

ملزمة الوحدة الخامسة التكامل



تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج الإماراتية

موقع المناهج ← المناهج الإماراتية ← الصف الثاني عشر المتقدم ← رياضيات ← الفصل الثالث ← ملفات متنوعة ← الملف

تاريخ إضافة الملف على موقع المناهج: 2026-05-09 12:18:49

ملفات اكتب للمعلم اكتب للطالب | اختبارات الكترونية | اختبارات | حلول | عروض بوربوينت | أوراق عمل
منهج انجليزي | ملخصات وتقارير | مذكرات وبنوك | الامتحان النهائي للمدرس

المزيد من مادة
رياضيات:

التواصل الاجتماعي بحسب الصف الثاني عشر المتقدم



صفحة المناهج
الإماراتية على
فيسبوك

الرياضيات

اللغة الانجليزية

اللغة العربية

التربية الاسلامية

المواد على تلغرام

المزيد من الملفات بحسب الصف الثاني عشر المتقدم والمادة رياضيات في الفصل الثالث

الامتحان الورقي النهائي لمادة الرياضيات فصل ثالث ثاني عشر متقدم 2023-2024	1
ملزمة الوحدة 6 تطبيقات التكامل المحدد المساحة بين المنحنيات الحجم بالقطاعات والأقراص والغسالات طول القوس المساحة السطحية وحركة المقذوفات	2
اختبار المساحة بين المنحنيات Curves Between Area تمارين اختيار من متعدد وحسابية	3
إجابة أوراق عمل الوحدة السابعة طرائق التكامل 2	4
أوراق عمل الوحدة السابعة طرائق التكامل 2 غير محلول	5

Mathematics

Grade 12 – Advanced

12 متقدم

Chapter 5:

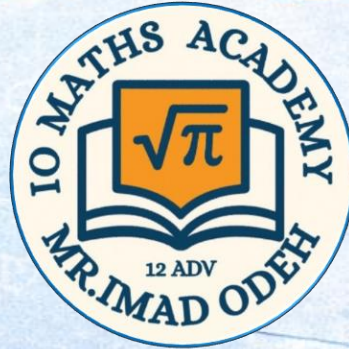
Integration

التكامل

Prepared by

Mr. Imad Odeh

أ. عماد عودة



الفصل الثالث Tri3

Academic Year: 2025 – 2026



<https://t.me/lomaths12>



<http://www.youtube.com/@imaths2022>

الوحدة الخامسة

Imad Odeh

Imad Odeh

CHAPTER 5

Imad Odeh

Imad Odeh

التكامل

Integration

5-1	ANTIDERIVATIVES	الدوال الاصلية	5-1
5-2	SUMS AND SIGMA NOTATION	المجموع والرمز سيجمما	5-2
5-3	AREA	المساحة	5-3
5-4	THE DEFINITE INTEGRAL	التكامل المحدود	5-4
5-5	THE FUNDAMENTAL THEOREM OF CALCULUS	النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل	5-5
5-6	INTEGRATION BY SUBSTITUTION	التكامل بالتعويض	5-6

عزيزي الطالب وضعت هذه الملزمة لمساعدتك في التدريب على أسئلة الكتاب واسئلة الاختبارات السابقة وتسهيلا عليك في كتابة الأسئلة وهي لا تغني عن كتابك المدرسي

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh



Lesson 5-1

الدالة الاصلية ANTIDERIVATIVES

If إذا كان

$$F'(x) = f(x).$$

We call such a function **F** an antiderivative of **f** يقال ان الدالة F هي دالة اصلية ل f

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

$$\frac{d}{dx} [F(x) + c] = F'(x) + 0 = f(x)$$

EXAMPLE1

Find an antiderivative of

1) $f(x) = x^2$

2) $f(x) = 3x^2$

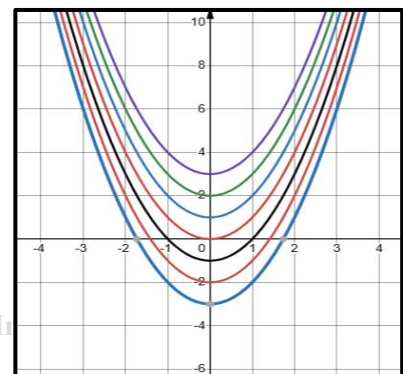
3) $g(x) = \cos x + 3$

4) $f(x) = \sec^2 x$

Q1

This graph shows the set of antiderivatives of which functions?

- a) $f(x) = x^2$
- b) $f(x) = 2x$
- c) $f(x) = x$
- d) $f(x) = 2x^2$



Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q2

This graph shows the set of antiderivatives of which functions?

Imad Odeh

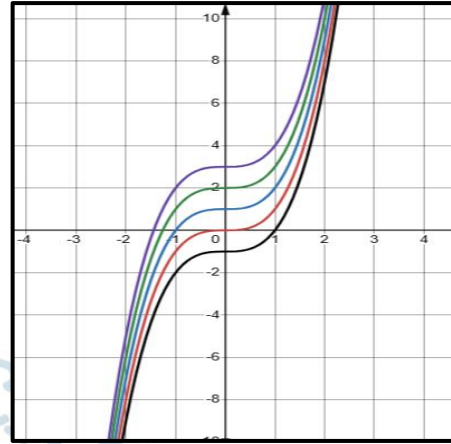
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

- a) $f(x) = 3x^2$
- b) $f(x) = 3x$
- c) $f(x) = x^3$
- d) $f(x) = x^2$



Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

THEOREM 1.1

النظرية 1.1

Suppose that F and G are both antiderivatives of f on an interval I . Then,

على فرض أن F و G هما دالتان أصليتان لـ f على الفترة I فإن

$$G(x) = F(x) + c,$$

for some constant c .

لكل عدد ثابت c

DEFINITION 1.1

التعريف 1.1

Let F be any antiderivative of f on an interval I . The indefinite integral of $f(x)$ (with respect to x) on I , is defined by,

لتكن F دالة أصلية لـ $f(x)$ على الفترة I . التكامل غير المحدود لـ $f(x)$ (بمعلومية x) على I يُعرف بواسطة

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

where c is an arbitrary constant (the constant of integration).

حيث c هو عدد ثابت اضافي (ثابت التكامل).

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Integration Rules قواعد التكامل

$\int k \, dx = kx + c$	$\int kx \, dx = \frac{kx^2}{2} + c$	$\int x^r \, dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c$
$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$	$\int \cos x \, dx = \sin x + c$	
$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$	$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + c$	
$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$	$\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + c$	
$\int \sin kx \, dx = -\frac{1}{k} \cos kx + c$	$\int \cos kx \, dx = \frac{1}{k} \sin kx + c$	
$\int e^x \, dx = e^x + c$	$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + c$	
$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \tan^{-1} x + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \sin^{-1} x + c$	
$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \cos^{-1} x + c$	$\int \frac{1}{ x \sqrt{x^2-1}} \, dx = \sec^{-1} x + c$	
$\int e^{ax+b} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln f(x) + c$	

THEOREM 1.2 (Power Rule)

النظرية 1.2 (قاعدة القوة)

For any rational power $r \neq -1$

لأي قوة نسبية $r \neq -1$

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c$$

Here, if $r < -1$ the interval I on which this is defined can be any interval that does not include $x = 0$

هنا، إذا كان $r < -1$ فالفترة I التي يكون عليها هذا معرفا يمكن أن تكون فترة لا تتضمن $x = 0$

EXAMPLE 1

مثال 1

Evaluate

اوجد

1) $\int 3x^2 dx$

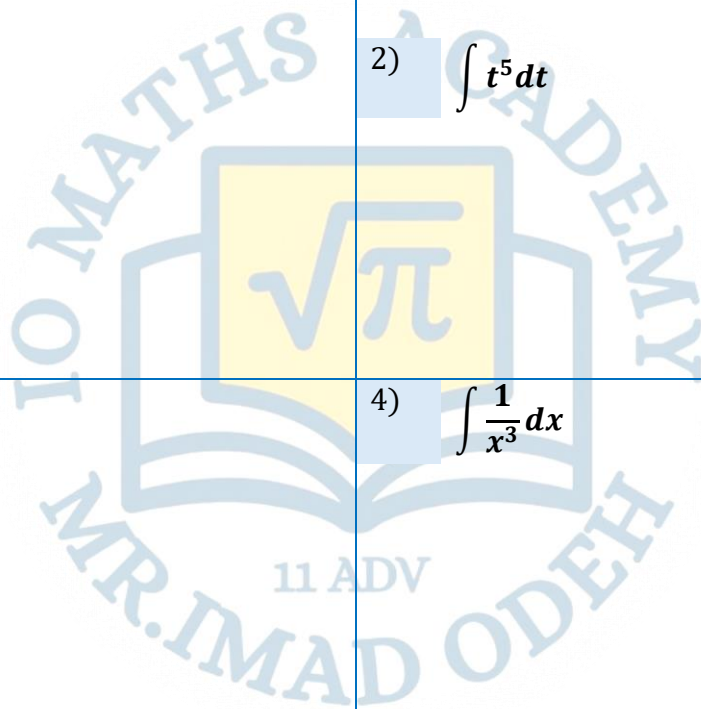
2) $\int t^5 dt$

3) $\int t^{17} dt$

4) $\int \frac{1}{x^3} dx$

5) $\int \sqrt{x} dx$

6) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$



Exercises تمارين

Q1 Find the general antiderivative.

اوجد الدالة الاصلية

1) $\int (3x^4 - 3x) dx$

2) $\int (x^3 - 2) dx$

3) $\int (4x^2 - 3) dx$

4) $\int (x - 3x^5) dx$

5) $\int \frac{4}{x^2} dx$

6) $\int \left(\frac{1}{x^2} - 1\right) dx$

7) $\int 3\sqrt{x} dx$

8) $\int \left(3\sqrt{x} - \frac{1}{x^4}\right) dx$

9) $\int \sqrt{x^3} + 4 dx$

10) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q2 Find the general antiderivative.

1) $\int \frac{x^3 + 1}{x} dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

2) $\int \frac{x^2 + 4}{x} dx$

3) $\int \frac{3x^2 - 4}{x^2} dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

4) $\int \frac{3 - x^2}{x^2} dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

5) $\int \left(\frac{x^{1/3} - 3}{x^{2/3}} \right) dx$

6) $\int \left(\frac{x + 2x^{3/4}}{x^{5/4}} \right) dx$

7) $\int x^{1/4}(x^{5/4} - 4) dx$

Imad Odeh

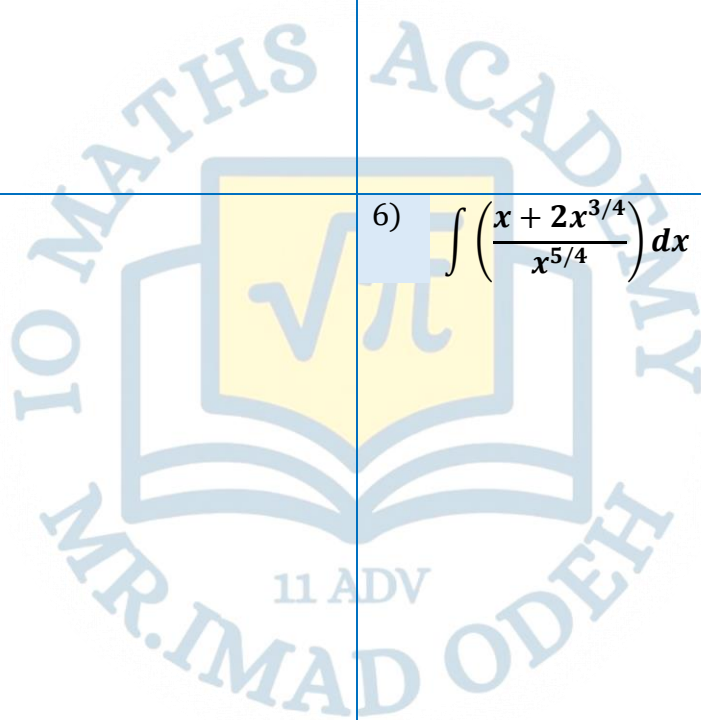
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

8) $\int x^{2/3}(x^{-4/3} - 3) dx$



9) $\int (x+1)(x-1) dx$

10) $\int (x^2+1)^2 dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

أسئلة سنوات سابقة Past exam Questions

Q1

Find the general antiderivative.

اوجد الدالة الاصلية

$$\int (x^6 - 3) dx$$

- a) $\frac{x^7}{7} - 3x + c$
 b) $\frac{x^6}{6} - 3x + c$
 c) $6x^7 - 3x + c$
 d) $6x^5 - 3x^2 + c$

Q2

Find the general antiderivative.

اوجد الدالة الاصلية

$$\int (3x^4 - 3x) dx$$

- a) $12x^3 - 3x + c$
 b) $3x^5 - 3x^2 + c$
 c) $x^5 - x^2 + c$
 d) $\frac{3}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^2 + c$

Q3

Find the general antiderivative.

اوجد الدالة الاصلية

$$\int (3x^2 - 1) dx$$

a) $x^3 - x + c$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

b) $6x + c$

c) $3x^3 - x + c$

d) $\frac{3}{2}x^3 - x + c$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q4

Find the general antiderivative.

اوجد الدالة الاصلية

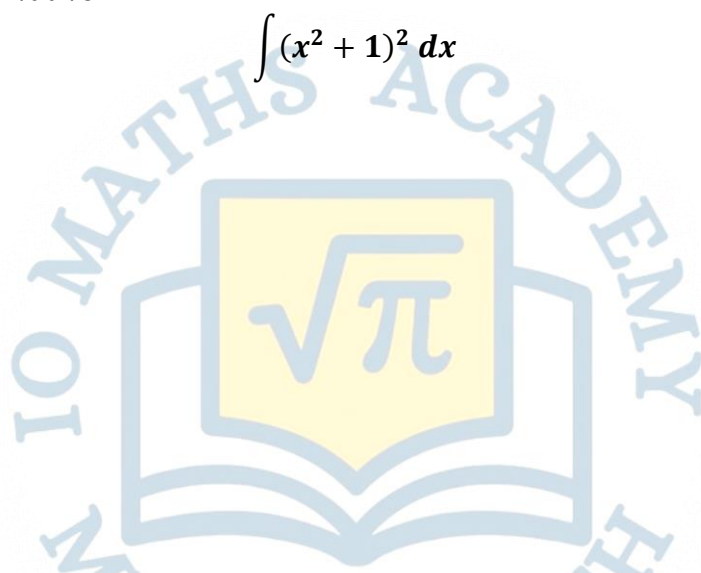
$$\int (x^2 + 1)^2 dx$$

a) $\frac{1}{3} \left(\frac{x^3}{3} + x \right)^3 + c$

b) $\frac{(x^2 + 1)^3}{3} + c$

c) $\frac{x^5}{5} + \frac{2}{3}x^3 + x + c$

d) $\frac{x^5}{5} + x + c$



تكامل الدوال المثلثية

Integration of trigonometric functions

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + c$$

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + c$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + c$$

$$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + c$$

$$\int \sin kx dx = -\frac{1}{k} \cos kx + c$$

$$\int \cos kx dx = \frac{1}{k} \sin kx + c$$



Exercises تمارين

Q1 Find the general antiderivative

اوجد الدالة الاصلية

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

1) $\int 2 \sin x + \cos x \, dx$

Imad Odeh Imad Odeh

2) $\int 3 \cos x - \sin x \, dx$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

3) $\int 2 \sec x \tan x \, dx$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

4) $\int 3 \csc x \cot x \, dx$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

5) $\int 3 \sec^2 x \, dx$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

6) $\int 5 \sec^2 x \, dx$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

7) $\int \sin 2x \, dx$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

8) $\int 2 \sin 4x \, dx$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

9) $\int (3 \cos x + 4x^8) \, dx$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

10) $\int (3 \sec^2 x + 3x^2) \, dx$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

11) $\int \tan^2 x \, dx$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

12) $\int 4 \frac{\cos x}{\sin^2 x} \, dx$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

13) $\int (\sqrt{x} + \sec x \tan x) \, dx$

أسئلة سنوات سابقة
Past exam Questions

Q1 Find the general antiderivative.

اوجد الدالة الاصلية

$$\int \csc^2 x \, dx$$

a) $\tan x + c$

b) $-\csc x + c$

c) $\cot x + c$

d) $-\cot x + c$

Q2 Find the general antiderivative.

اوجد الدالة الاصلية

$$\int 2 \sec x \tan x \, dx$$

a) $2 \sec x + c$

b) $2 \sec^2 x + c$

c) $2 \tan^2 x + c$

d) $2 \tan x + c$

Q3 Find the general antiderivative.

اوجد الدالة الاصلية

$$\int (1 - \csc x \cot x) \, dx$$

a) $x + \csc x + c$

b) $x + \cot x + c$

c) $x - \cot x + c$

d) $x - \csc x + c$

Q4 Find the general antiderivative.

اوجد الدالة الاصلية

$$\int 5 \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$$

a) $-5 \sec x + c$

b) $5 \sec^2 x + c$

c) $5 \tan^2 x + c$

d) $5 \sec x + c$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

تكامل الدوال الاسية

Integration of exponential functions

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$$

Exercises تمارين

Q1 Find the general antiderivative.

اوجد الدالة الاصلية

1) $\int (3e^x - 2) dx$

2) $\int (4x - 2e^x) dx$

3) $\int (x - e^{4x}) dx$

4) $\int (\cos 3x - e^{4x}) dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q2 Find the general antiderivative.

اوجد الدالة الاصلية

5) $\int \frac{e^x + 3}{e^x} dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

6) $\int \frac{e^x + 4}{e^x} dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

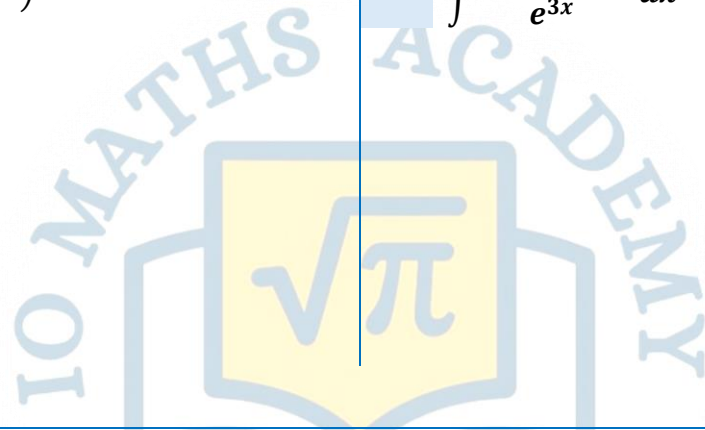
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

7) $\int (2 \cos x - \sqrt{e^{2x}}) dx$

8) $\int \frac{e^{2x} - 2e^{3x}}{e^{3x}} dx$



أسئلة سنوات سابقة
Past exam Questions

Q1 Find the general antiderivative

اوجد الدالة الاصلية

$$\int \frac{e^x + 4}{e^x} dx$$

a) $\ln|e^x + 4| + c$

b) $\ln|e^x| + c$

c) $x - 4e^{-x} + c$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

d) $x - 4e^x + c$

Q2 Find the general antiderivative.

اوجد الدالة الاصلية

$$\int \frac{e^{2x} - 2e^{3x}}{e^{3x}} dx$$

a) $-\frac{1}{e^x} - 2x + c$

b) $\frac{1}{e^x} - x + c$

c) $-\frac{1}{e^x} - 2xe^x + c$

d) $e^x - 2x + c$

Q3 Find the general antiderivative.

اوجد الدالة الاصلية

$$\int \frac{e^{3x}}{5 + e^{3x}} dx$$

a) $3 \ln|e^{3x}| + c$

b) $\frac{3}{5} \ln|e^{3x}| + c$

c) $5x + e^{3x} + c$

d) $\frac{1}{3} \ln|5 + e^{3x}| + c$

تكامل الدوال معكوس الدوال المثلثية

Integration of inverse trigonometric functions

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1}x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1}x + c$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \cos^{-1}x + c$$

$$\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1}x + c$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Exercises تمارين

Q1 Find the general antiderivative.

اوجد الدالة الاصلية

1) $\int \left(2 \sin x - \frac{1}{1+x^2} \right) dx$

2) $\int \left(3e^x - \frac{2}{1+x^2} \right) dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q2 Find the general antiderivative.

اوجد الدالة الاصلية

3) $\int \frac{3}{4x^2 + 4} dx$

4) $\int \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} dx$

أسئلة سنوات سابقة
Past exam Questions

Q1 Find the general antiderivative.

اوجد الدالة الاصلية

$$\int \frac{1}{9+x^2} dx$$

a) $-3 \tan^{-1} \left(\frac{x}{3} \right) + c$

b) $3 \tan^{-1} \left(\frac{x}{3} \right) + c$

c) $\frac{1}{3} \tan^{-1} \left(\frac{x}{3} \right) + c$

d) $-\frac{1}{3} \tan^{-1} \left(\frac{x}{3} \right) + c$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q2 Find the general antiderivative.

اوجد الدالة الاصلية

$$\int \frac{4}{1+x^2} dx$$

a) $-4 \cos^{-1} x + c$ Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

b) $4 \tan^{-1} x + c$

c) $\frac{1}{4} \tan^{-1} x + c$

d) $4 \sin^{-1} x + c$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q3 Find the general antiderivative.

اوجد الدالة الاصلية

$$\int (2 \sin x - \frac{1}{1+x^2}) dx$$

a) $-2 \cos x - \tan^{-1}(1+x^2) + c$

b) $-2 \cos x - \tan^{-1} x + c$

c) $\sin^2 x - \tan^{-1} x + c$

d) $2 \cos x - \tan x + c$

تكامل دالة اللوغاريتم الطبيعي

Integration of natural logarithm functions

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + c$$

EXAMPLE For any x for which $\tan x \neq 0$, evaluate

اوجد

$$\frac{d}{dx} \ln|\tan x|$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

EXAMPLE Find the general antiderivative

1) $\int \frac{\sec^2 x}{\tan x} dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

2) $\int \frac{2x}{x^2 + 1} dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Exercises تمارين

Q1 Find the general antiderivative

اوجد الدالة الاصلية

1) $\int \left(\frac{4}{x}\right) dx$

2) $\int \left(3 \cos x - \frac{1}{x}\right) dx$

3) $\int (2x^{-1} + \sin x) dx$

4) $\int \left(2x^{-1} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q2 Find the general antiderivative

5) $\int \frac{2x}{x^2 + 4} dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

6) $\int \frac{x}{x^2 + 4} dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

7) $\int \frac{4x}{x^2 + 4} dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

8) $\int \frac{8x}{x^2 + 7} dx$

Imad Odeh

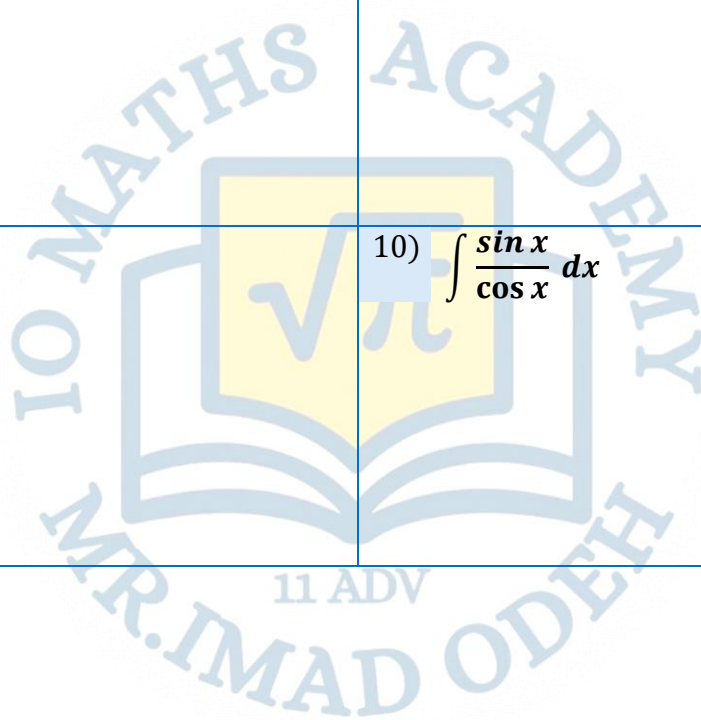
Imad Odeh

Imad Odeh

9) $\int \frac{\cos x}{\sin x} dx$

10) $\int \frac{\sin x}{\cos x} dx$

11) $\int \frac{e^x}{e^x + 3} dx$



Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

أسئلة سنوات سابقة Past exam Questions

Q1 Find the general antiderivative

اوجد الدالة الاصلية

$$\int \frac{2x}{x^2 + 4} dx$$

a) $2x^2(x^2 + 4)$

b) $\ln|x^2 + 2x| + c$

c) $(x^2 + 4) + c$

d) $\ln|x^2 + 4| + c$

Q2

Find the general antiderivative.

اوجد الدالة الاصلية

$$\int \frac{8x}{x^2 + 7} dx$$

a) $\frac{1}{2} \ln|x^2 + 7| + c$

b) $2 \ln|x^2 + 7| + c$

c) $\frac{1}{4} \ln|x^2 + 7| + c$

d) $4 \ln|x^2 + 7| + c$

Q3

Find the general antiderivative.

اوجد الدالة الاصلية

$$\int \tan x dx$$

a) $\sec x \tan x + c$

b) $\cos x + \cot x + c$

c) $\ln|\csc x| + c$

d) $-\ln|\cos x| + c$

Q4

Find the general antiderivative.

اوجد الدالة الاصلية

$$\int \tan 2x \, dx$$

a) $\frac{\sin 2x}{\cos 2x} + c$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

b) $-\cot 2x + c$

c) $-\frac{1}{2} \ln|\sin 2x| + c$

d) $-\frac{1}{2} \ln|\cos 2x| + c$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q5

Find the general antiderivative.

