17}C_2}{{}^{24}C_5} = \frac{35 \times 136}{42504} = \frac{4760}{42504} \approx 0.112$

❷ رشّحت وزارة التربية والتعليم 12 طالباً و 16 طالبة للتنافس على 6 جوائز نظراً لتفوقهم الدراسي إذا تمت مقابلة المرشحين في اليوم الأول بشكل عشوائي .
فما احتمال أن يفوز 3 طلاب و 3 طالبات بالجوائز ؟

الحل : (الترتيب غير مهم) $P(A) = P(S) = \frac{s}{s+f} = \frac{{}^{12}C_3 \times {}^{16}C_3}{{}^{28}C_6} = \frac{123200}{376740} = \frac{880}{2691}$

❸ إذا اختير عشوائياً 6 كتب دفعةً واحدةً من رف مكتبة يحتوي على 20 كتاب منها 5 قصص ، والباقي كتب أخرى ، فما احتمال أن تضم الكتب المختارة 4 قصص على الأقل ؟

الحل : (الترتيب غير مهم) $P(A) = \frac{{}^5C_4 \times {}^{15}C_2}{{}^{20}C_6} + \frac{{}^5C_5 \times {}^{15}C_1}{{}^{20}C_6} = \frac{9}{646} \approx 0.014$

الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية

تابع : تمارين على الاحتمال باستعمال التباديل

٤ اشترك خالد وعلي ومحمود مع 5 رياضيين آخرين في سباق مارثون تم تنظيمه بمناسبة العيد الوطني لمملكة البحرين ، ما احتمال أن ينهي هؤلاء الأصدقاء السباق في المراكز الثلاثة الأولى ؟

الحل : (الترتيب مهم والمراكز غير محددة)
$$P(A) = \frac{s}{s+f} = \frac{{}_3P_3}{{}_8P_3} = \frac{3!}{8P_3} = \frac{6}{336} = \frac{1}{56}$$

٥ لدى حمزة 5 كتب هي الرياضيات والكيمياء والإنجليزي والعربي والتاريخ ، قام بترتيبها على رف في صف واحد عشوائياً ، ما احتمال أن تكون كتب الإنجليزي والعربي والرياضيات في أقصى اليسار .

الحل : (الترتيب مهم)
$$P(A) = \frac{s}{s+f} = \frac{{}_3P_3 \times {}_2P_2}{{}_5P_5} = \frac{3! \times 2!}{5!} = \frac{12}{120} = 0.1 = 10\%$$

٦ لدى صالح 6 أصدقاء تبدأ أسماءهم بالأحرف A, B, C, D, E, F ويتوقع من كل منهم اتصالاً هاتفياً للاتفاق على موعد رحلة . ما احتمال أن يتصل A أولاً ، ثم B ثانياً ، ويتصل كل من D, E, F أخيراً ؟

الحل : (الترتيب مهم)
$$P(A) = \frac{s}{s+f} = \frac{1 \times {}_3P_3}{{}_6P_6} = \frac{1 \times 3!}{6!} = \frac{6}{720} = \frac{1}{20}$$

تمارين على الاحتمال باستعمال التباديل و التوافيق

٧ يحتوي كيس على 5 كرات حمراء ، 5 كرات صفراء ، 5 كرات زرقاء ، 5 كرات خضراء وجميعها متماثلة . إذا سحب خالد عشوائياً 5 كرات معاً من الكيس .

، فما احتمال أن تكون ثلاث كرات من لون وكرتان من لون آخر ؟

الحل :
$$P(A) = \frac{s}{s+f} = \frac{{}_4P_2 \times {}_5C_3 \times {}_5C_2}{{}_{20}C_5} = \frac{25}{323}$$

اختيار لونين من الأربعة : ${}_4P_2$

اختيار ثلاث من لون واحد : ${}_5C_3$

اختيار كرتين من لون واحد : ${}_5C_2$

٨ يحتوي كيس على 52 بطاقة جميعها متماثلة ، وموزعة بالتساوي على الألوان : الأحمر ، والأخضر ، والأصفر ، والأزرق . إذا سحبت فاطمة عشوائياً 5 بطاقات معاً من هذا الكيس .

، فما احتمال أن تكون سحبت بطاقتين من لون وثلاث بطاقات من لون آخر ؟

الحل :
$$P(A) = \frac{s}{s+f} = \frac{{}_4P_2 \times {}_{13}C_2 \times {}_{13}C_3}{{}_{52}C_5} = \frac{429}{4165} \approx 10\%$$

اختيار لونين من أربعة : ${}_4P_2$

اختيار اثنين من لون : ${}_{13}C_2$

اختيار ثلاث من لون : ${}_{13}C_3$

٩ يحتوي كيس على 12 بطاقة جميعها متماثلة ، وموزعة بالتساوي على الألوان : الأسود ، والأحمر ، والأزرق ، والأبيض . إذا اختيرت 5 بطاقات دفعة واحدة عشوائياً من الكيس .

، فما احتمال اختيار ثلاث بطاقات من لون معين وبطاقتين من لون آخر ؟

الحل :
$$P(A) = P(S) = \frac{s}{s+f} = \frac{{}_4P_2 \times {}_3C_3 \times {}_3C_2}{{}_{12}C_5} = \frac{36}{792}$$

اختيار لونين من أربعة : ${}_4P_2$

اختيار ثلاث من لون : ${}_3C_3$

اختيار اثنين من لون : ${}_3C_2$

الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية

أولاً : المتغيرات العشوائية

- المتغير العشوائية (X) : هو المتغير الذي يأخذ مجموعة قيم لها احتمالات معلومة .
- المتغير العشوائي المنفصل (المتقطع) : مداه مجموعة من القيم (أعداد حقيقية) قابلة للعد .
- المتغير العشوائي المتصل : مداه على صورة فترة من الأعداد الحقيقية (غير قابل للعد) .

ثانياً : التوزيعات الاحتمالية

- التوزيع الاحتمالي : هو احتمال جميع القيم الممكنة للمتغير العشوائي .
- المدرج الاحتمالي : هو المدرج التكراري الذي يمثل التوزيع الاحتمالي .
- تمثيل المدرج الاحتمالي : يمكن استعمال الجدول أو التمثيل بالأعمدة أو بالمدرج التكراري .