اوجد الدالة الاصلية

$$\int \frac{e^{3x}}{5 + e^{3x}} \, dx$$

a) $3 \ln|e^{3x}| + c$

b) $\frac{1}{3} \ln|e^{3x}| + c$

c) $5x + e^{3x} + c$

d) $\frac{1}{3} \ln|5 + e^{3x}| + c$

EXAMPLE

If an object's downward acceleration is given by $y''(t) = -32ft/s^2$, find the position function $y(t)$. Assume that the initial velocity is $y'(0) = -100ft/s$ and the initial position is $y(0) = 100,000 \text{ feet}$.

إذا كان تسارع الجسم نحو الأسفل معطى بالمعادلة $y''(t) = -32ft/s^2$ ، فأوجد دالة الموضع $y(t)$. افترض أن السرعة الأولية هي $y'(0) = -100ft/s$ وأن الموضع الأولي هو $y(0) = 100,000$ قدم.

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Exercises تمارين

Determine the position function if the velocity function and the initial position are.

حدد دالة الموقع إذا كانت دالة السرعة والشرط الابتدائي كما يلي

Q1

Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

$$v(t) = 3 - 12t, \quad s(0) = 3.$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q2

$$v(t) = 3e^{-t} - 2, \quad s(0) = 0$$

Q3

$$v(t) = 8 - 6t, \quad s(0) = 4$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q4

$$v(t) = 3 \cos t + t - 5, \quad s(0) = 6$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

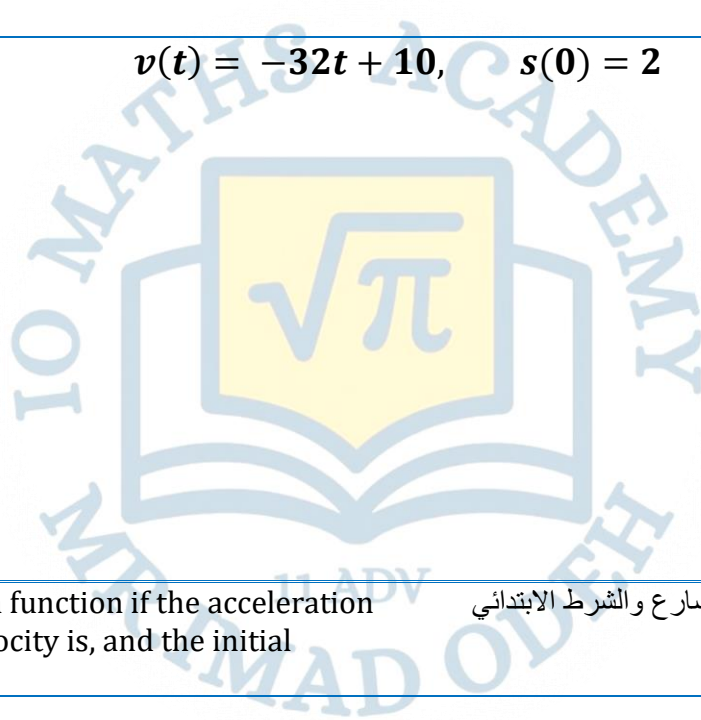
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q5

$$v(t) = -32t + 10, \quad s(0) = 2$$



Determine the position function if the acceleration function, the initial velocity is, and the initial position are

حدد دالة الموقع إذا كانت دالة التسارع والشرط الابتدائي للسرعة والموقع كما يلي

Q1

$$a(t) = t^2 + 1, \quad v(0) = 4 \quad s(0) = 0$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q2

$$a(t) = 3 \sin t + 1, \quad v(0) = 0 \quad s(0) = 4$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

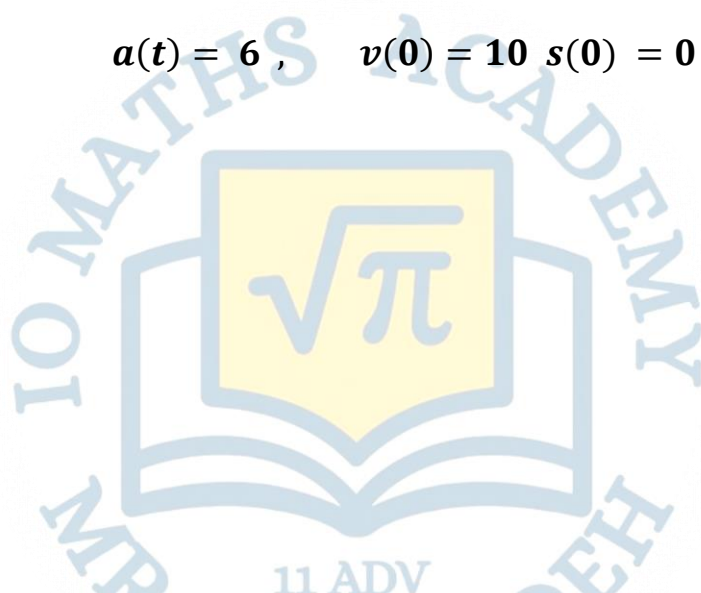
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q3

$$a(t) = 6, \quad v(0) = 10 \quad s(0) = 0$$



أسئلة سنوات سابقة

Past exam Questions

Q1 Determine the position function if the velocity function and the initial position are. حدد دالة الموقع إذا كانت دالة السرعة والشرط الابتدائي كما يلي

$$v(t) = 8 - 6t, \quad s(0) = 4$$

a) $s(t) = 8t - 6t^2 + 4$

b) $s(t) = 8t - 3t^2 + 4$

c) $s(t) = 6t^2 - 8t + 4$

d) $s(t) = 3t^2 - 8t + 4$

Q2 Determine the position function if the velocity function and the initial position are. حدد دالة الموقع إذا كانت دالة السرعة والشرط الابتدائي كما يلي

$$v(t) = 3 \cos t + t - 5, \quad s(0) = 6$$

- a) $s(t) = -3 \cos t + 5t + 6$ Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
- b) $s(t) = 3 \sin t + t^2 - 5t + 6$
- c) $s(t) = 3 \sin t + \frac{1}{2}t^2 - 5t + 6$
- d) $s(t) = 3 \cos t + t^2 - 5t$

Q3 Determine the position function if the acceleration function, the initial velocity is, and the initial position are. حدد دالة الموقع إذا كانت دالة التسارع والشرط الابتدائي للسرعة والموقع كما يلي

$$a(t) = t^2 + 1, \quad v(0) = 4 \quad s(0) = 0$$

- a) $s(t) = \frac{t^4}{12} + \frac{t^2}{2} + 4t$
- b) $s(t) = \frac{t^4}{12} + t^2 + 4t$
- c) $s(t) = \frac{t^3}{3} + t + 4$
- d) $s(t) = \frac{t^3}{3} + 2t + 4$

Exercises تمارين

Find the function $f(x)$ satisfying the given conditions. اوجد الدالة التي تحقق الشروط المعطاة

Q1

$$f'(x) = 3e^x + x, \quad f(0) = 4$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q2

$$f'(x) = 4 \cos x, f(0) = 3$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

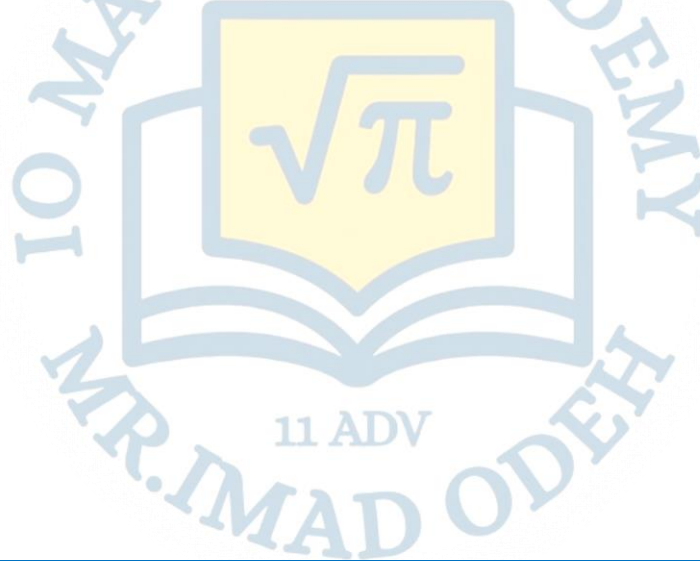
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q3

$$f'(x) = 3x^2 + 1 \text{ and } f(0) = 2$$



Q4

$$f'(x) = e^{-2x} + x, \quad f(0) = 3$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Find the function $f(x)$ satisfying the given conditions.

اوجد الدالة التي تحقق الشروط المعطاة

Q5

$$f''(x) = 12x^2 + 2e^x, f'(0) = 2, f(0) = 3$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q6

$$f''(x) = 20x^3 + 2e^{2x}, f'(0) = -3, f(0) = 2$$

Q7

$$f''(t) = 2 + 2t, f'(0) = 2, f(3) = 2$$

Q8

$$f''(t) = 4 + 6t, f'(1) = 3, f(-1) = -2$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Find the function $f(x)$ satisfying the given conditions

اوجد الدالة التي تحقق الشروط المعطاة

Q1

Imad Odeh

Imad Odeh

$$f''(x) = 3 \sin x + 4x^2$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

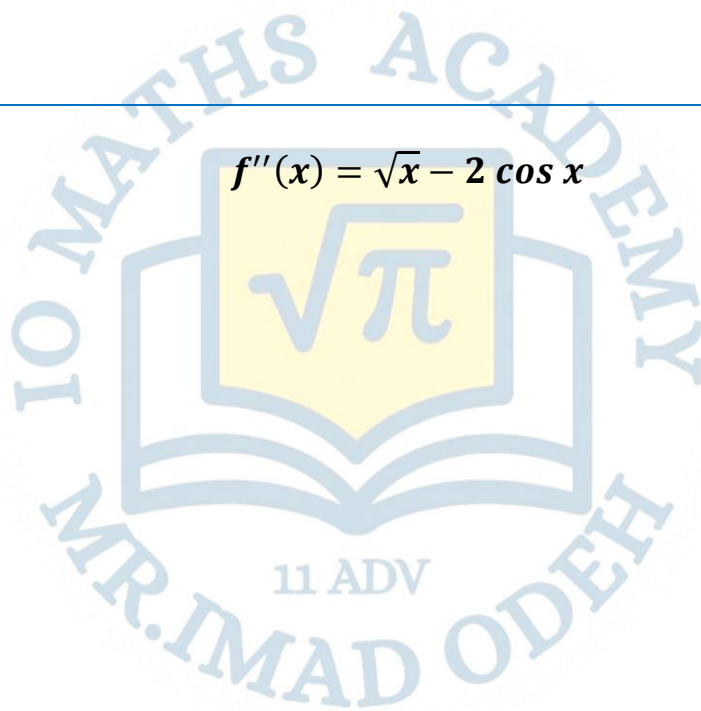
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q2

$$f''(x) = \sqrt{x} - 2 \cos x$$



Q3

$$f'''(x) = 4 - \frac{2}{x^3}$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q4

$$f'''(x) = \sin x - e^x$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

أسئلة سنوات سابقة Past exam Questions

Q1 Find the function $f(x)$ satisfying the given conditions.

اوجد الدالة التي تحقق الشروط المعطاة

$$f'(x) = 3e^x + x, \quad f(0) = 4$$

- a) $3e^x + \frac{x^2}{2} + c$
 b) $3e^x + \frac{x^2}{2} + 1$
 c) $3e^x + \frac{x^2}{2} + 4$
 d) $3e^x + \frac{x^2}{2} - 1$

Q2 Find the function $f(x)$ satisfying the given conditions.

اوجد الدالة التي تحقق الشروط المعطاة

$$f'(x) = 4 \cos x, \quad f(0) = 3$$

- a) $-4 \sin x - 3$
 b) $4 \sin x - 3$
 c) $-4 \sin x + 3$
 d) $4 \sin x + 3$

Q3 Find the function $f(x)$ satisfying the given conditions. اوجد الدالة التي تحقق الشروط المعطاة

$$f'(x) = e^{-x}, f(0) = 3$$

a) $f(x) = 2 + e^{-x}$ Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

b) $f(x) = 4 + e^{-x}$

c) $f(x) = 2 - e^{-x}$

d) $f(x) = 4 - e^{-x}$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q4 Find the function $f(x)$ satisfying the given conditions. اوجد الدالة التي تحقق الشروط المعطاة

$$f''(x) = 20x^3 + 2e^{2x}, f(0) = -3, f'(0) = 2$$

a) $x^5 + \frac{1}{2}e^{2x} - 4x + \frac{3}{2}$

b) $x^5 + e^{2x} - 4x + \frac{3}{2}$

c) $x^5 + \frac{1}{2}e^{2x} + 4x + \frac{3}{2}$

d) $x^5 + \frac{1}{2}e^{2x} - 4x - \frac{3}{2}$

Q5 Find the function $f(x)$ satisfying the given conditions. اوجد الدالة التي تحقق الشروط المعطاة

$$f''(t) = 2 + 2t, f(0) = 2, f(3) = 2$$

a) $\frac{t^3}{3} + \frac{1}{2}t^2 - 6t + 2$

b) $t^3 + t^2 - 6t + 2$

c) $\frac{t^3}{3} + t^2 - 6t + 2$

d) $\frac{t^3}{3} + t^2 - 6t - 2$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q6 What are the antiderivatives of

اوجد الدالة الاصلية ل

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sin x} \text{ passing through the point } \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)?$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

a) $G(x) = \ln|\sin x| + \frac{\pi}{2}$

b) $G(x) = \ln|\cos x| + \frac{\pi}{2}$

c) $G(x) = \ln|\cos x|$

d) $G(x) = \ln|\sin x|$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

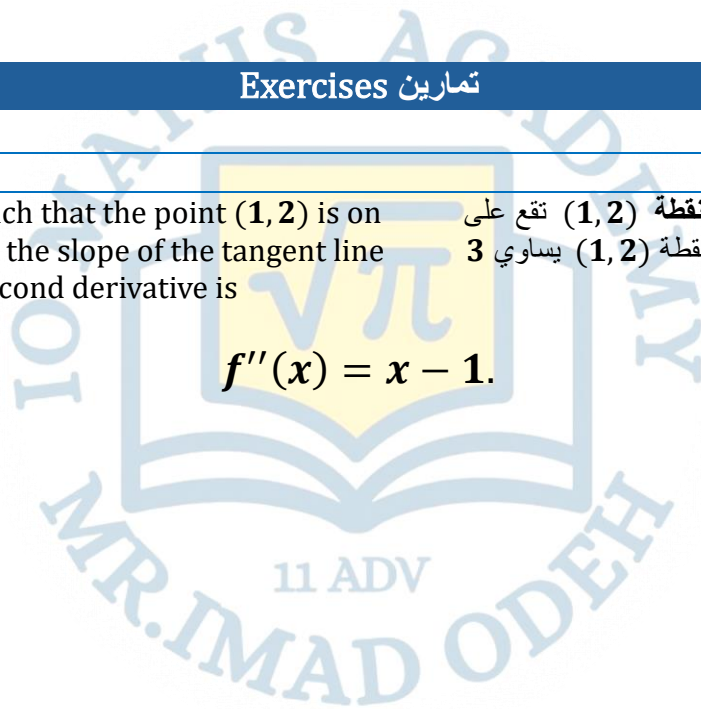
Exercises تمارين

Q1

Find a function $f(x)$ such that the point $(1, 2)$ is on the graph of $y = f(x)$, the slope of the tangent line at $(1, 2)$ is 3 and the second derivative is

اوجد الدالة $f(x)$ والتي فيها النقطة $(1, 2)$ تقع على منحنى الدالة وميل المماس عند النقطة $(1, 2)$ يساوي 3 والمشتقة الثانية هي

$$f''(x) = x - 1.$$



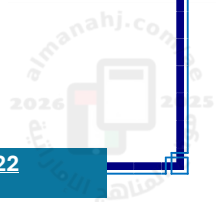
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh



Q2

Find a function $f(x)$ such that the point $(-1, 1)$ is on the graph of $y = f(x)$, the slope of the tangent line at $(-1, 1)$ is 2 and the second derivative is

اوجد الدالة $f(x)$ والتي فيها النقطة $(-1, 1)$ تقع على منحنى الدالة وميل المماس عند النقطة $(-1, 1)$ يساوي 2 والمشتقة الثانية هي

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

$$f''(x) = 6x + 4.$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q3 find the derivative.

اوجد المشتقة

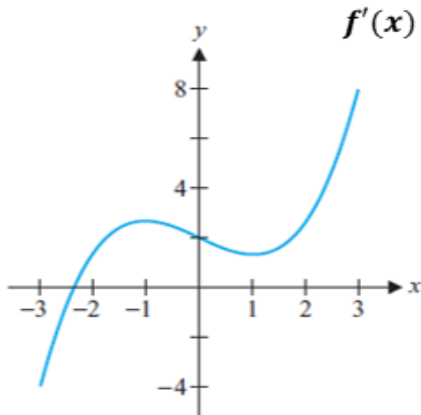
$$\frac{d}{dx} \ln | \sec x + \tan x |$$

Q4

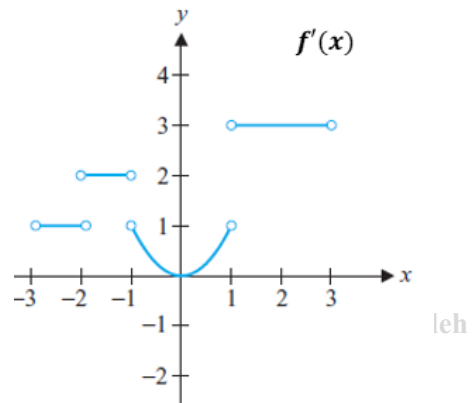
Sketch the graph of two functions $f(x)$ corresponding to the given graph of

ارسم دالتين مختلفتين والتان بيان مشتقتهما كما يلي

a)



b)



أسئلة إضافية
Extra questions

Q1 find

س 10 اوجد

$$\int 4e^{\ln x} dx$$

a) $\ln x^4 + c$

b) $4x^{-1} + c$

c) $2x^2 + c$

d) $4e^x + c$

Q2 find

اوجد

$$\int \frac{1}{\cos x - 1} dx$$

Q3 find

اوجد

$$\int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$$

Q4 Find

اوجد

Imad Odeh

Imad Odeh

$$\int \left(\frac{\cos x}{\csc^2 x} - \frac{1}{\csc^3 x} \right) dx$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Lesson 4.2

SUMS AND SIGMA NOTATION

المجموع ورمز المجموع

EXAMPLE 1

Write in summation notation

a) $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{10}$

b) $3^3 + 4^3 + 5^3 + \dots + 45^3$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Exercises تمارين

Q1 translate into summation notation.

1) $2(1)^2 + 2(2)^2 + 2(3)^2 + \dots + 2(14)^2$

2) $\sqrt{2-1} + \sqrt{3-1} + \sqrt{4-1} + \dots + \sqrt{15-1}$

EXAMPLEWrite in summation notation:
the sum of the **first 200 odd** positive integers.استخدام رمز المجموعة لكتابة مجموع اول 200 عدد
صحيح موجب

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Exercises تمارين

Translate each into summation notation and then compute the sum.

حوّل كلّاً مما يلي إلى رمز المجموع ثم احسب المجموع.

Q1 The sum of the squares of the first 50 positive integers.

Q2 The square of the sum of the first 50 positive integers.

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q3 The sum of the square roots of the first 10 positive integers.

Q4 The square root of the sum of the first 10 positive integers.

EXAMPLE

Write out all terms and compute the sums

اكتب جميع الحدود ثم اوجد المجموع

1)
$$\sum_{i=1}^8 (2i + 1)$$

2)
$$\sum_{i=1}^6 \sin(2\pi i)$$

3)
$$\sum_{i=4}^{10} 5$$

Exercises تمارين

Q1 write out all terms and compute the sums.

1)

$$\sum_{i=1}^6 3i^2$$

2)

$$\sum_{i=3}^7 (i^2 + 1)$$

3)

$$\sum_{i=6}^{10} (4i + 2)$$

4)

$$\sum_{i=6}^8 (i^2 + 2)$$

THEOREM 2.1

النظرية 2.1

(i)	$\sum_{i=1}^n c = cn$	(sum of constants), مجموع الثوابت
(ii)	$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$	(sum of the first n positive integers) مجموع اول n من الاعداد الصحيحة
(iii)	$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	(sum of the squares of the first n positive integers). مجموع مربعات اول n عدد صحيح موجب

THEOREM 2.2

النظرية 2.2

For any constants c and d ,

لاي عددين ثابتين c و d

$$\sum_{i=1}^n (ca_i + db_i) = c \sum_{i=1}^n a_i + d \sum_{i=1}^n b_i$$

EXAMPLE

Compute

احسب

1) $\sum_{i=1}^8 (2i + 1)$

2) $\sum_{i=1}^{800} (2i + 1)$

3) $\sum_{i=1}^{20} i^2$

4) $\sum_{i=1}^{20} \left(\frac{i}{20}\right)^2$

Exercises تمارين

Q1 use summation rules to compute the sum.

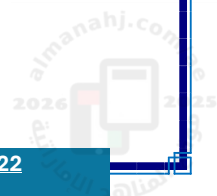
استخدم قواعد المجموع لحساب المجموع.

1) $\sum_{i=1}^{70} (3i - 1)$

2) $\sum_{i=1}^{40} (4 - i^2)$

3) $\sum_{i=1}^{100} (n^2 - 3n + 2)$

4) $\sum_{i=3}^{30} [(i - 3)^2 + i - 3]$



Q2 use summation rules to compute the sum.

استخدم قواعد المجموع لحساب المجموع.

5)
$$\sum_{i=4}^{20} (i - 3)(i + 3)$$

Imad Odeh

Imad Odeh

6)
$$\sum_{k=3}^n (k^2 - 3)$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

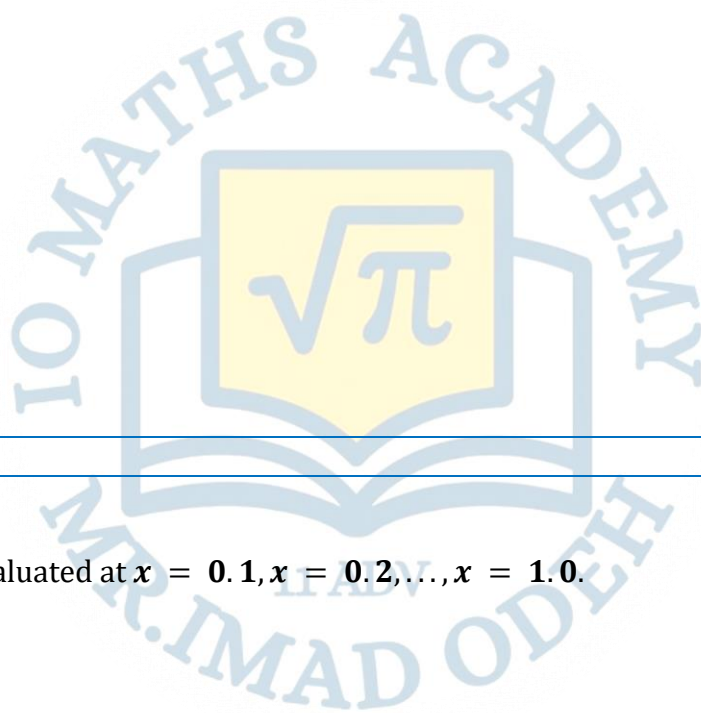
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

6)
$$\sum_{k=0}^n (k^2 + 5)$$



EXAMPLE

Sum the values of

جد مجموع القيم

1) $f(x) = x^2 + 3$ evaluated at $x = 0.1, x = 0.2, \dots, x = 1.0$.

2) $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$ evaluated at $x = 1.05, x = 1.15, x = 1.25, \dots, x = 2.95$.

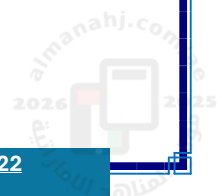
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh



Exercises تمارين

Q1	Compute sums of the form for the given values of x_i	$\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$	احسب المجموع بالصيغة لقيم x_i المعطاة.
Imad Odeh	Imad Odeh	Imad Odeh	Imad Odeh

1)

$$f(x) = x^2 + 4x; x = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0; \Delta x = 0.2; n = 5$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

2)

$$f(x) = 3x + 5; x = 0.4, 0.8, 1.2, 1.6, 2.0; \Delta x = 0.4; n = 5$$

3)

$$f(x) = 4x^2 - 2; x = 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, \dots, 3.0; \Delta x = 0.1; n = 10$$

4)

$$f(x) = x^3 + 4; x = 2.05, 2.15, 2.25, 2.35, \dots, 2.95; \Delta x = 0.1; n = 10$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q2

Compute the sum and the limit of the sum as $n \rightarrow \infty$

اوجد المجموع ثم اوجد النهاية عندما $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left[\left(\frac{i}{n}\right)^2 + 2\left(\frac{i}{n}\right) \right]$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q3

Compute the sum and the limit of the sum as $n \rightarrow \infty$

اوجد المجموع ثم اوجد النهاية عندما $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left[4\left(\frac{2i}{n}\right)^2 - \left(\frac{2i}{n}\right) \right]$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

أسئلة سنوات سابقة واسئلة اخرى
Past exam Questions

Q1 Find. Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh اوجد

$$\sum_{i=1}^6 (i + 5)$$

- a) 44
b) 21
c) 30
d) 51

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q2 Find. اوجد

$$\sum_{i=6}^{10} (i + 4)$$

- a) 60
b) 40
c) 95
d) 220

Q3 Find. اوجد

$$\sum_{k=1}^{18} (6k - 1)$$

- a) 975
b) 910
c) 846
d) 1008

Q4 Find. اوجد

$$\sum_{t=5}^9 (t^2 + 3)$$

- a) 40
b) 70
c) 270
d) 342

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q5 Find.