خصائص التوزيع الاحتمالي

- ① احتمال كل قيمة من قيم المتغير العشوائي X أكبر من أو تساوي صفراً ، وأقل من أو تساوي 1
أي أن : $0 \leq P(X) \leq 1$
- ② مجموع احتمالات قيم المتغير العشوائي X جميعها يساوي 1 (أي أن $\sum P(X) = 1$) .

والتوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي معين هو دالة تربط فضاء العينة باحتمالات كل عنصر فيه .

ويقال لمتغير إنه عشوائي، إذا كان مجموع احتمالاته يساوي 1. والجدول الآتي يوضح توزيعاً احتمالياً لإلقاء حجر نرد مرة واحدة.

الرقم الظاهر R	1	2	3	4	5	6
P(R)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

فضاء العينة هو $R = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$P(R = 4) = \frac{1}{6}$$

يُسمى التوزيع الذي تتساوى فيه احتمالات عناصر فضاء العينة **توزيعاً منتظماً** . فمثلاً توزيع إلقاء حجر نرد هو توزيع منتظم .

وللمساعدة على مشاهدة التوزيع الاحتمالي، يمكنك استعمال الجدول أو التمثيل بالأعمدة أو التمثيل بالمدرج للاحتمالات، والذي يُطلق عليه **التمثيل البياني للتكرار النسبي** .

الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية

تمارين على المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

عدد الخريجين	عدد المواد التي تم شراؤها
12	0
122	1
134	2
115	3
145	4
97	5

١ تباع شركة 5 مواد تستعمل في احتفالات التخرج المدرسية .

يعرض الجدول أدناه نتائج الاستطلاع :

(A) أوجد احتمال أن يشتري خريج تم اختياره عشوائياً 3 مواد منها فقط .

$$P(X = 3) = \frac{115}{625} = \frac{23}{125} = 18.4 \%$$

(B) أوجد احتمال أن يشتري خريج أختير عشوائياً 4 مواد منها على الأقل .

$$P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5)$$

$$P(X \geq 4) = \frac{145+97}{625} = \frac{242}{625} = 38.72 \%$$

نتائج اختبار الاحصاء	
التقدير X	الاحتمال P(X)
A	0.25
B	0.38
C	0.19
D	0.12
F	0.06

٢ أجري اختبار في الإحصاء لطلبة إحدى الكليات الجامعية

، والجدول المجاور يبين التوزيع الاحتمالي لنتائج هذا الاختبار ،
علماً بأن كل تقدير يقابل قيمة عددية محددة .

(A) بين أن التوزيع صحيح .

من الجدول : $0 \leq P(X) \leq 1$ لجميع قيم X

$$\sum P(X) = 0.25 + 0.38 + 0.19 + 0.12 + 0.06 = 1$$

وبالتالي فالتوزيع الاحتمالي صحيح

(B) إذا اختير طالب عشوائياً ، فما احتمال ألا يقل تقديره عن C ؟

$$P(X \geq C) = P(X = C) + P(X = B) + P(X = A)$$

$$P(X \geq C) = 0.19 + 0.38 + 0.25 = 0.82 = 82 \%$$

٣ الجدول المجاور يبين التوزيع الاحتمالي لعدد الطلاب الغائبين في أحد الصفوف بمدرسة ما خلال

شهر واحد ، ما احتمال أن يكون عدد الطلاب الغائبين أقل من 3 ؟

عدد الطلاب الغائبين	0	1	2	3	4	5
الاحتمال	0.05	0.1	0.2	0.3	0.15	0.2

$$P(X < 3) = P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0)$$

$$= 0.2 + 0.1 + 0.05 = 0.35$$

الاحتمال والتوزيعات الاحتمالية

تمارين على التوزيعات الاحتمالية

- ٤ يُبين الجدول المجاور توزيعاً احتمالياً لعدد الدول X خارج مملكة البحرين التي زارها طلبة الصف الثاني الثانوي في إحدى المدارس خلال إجازة الصيف .
(A) بين أن التوزيع صحيح .

X	$P(X)$
0	0.35
1	0.20
2	0.25
3	0.17
4	0.03

- (B) إذا اختير أحدهم عشوائياً ، فما احتمال أن يكون ممن زاروا 3 دول على الأقل في تلك الإجازة الصيفية ؟

- ٥ أجري اختبار في الإحصاء لطلبة إحدى الكليات الجامعية ، والجدول المجاور يُبين التوزيع الاحتمالي لنتائج هذا الاختبار ، علماً بأن كل تقدير يقابل قيمة عددية محددة .
(A) إذا علمت أن التوزيع صحيح ، فما قيمة n ؟

نتائج اختبار الإحصاء	
التقدير X	الاحتمال $P(X)$
A ممتاز	0.23
B جيد جداً	0.41
C جيد	0.18
D مقبول	$2n$
F ضعيف	n

- (B) إذا اختير طالب عشوائياً ، فما احتمال ألا يزيد تقديره عن C ؟

- ٦ الجدول المجاور يبين توزيع احتمالي صحيح ، فما قيمة k ؟

عدد الطلاب الغائبين	0	1	2	3	4
الاحتمال	0.1	0.3	k	0.1	0.2

الحل : ∴ التوزيع صحيح ∴ مجموع الاحتمالات جميعها = 1

$$0.1 + 0.3 + k + 0.1 + 0.2 = 1 \Rightarrow k + 0.7 = 1 \Rightarrow k = 0.3$$

تابع : التوزيعات الاحتمالية

تابع : تمارين على التوزيعات الاحتمالية

٧ يُبين الجدول المجاور التوزيع الاحتمالي لعدد غرف النوم في بيوت مواطني إحدى الدول :

عدد الغرف X	الاحتمال $P(X)$
1	0.2
2	0.4
3	0.25
4 فأكثر	0.15

(A) بين أن التوزيع صحيح .