اوجد

$$\sum_{i=2}^6 (i^2 + i)$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

a) 96

b) 60

c) 110

d) 20

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q6 Find.

اوجد

$$\sum_{k=3}^n (k^2 - 3)$$

a) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3n + 1$

b) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{2} - 3n + 1$

c) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3n$

d) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3n + 1$

Q7 Find.

اوجد

$$\sum_{k=0}^n (k^2 + 5)$$

a) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 5n + 5$

b) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 5n$

c) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 5n - 5$

d) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Q8 Compute sums of the form $\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$ احسب المجموع بالصيغة

Imad Odeh for the given values of x_i Imad Odeh $f(x) = 3x + 5; x = 2, 4, 6; \Delta x = 2; n = 3$ Imad Odeh لقيم x_i المعطاة. Imad Odeh

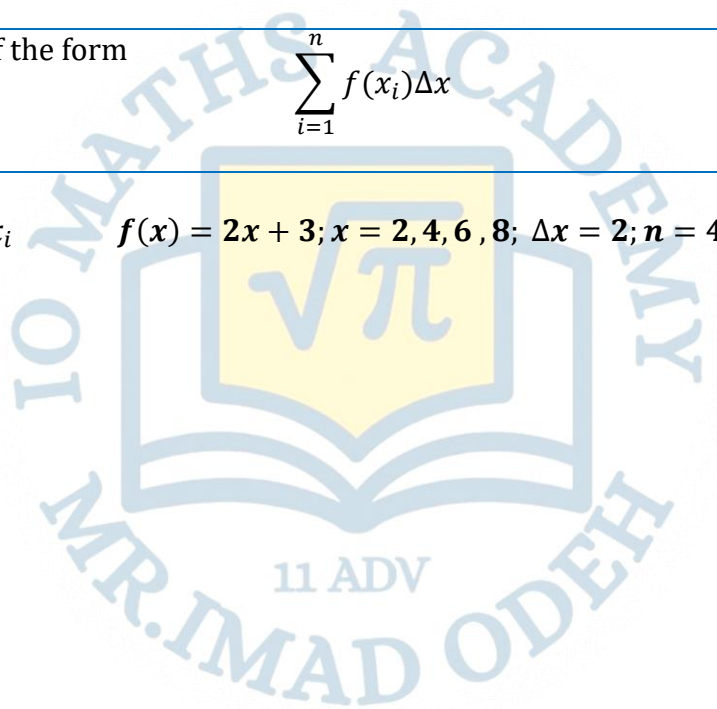
- a) 22
- b) 51
- c) 102
- d) 11

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

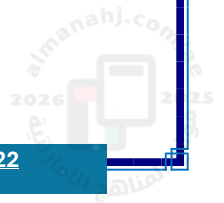
Q9 Compute sums of the form $\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$ احسب المجموع بالصيغة

for the given values of x_i Imad Odeh $f(x) = 2x + 3; x = 2, 4, 6, 8; \Delta x = 2; n = 4$ Imad Odeh لقيم x_i المعطاة. Imad Odeh

- a) 92
- b) 100
- c) 102
- d) 101



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh



Lesson 4.3

AREA المساحة

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Approximation area under the curve $f(x)$ and above $x - axis$

المساحة التقريبية تحت منحنى $f(x)$ وفوق محور x

$$A \approx \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = A_n$$

Imad Odeh

$$\Delta x = \frac{b - a}{2}$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

$$x_i = x_0 + i\Delta x \quad , \text{for } i = 1, 2, \dots, n.$$

EXAMPLE

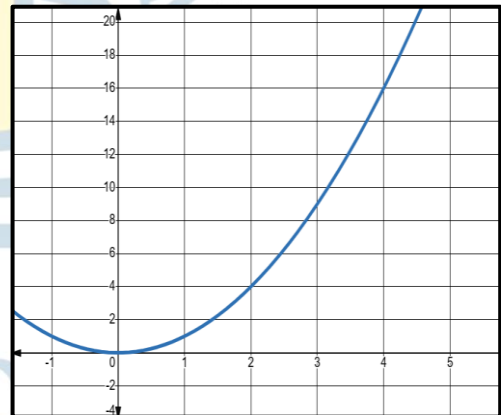
Approximate the area under the curve

اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة تحت منحنى

$$y = f(x) = x^2 \quad \text{on the interval } [0, 4], \text{ using}$$

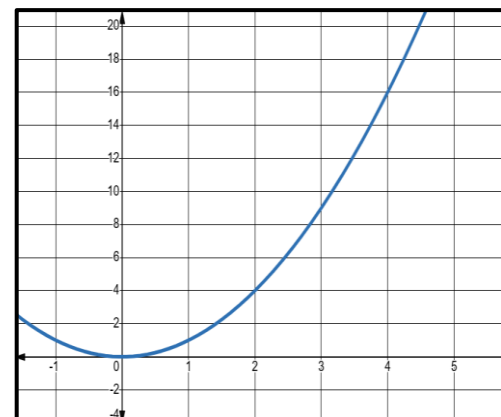
a) 4 rectangles and

استخدم 4 مستطيلات



a) 8 rectangles and

استخدم 8 مستطيلات



Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

EXAMPLE

Approximate the area under the curve

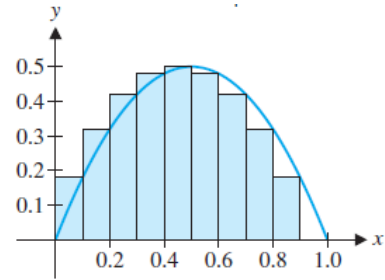
$$y = f(x) = 2x - 2x^2 \text{ on the interval } [0, 1], \text{ using}$$

أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة تحت منحنى

10 rectangles and

Imad Odeh

Odeh



Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

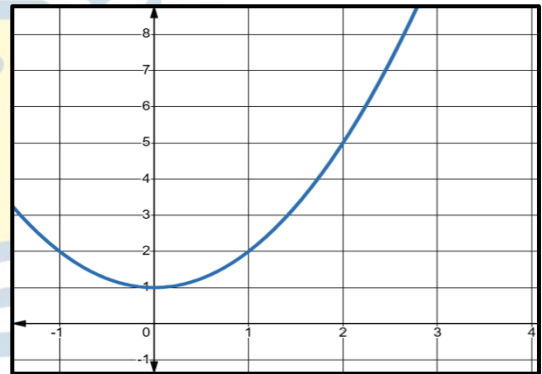
Exercises تمارين

Q1

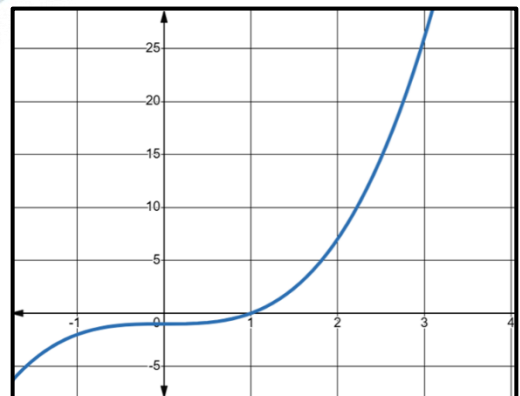
Approximate the area under the curve

أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة تحت منحنى

1) $f(x) = x^2 + 1$ on $[0, 2], n = 4$



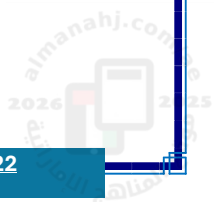
2) $f(x) = x^3 - 1$ on $[1, 3], n = 4$



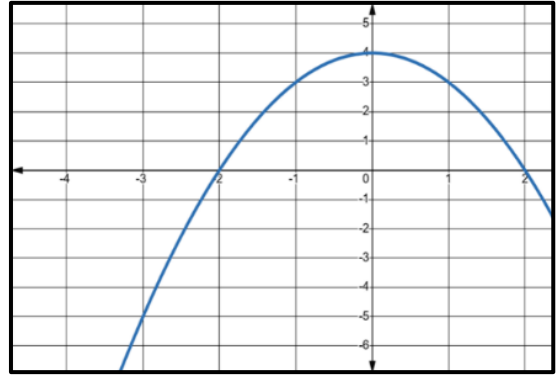
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh



3) $f(x) = 4 - x^2$ on $[-3, -1], n = 4$



Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

DEFINITION 3.1

التعريف 3.1

For a function f defined on the interval $[a, b]$, if f is continuous on $[a, b]$ and $f(x) \geq 0$ on $[a, b]$, the area A under the curve $y = f(x)$ on $[a, b]$ is given by

لكل دالة f ومعرفة على الفترة $[a, b]$. إذا كانت متصلة على $[a, b]$ و $f(x) \geq 0$ على $[a, b]$. فإن المساحة A تحت منحنى $y = f(x)$ على $[a, b]$ تعطى بالصيغة

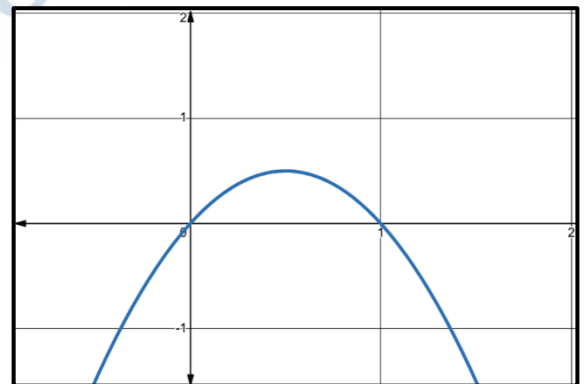
$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

EXAMPLE

Find the area under the curve

اوجد المساحة تحت المنحنى في الفترة المعطاة

$y = f(x) = 2x - 2x^2$ on the interval $[0, 1]$



Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

EXAMPLE

Find the area under the curve

اوجد المساحة تحت المنحنى في الفترة المعطاة

$y = f(x) = \sqrt{x + 1}$ on the interval $[1, 3]$

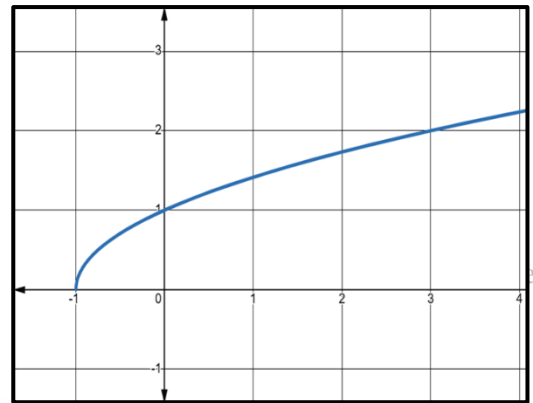
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

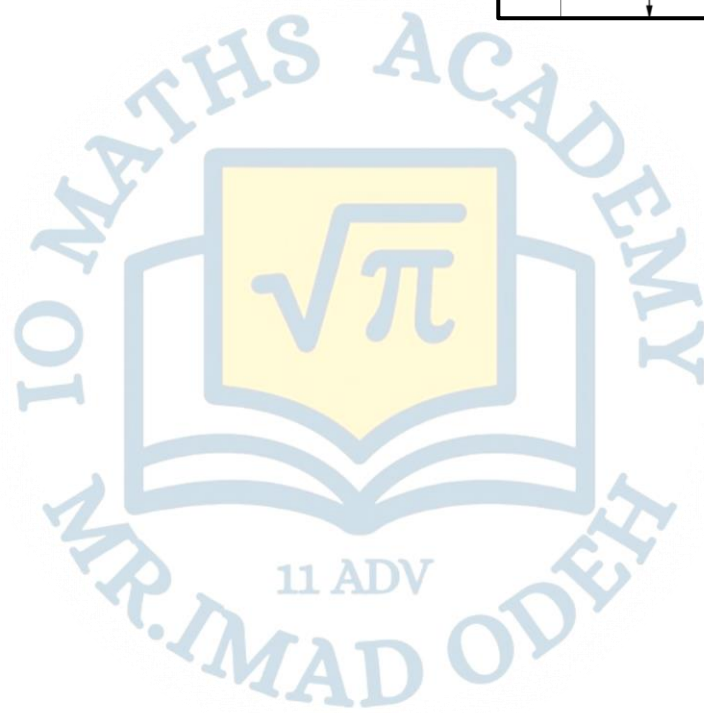
Imad Odeh



Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh



Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

DEFINITION 3.2

التعريف 3.2

Let $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ be a regular partition of the interval $[a, b]$, with

لتكن $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ تجزئة منتظمة للفترة $[a, b]$ حيث

$$x_i - x_{i-1} = \Delta x = \frac{b - a}{n}$$

for all i . Pick points c_1, c_2, \dots, c_n , where c_i is any point in the subinterval

لكل i . اختر النقاط c_1, c_2, \dots, c_n , حيث يكون أي c_i نقطة في الفترة الجزئية

$$[x_{i-1}, x_i], \text{ for } i = 1, 2, \dots, n.$$

(These are called **evaluation points**.)

(وهذه النقاط تسمى نقاط القيم). إن مجموع ريمان لهذه التجزئة

The **Riemann sum** for this partition and set of evaluation points is

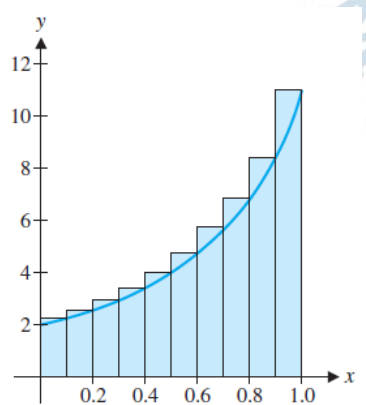
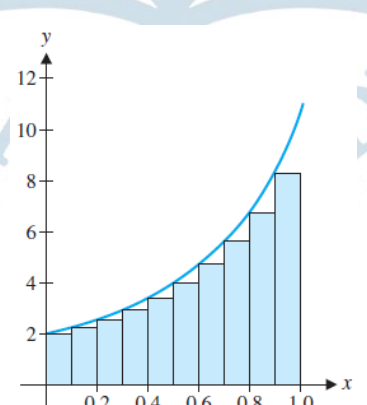
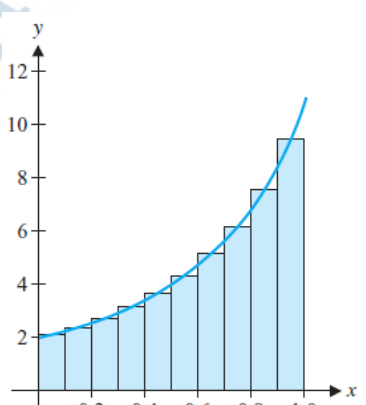
ومجموعة نقاط القيم، هو

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x$$

The area under the curve $y = f(x)$ is the limit of the **Riemann sums**:

تكون المساحة تحت المنحنى $y = f(x)$ هي نهاية مجاميع ريمان:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x$$

Right endpoint	Left endpoint	Midpoint
		
$c_i = x_i$	$c_i = x_{i-1}$	$c_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$

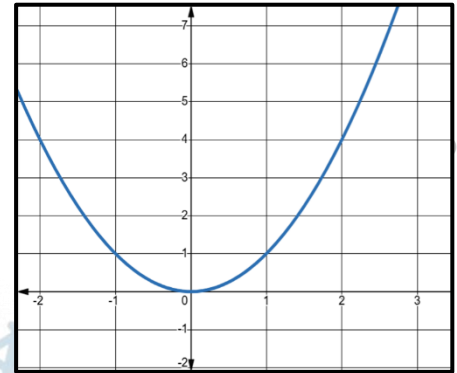
Exercises تمارين

approximate the area under the curve $f(x)$ on the given interval using n rectangles and the evaluation rules.

اوجد قيمة تقريبية للمساحة تحت منحنى الدالة $f(x)$ في لفترة المعطاء باستخدام n مستطيل وذلك باستخدام نقطة

Q1 $f(x) = x^2$ on $[0, 2], n = 8$

Midpoint $c_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$



Imad Odeh

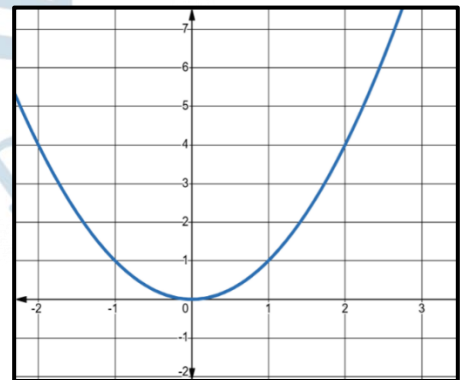
Imad Odeh

Imad Odeh

deh

Q2 $f(x) = x^2$ on $[0, 2], n = 8$

Right endpoint $c_i = x_i$



Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

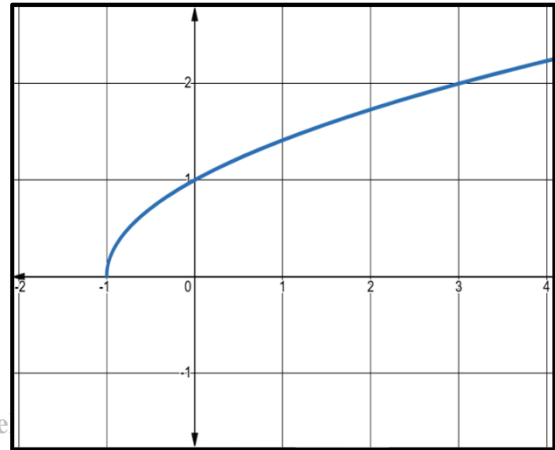
Q3 $f(x) = \sqrt{x+1}$ on $[0, 3]$, $n = 8$

Midpoint $c_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh



Imad Odeh

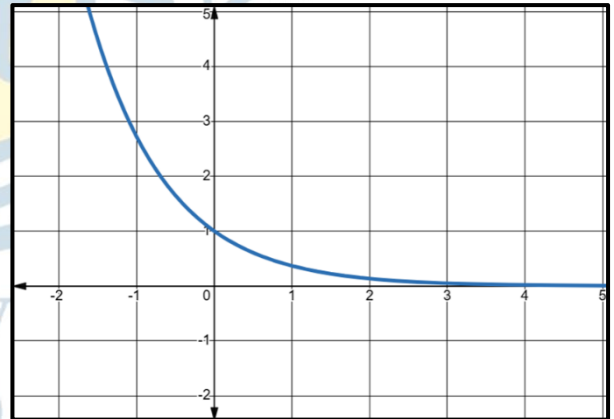
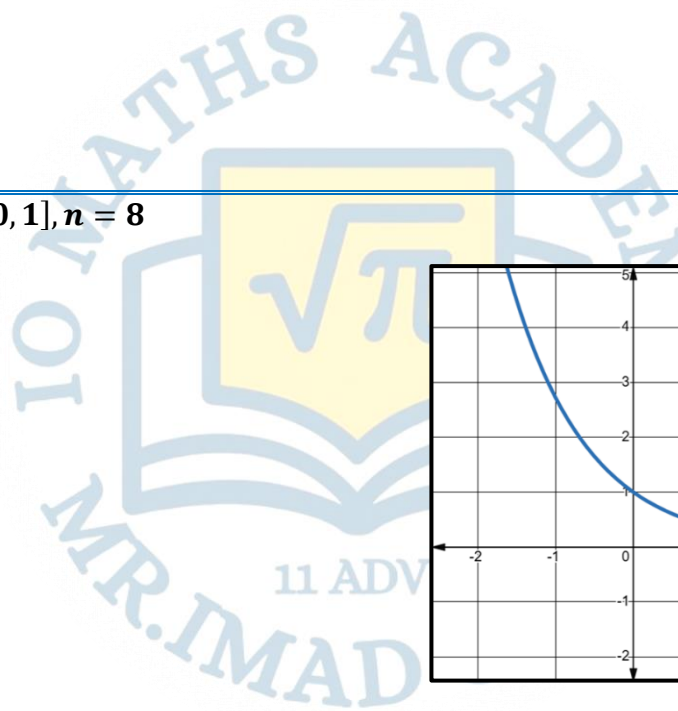
Imad Odeh

Imad Odeh

deh

Q4 $f(x) = e^{-x}$ on $[0, 1]$, $n = 8$

Left endpoint $c_i = x_{i-1}$



Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

approximate the area under the curve $f(x)$ on the given interval using n rectangles and the evaluation rules.

اوجد قيمة تقريبية للمساحة تحت منحنى الدالة $f(x)$ في لفترة المعطاء باستخدام n مستطيل وذلك باستخدام نقطة

Q1

$f(x) = x^2 + 1$ on $[0, 2]$; $n = 16$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Left endpoint

$c_i = x_{i-1}$

Imad Odeh

Imad Odeh

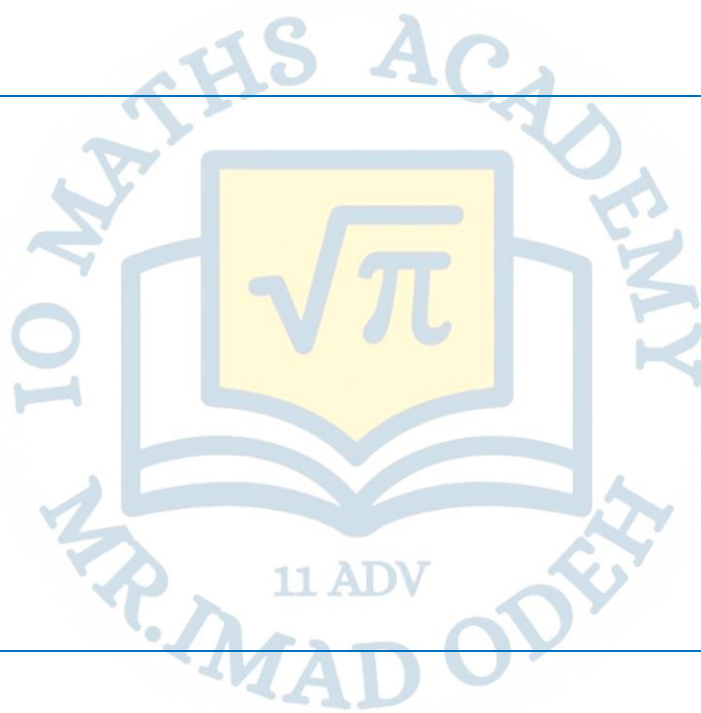
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Midpoint

$c_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$



Right endpoint

$c_i = x_i$

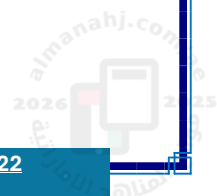
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh



approximate the area under the curve $f(x)$ on the given interval using n rectangles and the evaluation rules.

اوجد قيمة تقريبية للمساحة تحت منحنى الدالة $f(x)$ في لفترة المعطاء باستخدام n مستطيل وذلك باستخدام نقطة

Q2

$f(x) = \sqrt{x + 2}$ on $[1, 4], n = 16$

Left endpoint

$$c_i = x_{i-1}$$

Imad Odeh

Imad Odeh

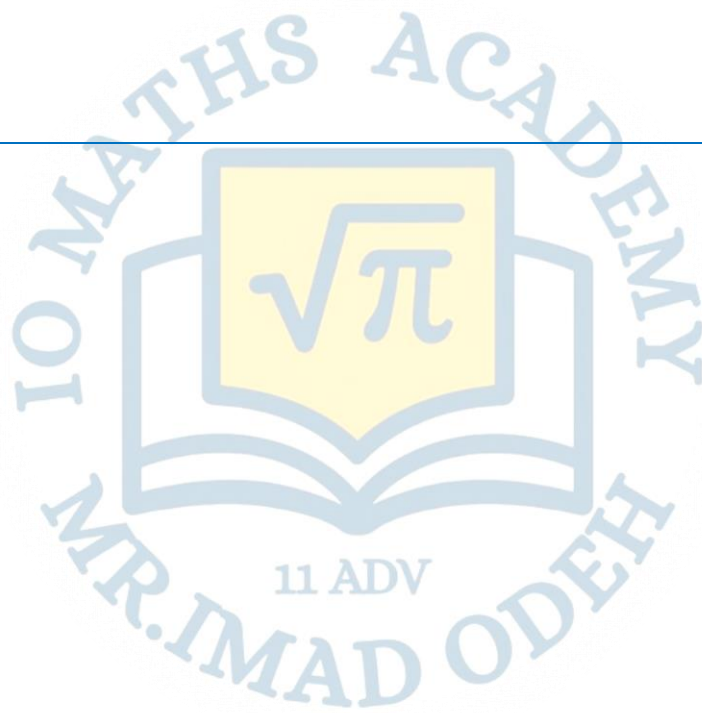
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Midpoint

$$c_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$$



Right endpoint

$$c_i = x_i$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

approximate the area under the curve $f(x)$ on the given interval using n rectangles and the evaluation rules.

اوجد قيمة تقريبية للمساحة تحت منحنى الدالة $f(x)$ في لفترة المعطاء باستخدام n مستطيل وذلك باستخدام نقطة

Q3

$f(x) = e^{-2x}$ on $[-1, 1], n = 16$

Left endpoint

$$c_i = x_{i-1}$$

Imad Odeh

Imad Odeh

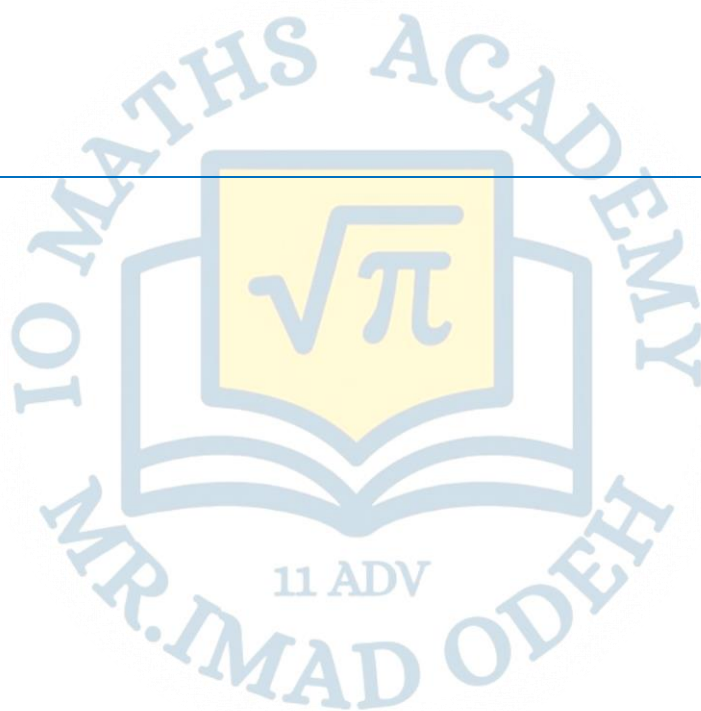
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Midpoint

$$c_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$$



Right endpoint

$$c_i = x_i$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

approximate the area under the curve $f(x)$ on the given interval using n

اوجد قيمة تقريبية للمساحة تحت منحنى الدالة $f(x)$ في لفترة المعطاء باستخدام n مستطيل وذلك باستخدام نقطة

Imad Odeh rectangles and the evaluation rules. Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q4

$$f(x) = \cos x \text{ on } \left[0, \frac{\pi}{2}\right], n = 50$$

Left endpoint

$$c_i = x_{i-1}$$

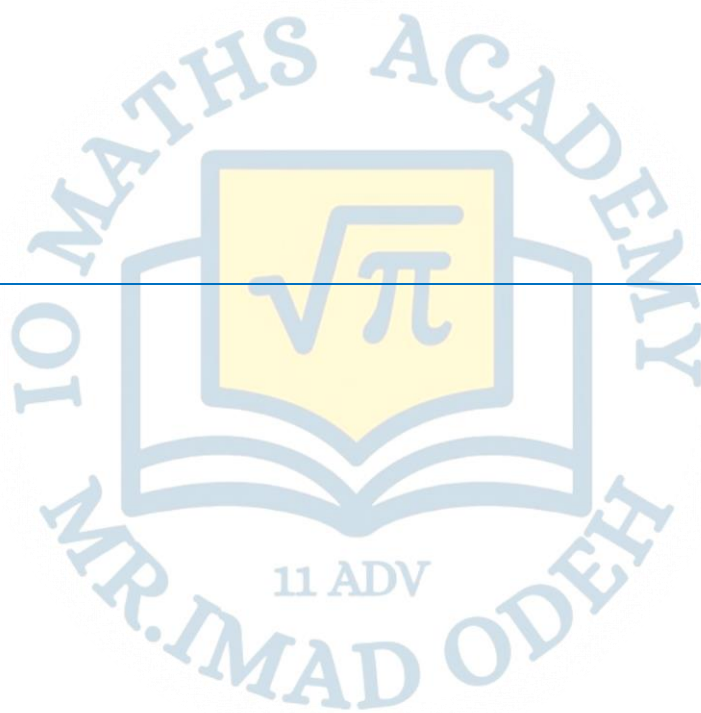
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh



Midpoint

$$c_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$$

Right endpoint

$$c_i = x_i$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

approximate the area under the curve $f(x)$ on the given interval using n rectangles and the evaluation rules.

اوجد قيمة تقريبية للمساحة تحت منحنى الدالة $f(x)$ في لفترة المعطاء باستخدام n مستطيل وذلك باستخدام نقطة

Q5

$f(x) = x^3 - 1$ on $[-1, 1], n = 100$

Left endpoint

$$c_i = x_{i-1}$$

Imad Odeh

Imad Odeh

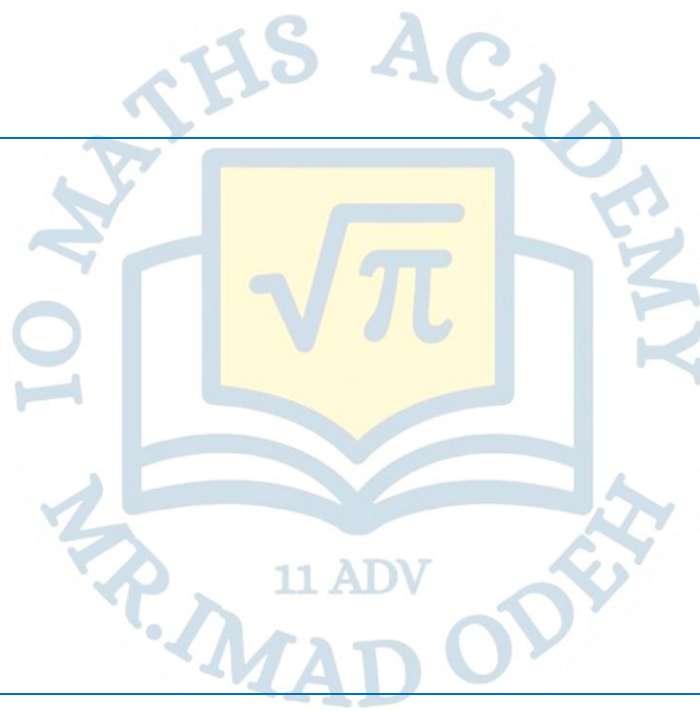
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Midpoint

$$c_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$$



Right endpoint

$$c_i = x_i$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q6

Use Riemann sums and a limit to compute the exact area under the curve.

اوجد القيمة الفعلية للمساحة تحت منحنى الدالة في الفترة المعطاة باستخدام نهاية مجموع ريمان

a) $f(x) = x^2 + 1$ on $[0, 1]$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

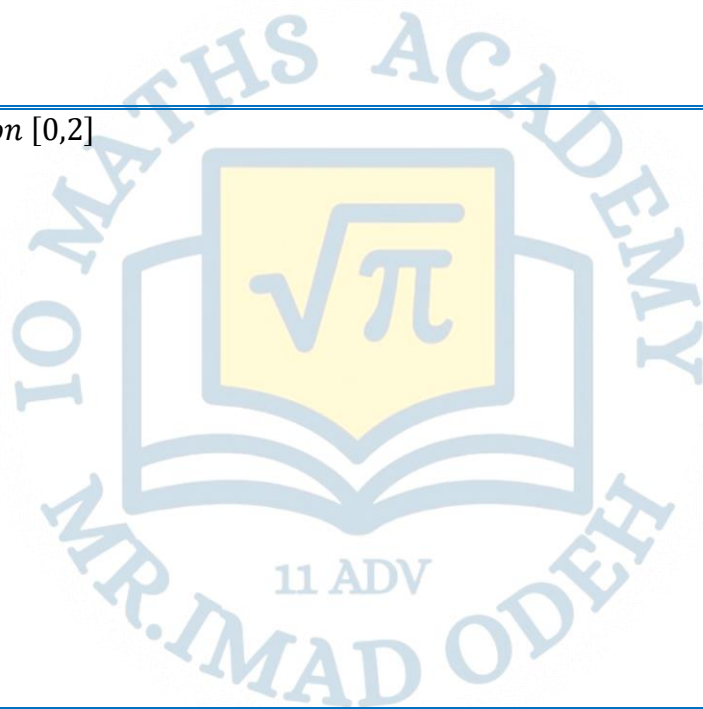
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

b) $f(x) = x^2 + 1$ on $[0, 2]$



c) $f(x) = x^2 + 1$ on $[1, 3]$

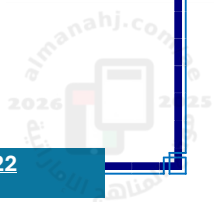
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh



Q7

Use Riemann sums and a limit to compute the exact area under the curve.

اوجد القيمة الفعلية للمساحة تحت منحنى الدالة في الفترة المعطاة باستخدام نهاية مجموع ريمان

a) $f(x) = x^2 + 3x$ on $[0, 1]$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

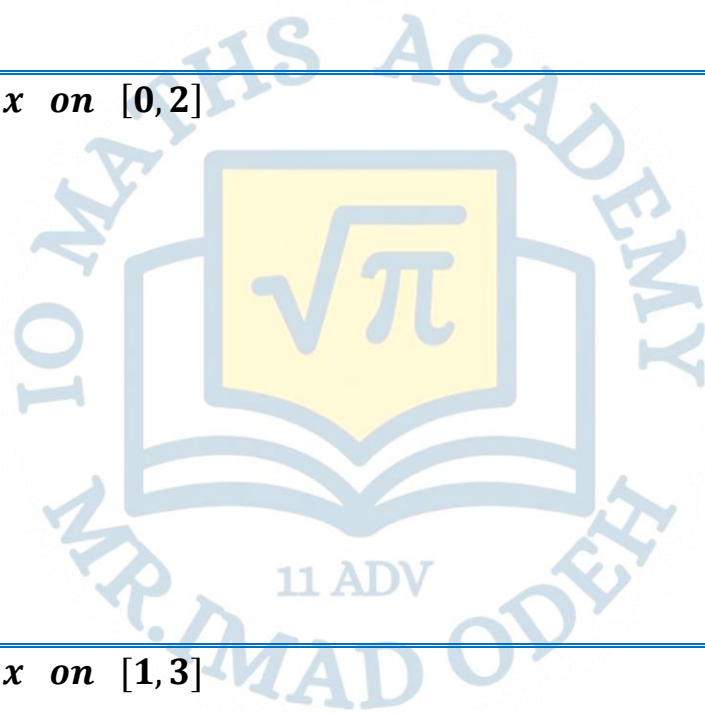
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

b) $f(x) = x^2 + 3x$ on $[0, 2]$



c) $f(x) = x^2 + 3x$ on $[1, 3]$

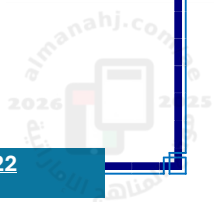
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh



Q8

Use Riemann sums and a limit to compute the exact area under the curve.

اوجد القيمة الفعلية للمساحة تحت منحنى الدالة في الفترة المعطاة باستخدام نهاية مجموع ريمان

a) $f(x) = 2x^2 + 1$ on $[0, 1]$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

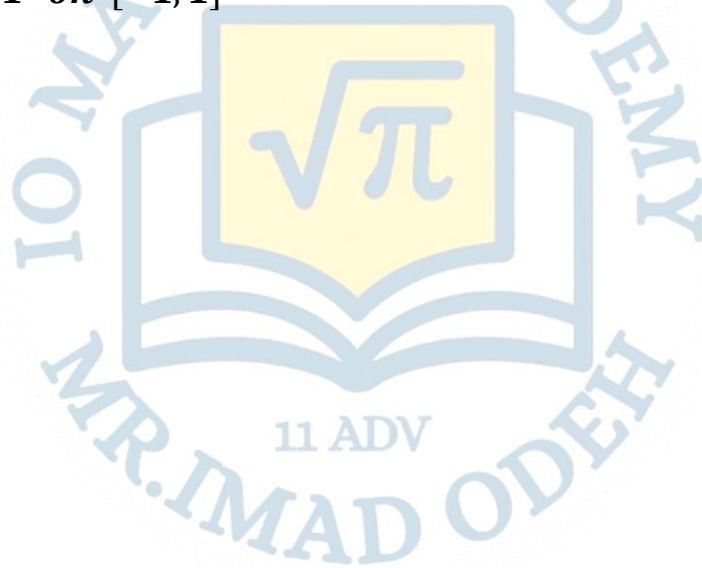
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

b) $f(x) = 2x^2 + 1$ on $[-1, 1]$



c) $f(x) = 2x^2 + 1$ on $[1, 3]$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q9

Use Riemann sums and a limit to compute the exact area under the curve.

اوجد القيمة الفعلية للمساحة تحت منحنى الدالة في الفترة المعطاة باستخدام نهاية مجموع ريمان

a) $f(x) = 4x^2 - 1$ on $[0, 1]$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

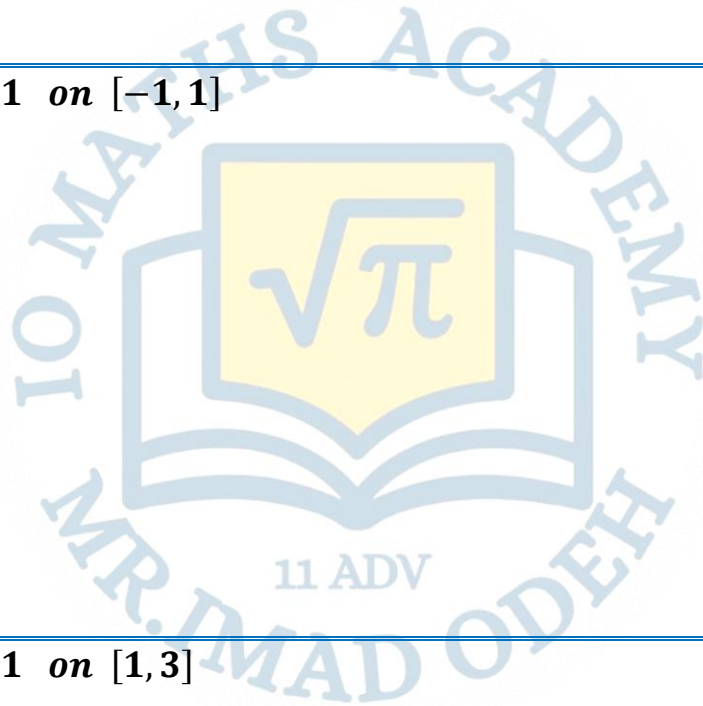
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

b) $f(x) = 4x^2 - 1$ on $[-1, 1]$



c) $f(x) = 4x^2 - 1$ on $[1, 3]$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q10 Use the given function values to estimate the area under the curve using left-endpoint and right endpoint evaluation.

استخدم قيم الدالة المعطاة لتقدير المساحة تحت المنحنى باستخدام قيم نقطة النهاية اليسرى ونقطة النهاية اليمنى

1)

Imad Odeh

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$f(x)$	2.0	2.4	2.6	2.7	2.6	2.4	2.0	1.4	0.6

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

2)

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
$f(x)$	2.0	2.2	1.6	1.4	1.6	2.0	2.2	2.4	2.0

3)

x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8
$f(x)$	1.8	1.4	1.1	0.7	1.2	1.4	1.8	2.4	2.6

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q11 Use the given function values to estimate the area under the curve using left-endpoint and right endpoint evaluation.

استخدم قيم الدالة المعطاة لتقدير المساحة تحت المنحنى باستخدام قيم نقطة النهاية اليسرى ونقطة النهاية اليمنى

1)

Imad Odeh

x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6
$f(x)$	0.0	0.4	0.6	0.8	1.2	1.4	1.2	1.4	1.0

ad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

2)

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
$f(x)$	1.0	1.4	1.6	2.0	2.2	2.4	2.0	1.6	1.4

3)

x	1.0	1.4	1.8	2.2	2.6	3.0	3.4	3.8	4.2
$f(x)$	4.0	3.4	3.6	3.0	2.6	2.4	3.0	3.6	3.4

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

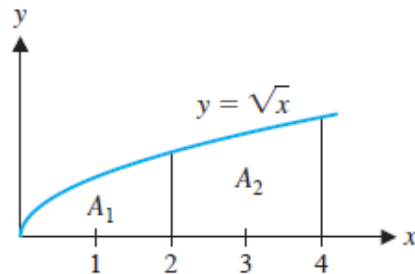
Imad Odeh

Imad Odeh

أسئلة سنوات سابقة واسئلة اخرى
 Past exam Questions

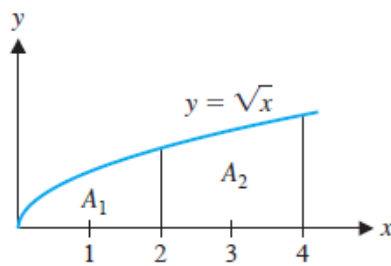
Q1 In the figure, which area equals $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{2} \sqrt{1 + \frac{1}{n}i} \frac{2}{n} \right) =$ في الشكل التالي أي من المساحات تمثل المقدار

- a) A_1
- b) A_2
- c) $A_1 + A_2$
- d) $A_2 - A_1$



Q2 In the figure, which area equals $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sqrt{\frac{1}{n} \sqrt{1 + 2i}} \frac{2}{n} \right) =$ في الشكل التالي أي من المساحات تمثل المقدار

- a) A_1
- b) A_2
- c) $A_1 + A_2$
- d) $A_2 - A_1$



Q3 What expression represent $A_1 + A_2$

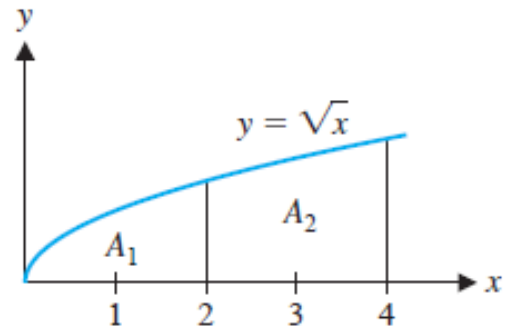
أي مقدار يمثل المساحة $A_1 + A_2$ استخدم النهاية اليمنى

a)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{2} \sqrt{1 + \frac{1}{n}i} \cdot \frac{2}{n} \right) =$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh



b)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{\frac{1}{n}} \sqrt{1 + 2i} \cdot \frac{2}{n} \right) =$$

c)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{n}i} \cdot \frac{2}{n} \right) =$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

d)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(4 \sqrt{\frac{1}{n}i} \cdot \frac{2}{n} \right) =$$

Q4 What expression represents the shaded area for the function $f(x)$ on $[1,3]$ using the left-endpoint

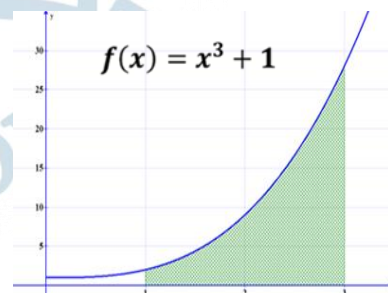
أي مقدار يمثل المساحة المظلمة للدالة $f(x)$ في الفترة $[1,3]$ باستخدام قيم النهاية اليسرى

a)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{2}{n}i \right) \cdot \left(\frac{2}{n} + 1 \right)^3$$

b)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{2}{n} \right)^3 \cdot \frac{2}{n}$$

c)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{2}{n}(i-1) \right)^3 + 1 \right] \cdot \frac{2}{n}$$

d)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\left[1 + \frac{2}{n}(i-1) \right]^3 + 1 \right) \cdot \frac{2}{n}$$



Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q5 Compute the exact area under the curve of the function $f(x)$ on the interval $[0,2]$ if

اوجد المساحة المحصورة تحت منحنى الدالة $f(x)$ في الفترة $[0,2]$ إذا علمت ان

$$\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x = \frac{(2n+1)(n-1)}{3n^2}$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

- a) $\frac{4}{9}$
- b) $\frac{1}{3}$
- c) $\frac{2}{3}$
- d) ∞

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q6 Approximate the area under the curve on the given interval using n rectangles and the evaluation rules left endpoint

اوجد قيمة تقريبية للمساحة تحت منحنى الدالة في لفترة المعطاء باستخدام n مستطيلات وذلك باستخدام نقطة النهاية اليسرى

$$f(x) = x^2 + 1 \text{ on } [0, 1], n = 16$$

- a) 1.3027
- b) 1.3330
- c) 1.3652
- d) 1.433

Q7 Approximate the area under the curve on the given interval using n rectangles and the evaluation rules right endpoint

اوجد قيمة تقريبية للمساحة تحت منحنى الدالة في لفترة المعطاء باستخدام n مستطيلات وذلك باستخدام نقطة النهاية اليمنى

$$f(x) = \sqrt{x+2} \text{ on } [0, 4], n = 16$$

- a) 6.2663
- b) 6.3340
- c) 6.4009
- d) 6.5

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q8 Approximate the area under the curve on the given interval using n rectangles and the evaluation rules midpoint اوجد قيمة تقريبية للمساحة تحت منحنى الدالة في لفترة المعطاء باستخدام n مستطيلات وذلك باستخدام نقطة منتصف المسافة

Imad Odeh $f(x) = e^{-2x}$ on $[-1, 1]$, $n = 16$ Imad Odeh Imad Odeh

a) 4.0991
 b) 3.6174
 c) 3.1924
 d) 4.8

Q9 Approximate the area under the curve on the given interval using n rectangles and the evaluation rules right end point اوجد قيمة تقريبية للمساحة تحت منحنى الدالة في لفترة المعطاء باستخدام n مستطيلات وذلك باستخدام نقطة النهاية اليمنى

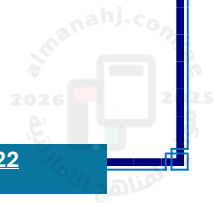
$f(x) = \cos x$ on $[0, \pi/2]$, $n = 16$

- a) 1.0156
 b) 1.00004
 c) 0.9842
 d) 1

Q10 Use the given function values to estimate the area under the curve using right endpoint evaluation. استخدم قيم الدالة المعطاة لتقدير المساحة تحت المنحنى باستخدام قيم نقطة النهاية اليمنى

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
$f(x)$	2.0	2.2	1.6	1.4	1.6

- a) 1.36
 b) 1.44
 c) 6.8
 d) 7.2
- Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh



Q11 Use the given function values to estimate the area under the curve using right endpoint evaluation.

استخدم قيم الدالة المعطاة لتقدير المساحة تحت المنحنى باستخدام قيمة نقطة النهاية اليمنى

Imad Odeh

Imad

x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
$f(x)$	0.0	0.4	0.6	0.8	1.2

Imad Odeh

- a) 0.6
- b) 0.36
- c) 3
- d) 4.76

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q12 Use the given function values to estimate the area under the curve using left endpoint evaluation.

استخدم قيم الدالة المعطاة لتقدير المساحة تحت المنحنى باستخدام قيمة نقطة النهاية اليسرى

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
$f(x)$	2.0	2.4	2.6	2.7	2.6

- a) 0.97
- b) 1.03
- c) 9.7
- d) 10.3

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q13 use Riemann sums and a limit to compute the exact area under the curve

اوجد القيمة الفعلية للمساحة تحت منحنى الدالة في الفترة المعطاة باستخدام نهاية مجموع ريمان

$$f(x) = 4 - x^2 \text{ on } [-2, 2]$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

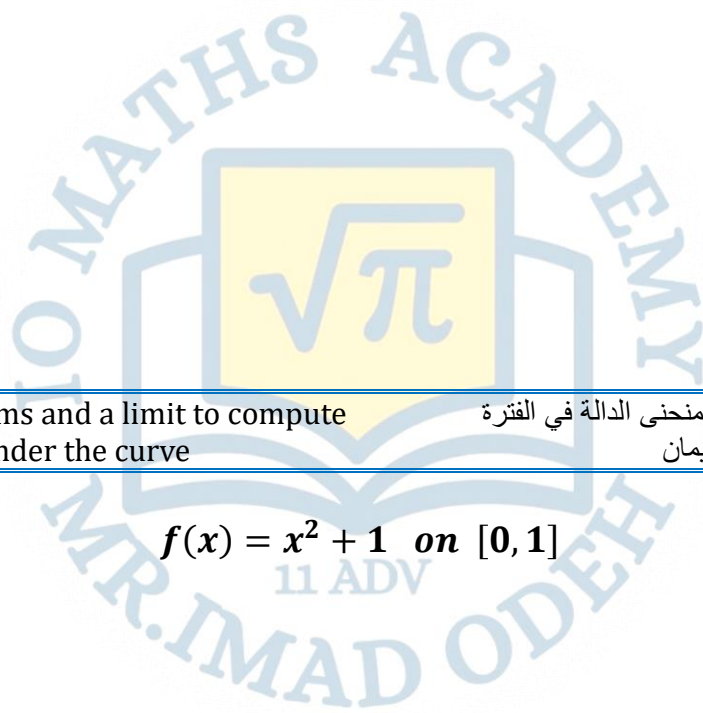
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh



Q14 use Riemann sums and a limit to compute the exact area under the curve

اوجد القيمة الفعلية للمساحة تحت منحنى الدالة في الفترة المعطاة باستخدام نهاية مجموع ريمان

$$f(x) = x^2 + 1 \text{ on } [0, 1]$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Lesson 4.4 THE DEFINITE INTEGRAL التكامل المحدد

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x$$

DEFINITION 4.1

التعريف 4.1

For any function f defined on $[a, b]$, the definite integral of f from a to b is

لأي دالة f مُعرَّفة على $[a, b]$ ، يكون التكامل المحدود لـ f من a إلى b هو

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x$$

whenever the limit exists and is the same for every choice of evaluation points, c_1, c_2, \dots, c_n . When the limit exists, we say that f is integrable on $[a, b]$.

متى وُجدت النهاية والأمر نفسه لكل اختيار من نقاط القيم c_1, c_2, \dots, c_n . عندما يكون هناك نهاية، نقول إن f قابلة للتكامل على $[a, b]$.

$$c_i = x_i$$

$$c_i = x_{i-1}$$

$$c_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$$

THEOREM 4.1

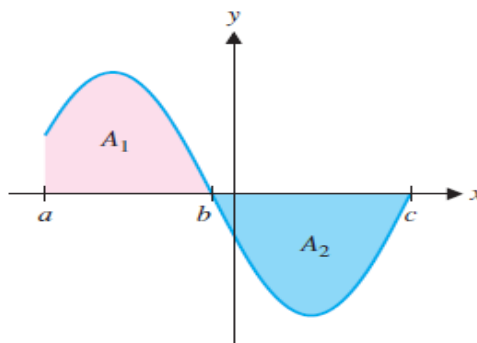
النظرية 4.1

If f is continuous on the closed interval $[a, b]$, then f is integrable on $[a, b]$.