• من الجدول : $0 \leq P(X) \leq 1$ لجميع قيم X

• مجموع الاحتمالات جميعها $= 1$ $\sum P(X) = 1$

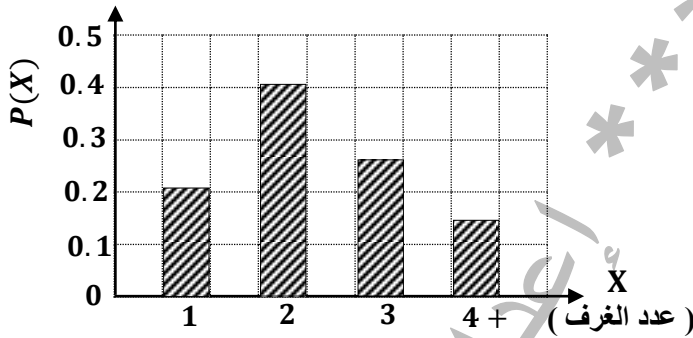
أي أن التوزيع الاحتمالي صحيح

(B) أوجد احتمال أن يتكوّن بيت المواطن من غرفتي نوم فأكثر

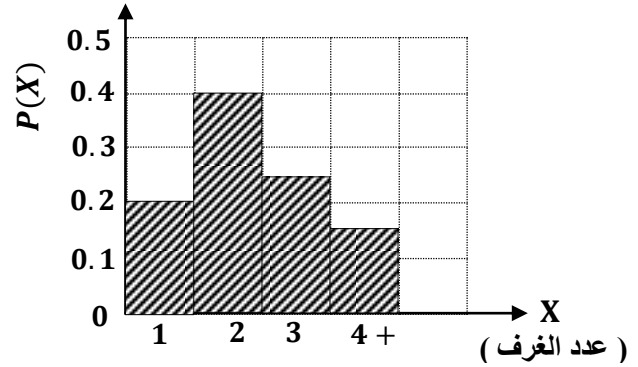
$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X \geq 4)$$

$$= 0.4 + 0.25 + 0.15 = 0.8$$

(E) كوّن تمثيلاً بالأعمدة لهذا التوزيع الاحتمالي .



(D) كوّن المدرج التكراري النسبي لهذا التوزيع



٨ أجرى أحد المصانع مسحاً لمعرفة عدد الحبات الزائدة X في علب لنوع من حلوى الأطفال التي ينتجها

، و جدول التوزيع الاحتمالي يعرض نتائج هذا المسح .

(A) إذا كان هذا التوزيع الاحتمالي صحيح ، فما قيمة n ؟

X	$P(X)$
0	0.06
1	0.26
2	0.28
3	0.25
4	$2n$
5	n

(B) إذا اختيرت علبة حلوى من إنتاج المصنع عشوائياً ، فما احتمال أن يكون

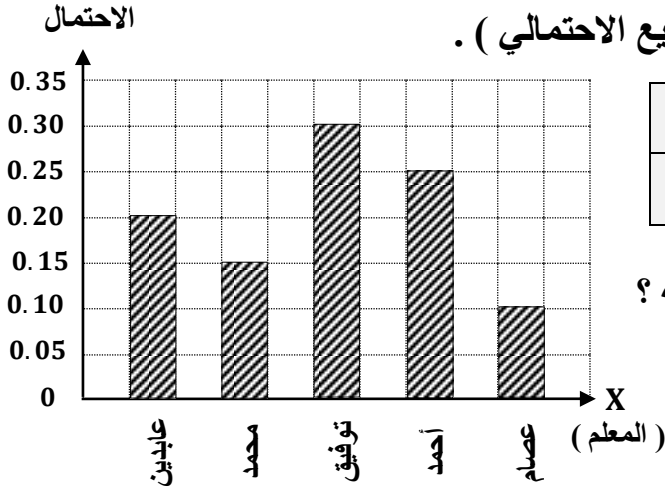
عدد حبات الحلوى الزائدة فيها أكثر من حبتين ؟

تابع : التوزيعات الاحتمالية

تابع : تمارين على التوزيعات الاحتمالية

٩ يُبين التمثيل بالأعمدة احتمال أن يربح كل معلم جائزة .

(A) كوّن جدولاً تكرارياً نسبياً للبيانات (جدول التوزيع الاحتمالي) .



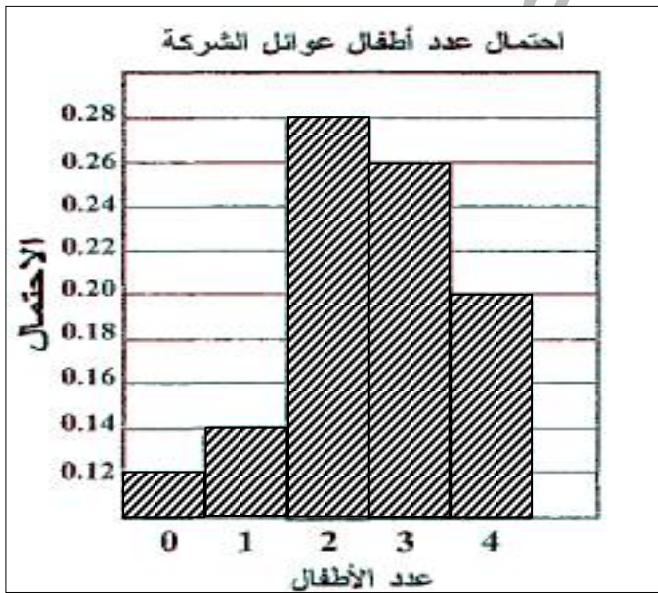
(B) من لديه الفرصة الأكبر للربح ؟ وما احتمال ربحه ؟

(C) أوجد : (عابدين أو توفيق) P

(D) أي اثنين معاً لهما فرصة الأستاذ أحمد في ربح الجائزة ؟

١٠ يوضّح المدرج التكراري النسبي الآتي التوزيع الاحتمالي لعدد أطفال عوائل موظفي إحدى الشركات .

(A) كوّن جدول التوزيع الاحتمالي .



(B) بين أن التوزيع صحيح .

(C) إذا اختيرت إحدى العوائل عشوائياً ، فما احتمال أن تكون للعائلة طفلين على الأقل ؟

القيمة المتوقعة $E(X)$ + العدد المتوقع $E(A)$

العدد المتوقع $E(A)$: (النجاح $\times$ عدد المرات)

$$E(A) = n \cdot P(S) = n \cdot P(A)$$

القيمة المتوقعة $E(X)$: (الوسط الموزون للقيم)

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i)$$

X	1	2	3	4	5	6
$P(X)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

❶ في تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة .

التوزيع الاحتمالي

(A) أوجد القيمة المتوقعة .

$$E(X) = \sum x \cdot P(x) = \dots\dots\dots = 3.5$$

(B) ما العدد المتوقع للحصول على العدد 5 في 4 رميات ؟

$$E(A) = n \cdot P(S) = n \cdot P(A) = \dots\dots\dots = \frac{2}{3} \Leftarrow \text{حدث الحصول على العدد 5}$$

(C) توقع ظهور العدد 1 أو 3 في 6 رميات ؟

$$E(\text{ظهور العدد 1 أو 3}) = n \cdot P(A) = \dots\dots\dots = 2$$

❷ رُمي حجري نرد متمايزين مرة واحدة ، وتسجيل مجموع العددين الظاهرين على الوجهين العلويين .

(A) أوجد القيمة المتوقعة :

$$E(X) = 2 \left(\frac{1}{36} \right) + 3 \left(\frac{2}{36} \right) + 4 \left(\frac{3}{36} \right) + 5 \left(\frac{4}{36} \right) + \dots\dots\dots + 11 \left(\frac{2}{36} \right) + 12 \left(\frac{1}{36} \right) = 7$$

(B) ما العدد المتوقع للحصول على المجموع 7 في 100 رمية ؟

$$E(A) = n \cdot P(A) = 100 \times \frac{6}{36} \approx 17 \Leftarrow \text{نفرض أن } A \text{ حدث الحصول على المجموع 7}$$

❸ باع أحد محلات الأجهزة الكهربائية 1000 تذكرة ، ثمن الواحدة 1 BD ، ثم أُجري سحب عشوائي

على أرقام التذاكر ، بحيث يربح الرقم الذي يقع عليه الاختيار جهاز تلفاز سعره 350 BD .
كوّن جدول التوزيع الاحتمالي لربح شخص اشترى تذكرة واحدة ، ثم أوجد القيمة المتوقعة .

الربح : $350 - 1 = 349$

$$\text{الحل : } E(X) = \sum x \cdot P(x) = (349) \left(\frac{1}{1000} \right) + (-1) \left(\frac{999}{1000} \right)$$

الربح X	349	-1
الاحتمال $P(X)$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{999}{1000}$

$$= -0.65 = -65\%$$

الربح : $0 - 1 = -1$

أي أن مُعدّل الخسارة هو 65%

القيمة المتوقعة $E(X)$ + العدد المتوقع $E(A)$

تابع : تمارين على القيمة المتوقعة + العدد المتوقع

٤ يُبين الجدول المجاور التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي X ، استعمله للإجابة عن كل مما يأتي :

X	$P(X)$
0	n
1	$\frac{n}{2}$
2	0.1

$n = 0.6$

(A) ما قيمة n في هذا الجدول ؟

$E(X) = 0.5$

(B) ما القيمة المتوقعة $E(X)$ في هذا التوزيع ؟

X	$P(X)$
0	a
1	b
2	0.4

$a = 0.4$
 $b = 0.2$

٥ يُبين الجدول المجاور التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي X فأوجد قيمة كلاً من a, b إذا كان $E(X) = 1$ ؟

٦ ما العدد المتوقع لمرات الحصول على 5 عند إلقاء حجر نرد 3 مرات متتالية ؟

$\frac{1}{3}$ A $\frac{1}{2}$ B $\frac{2}{3}$ C $\frac{1}{6}$ D

٧ ألقى حجر نرد 10 مرات متتالية ، فما العدد المتوقع لمرات الحصول على عدد فردي ؟

2 A 3 B 4 C 5 D

٨ ما القيمة المتوقعة $E(X)$ عند رمي قطعتي نقد مرة واحدة ، إذا دلّ المتغير العشوائي X على عدد مرات ظهور الصورة ؟

0.25 A 0.5 B 1 C 2 D

٩ يعد مصنع للحلويات علباً من الحلويات المتنوعة منها 25 % أخضر بنكهة التفاح . تخلط أنواع الحلويات عشوائياً ، ويوضع في كل علبة 16 قطعة . ما العدد المتوقع للقطع الخضراء في العلبة ؟

3 A قطع 4 B قطع 5 C قطع 6 D قطع

تابع : التوزيعات الاحتمالية

تابع : تمارين على القيمة المتوقعة والعدد المتوقع

عدد الأيام الممطرة في السنة					
عدد الأيام	1	2	3	4	5
الاحتمال	0.2	0.15	0.25	0.3	0.1

١٠ التوزيع الاحتمالي أدناه يوضح عدد الأيام

الممطرة في السنة في إحدى الدول .

(A) أوجد القيمة المتوقعة لعدد الأيام الممطرة في السنة .

$$E(X) = \sum x \cdot P(x) = 1(0.2) + 2(0.15) + 3(0.25) + 4(0.3) + 5(0.1) = 2.95$$

(B) أوجد العدد المتوقع لهطول الأمطار في أربعة أيام .

$$A : \text{حدث سقوط الأمطار في أربعة أيام} \Leftrightarrow E(A) = P(S) \cdot n = (0.3)(4) = 1.2$$

١١ أجرت إحدى المحطات التلفزيونية مسحاً لمعرفة عدد الساعات التي يقضيها سكان إحدى القرى في مشاهدة برامج المحطة يومياً ، وجدول التوزيع الاحتمالي المجاور يعرض نتائج هذا المسح .

(A) بين أن التوزيع صحيح .

عدد الساعات X	الاحتمال $P(X)$
0	0.05
1	0.25
2	0.15
3	0.26
4	0.29

(B) ما احتمال أن يشاهد أحد سكان القرية برامج المحطة التلفزيونية ساعتان على الأكثر ؟

(C) أوجد القيمة المتوقعة لعدد ساعات مشاهدة برامج المحطة التلفزيونية .

X	$P(X)$
0	0.5
1	a
2	b

١٢ إذا كانت قيم المتغير العشوائي X هي : 0 , 1 , 2 ، وكان $P(X = 0) = 0.5$ ، فما قيمة $P(X = 1)$ ؟

، $E(X) = 0.8$ ،

الحل : $a + b = 0.5 \Rightarrow$ بفرض أن $P(X = 1) = a$ ، $P(X = 2) = b$

$$E(X) = \sum x \cdot P(x) \Rightarrow 0(0.5) + 1(a) + 2b = 0.8 \Rightarrow a + 2b = 0.8$$

بحل المعادلتين بالطرح : $P(X = 1) = a = 0.2 \Rightarrow a = 0.2 \Rightarrow b = 0.3$

التوزيع الطبيعي

أولاً : تعريف وخصائص التوزيع الطبيعي

تعريف التوزيع الطبيعي

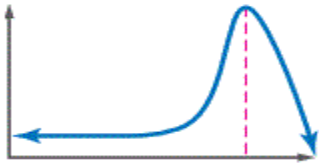
هو أحد التوزيعات الاحتمالية المتصلة للمتغير العشوائي المتصل ، ويمثل بمنحنى يشبه الجرس (ويسمى منحنى جاوس) وهو منحنى اعتدالي .

خصائص التوزيع الطبيعي

- ١ تكون القيمة العظمى عند الوسط ويتساوى فيه الوسط والوسيط والمنوال .
- ٢ يمتد منحنى التوزيع الطبيعي من $-\infty$ إلى ∞ دون أن يمس المحور x .
- ٣ يستعمل وسط المجتمع μ ، والانحراف المعياري للمجتمع σ لتحديد الاحتمالات .
- ٤ المساحات تحت المنحنى تُعبر عن الاحتمالات ، والمساحة الكلية تحت المنحنى تساوى 1 .

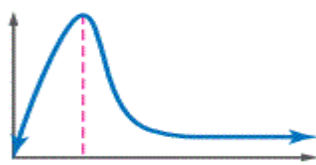
ثانياً : التوزيعات الطبيعية والملتوية

التواء سالب (ملتوٍ إلى اليسار)



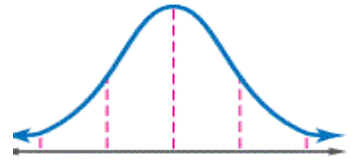
التوزيع مُكثَّف في اليمين والذيل إلى اليسار

التواء موجب (ملتوٍ إلى اليمين)



التوزيع مُكثَّف في اليسار والذيل إلى اليمين

توزيع طبيعي



شكل جرس ومتماثل

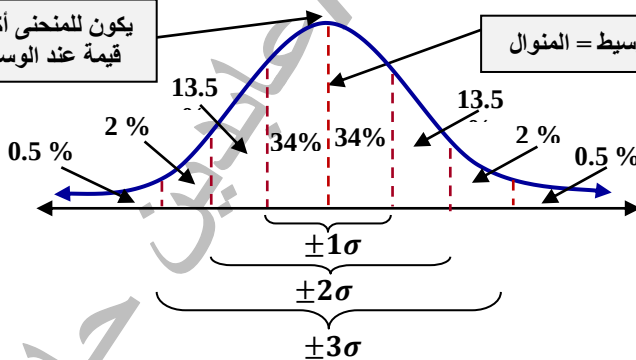
ثالثاً : القانون التجريبي

يصف القانون التجريبي خصائص أخرى للتوزيع الطبيعي :

- (1) 68 % تقع ضمن انحراف معياري واحد .
- (2) 95 % تقع ضمن انحرافين معياريين .
- (3) 99 % تقع ضمن ثلاثة انحرافات معيارية .

يكون للمنحنى أكبر قيمة عند الوسط

الوسط = الوسيط = المنوال

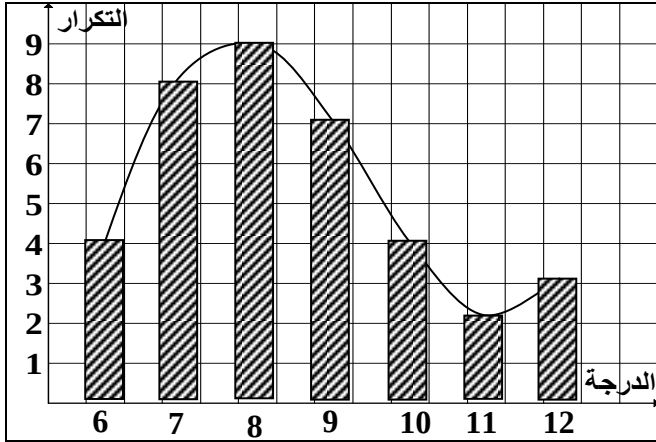


ملاحظة : إذا طلب منك إيجاد العدد في مثل هذا النوع اتبع :

- ① أوجد الاحتمال المطلوب .
- ② اضرب الاحتمال في العدد الكلي المُعطى بالمسألة .

التوزيع الطبيعي

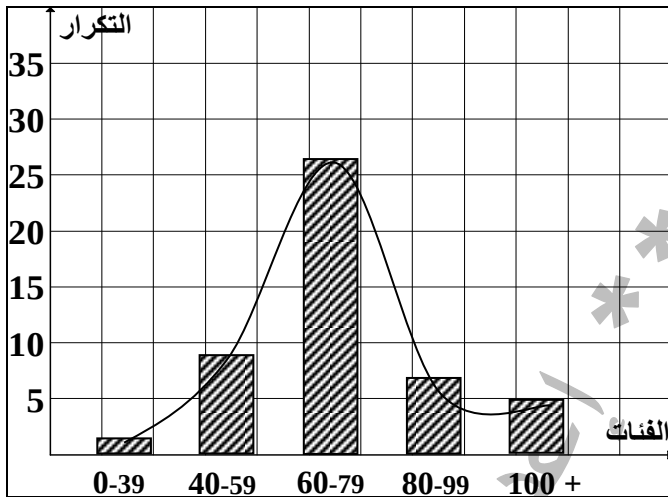
تمارين على التوزيعات الطبيعية والملتوية



١ مثل البيانات في الجدول أدناه بطريقة الأعمدة ، ثم حدّد إذا كانت البيانات تُظهر إلتواءً موجباً أو إلتواءً سالباً أو موزعة طبيعياً ؟ (صف شكل التوزيع) .

الدرجة	6	7	8	9	10	11	12
التكرار	4	8	9	7	4	2	3

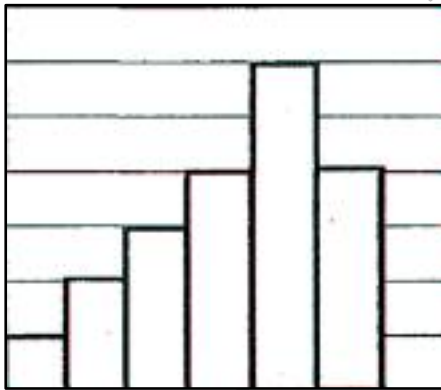
يبدو أن التوزيع ملتو إلى اليمين (التواء موجب)



٢ مثل البيانات في الجدول أدناه بطريقة الأعمدة ، ثم حدّد إذا كانت البيانات تُظهر إلتواءً موجباً أو إلتواءً سالباً أو موزعة طبيعياً ؟

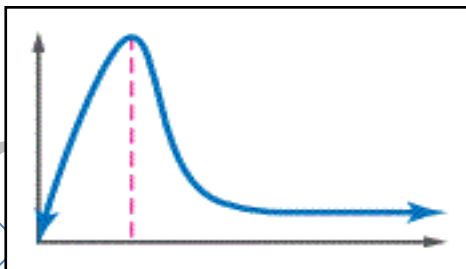
أطوال بنيات العالم				
عدد الطوابق (الفئات)	0-39	40-59	60-79	80-99
عدد البنيات (التكرار)	1	11	35	9
فأكثر 100				
	6			

من التمثيل : يبدو أن التوزيع (توزيع طبيعي)



٣ ما الوصف الأفضل للتمثيل المجاور ؟

- A توزيع سالب الالتواء (التواء جهة اليسار) .
- B توزيع موجب الالتواء (التواء جهة اليمين) .
- C توزيع طبيعي (متماثل) .
- D لا يوجد ارتباط .



٤ ما الوصف الأفضل للتمثيل المجاور ؟

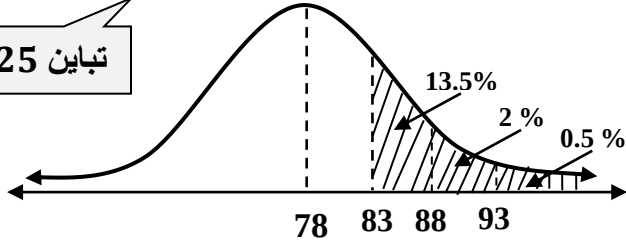
- A توزيع طبيعي
- B توزيع موجب الالتواء
- C لا يوجد ارتباط
- D توزيع سالب الالتواء

تابع : التوزيع الطبيعي

يسمى الوسط μ (المعدل / القيمة المتوقعة) ، فمثلاً (الطول / الدرجة / الوزن /) المتوقع يعني μ

- ١ تتوزع مجموعة من البيانات توزيعاً طبيعياً بوسط يساوي 78 وانحراف معياري يساوي 5 .
فما احتمال أن تزيد قيمة x عشوائياً عن 83 ؟

تباين 25



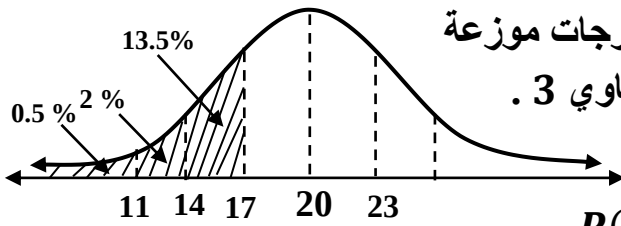
$$P(x > 83) = 13.5\% + 2\% + 0.5\%$$

$$P(x > 83) = 16\% = 0.16$$

- ٢ أعطى الأستاذ عابدين اختباراً قصيراً لطلبته وكانت الدرجات موزعة

توزيعاً طبيعياً بوسط يساوي 20 وانحراف معياري يساوي 3 .

ما احتمال أن تكون درجة أحد الطلبة أصغر من 17 ؟



$$P(x < 17) = 13.5\% + 2\% + 0.5\% = 16\%$$

- ٣ أعطى معلم الرياض اختباراً قصيراً لطلبته وكانت الدرجات موزعة توزيعاً طبيعياً بتباين يساوي 4

، إذا كانت الدرجة المتوقعة 21 ، ما عدد الطلبة الذين تقع درجاتهم بين 17 و 25

، إذا علمت أن العدد الكلي لطلبة الصف 40 طالباً ؟

التباين :

$$\sigma^2 = 4$$

الانحراف :

$$\sigma = 2$$

التوقع :

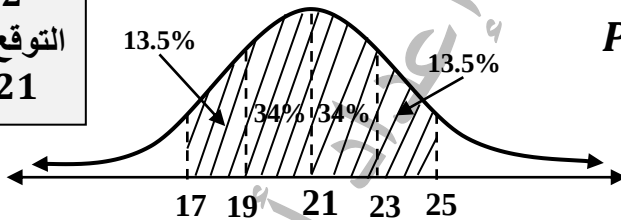
$$\mu = 21$$

الحل : $P(17 \leq x \leq 25) = 34\% + 34\% + 13.5\% + 13.5\%$

$$P(17 \leq x \leq 25) = 95\% = 0.95$$

$$\text{العدد المطلوب} = \text{الاحتمال} \times \text{العدد الكلي}$$

$$\text{عدد الطلاب} = 95\% \times 40 = 38$$



- ٤ تتوزع مدة صلاحية نوع معين من المعلبات التي ينتجها أحد مصانع الأغذية توزيعاً طبيعياً بمعدل

يساوي 360 يوماً وانحراف معياري 30 يوماً . فإذا كان المصنع ينتج 50000 علبة في الشهر .

فما عدد المعلبات المصنعة في الشهر والتي تتراوح مدة صلاحيتها بين 300 يوم ، و 390 يوم .

(ارسم شكلاً تقريبياً لمنحنى التوزيع الطبيعي يُبين هذا الموقف) . [الجواب : 40750]

تابع : التوزيع الطبيعي

تباين 25

تابع : تمارين على القانون التجريبي

- ٥ تتوزع أطوال 2000 رياضي ينتمون لأحد الأندية توزيعاً طبيعياً بانحراف معياري 5 cm . إذا كان الطول المتوقع للرياضي يبلغ 185 cm ، أوجد عدد الرياضيين الذين تتراوح أطوالهم بين 175 cm ، و 190 cm في هذا النادي الرياضي (ارسم منحنى توزيع طبيعي يُمثل هذا الموقف) .

[الجواب : 1630]

- ٦ يتوزع عُمر 10000 مصباح كهربائي توزيعاً طبيعياً بوسط يساوي 300 يوماً وانحراف معياري يساوي 40 يوماً . كم مصباحاً يقع عمرها بين 260 يوماً ، 340 يوماً .

تباين 1600

A 2500

B 3400

C 5000

D 6800

- ٧ في مستودع للأدوات الكهربائية عدد من المسجلات التي تعمل على البطارية ، إذا كان الوسط لأعمار البطاريات 8 h ، والانحراف المعياري 0.7 h ، وإذا احتوى المخزن على 8 مسجلات يزيد عُمر بطارياتها عن 10.1 h ، وكانت أعمار البطاريات في المستودع تتوزع توزيعاً طبيعياً ، فما عدد الأجهزة في المستودع ؟

[الجواب : 1600]

التوزيعات ذات الحدين

تجارب ذات الحدين يُعدّ التوزيع الاحتمالي ذو الحدين، نوعاً من التوزيعات المتفصلة، ويوضح التوزيع ذو الحدين احتمالات نواتج تجربة ذات حدين، وهي تجربة عشوائية ناتجها واحد من حدثين بسيطين، ويكون لها الحقائق الآتية :

أضف إلى

مطوبتك

مفهوم أساسي

تجارب ذات الحدين

- لكل تجربة ناتجان، نجاح أو فشل.
- يوجد عدد محدد من المحاولات، n .
- احتمال النجاح ثابت في كل محاولة.
- المحاولات مستقلة .
- المتغير العشوائي هو عدد مرات النجاح في n من المحاولات.

أحياناً يكون من السهل أن تجد احتمال الفشل وتطرح هذه النتيجة من 1 لتجد احتمال النجاح .
ويُسمى الاحتمالان في هذه الحالة احتمالين متتامين .

أضف إلى

مطوبتك

قانون

دوال التوزيع ذي الحدين

احتمال النجاح x مرة في n من المحاولات المستقلة يعطى بالقانون:

$$P(x) = nC_x S^x \cdot f^{n-x}$$

حيث S تدلّ على احتمال نجاح المحاولة الواحدة، و f تدلّ على احتمال فشل المحاولة نفسها، ($S + f = 1$).

عندما يزداد عدد المحاولات في تجربة عشوائية ذات حدين، يمكن استعمال التوزيع الطبيعي لتقريب توزيع ذي الحدين.

أضف إلى

مطوبتك

مفهوم أساسي

تقريب التوزيع ذي الحدين من خلال التوزيع الطبيعي

في التوزيع ذي الحدين عندما n تُمثل عدد المحاولات، واحتمال النجاح S ، واحتمال الفشل f ، بحيث يكون $nS \geq 5$ ، $nf \geq 5$ ، يمكن تقريب التوزيع ذي الحدين إلى توزيع طبيعي بوسط $\mu = nS$ ، وبانحراف

$$\sigma = \sqrt{nSf}$$

يُستعمل التقريب من خلال التوزيع الطبيعي ، لأن مع زيادة n يصبح استعمال التوزيع ذي الحدين لإيجاد الاحتمال عملية معقدة وصعبة .

حساب الاحتمال والقيمة المتوقعة

القيمة المتوقعة لتوزيع ذات الحدين

يعطى بالقانون : $E(x) = n \cdot s$

s = احتمال نجاح كل محاولة .
 n = عدد محاولات إجراء التجربة .

ملحوظة : بناء على الاحتمال المطلوب
 نفرض احتمال النجاح s

حساب احتمال ذات الحدين

احتمال النجاح x مرة في n من المحاولات المستقلة

يعطى بالقانون : $P(x) = nC_x \cdot s^x \cdot f^{n-x}$

حيث : s = احتمال نجاح المحاولة الواحدة
 f = احتمال فشل المحاولة نفسها .

$s + f = 1$ أو $s + f = 100\%$

تمارين على حساب الاحتمال والقيمة المتوقعة لتوزيع ذات الحدي

❶ في مختبر للتجارب ، إذا كان احتمال أن يكون المولود ذكراً للفأرة هو 0.5 ، فأجب عما يأتي :
 (A) إذا أنجبت الفأرة 4 فئران ما احتمال أن يكون 3 فئران منها على الأقل ذكوراً ؟

[الجواب : 31.25 %]

(B) ما توقع عدد الذكور بين ستة من المواليد ؟

[الجواب : 3]

(C) ما توقع عدد الإناث بين ثمانية من المواليد ؟

[الجواب : 4]

❷ اعتماداً على دراسة مسحية ، أجريت على 8 طلاب تم اختيارهم عشوائياً من إحدى الجامعات تبين أن 65 % من طلبة هذه الجامعة يملكون سيارات .

(A) ما احتمال أن يملك 3 طلبة على الأقل سيارة ؟

احتمال النجاح (يملك سيارة) $s = 0.65$
 ، احتمال الفشل $f = 0.35$ ، $n = 8$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3)$$

$$P(X \geq 3) = 1 - [P(0) + P(1) + P(2)]$$

بتطبيق القانون : $P(x) = nC_x s^x f^{n-x}$

$$P(X \geq 3) = 1 - \left[\begin{array}{c} 8C_0 (0.65)^0 (0.35)^8 \\ + \\ 8C_1 (0.65)^1 (0.35)^7 \\ + \\ 8C_2 (0.65)^2 (0.35)^6 \end{array} \right]$$

$$P(X \geq 3) = 1 - [0.0253] \approx 97.5\%$$

(B) ما العدد المتوقع للطلبة الذين يملكون سيارة ؟

$$E(x) = n \cdot s = 8 (0.65) = 5.2 \approx 5$$

(C) ما العدد المتوقع للطلبة الذين لا يملكون سيارة

$$E(x) = n \cdot f = 8 (0.35) = 2.8 \approx 3$$

تابع : التوزيعات ذات الحدين

تابع : تمارين على حساب الاحتمال والقيمة المتوقعة لتوزيع ذات الحدي

٤ وجدت إدارة إحدى مزارع إنتاج الدجاج أن 90 % من البيض الذي يوضع في الفقاسات يعطى دجاجاً خالياً من الأمراض ، إذا اختيرت 7 دجاجات عشوائياً من هذه المزرعة . ما احتمال اثنتان منها على الأكثر مريضة ؟
[97.43% تقريباً]

٢ بيّنت دراسة مسحية أن نسبة من يمتلكون جهاز كمبيوتر محمول من طلبة إحدى المدارس هي 75 % . إذا أخذت عينة عشوائية مكونة من 6 طلبة من هذه المدرسة . فما احتمال أن يكون 4 منهم على الأقل يمتلكون جهاز كمبيوتر محمول ؟
[0.83 تقريباً]

٥ ينتج مصنع للحلويات نوعين من قطع البسكويت ، نوع بنكهة الفانيلا ، والآخر بنكهة الشوكولاتة . إذا كان 60 % من البسكويت المنتج بنكهة الشوكولاتة ، ويقوم خط الإنتاج في هذا المصنع بخلط عشوائي للنوعين من البسكويت المنتج ، ثم يضع كل 10 قطع في علبة كرتونية . إذا اشترت فاطمة علبة بسكويت من إنتاج هذا المصنع .
(A) ما احتمال أن يكون في العلبة 2 قطعة بسكويت بنكهة الشوكولاتة على الأقل ؟

[الجواب : 0.9983]

[الجواب : $E(X) = 4$]

(B) ما العدد المتوقع لقطع البسكويت بنكهة الفانيلا في العلبة الواحدة ؟

تقريب توزيع ذي الحدين إلى توزيع طبيعي

في توزيع ذي الحدين : إذا كان $n s \geq 5$ ، $n f \geq 5$ فإنه يمكن تقريب توزيع ذي الحدين

إلى توزيع طبيعي وسطه $\mu = n \cdot s$ ، وانحرافه المعياري $\sigma = \sqrt{n \cdot s \cdot f}$

تمارين على تقريب توزيع ذات الحدين إلى توزيع طبيعي

٢ بناءً على دراسة مسحية سابقة وُجد أن 70 % من الشباب تحت سن العشرين يتابعون مباريات رياضية . وإذا استطلع خليل رأي 200 شخص عشوائياً . فما احتمال أن 146 شخصاً على الأقل يتابعون المباريات الرياضية ؟

[الجواب : 16 %]

١ أشارت دراسة سابقة إلى أن 64 % من الخريجين يرون أن سنوات الجامعة كانت ممتعة وقد نفذ أحمد دراسة مسحية على 300 من الخريجين عشوائياً . ما احتمال أن يوافق 200 خريج على الأقل منهم على ما جاء في الدراسات الإحصائية السابقة ؟

الحل : عدد الأشخاص الذين تم استطلاع آرائهم يتوزع توزيعاً ذا حدين

$$n = 300 , s = 0.64 , f = 0.36$$

$$n \cdot s = 300 (0.64) = 192 > 5$$

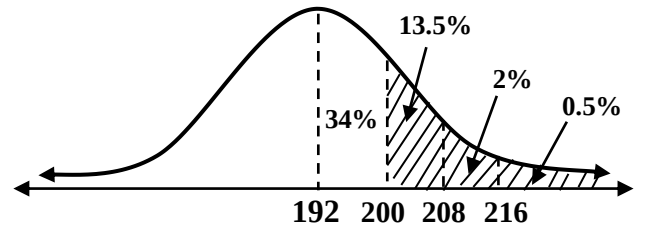
$$n \cdot f = 300 (0.36) = 108 > 5$$

يُمكن استعمال التوزيع الطبيعي لتقريب الاحتمال ويكون الوسط للتوزيع الطبيعي :

$$\mu = n s = 300(0.64) = 192$$

الانحراف المعياري للتوزيع الطبيعي :

$$\sigma = \sqrt{n s f} = \sqrt{300(0.64)(0.36)} \approx 8$$



$$P(x \geq 200) = 13.5\% + 2\% + 0.5\%$$

$$P(x \geq 200) = 16 \%$$

وبالتالي يكون احتمال أن يوافق 200 خريج على الأقل يساوي 16 % أو 0.16 تقريباً

تقريب توزيع ذي الحدين إلى توزيع طبيعي

تابع : تمارين على تقريب توزيع ذات الحدين إلى توزيع طبيعي

٤ تبيّن في دراسة مسحية سابقة أن 90 % من طلبة الصفوف العليا في مدرسة ثانوية يحصلون على أعمال صيفية ، لكن أحمد قدّر أن النسبة أقل من ذلك . لذا قام بدراسة مسحية شملت 400 من طلبة الصفوف العليا تم اختيارهم عشوائياً . فما احتمال ألا يكون أكثر من 348 من الطلبة المستهدفين حصلوا على عمل صيفي ؟ [الجواب : 2.5 %]

٢ في دراسة مسحية سابقة وُجد أن 60 % من الطلبة الذين يتعلمون تجويد القرآن الكريم بمراكز تحفيظ القرآن ينطقون الحروف الهجائية نطقاً صحيحاً ، وقد نفّذ محمد دراسة مسحية على 150 طالب من مراكز مختلفة بمملكة البحرين تم اختيارهم عشوائياً . فما احتمال أن يوافق 96 طالب على الأكثر منهم بما جاء في الدراسات السابقة ؟ [الجواب : 84 % أو 0.84]

٥ يمكن تقريب توزيع ذي الحدين إلى التوزيع الطبيعي إذا كان :

$$n \cdot f \geq 5 , n \cdot s \leq 5 \quad B$$

$$n \cdot f \leq 5 , n \cdot s \geq 5 \quad A$$

$$n \cdot f \geq 5 , n \cdot s \geq 5 \quad D$$

$$n \cdot f \leq 5 , n \cdot s \leq 5 \quad C$$