إذا كانت f متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ ، فإن f تكون قابلة للتكامل على $[a, b]$.

The total area between $y = f(x)$ and the x -axis for $a \leq x \leq c$ is $A_1 + A_2$.

المساحة الإجمالية بين $y = f(x)$ ومحور x لكل $a \leq x \leq c$ هي $A_1 + A_2$.



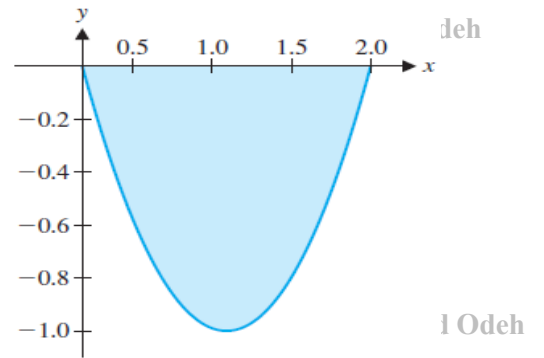
أي انه عند حساب المساحة تحت المنحنى يجب تجزيء المنطقة تحت المنحنى الى مناطق فوق محور x وتحت محور x ومن ثم حساب القيمة المطلقة لكل تكامل على حدة ومن ثم حساب المساحة الكلية

EXAMPLE

Compute the integrals and interpret each in terms of area using limit of **Riemann sum**

احسب التكاملين وفسّر كل منهما بدلالة المساحة باستخدام نهاية مجموع ريمان

a) $\int_0^2 (x^2 - 2x) dx$



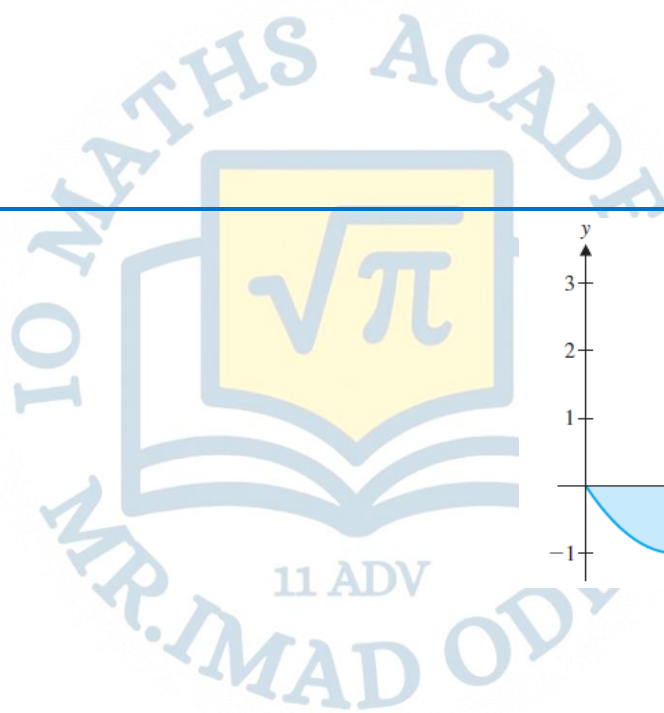
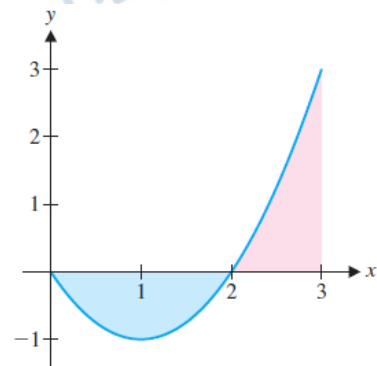
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

b) $\int_0^3 (x^2 - 2x) dx$



Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Exercises تمارين

Q1

Use the Midpoint Rule with $n = 6$ to estimate the value of the integral.

استخدم قاعدة نقطة المنتصف مع $n = 6$ لتقدير قيمة التكامل.

1)
$$\int_0^3 (x^3 + x) dx$$

Imad Odeh

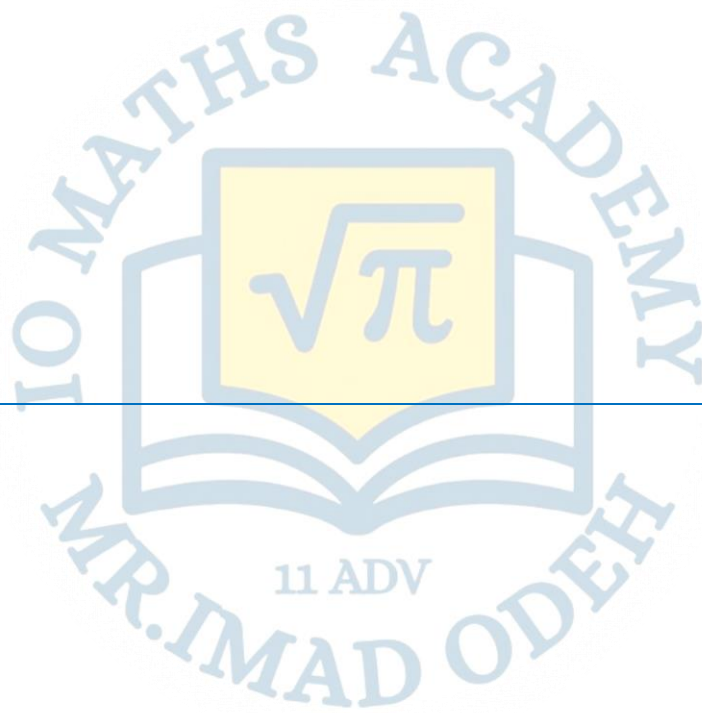
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

2)
$$\int_0^3 \sqrt{x^2 + 1} dx$$



Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q2

Evaluate the integral by computing the limit of Riemann sums.

اوجد قيمة التكامل بحساب نهاية مجموع ريمان.

1) $\int_0^1 2x \, dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

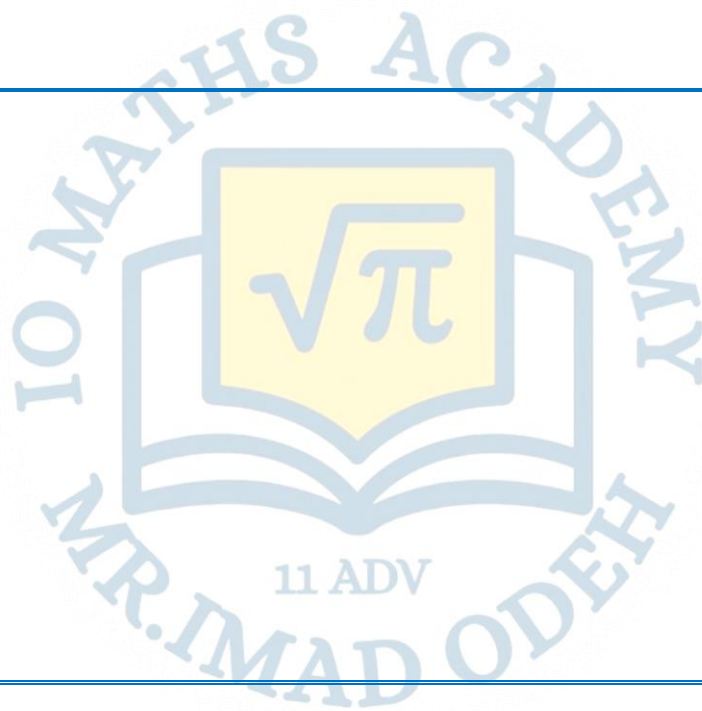
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

2) $\int_0^3 x^2 + 1 \, dx$



3) $\int_1^3 x^2 - 3 \, dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh



Q3

Evaluate the integral by computing the limit of Riemann sums.

اوجد قيمة التكامل بحساب نهاية مجموع ريمان.

1) $\int_{-2}^2 x^2 - 1 dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

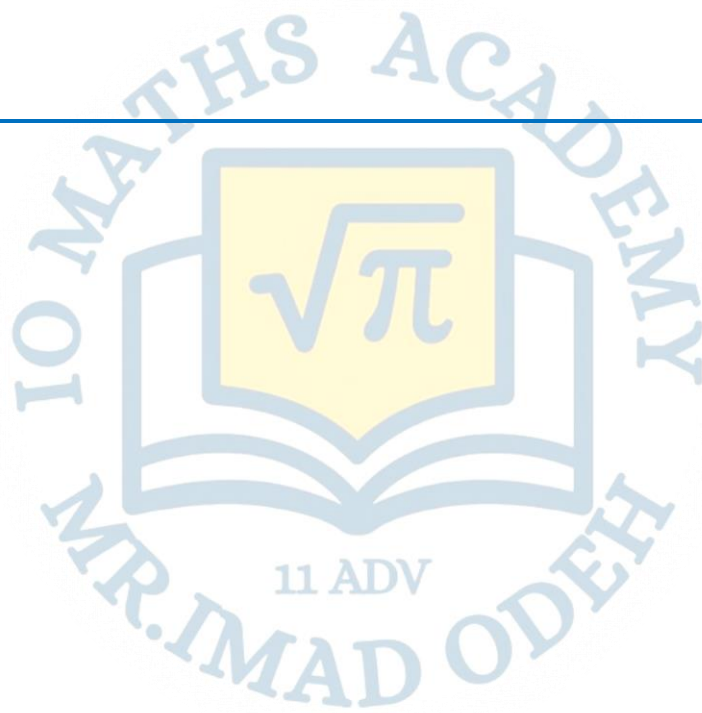
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

2) $\int_0^1 2x^2 - 1 dx$



3) $\int_0^2 x^2 + 1 dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q4

Use a geometric formula to compute the integral.

استخدم قوانين المساحة (مساحة المستطيل, الدائرة, المثلث) لايجاد قيمة كل من التكاملات التالية

1) $\int_0^2 3x \, dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

2) $\int_1^4 2x \, dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

3) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} \, dx$

4) $\int_{-3}^0 \sqrt{9-x^2} \, dx$

Q5

Express limit as an integral

عبر عن كل نهاية في صورة تكامل

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{n\pi}{n} \right]$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n+1}{n^2} + \frac{n+2}{n^2} + \dots + \frac{2n}{n^2} \right]$

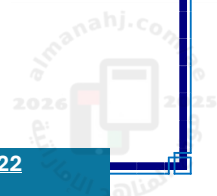
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

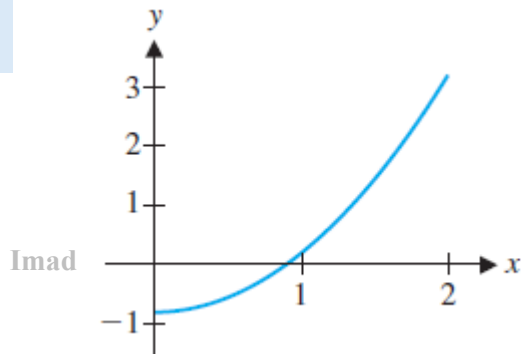


Q6 use the graph to determine whether the integral is positive or negative.

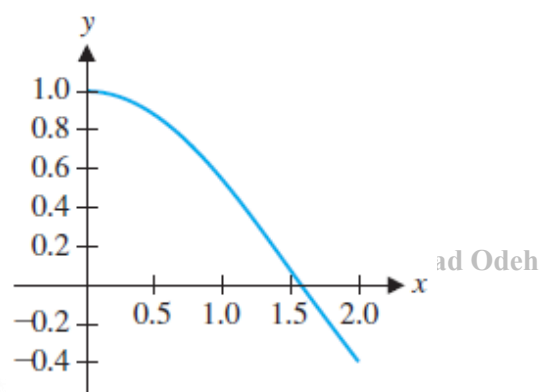
استخدم التمثيل البياني لتحديد ما إذا كان التكامل موجبة أو سالبة.

$$\int_0^2 f(x) dx$$

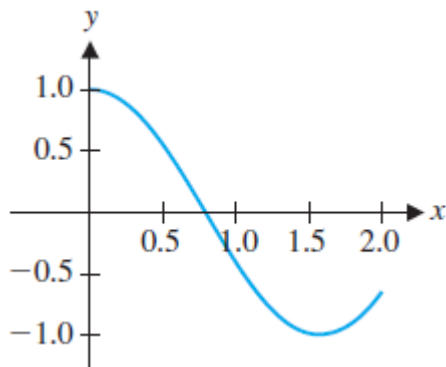
1)



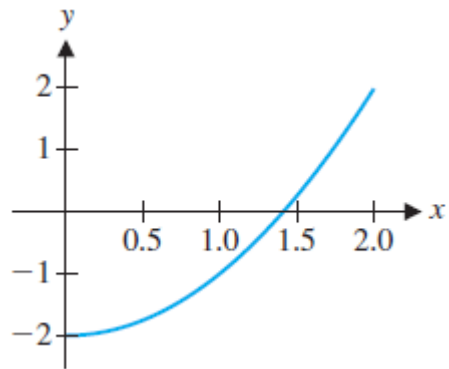
2)



3)



4)



أسئلة سنوات سابقة واسئلة اخرى
Past exam Questions

Q1 إذا كان مجموع ريمان للدالة $f(x)$ معطى بالعلاقة R_n (Riemman sum) for the $f(x)$ given

$$R_n = \frac{6n^2 + 12n + 4}{3n^2} - \frac{4n + 4}{n}, \text{ on } [0, 2]$$

Evaluate

اوجد قيمة

Imad Odeh

Imad Odeh

$$\int_0^5 f(x) dx =$$

Imad Odeh

Imad Odeh

- a) 2
b) -2
c) 4
d) 20

Q2 Which of the following limits is equal to

$$\int_1^3 x^3 dx$$

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{i}{n}\right)^3 \frac{1}{n}$
b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{i}{n}\right)^3 \frac{2}{n}$
c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{2i}{n}\right)^3 \frac{1}{n}$
d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{2i}{n}\right)^3 \frac{2}{n}$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q3 Which of the following integrals is equal to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(-1 + \frac{3i}{n}\right)^2 \frac{3}{n}$$

a) $\int_{-1}^2 x^2 dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

b) $\int_{-1}^0 x^2 dx$

c) $\int_{-1}^2 (-1 + x)^2 dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

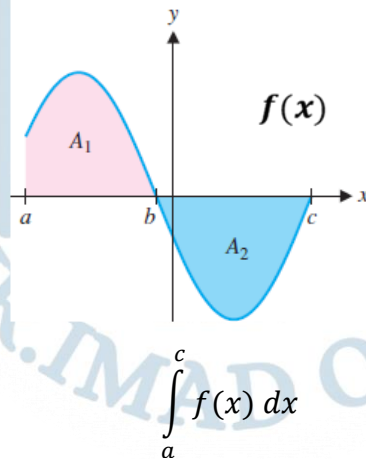
Imad Odeh

Imad Odeh

d) $\int_{-1}^0 \left(-1 + \frac{x}{3}\right)^2 dx$

Q4 Use the graph and the information to evaluate the integral

اعتمد على الرسم التالي في إيجاد قيمة التكامل



$A_1 = 12 \text{ unit}, A_2 = 17 \text{ unit}$

a) 29

b) 5

c) -5

d) 7

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q5 Evaluate

اوجد قيمة

$$\int_0^5 \sqrt{25 - x^2} dx$$

a) $\frac{25\pi}{8}$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

b) $\frac{25\pi}{4}$

c) $\frac{25\pi}{2}$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

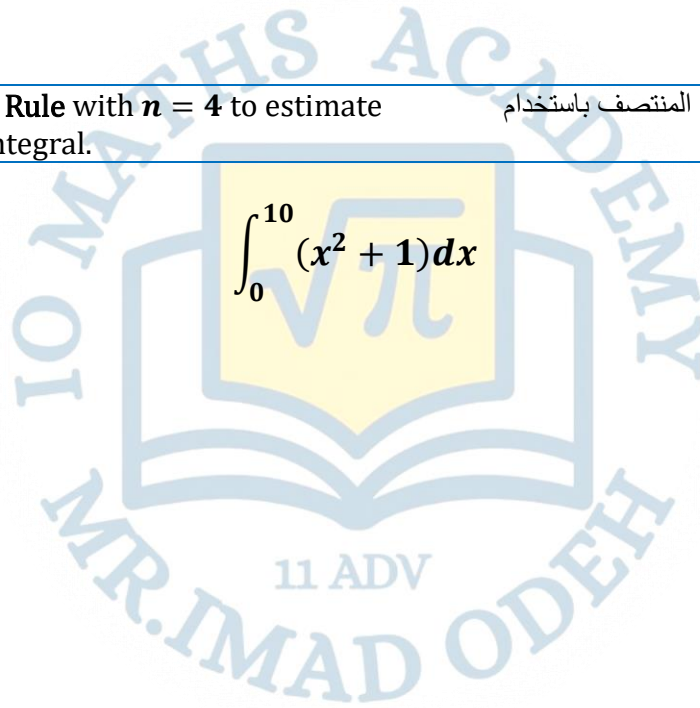
Imad Odeh

d) 25π

Q6 Use the Midpoint Rule with $n = 4$ to estimate the value of the integral.

اوجد قيمة التكامل باستخدام قاعدة المنتصف باستخدام $n = 4$

$$\int_0^{10} (x^2 + 1) dx$$



Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

بقية تمارين الدرس سيتم مناقشتها في الدرس التالي

Lesson 4.5

THE FUNDAMENTAL THEOREM OF CALCULUS

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

Part I

THEOREM 5.1

If f is continuous on $[a, b]$ and $F(x)$ is any antiderivative of $f(x)$, then

إذا كانت f دالة متصلة على $[a, b]$ و $F(x)$ هي أي دالة أصلية ل $f(x)$ ، فإن

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

REMARK 5.1

We will often use the notation

ملحوظة 5.1

سنستخدم غالبًا الرمز

$$F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

This enables us to write down the antiderivative before evaluating it at the endpoints.

وبذلك نتمكن من كتابة الدالة الأصلية قبل إيجاد قيمتها عند النقطتين الطرفيتين

EXAMPLE

Compute

اوجد قيمة

1) $\int_0^2 (x^2 - 2x) dx$

2) $\int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$

3) $\int_0^4 e^{-2x} dx$

4) $\int_{-3}^{-1} \frac{2}{x} dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Exercises تمارين

Q1 Use Part I of the Fundamental Theorem to compute each integral exactly. استخدم الجزء الأول من النظرية الأساسية لحساب كل تكامل بدقة.

$$1) \int_0^2 (2x - 3) dx$$

$$2) \int_0^3 (x^2 - 2) dx$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

$$3) \int_{-1}^1 (x^3 + 2x) dx$$

$$4) \int_0^2 (x^3 + 3x - 1) dx$$

$$5) \int_1^4 \left(x\sqrt{x} + \frac{3}{x} \right) dx$$

$$6) \int_1^2 \left(4x - \frac{2}{x^2} \right) dx$$

$$7) \int_0^{\pi/2} \sin 2x dx$$

$$8) \int_{\pi/2}^{\pi} (2 \sin x - \cos x) dx$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q2 Use Part I of the Fundamental Theorem to compute each integral exactly.

استخدم الجزء الأول من النظرية الأساسية لحساب كل تكامل بدقة.

1) $\int_0^{\pi/4} (\sec t \tan t) dt$

2) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} (3 \csc x \cot x) dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

3) $\int_0^{\pi/4} (\sec^2 t) dt$

4) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx$

5) $\int_0^{\pi/3} 4 \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

6) $\int_{\pi/2}^{\pi} 4 \frac{\sin 2x}{2 \sin x}$

7) $\int_0^1 (6e^{-3x} + 4) dx$

8) $\int_0^{10} (1 - e^{-t/4}) dt$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q3 Use Part I of the Fundamental Theorem to compute each integral exactly.

استخدم الجزء الأول من النظرية الأساسية لحساب كل تكامل بدقة.

1) $\int_0^2 \left(\frac{e^{2x} - 2e^{3x}}{e^{3x}} \right) dx$

2) $\int_0^{\ln 2} e^{3x} dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

1) $\int_1^2 \left(\frac{1}{x} - e^{-x} \right) dx$

2) $\int_0^2 \frac{2x}{x^2 + 1} dx$

3) $\int_0^2 \frac{3x}{x^2 + 1} dx$

4) $\int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} \right) dx$

5) $\int_{-1}^1 \left(\frac{4}{1+x^2} \right) dx$

6) $\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q4 Use Part I of the Fundamental Theorem to compute each integral exactly.

استخدم الجزء الأول من النظرية الأساسية لحساب كل تكامل بدقة.

7) $\int_1^4 \frac{t-3}{t} dt$

Imad Odeh

8) $\int_0^4 t(t-2) dt$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

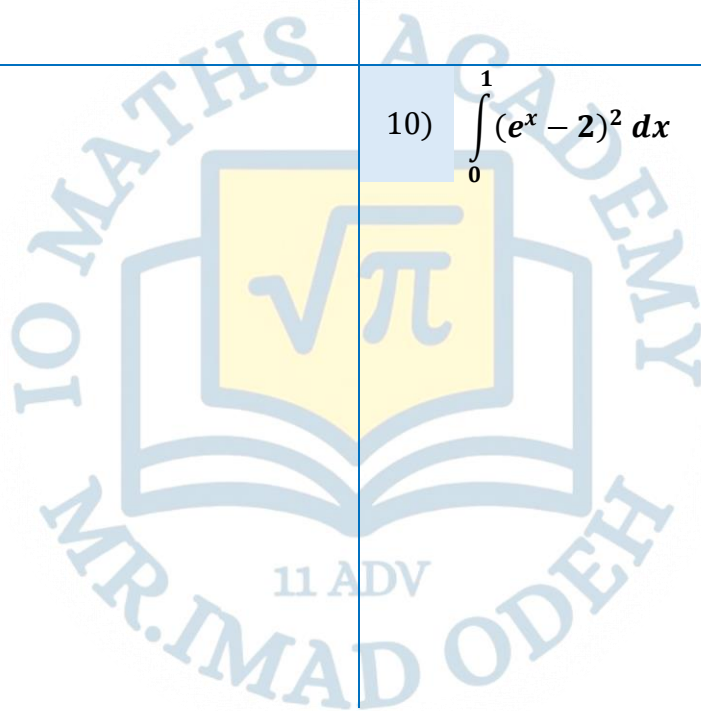
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

9) $\int_0^2 x(x^2 + 1) dx$

10) $\int_0^1 (e^x - 2)^2 dx$



EXAMPLE

Evaluate

اوجد قيمة

$$\int_1^x 12 t^5 dt$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Exercises تمارين

Q1 Use Part I of the Fundamental Theorem to compute each integral exactly. استخدم الجزء الأول من النظرية الأساسية لحساب كل تكامل بدقة.

1) $\int_0^t (e^{\frac{x}{2}})^2 dx$

2) $\int_0^t (\sin^2 x + \cos^2 x) dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

أسئلة سنوات سابقة واسئلة اخرى
Past exam Questions

Q1 Evaluate

أوجد قيمة

$$\int_1^2 2x dx$$

- a) 3
b) 7
c) 6
d) 2

Q2 Evaluate

أوجد قيمة

$$\int_0^3 (x^2 - 2) dx$$

- a) 3
b) 7
c) 24
d) 2

Q3 Evaluate

أوجد قيمة

$$\int_1^2 \left(4x + \frac{3}{x^2}\right) dx$$

- a) $\frac{13}{2}$ Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
- b) $\frac{2}{15}$
- c) $\frac{15}{2}$
- d) $\frac{15}{2}$ Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q4 Evaluate

أوجد قيمة

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} (3 \csc x \cot x) dx$$

- a) $3 \csc \frac{\pi}{2} - 3 \csc \frac{\pi}{4}$
- b) $-3 \csc \frac{\pi}{2} + 3 \csc \frac{\pi}{4}$
- c) $3 \cot \frac{\pi}{2} - 3 \cot \frac{\pi}{4}$
- d) $-3 \cot \frac{\pi}{2} + 3 \cot \frac{\pi}{4}$

Q5 Evaluate

أوجد قيمة

$$\int_0^{\pi/4} (\sec^2 t) dt$$

- a) $\tan \frac{\pi}{4}$
- b) $-\tan \frac{\pi}{4}$
- c) $\sec^3 \left(\frac{\pi}{4}\right)$
- d) $-\sec^3 \left(\frac{\pi}{4}\right)$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q6 Evaluate أوجد قيمة

$$\int_0^{\pi/4} (\sec t \tan t) dt$$

- a) $\sec \frac{\pi}{4} - 1$ Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
- b) $1 - \sec \frac{\pi}{4}$
- c) $\sec \frac{\pi}{4} \sec \frac{\pi}{4}$
- d) $\sec \frac{\pi}{4} \sec \frac{\pi}{4} - 1$ Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q7 Evaluate أوجد قيمة

$$\int_0^{\pi/2} \sin 2x dx$$

- a) -1
- b) 1
- c) 2
- d) -2

Q8 Evaluate أوجد قيمة

$$\int_0^{\pi/4} (\sin x - \cos x) dx$$

- a) $\sqrt{2} - 1$
- b) $\sqrt{2} + 1$
- c) $-\sqrt{2} - 1$
- d) $-\sqrt{2} + 1$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q9 Evaluate

أوجد قيمة

$$\int_0^{1/2} \left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$$

a) $3\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

b) $3\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

c) $-3\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

d) $-3\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

Q10 Evaluate

أوجد قيمة

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{4}{1+x^2} \right) dx$$

a) $4 \cot^{-1}(-1) - 4 \cot^{-1}(1)$

b) $4 \tan^{-1}(-1) - 4 \tan^{-1}(1)$

c) $4 \cot^{-1}(1) - 4 \cot^{-1}(-1)$

d) $4 \tan^{-1}(1) - 4 \tan^{-1}(-1)$

Q11 If

$$\int_0^k (k-x) dx = 8$$

a) 2

b) 16

c) 4

d) 1

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q12 Evaluate

أوجد قيمة

$$\int_0^t (e^{\frac{x}{2}})^2 dx$$

a) $e^t - 1$

b) $e^t + 1$

c) $1 - e^t$

d) 1

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q13 Evaluate

أوجد قيمة

$$\int_0^t (\sin^2 x + \cos^2 x) dx$$

a) t

b) $\sin^3 t + \cos^3 t$

c) $\sin^2 t + \cos^2 t$

d) $t - 1$

Q14

let

لتكن

$$\int_0^5 f(x) + 2x dx = 17$$

Find

اوجد

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta x f(x_i) , [0, 5]$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Area under the curve

المساحة تحت المنحنى

If f is continuous on $[a, b]$ and $f(x) \geq 0$ on $[a, b]$, then

إذا كانت f متصلة على $[a, b]$ و $f(x) \geq 0$ على $[a, b]$ ، فإدًا

Area under the curve

المساحة تحت المنحنى

Imad Odeh

Imad Odeh

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

Imad Odeh

Imad Odeh

EXAMPLE

write the given (total) area as an integral or sum of integrals then find the area under the curve

اكتب (مجمّل) المساحة المعطاة في صورة تكامل أو ناتج جمع تكاملات. ثم اوجد المساحة تحت منحنى

$$f(x) = \sin x \text{ on the interval } [0, \pi].$$

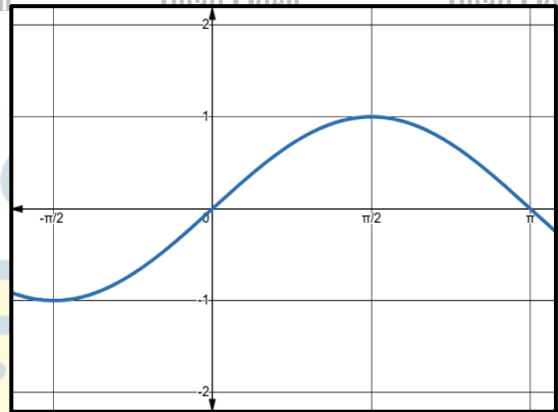
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh



Exercises تمارين

Q1

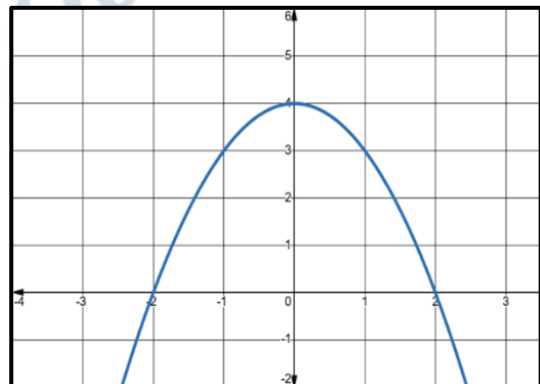
write the given (total) area as an integral or sum of integrals then find

اكتب (مجمّل) المساحة المعطاة في صورة تكامل أو ناتج جمع تكاملات. ثم

The area above the x -axis and below

$$y = 4 - x^2$$

اوجد المساحة فوق محور x وتحت منحنى الدالة



Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q2

write the given (total) area as an integral or sum of integrals then find
The area below the x -axis and above

اكتب (مجملة) المساحة المعطاة في صورة تكامل أو ناتج جمع تكاملات. ثم
اوجد المساحة تحت محور x وفوق منحنى الدالة

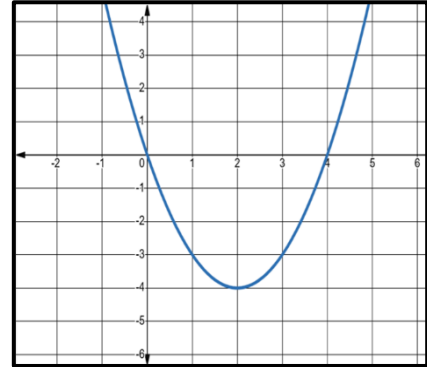
Imad Odeh

Imad Odeh

$$y = x^2 - 4x$$

Imad Odeh

Imad Odeh



Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

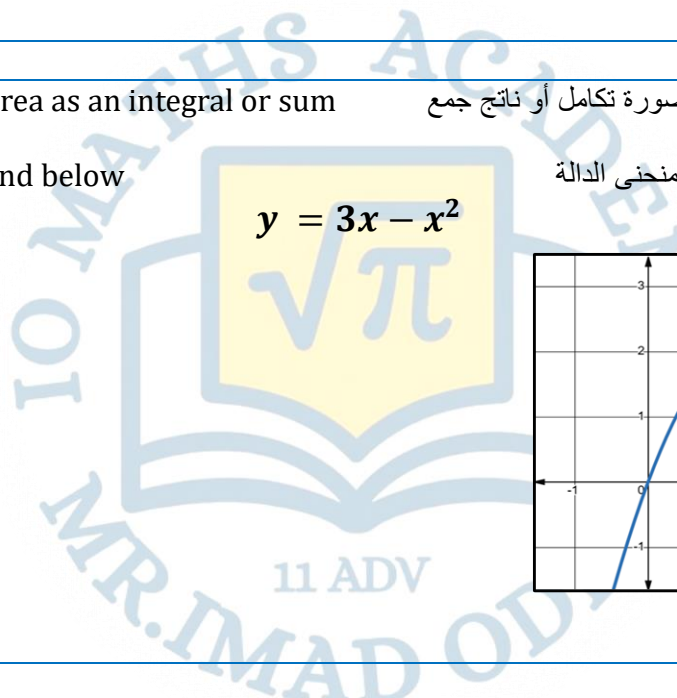
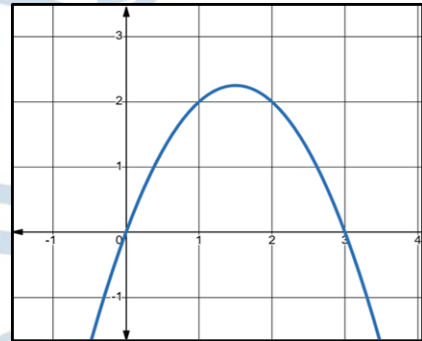
Imad Odeh

Q3

write the given (total) area as an integral or sum of integrals then find
The area above x -axis and below

اكتب (مجملة) المساحة المعطاة في صورة تكامل أو ناتج جمع تكاملات. ثم
اوجد المساحة فوق محور x وتحت منحنى الدالة

$$y = 3x - x^2$$

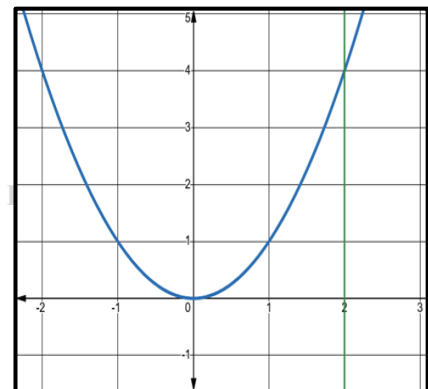


Q4

write the given (total) area as an integral or sum of integrals then find
The area of the region bounded by and the x -axis

اكتب (مجملة) المساحة المعطاة في صورة تكامل أو ناتج جمع تكاملات. ثم
اوجد المساحة المحصورة بين محور x

$$y = x^2, x = 2$$



Imad Odeh

Imad Odeh

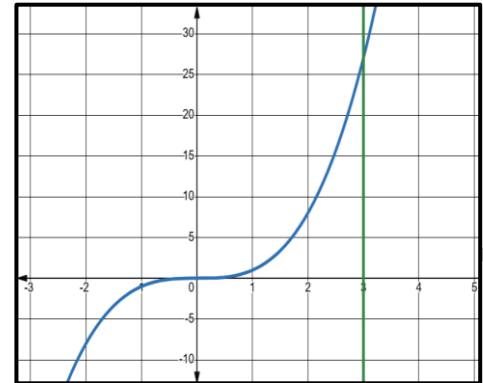
Imad Odeh

Q5

write the given (total) area as an integral or sum of integrals then find
The area of the region bounded by and the x -axis

اكتب (مجملة) المساحة المعطاة في صورة تكامل أو ناتج جمع تكاملات. ثم المساحة المحصورة بين ومحور x

$$y = x^3, x = 3$$



Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

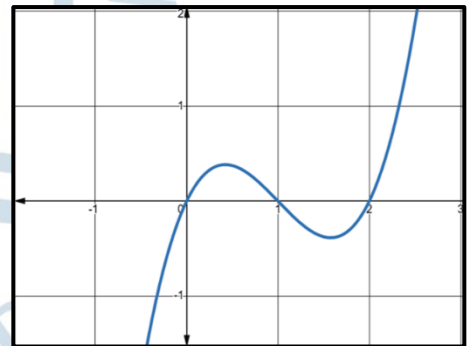
eh

Q6

write the given (total) area as an integral or sum of integrals then find
The area of the region bounded by and the x -axis

اكتب (مجملة) المساحة المعطاة في صورة تكامل أو ناتج جمع تكاملات. ثم المساحة المحصورة بين ومحور x

$$y = x^3 - 3x^2 + 2x, 0 \leq x \leq 2$$

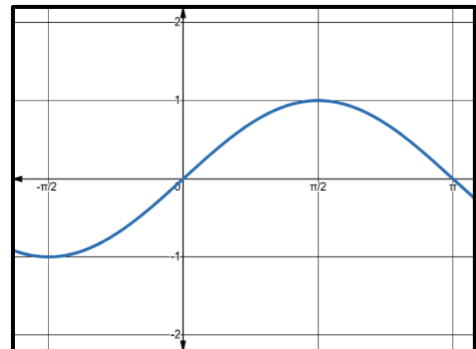


Q7

write the given (total) area as an integral or sum of integrals then find
The area between y and the x -axis

اكتب (مجملة) المساحة المعطاة في صورة تكامل أو ناتج جمع تكاملات. ثم اوجد المساحة تحت منحنى y ومحور x

$$y = \sin x \text{ for } 0 \leq x \leq \pi$$



Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q8

write the given (total) area as an integral or sum of integrals then find

اكتب (مجملة) المساحة المعطاة في صورة تكامل أو ناتج جمع تكاملات. ثم

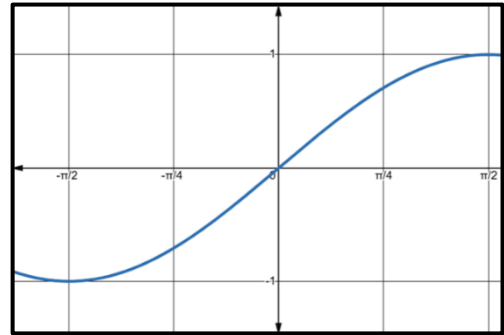
The area between y and the x -axis

اوجد المساحة تحت منحنى y ومحور x

Imad Odeh

Imad Odeh $y = \sin x$ for $-\pi/4 \leq x \leq \pi/4$ Imad Odeh

Imad Odeh



Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Odeh

أسئلة سنوات سابقة واسئلة اخرى

Past exam Questions

Q1 write the given (total) area as an integral or sum of integrals. The area above x -axis and below

اكتب مجمل المساحة المعطاة في صورة تكامل أو ناتج جمع تكاملات المساحة فوق المحور x وتحت

$$y = 4x - x^2$$

- a) $\int_0^4 (4x - x^2) dx$
- b) $\int_{-4}^0 -(4x - x^2) dx$
- c) $\int_0^4 -(4x - x^2) dx$
- d) $\int_0^2 (4x - x^2) dx$

Q2 write the given (total) area as an integral or sum of integrals. above x -axis and below

اكتب مجمل المساحة المعطاة في صورة تكامل أو ناتج جمع تكاملات المساحة فوق المحور x وتحت

$$y = 4 - x^2$$

- a) $\int_{-2}^2 (4 - x^2) dx$
- b) $\int_{-2}^2 -(4 - x^2) dx$
- c) $\int_0^2 -(4 - x^2) dx$
- d) $\int_0^2 (4 - x^2) dx$

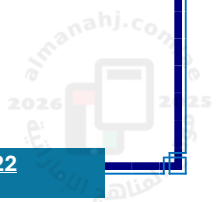
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh



خواص التكامل المحدد

THEOREM 4.2

النظرية 4.2

If f and g are integrable on $[a, b]$, then the following are true. إذا كانت f و g قابلتين للتكامل على $[a, b]$ ، فإن ما يأتي يكون صحيحًا.

(i) For any constants c and d , لأي عددين c و d

$$\int_a^b [cf(x) + dg(x)] dx = c \int_a^b f(x) dx + d \int_a^b g(x) dx$$

(ii) For any c in $[a, b]$, لأي عدد c في الفترة $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

(iii)
$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

(iv)
$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

Example

Evaluate

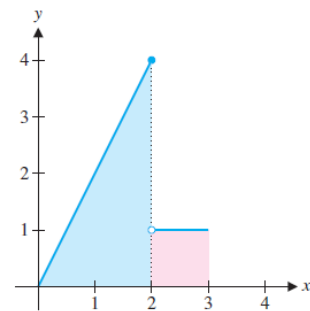
$$\int_0^3 f(x) dx$$

أوجد قيمة

Where

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{if } x \leq 2 \\ 1, & \text{if } x > 2 \end{cases}$$

حيث



Exercises تمارين

Q1

Evaluate

Imad Odeh

$$\int_0^4 f(x) dx$$

Imad Odeh

اوجد قيمة

Where

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{if } x < 1 \\ 4, & \text{if } x \geq 1 \end{cases}$$

حيث

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q2

Evaluate

$$\int_0^4 f(x) dx$$

اوجد قيمة

Where

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{if } x \leq 2 \\ 3x, & \text{if } x > 2 \end{cases}$$

حيث

Q3 Weite the expression as a single integral.

اكتب ما يلي على صورة تكامل منفرد

$$1) \int_0^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx$$

$$2) \int_0^3 f(x) dx - \int_2^3 f(x) dx$$

$$3) \int_0^2 f(x) dx + \int_2^1 f(x) dx$$

$$4) \int_{-1}^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx$$

Q4 Assume that

افرض ان

$$\int_1^3 f(x) dx = 3, \int_1^3 g(x) dx = -2$$

Imad Odeh
Find

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

أوجد

1) $\int_1^3 [f(x) + g(x)] dx =$

2) $\int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx =$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

3) $\int_1^3 [f(x) - g(x)] dx =$

4) $\int_1^3 [4f(x) - 3g(x)] dx =$

EXAMPLE

Suppose the (downward) velocity of a sky diver is given by $v(t)$ for the first 5 seconds of a jump. Compute the distance fallen.

لنتكن سرعة سقوط مظلي للخمس ثواني الأولى معطاة بالعلاقة التالية احسب مسافة السقوط

$$v(t) = 30(1 - e^{-t}) \text{ ft/s}$$

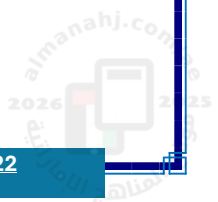
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh



Exercises تمارين

Q1 Use the given velocity function and initial position to estimate the final position $s(b)$.

استخدم دالة السرعة المتجهة المعطاة والموقع الابتدائي لتقدير الموقع النهائي $s(b)$

Imad Odeh
1) $v(t) = 40(1 - e^{-2t}), s(0) = 0, b = 4$

Imad Odeh
2) $v(t) = 30e^{-t/4}, s(0) = -1, b = 4$

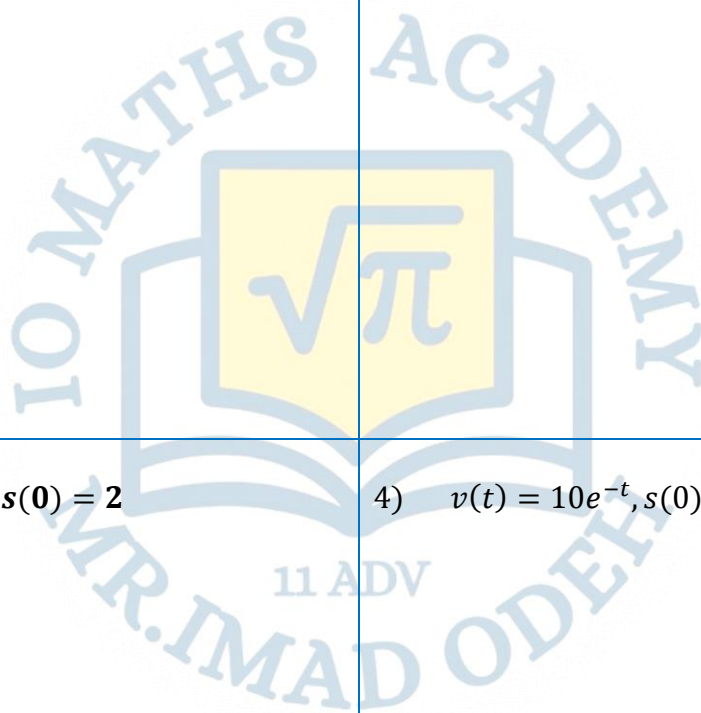
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh



3) $v(t) = 40 - \sin t, s(0) = 2$

4) $v(t) = 10e^{-t}, s(0) = 2$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q2 Use the given velocity function and initial position to estimate the final position $s(b)$.

استخدم دالة السرعة المتجهة المعطاة والموقع الابتدائي لتقدير الموقع النهائي $s(b)$

1) $a(t) = 4 - t, v(0) = 8, s(0) = 0$

2) $a(t) = 16 - t^2, v(0) = 0, s(0) = 30$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

3) $v(t) = 40 - 10t, [1, 2]$

4) $v(t) = 20e^{-t/2}, [0, 2]$

3)

4)

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh



أسئلة سنوات سابقة واسئلة اخرى
Past exam Questions

Q1 Assume that Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh افرض ان

$$\int_2^4 f(x) dx = -5, \int_2^4 g(x) dx = 3$$

Find

$$\int_2^4 [4f(x) - 3g(x)] dx =$$

أوجد

- a) 29 Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
 b) -29
 c) 2
 d) 1

Q2 Assume that افرض ان

$$\int_1^4 f(x) dx = 5, \int_1^4 g(x) dx = -3$$

Find

$$\int_1^4 [2f(x) - g(x)] dx =$$

أوجد

- a) 2
 b) 7
 c) 8
 d) 13

Q3 Assume that افرض ان

$$\int_0^2 f(x) dx = -8, \int_0^2 g(x) dx = 5$$

Find

$$\int_0^2 [4g(x) - f(x)] dx =$$

أوجد

- a) -12 Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
 b) 12
 c) 28
 d) -37

Q4 Assume that افرض ان

$$f(x) = \begin{cases} 4x, & x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Find أوجد

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

$$\int_0^3 f(x) dx$$

- a) 6
- b) 9
- c) 16
- d) 21

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

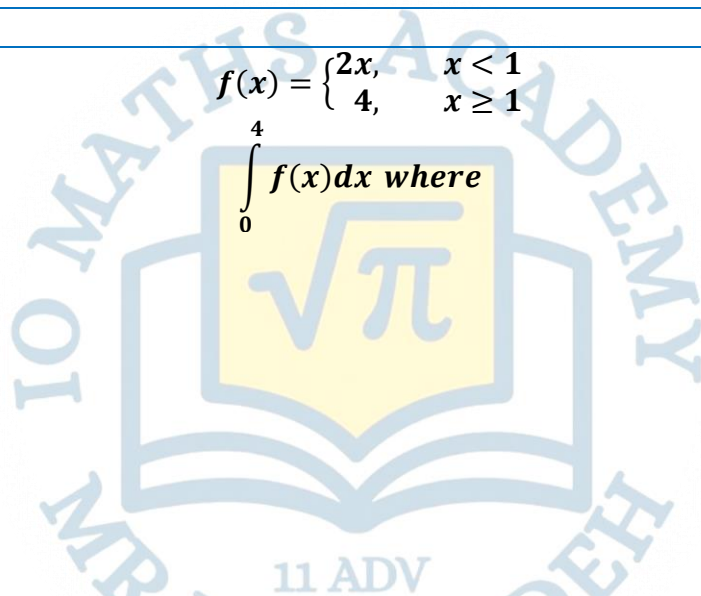
Q5 Assume that افرض ان

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1 \\ 4, & x \geq 1 \end{cases}$$

Find أوجد

$$\int_0^4 f(x) dx \text{ where}$$

- a) 11
- b) -11
- c) 32
- d) 13



Q6 Assume that افرض ان

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 2 \\ 3x, & x > 2 \end{cases}$$

Find أوجد

$$\int_0^4 f(x) dx \text{ where } f(x) =$$

- a) 22
- b) 18
- c) 16
- d) 21

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q7 Write the expression as a single integral.

$$\int_0^5 f(x) dx - \int_2^5 f(x) dx$$

a) $\int_0^2 f(x) dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

b) $\int_2^5 f(x) dx$

c) $\int_5^2 f(x) dx$

d) $\int_0^5 f(x) dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q8 Write the expression as a single integral.

$$\int_3^4 f(x) dx + \int_{-2}^3 f(x) dx$$

a) $\int_{-2}^4 f(x) dx$

b) $\int_{-2}^3 f(x) dx$

c) $\int_3^4 f(x) dx$

d) $\int_3^{-2} f(x) dx$

Q9 Let

$$\int_1^3 f(x) dx = 4 \text{ and } \int_1^3 g(x) dx = -3$$

Find

1) $4 \int_1^3 f(x) dx - 3 \int_3^1 g(x) dx$

2) $\int_1^3 [2g(x) - 5f(x)] dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

Part II

THEOREM 5.2**النظرية 5.2**

If f is continuous on $[a, b]$ and

إذا كانت الدالة متصلة على $[a, b]$ و

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \text{ then } F'(x) = f(x) \text{ on } [a, b]$$

Imad Odeh

$$F(x) = \int_a^{u(x)} f(t) dt \text{ then } F'(x) = f(u(x)) \cdot u'(x)$$

Imad Odeh

EXAMPLE

Compute $F'(x)$.

أوجد $F'(x)$.

1) $F(x) = \int_1^x (t^2 - 2t + 3) dt$

2) $F(x) = \int_2^{x^2} \cos t dt$

3) $F(x) = \int_{2x}^{x^2} \sqrt{t^2 + 1} dt$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q1

Compute $F'(x)$.

$F'(x)$. اوجد

1) $f(x) = \int_0^x (t^2 - 3t + 2) dt$

2) $f(x) = \int_2^x (t^2 - 3t - 4) dt$

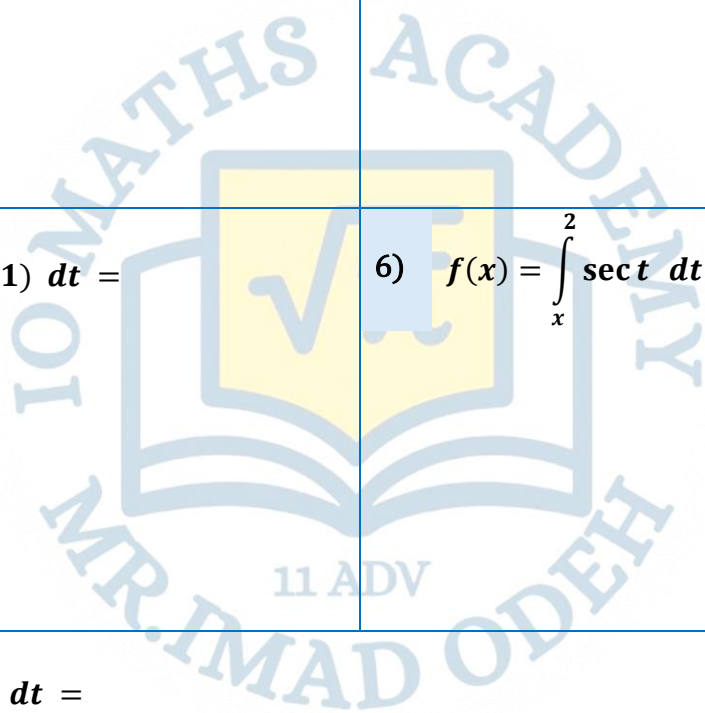
3) $f(x) = \int_2^x (\sin t^2 - 2) dt$

4) $f(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{t^2 + 1} dt$

5) $f(x) = \int_0^{x^2} (e^{-t^2} + 1) dt =$

6) $f(x) = \int_x^2 \operatorname{sect} t dt =$

7) $f(x) = \int_{e^x}^{2-x} \sin t^2 dt =$



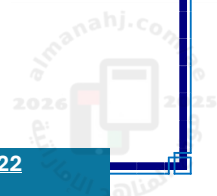
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh



Q2

Compute $F'(x)$.

$F'(x)$. اوجد

8)

$$f(x) = \int_{2-x}^{xe^x} e^{2t} dt =$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

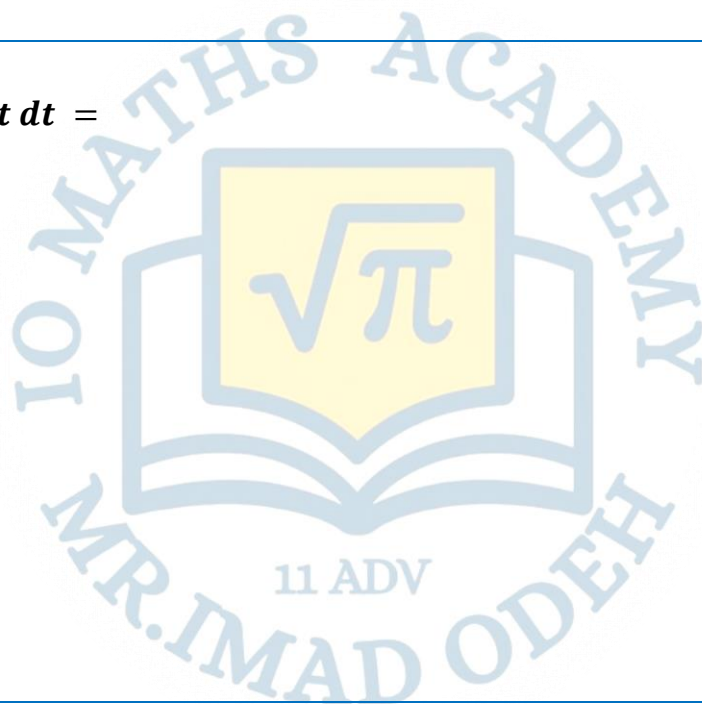
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

9)

$$f(x) = \int_{x^2}^{x^3} \sin 3t dt =$$



10)

$$f(x) = \int_{3x}^{\sin x} (t^2 + 4) dt =$$

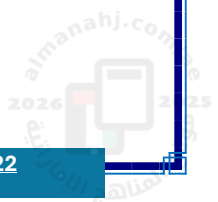
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh



EXAMPLE

مثال

Find an equation of the tangent line at $x = 2$.

اوجد معادلة الخط المماس للدالة $F(x)$ عند $x = 2$

$$F(x) = \int_4^{x^2} \ln(t^3 + 4) dt$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Find an equation of the tangent line at the given value of x .

اوجد معادلة الخط المماس للدالة $F(x)$ عند النقطة المعطاة

Q1 $y = \int_0^x \sin \sqrt{t^2 + \pi^2} dt, \quad x = 0$

Q2 $y = \int_{-1}^x \ln(t^2 + 2t + 2) dt, \quad x = -1$

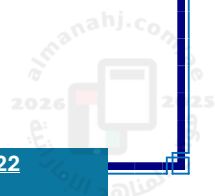
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh



Find an equation of the tangent line at the given value of x .

اوجد معادلة الخط المماس للدالة $F(x)$ عند النقطة المعطاة

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q3

$$y = \int_2^x \cos(\pi t^3) dt, \quad x = 2$$

Imad Odeh

Imad Odeh

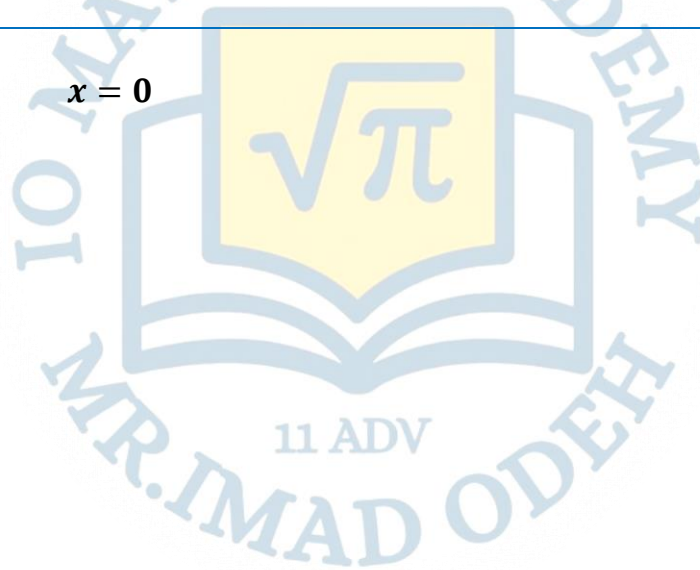
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q4

$$y = \int_0^x e^{-t^2+1} dt, \quad x = 0$$



Q5

$$f(x) = \int_0^x (t^2 - 3t + 2) dt,$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q6 Identify all local extrema of

$$\int_0^x (t^2 - 3t + 2) dt$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

أسئلة سنوات سابقة واسئلة اخرى
Past exam Questions

Q1 If

إذا كانت

$$F(x) = \int_x^2 (t - 4) dt =$$

Evaluate

اوجد قيمة

- a) $F'(x) = 4 - x$
- b) $F'(x) = x - 4$
- c) $F'(x) = x + 4$
- d) $F'(x) = 2x - 4$

Q2 If

إذا كانت

$$f(x) = \int_x^{x^2} \sin 3t dt =$$

Evaluate

اوجد قيمة

- a) $f'(x) = 2x \sin 3x^2 - \sin 3x$
- b) $f'(x) = 2x \sin 3x^2 + \sin 3x$
- c) $f'(x) = \sin 3x - 2x \sin 3x^2$
- d) $f'(x) = \sin 3x^2 - \sin 3x$

Q3 If إذا كانت

Imad Odeh

Imad Odeh

$$f(x) = \int_{2-x}^{xe^x} e^{2t} dt =$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Evaluate

اوجد قيمة

$$f'(x)$$

a) $f'(x) = e^{2(xe^x)} + e^{2(2-x)}$

b) $f'(x) = e^{2(xe^x)}(e^x + xe^x) - e^{2(2-x)}$

c) $f'(x) = e^{2(xe^x)}(e^x + xe^x) + e^{2(2-x)}$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

d) $f'(x) = e^{2(xe^x)} - e^{2(2-x)}$

Q4 Find an equation of the tangent line at the given value of x . أوجد معادلة الخط المماس عند القيمة المعطاة لـ x .

$$f(x) = \int_0^x \ln(t^2 + 1) dt \text{ at } x = 1$$

a) $y = (\ln 2)(x - 1)$

b) $y = (\ln 2)(x - 1) - 0.264$

c) $y = (\ln 2)(x + 1) + 0.264$

d) $y = (\ln 2)(x - 1) + 0.264$

Q5 If إذا كانت

$$f(x) = \int_{3x}^{\sin x} (t^2 + 4) dt =$$

Evaluate

اوجد قيمة

$$f'(x)$$

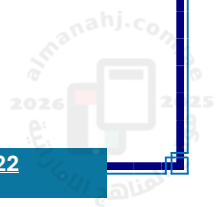
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh



Q6 Find an equation of the tangent line at the given value of x . أوجد معادلة الخط المماس عند القيمة المعطاة لـ x .

Imad Odeh

Imad Odeh $y = \int_2^x \cos(\pi t^3) dt,$ Imad Odeh

$x = 2$ Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

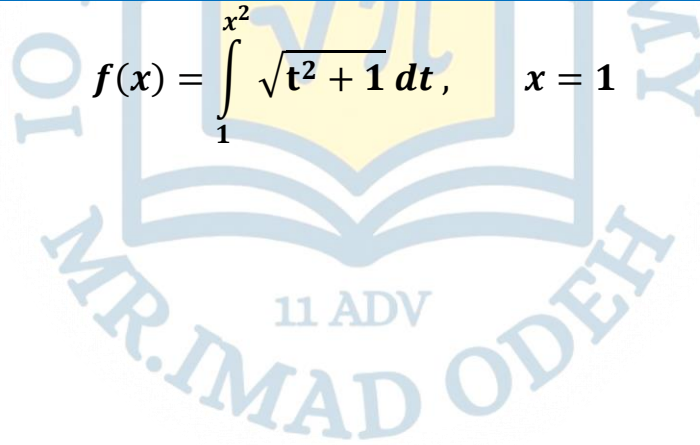
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q7 Find an equation of the tangent line at the given value of x . أوجد معادلة الخط المماس عند القيمة المعطاة لـ x .



$f(x) = \int_1^{x^2} \sqrt{t^2 + 1} dt,$ $x = 1$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

THEOREM 4.3

النظرية 4.3

Suppose that $g(x) \leq f(x)$ for all $x \in [a, b]$ and that f and g are integrable on $[a, b]$. Then,

على فرض أن $g(x) \leq f(x)$ لكل $x \in [a, b]$ وأن f و g قابلتان للتكامل على $[a, b]$. إذاً

Imad Odeh

Imad Odeh

$$\int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Average Value of a Function

نظرية القيمة المتوسطة

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

$$f_{avg} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x \right] = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

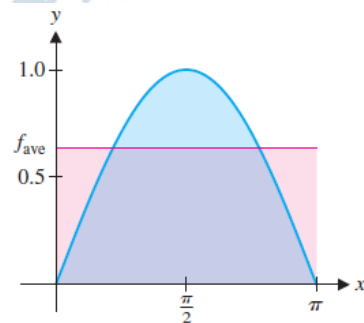
$$f_{avg} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

EXAMPLE

Compute the average value of

$f(x) = \sin x$ on the interval $[0, \pi]$.

مثال
احسب القيمة المتوسطة لـ



Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q1

Compute the average value of

1) $f(x) = 2x + 1, [0, 4]$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

احسب القيمة المتوسطة ل

2) $f(x) = x^2 + 2x, [0, 1]$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

3) $f(x) = x^2 - 1, [1, 3]$

4) $f(x) = 2x - 2x^2, [0, 1]$

5) $f(x) = \cos x, [0, \pi/2]$

6) $f(x) = e^x, [0, 2]$

7) $f(x) = 4x - x^2, [0, 4]$

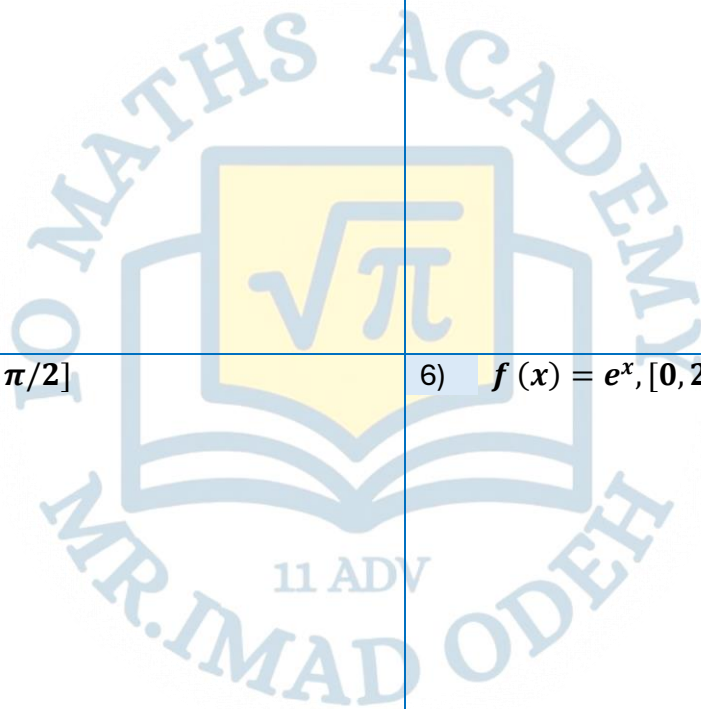
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh



That for any integrable function f ,
if $m \leq f(x) \leq M$, for all $x \in [a, b]$,

إذا كانت $m \leq f(x) \leq M$ ، لكل $x \in [a, b]$ ، فإن
المتباينة تنطبق على

Imad Odeh

Imad Odeh

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$$

Imad Odeh

Imad Odeh

EXAMPLE

Use the Integral Mean Value Theorem to estimate the value of the integral.

استخدم نظرية القيمة المتوسطة في تقدير قيمة

Imad Odeh

Imad Odeh

$$\int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} dx$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Q1 Use the Integral Mean Value Theorem to estimate the value of the integral.

استخدم نظرية القيمة المتوسطة في تقدير قيمة

1) $\int_{\pi/3}^{\pi/2} 3 \cos x^2 dx$

2) $\int_0^{1/2} e^{-x^2} dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q2 Use the Integral Mean Value Theorem to estimate the value of the integral.

استخدم نظرية القيمة المتوسطة في تقدير قيمة

1) $\int_0^2 \sqrt{2x^2 + 1} dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

2) $\int_{-1}^1 \frac{3}{x^3 + 2} dx$

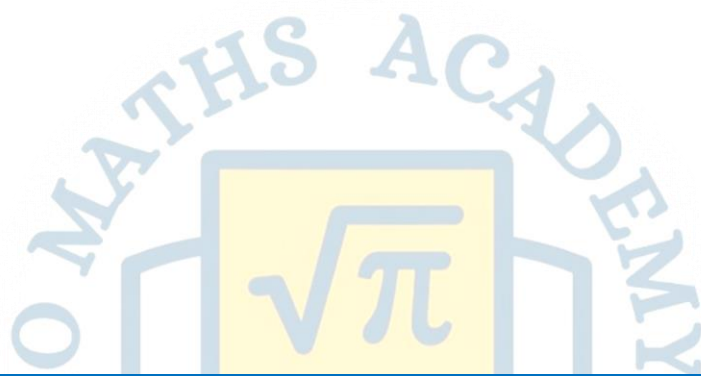
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh



THEOREM 4.4

النظرية 4.4

If f is continuous on $[a, b]$, then there is a number $c \in (a, b)$ for which

إذا كانت f دالة متصلة على $[a, b]$ ، فإنه يوجد عدد $c \in (a, b)$ بحيث ان

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Q2 Find a value of c that satisfies the conclusion of the Integral Mean Value Theorem

اوجد قيمة c التي تحقق نتيجة نظرية القيمة المتوسطة للتكامل

1) $\int_0^2 3x^2 dx$

2) $\int_{-1}^1 (x^2 - 2x) dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q2 Find a value of c that satisfies the conclusion of the Integral Mean Value Theorem اوجد قيمة c التي تحقق نتيجة نظرية القيمة المتوسطة للتكامل

1) $f(x) = 4x + 3$ on $[0, 2]$

Imad Odeh

Imad Odeh

2) $f(x) = 2x - 2x^2$ on $[0, 1]$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

EXAMPLE

مثال

Suppose that water flows in and out of a storage tank. The net rate of change (that is, the rate in minus the rate out) of water is

افرض ان الماء يتدفق من خزان مياه بحيث ان معدل التغير في كمية الماء معطى بالعلاقة

$$f(t) = 20(t^2 - 1)$$

- (a) For $0 \leq t \leq 3$, determine when the water level is increasing and when the water level is decreasing.

(أ) ل $0 \leq t \leq 3$ حدد متى يكون مستوى سطح الماء متزايد ومتى يكون متناقصا

- (b) If the tank has 200 gallons of water at time $t = 0$. determine how many gallons are in the tank at time $t = 3$ minutes.

(ب) إذا كان الخزان يحتوي 200 جالون عند الزمن $t = 0$ حدد كمية الماء عندما $t = 3$

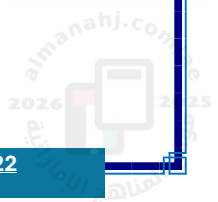
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh



Q1

مثال

Suppose that the rate of change of water in a storage tank is

افرض ان الماء يتدفق من خزان مياه بحيث ان معدل التغير في كمية الماء معطى بالعلاقة

$$f(t) = 10 \sin t \text{ gallons per minute.}$$

- (a) For $0 \leq t \leq 2\pi$, determine when the water level is increasing and when the water level is decreasing.

(أ) ل $0 \leq t \leq 2\pi$ حدد متى يكون مستوى سطح الماء متزايد ومتى يكون متناقصا

- (b) If the tank has **100 gallons** of water at time $t = 0$, determine how many gallons are in the tank at $t = \pi$.

(ب) إذا كان الخزان يحتوي **100 جالون** عند الزمن $t = 0$ حدد كمية الماء عندما $t = \pi$

Q2

مثال

Suppose that the rate of change of water in a pond is

افرض ان الماء يتدفق من خزان مياه بحيث ان معدل التغير في كمية الماء معطى بالعلاقة

$$f(t) = 4t - t^2 \text{ thousand gallons per minute.}$$

- (a) For $0 \leq t \leq 6$, determine when the water level is rising and when it is falling.

(أ) ل $0 \leq t \leq 6$ حدد متى يرتفع مستوى الماء ومتى يهبط

- (b) If the pond has 40 thousand gallons at time $t = 0$ determine how many gallons are in the pond at $t = 6$.

(ب) إذا كانت البركة تسع 40 ألف لتر من الماء عند $t = 0$ فحدد كم لتراً في البركة عند $t = 6$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q3 Use the graph to list the integrals in order, from smallest to largest

اعتمد على الرسم لترتيب قيم التكامل من الأصغر الى الأكبر

a) $\int_0^1 f(x)dx < \int_0^2 f(x)dx < \int_0^3 f(x)dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

b) $\int_0^2 f(x)dx < \int_0^1 f(x)dx < \int_0^3 f(x)dx$

c) $\int_0^3 f(x)dx < \int_0^1 f(x)dx < \int_0^2 f(x)dx$

d) $\int_0^3 f(x)dx < \int_0^2 f(x)dx < \int_0^1 f(x)dx$

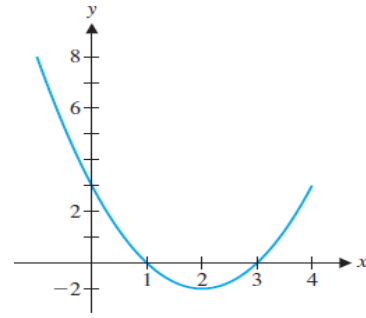
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh



Q4 Use the graph to list the integrals in order, from smallest to largest

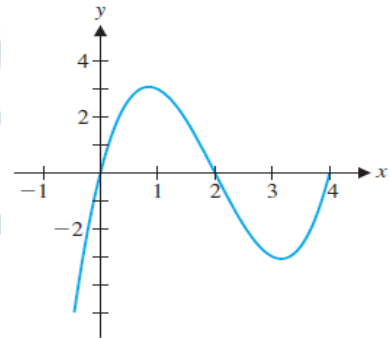
اعتمد على الرسم لترتيب قيم التكامل من الأصغر الى الأكبر

a) $\int_0^1 f(x)dx < \int_0^2 f(x)dx < \int_0^3 f(x)dx$

b) $\int_0^1 f(x)dx < \int_0^3 f(x)dx < \int_0^2 f(x)dx$

c) $\int_0^3 f(x)dx < \int_0^1 f(x)dx < \int_0^2 f(x)dx$

d) $\int_0^3 f(x)dx < \int_0^2 f(x)dx < \int_0^1 f(x)dx$



أسئلة سنوات سابقة واسئلة اخرى

Past exam Questions

Q1 Find a value of c that satisfies the conclusion of the Integral Mean Value Theorem

اوجد قيمة c التي تحقق نتيجة نظرية القيمة المتوسطة للتكامل

$$\int_0^2 3x^2 dx$$

a) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

b) $\frac{-2}{\sqrt{3}}$

c) $\sqrt{3}$

d) 1

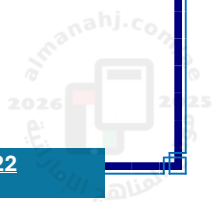
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh



Q2 Compute the average value of on the given interval

احسب القيمة المتوسطة للدالة المعطاة على الفترة المعطاة

$$f(x) = 4x + 3 \text{ on } [0, 2]$$

- a) 7 Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
- b) 14
- c) 10
- d) 23

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q3 Compute the average value of on the given interval

احسب القيمة المتوسطة للدالة المعطاة على الفترة المعطاة

$$f(x) = 4x^3 \text{ on } [0, 2]$$

- a) -8
- b) 8
- c) 16
- d) -16

Q4 Compute the average value of on the given interval

احسب القيمة المتوسطة للدالة المعطاة على الفترة المعطاة

$$f(x) = 3x^2 - 1 \text{ on } [0, 2]$$

- a) 3
- b) 5
- c) 6
- d) 10

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Lesson 5.6

INTEGRATION BY SUBSTITUTION

التكامل بالتعويض

INTEGRATION BY SUBSTITUTION

التكامل بالتعويض

Integration by substitution consists of the following general steps

- Choose a new variable u : a common choice is the innermost expression or
- Compute $du = \frac{du}{dx} dx$
- Replace all terms in the original integrand with expressions involving u and du .
- Evaluate the resulting (u) integral. If you still can't evaluate the integral, you may need to try a different choice of u .
- Replace each occurrence of u in the antiderivative with the corresponding expression in x .

يتكوّن التكامل بالتعويض من الخطوات العامة التالية

• اختر متغيرًا جديدًا u : الشائع هو الحد "الداخلي" لتركيب الدوال.

• احسب. $du = \frac{du}{dx} dx$

• استبدل جميع الحدود في المكامل الأصلي مع تعابير تتضمن u و du

• جد قيمة (u) إذا كنت لا تزال غير قادر على إيجاد قيمة التكامل، فربما

تحتاج إلى تجربة اختيار مختلفة ل u .

• استبدل كل تكرار ل u في الدالة الأصلية بالتعبير المناظر للمتغير x .

THEOREM

النظرية

$$\int f(g(x))g'(x) dx = f(x) + c$$

EXAMPLE Evaluate

اوجد قيمة

1) $\int 2xe^{x^2} dx$

2) $\int (x^3 + 5)^{100} (3x^2) dx$

3) $\int x \cos x^2 dx$

4) $\int (3 \tan x + 4)^5 \sec^2 x dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

EXAMPLE Evaluate

اوجد قيمة

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q1 Evaluate

اوجد قيمة

1) $\int x^3(x^4 + 1) dx$

2) $\int x^3(x^4 + 1)^{-\frac{2}{3}} dx$

3) $\int \sqrt{1 + 10x} dx$

4) $\int \sqrt{3x + 1} dx$

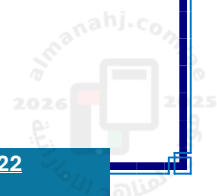
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh



Q2 Evaluate

1) $\int x\sqrt{x^2 + 4} dx$

2) $\int x^2\sqrt{x^3 + 2} dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

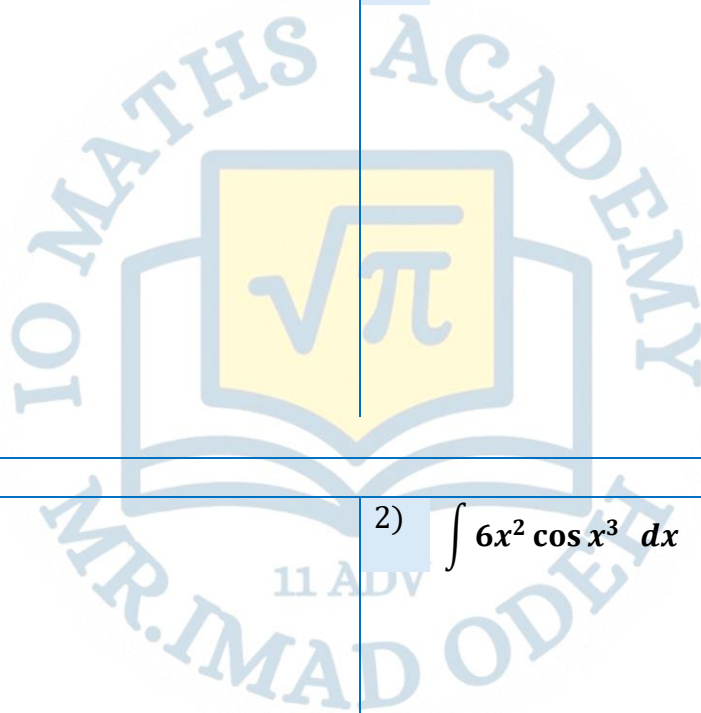
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

3) $\int \frac{(\sqrt{x} + 2)^3}{\sqrt{x}} dx$

4)



Q3 Evaluate

1) $\int t^2 \cos t^3 dt$

2) $\int 6x^2 \cos x^3 dx$

3) $\int x^2 \sec^2 x^3 dx$

4) $\int \sin x \cos x dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q4 Evaluate

1) $\int \sin^3 x \cos x \, dx$

2) $\int \sin^7 x \cos x \, dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

3) $\int \sin t (\cos t + 3)^{\frac{3}{4}} dt$

4) $\int \sec^2 x \sqrt{\tan x} \, dx$

5) $\int 4x \sec x^2 \tan x^2 \, dx$

6) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} \, dx$

7) $\int \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} \, dx$

8) $\int \frac{x \cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}} \, dx$

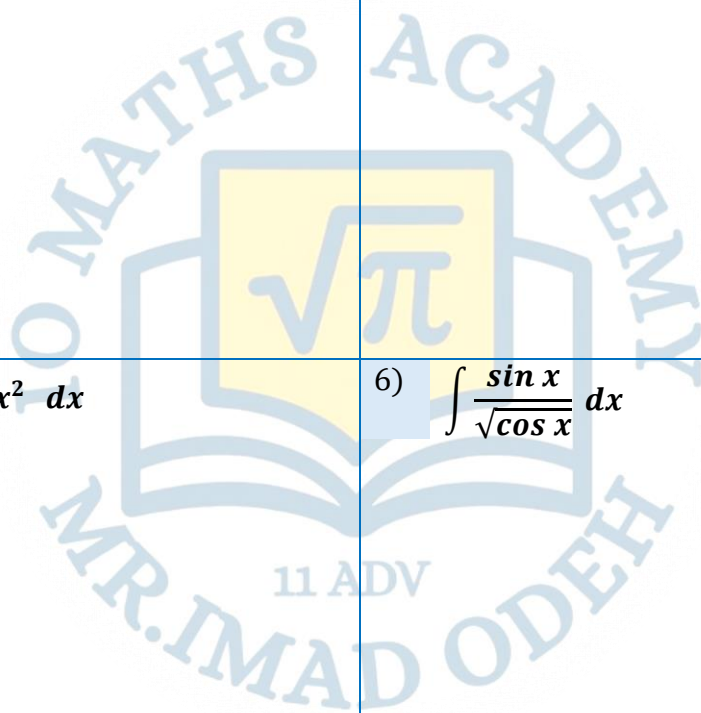
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh



Q5 Evaluate

1) $\int \frac{\cos(3\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$

2) $\int x e^{x^2+1} dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

3) $\int e^x \sqrt{e^x + 4} dx$

4) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

5) $\int \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$

6) $\int e^x(1+e^x)^2 dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

EXAMPLE

Evaluate

اوجد قيمة

$$\int \frac{(\tan^{-1} x)^2}{1+x^2} dx$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q6 Evaluate

اوجد قيمة

$$1) \int \frac{(\sin^{-1} x)^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

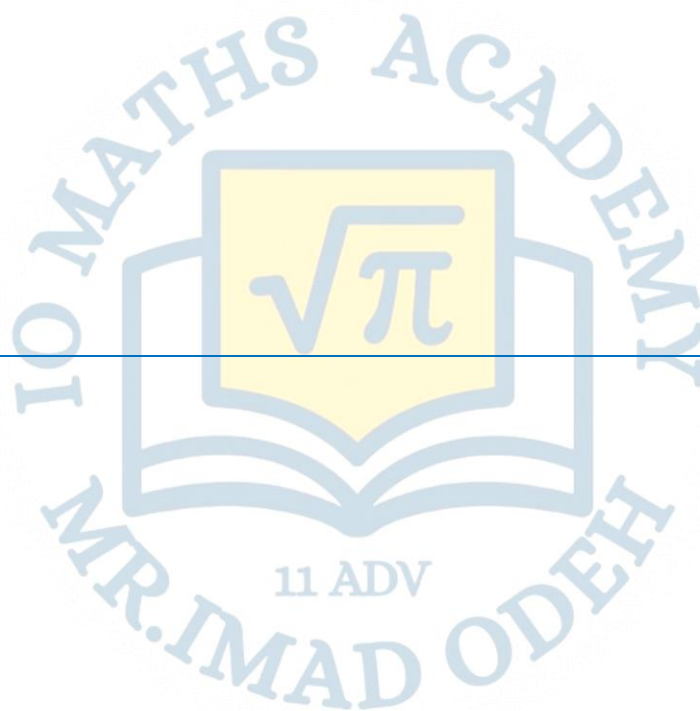
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

$$2) \int \frac{e^{\sin^{-1} x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$$



$$3) \int \frac{dx}{\tan^{-1} x (1+x^2)}$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

THEOREM 6.1

النظرية 6.1

For any continuous function, f

لأي دالة متصلة، f

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$

on any interval in which, $f(x) \neq 0$

على أي فترة بحيث $f(x) \neq 0$

EXAMPLE

Evaluate

اوجد قيمة

1) $\int \frac{x^2}{x^3 + 5} dx$

2) $\int \tan x dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q7

Evaluate

اوجد قيمة

1) $\int \frac{v}{v^2 + 4} dv$

2) $\int \frac{x^5}{1 + x^6} dx$

3) $\int \frac{3e^x}{2e^x + 7} dx$

4) $\int \tan 2x dx$

5) $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$

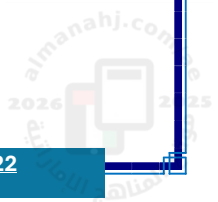
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh



Q8

Evaluate

اوجد قيمة

1) $\int \frac{\ln x}{x} dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

2) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

3) $\int \frac{5x}{(4+x^2)^6} dx$

4) $\int \frac{4}{x(\ln x + 1)^2} dx$

5) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}} dx$

6) $\int \frac{1}{\sqrt{u}(\sqrt{u}+1)} du$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh



Q9

Evaluate

اوجد قيمة

1) $\int \frac{x^2}{1+x^6} dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

2) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

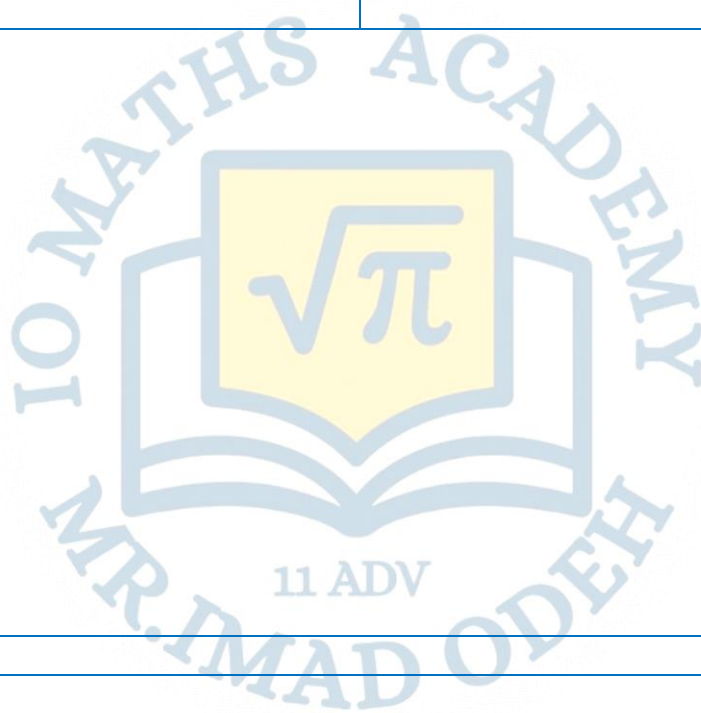
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

3) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^4-1}} dx$



EXAMPLE

Evaluate

اوجد قيمة

$$\int x\sqrt{2-x} dx$$

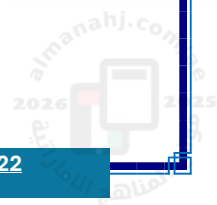
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh



Q10

Evaluate

اوجد قيمة

$$1) \int \frac{1+x}{1-x^2} dx$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

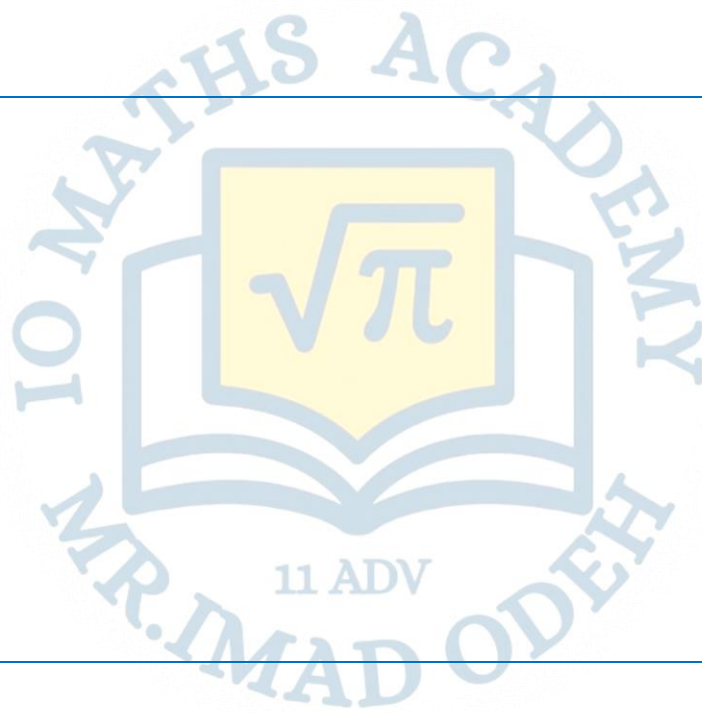
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

$$2) \int \frac{2t+3}{t+7} dt$$



$$3) \int \frac{x\sqrt{x}}{1+x^5} dx$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q11

Evaluate

اوجد قيمة

$$1) \int \frac{3\sqrt{x}}{1+x^3} dx$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

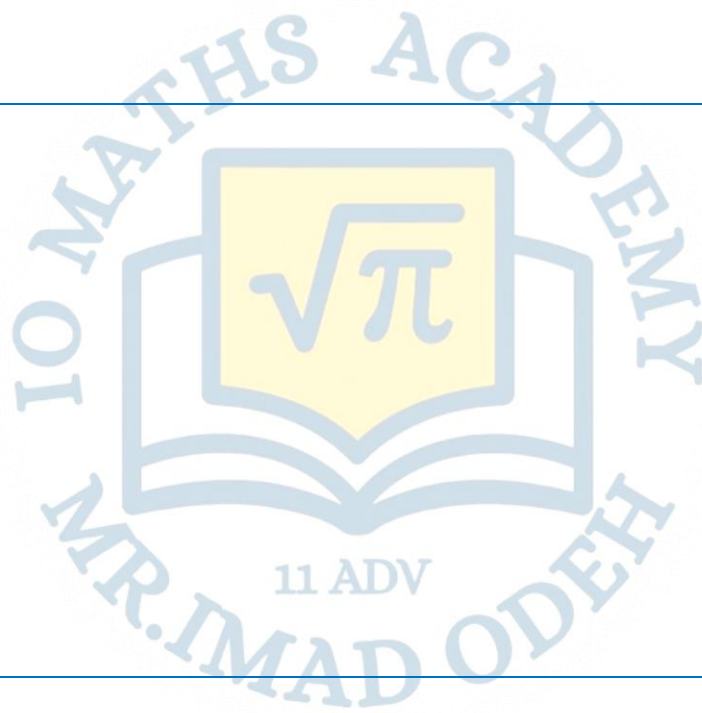
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

$$2) \int \frac{3\sqrt{x}}{1+x^3} dx$$



$$3) \int \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} dx$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q12

Evaluate

اوجد قيمة

$$1) \int \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} dx$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

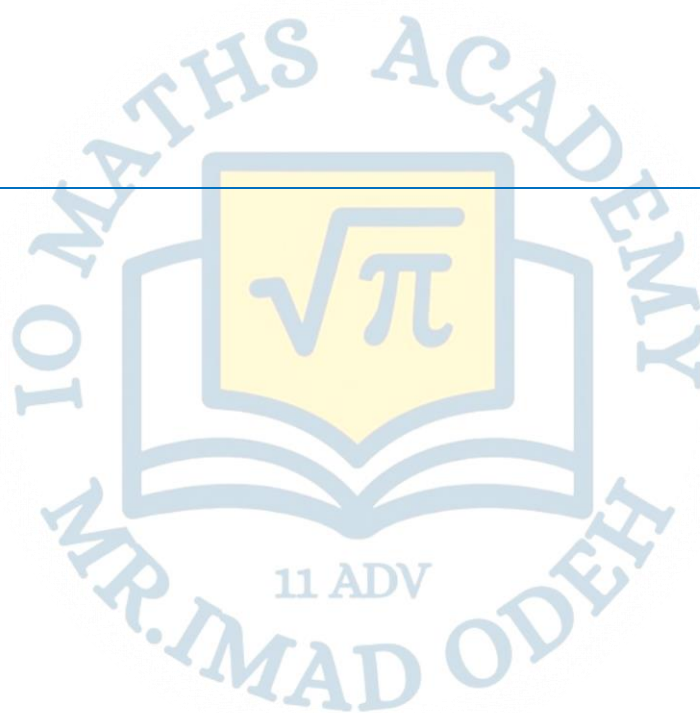
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

$$2) \int \frac{t^2}{\sqrt[3]{t+3}} dt$$



$$3) \int \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} dx$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Substitution in Definite Integrals

Imad Odeh

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du$$

Imad Odeh

Imad Odeh

EXAMPLE

مثال

Evaluate

اوجد قيمة

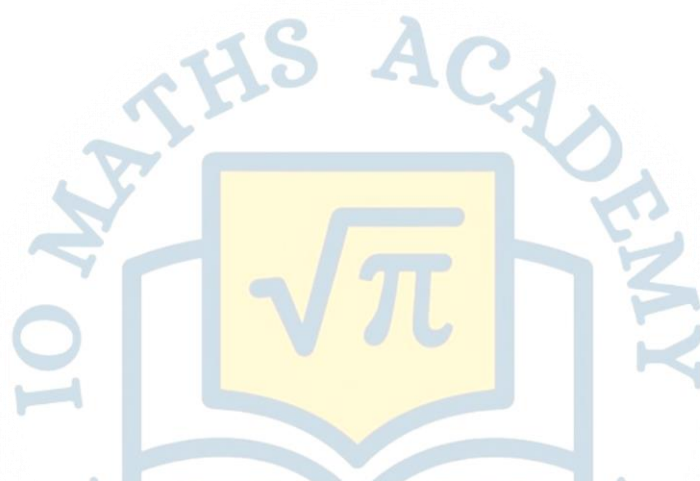
Imad Odeh

Imad Odeh

$$\int_1^2 x^3 \sqrt{x^4 + 5} dx$$

Imad Odeh

Imad Odeh



EXAMPLE

مثال

Evaluate

اوجد قيمة

$$\int_0^{15} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh



Q1 Evaluate

1) $\int_0^2 x\sqrt{x^2 + 1} dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

2) $\int_1^3 x \sin(\pi x^2) dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

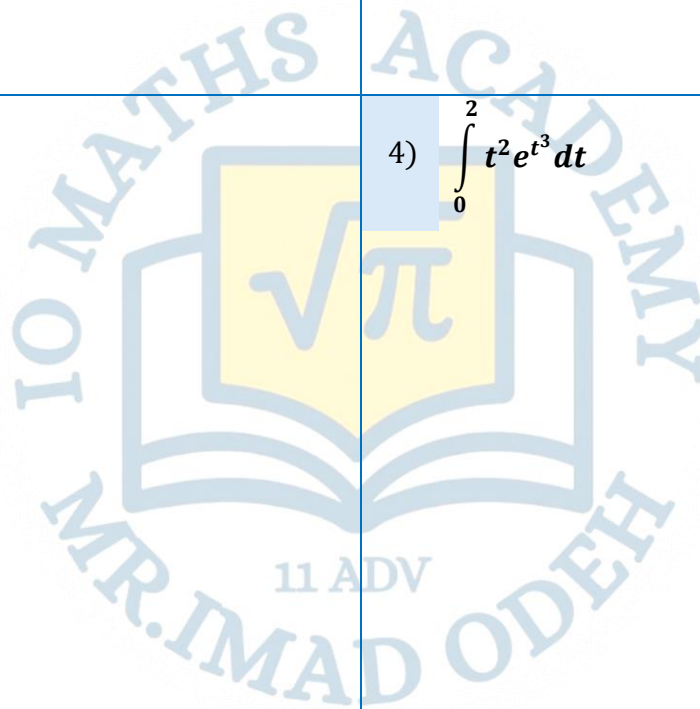
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

3) $\int_{-1}^1 \frac{t}{(t^2 + 1)^2} dt$

4) $\int_0^2 t^2 e^{t^3} dt$



5) $\int_0^2 \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$

6) $\int_0^2 \frac{e^x}{1 + e^x} dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q2 Evaluate

1) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot x \, dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

2) $\int_1^e \frac{\ln x}{x} \, dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

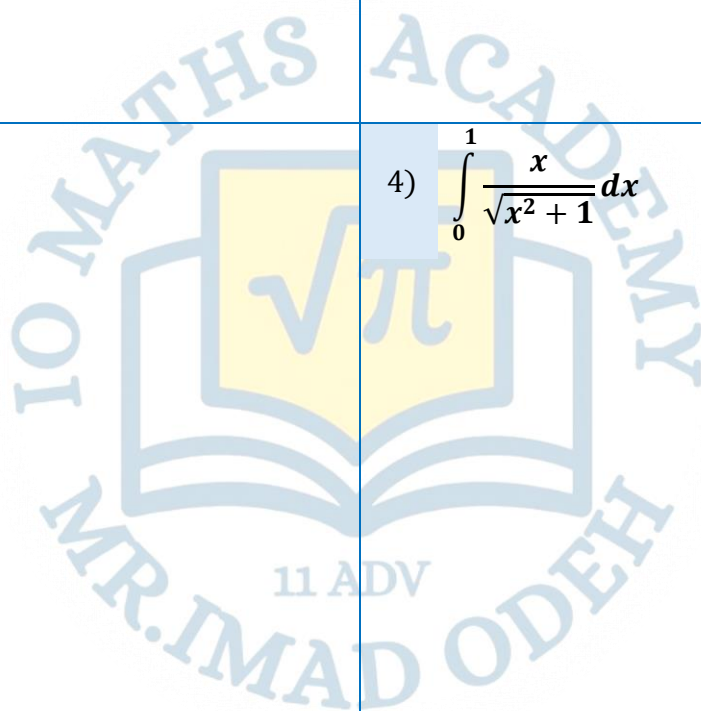
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

3) $\int_1^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}} \, dx$

4) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \, dx$



5) $\int_0^1 (e^x - 2)^2 \, dx$

6) $\int_0^1 \sqrt[4]{x}(3x^2 + 5) \, dx$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q3 Let

لتكن

$$f(4) = 3, f(0) = -2$$

$$1) \int_0^2 x f(x^2) dx$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q4 Let

لتكن

$$f(8) = -2, f(1) = 5$$

$$1) \int_1^2 x^2 f(x^3) dx$$

Q5 Let

لتكن

$$f(1) = 1, f(0) = 3$$

$$1) \int_0^{\pi/2} \cos x f(\sin x) dx$$

Q6 Let

لتكن

$$f(2) = -3, f(0) = 2$$

$$1) \int_0^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

أسئلة سنوات سابقة واسئلة اخرى

Past exam Questions

Q1 Which of the following can be integrated using the integration rule أي مما يلي يمكن ايجاده باستخدام قاعدة التكامل التالي

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c \quad f(x) \neq 0$$

a) $\int \frac{2x}{\cos(x^2)} dx$

b) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$

c) $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x}} dx$

d) $\int \frac{\csc^2 x}{\cot x} dx$

Q2 Find

اوجد

$$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$$

a) $\ln(e^x - e^{-x}) + c$

b) $\frac{(e^x - e^{-x})^2}{2} + c$

c) $\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} + c$

d) $\ln(e^x + e^{-x}) + c$

Q3 Find

اوجد

$$\int \frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

a) $-\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) + c$

b) $-\sin\left(\frac{1}{x}\right) + c$

c) $\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) + c$

d) $\sin\left(\frac{1}{x}\right) + c$

Q4 Find.

اوجد

$$\int 2 \sin^2 x \, dx$$

a) $-2 \sin x \cos x + c$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

b) $2 \sin x \cos x + c$

c) $\frac{\sin^3 x}{3} + c$

d) $x - \frac{\sin 2x}{2} + c$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q5 Find

اوجد

$$\int x^3 \sqrt{x^4 + 3} \, dx$$

a) $\frac{1}{2}(x^4 + 3)^{3/2} + c$

b) $\frac{1}{6}x^4(x^4 + 3)^{3/2} + c$

c) $\frac{1}{6}(x^4 + 3)^{1/2} + c$

d) $\frac{1}{6}(x^4 + 3)^{3/2} + c$

Q6 Find

اوجد

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$$

a) $\frac{1}{2e^{\sqrt{x}}} + c$

b) $\frac{2}{e^{\sqrt{x}}} + c$

c) $\frac{1}{2}e^{\sqrt{x}} + c$

d) $2e^{\sqrt{x}} + c$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh



Q7 Find

اوجد

$$\int \sin^7 x \cos x \, dx$$

a) $\frac{-\cos^8 x}{8} + c$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

b) $\frac{-\sin^8 x}{8} + c$

c) $\frac{\sin^8 x}{8} + c$

d) $7 \sin^8 x \cos x + c$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q8

Find

اوجد

$$\int_0^{\pi/2} 3 \sin^2 x \cos x \, dx$$

a) 1

b) -1

c) -3

d) 3

Q9 If

$$\int_{-2}^6 f(x) \, dx = 10 \quad \text{and} \quad \int_2^6 f(x) \, dx = 3$$

Find

$$\int_2^6 f(4-x) \, dx$$

a) 3

b) 6

c) 7

d) 10

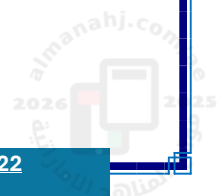
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh



Q10 If

$$\int_0^6 f(x) dx = 12$$

Find

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

$$\int_0^6 f(6-x) dx$$

- a) 12
- b) 6
- c) 0
- d) -6

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q11 If f is continuous and for all real numbers x

$$F'(x) = f(x)$$

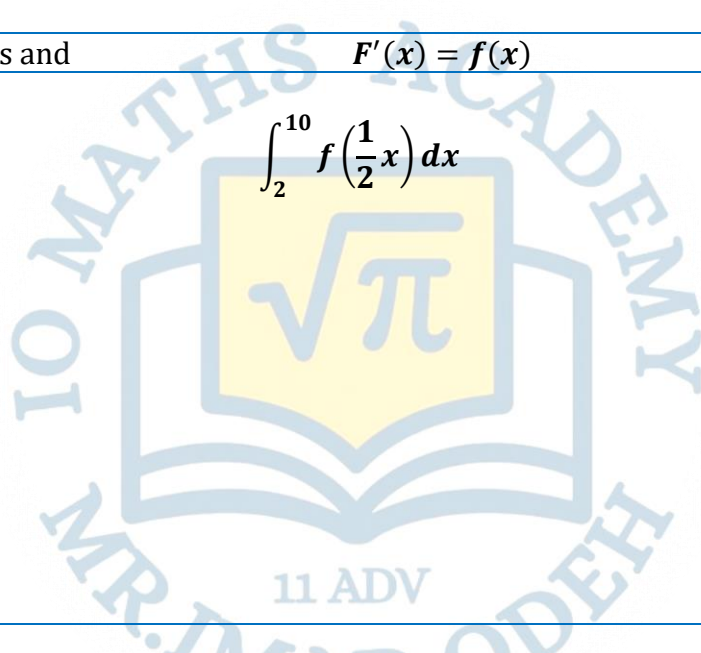
إذا كانت f دالة متصلة وكان

لجميع قيم x اوجد

Find

$$\int_2^{10} f\left(\frac{1}{2}x\right) dx$$

- a) $\frac{1}{2}[F(5) - F(1)]$
- b) $\frac{1}{2}[F(10) - F(2)]$
- c) $2[F(5) - F(1)]$
- d) $2[F(10) - F(2)]$



Q13 Find

$$\int_0^1 (e^x - 2)^2 dx$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Q14 Find

$$\int x^2 e^{x^3} dx$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

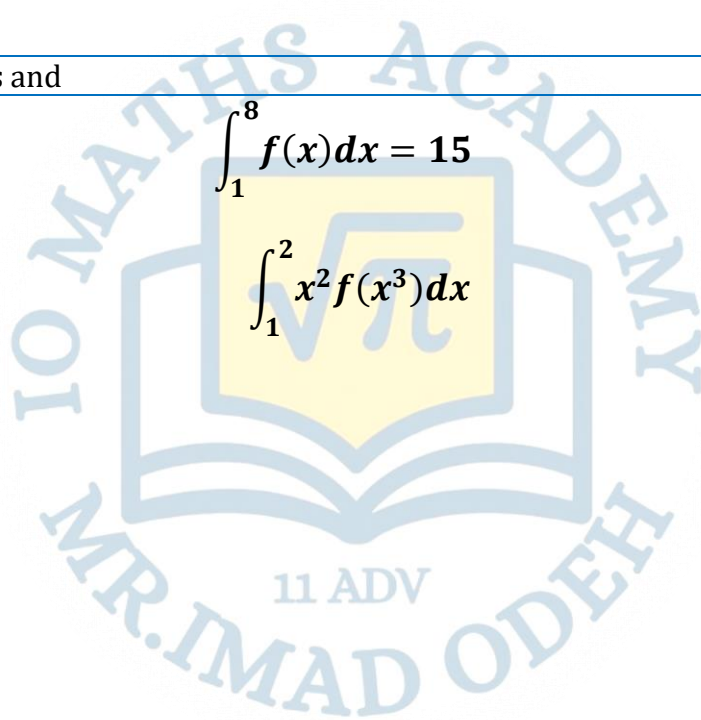
Imad Odeh

Q15 If f is continuous and

$$\int_1^8 f(x) dx = 15$$

Find

$$\int_1^2 x^2 f(x^3) dx$$



Q16 Find

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

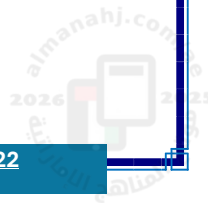
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh



Q17 Find

$$\int \frac{3\sqrt{x}}{1+x^3} dx$$

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

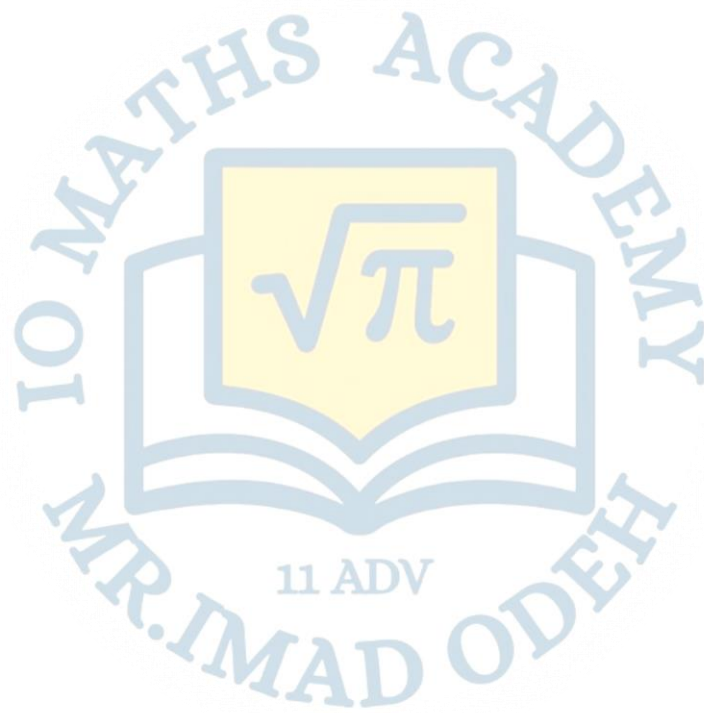
Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh



اطيب التمنيات للجميع

Best wishes

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh