

الفصل الدراسي الثالث 2017/2018

الرياضيات المتقدمة

الثانى عشر المتقدم

التكامل وتطبيقاته

الوحدة السادسة

الوحدة السادسة

تطبيقات التكامل المحدود :- سوف ندرس في هذه الوحدة ما يلي :-

$[6-1]$ المساحة بين منحنيين .

$[6-2]$ الحجم شرائح وأقرص وحلقات . (الحجوم والحجوم الدورانية)

$[6-3]$ الأحجام بالأصداف الأسطوانية .

$[6-4]$ طول القوس ومساحة السطح .

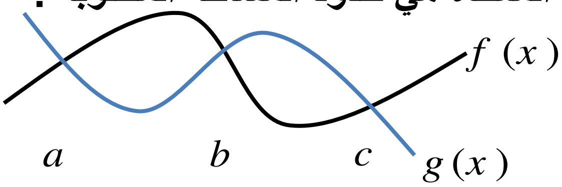
$[6-5]$ حركة المقذوفات .

$[6-6]$ تطبيقات التكامل على الفيزياء والهندسة .

$[6-7]$ دالة الاحتمال .

$[6-1]$ المساحة بين منحنيين

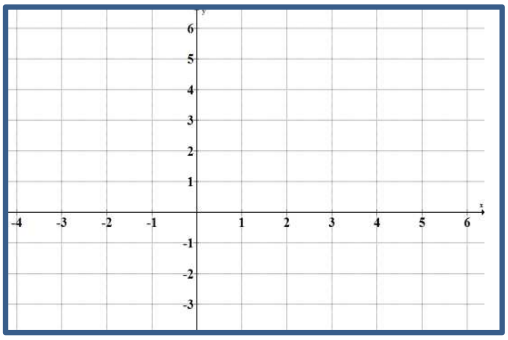
):- نحدد نقاط التقاطع بين المنحنيين أو (مع محور x) فتكون هذه النقاط مع نقاط الفترة $[a,b]$ المعطاة هي حدود المساحة المطلوبة .



$$\boxed{A=\int_a^b (f(x)-g(x))dx+\int_b^c (g(x)-f(x))dx}$$

س1):- احسب المساحة المحددة بالمنحنى $y=4-x^2$ ومحور x .

س2):- احسب مساحة المنطقة المحددة بالقطع المكافئ $y = x^2$ والمستقيمين $x = 1$, $y = 4x$

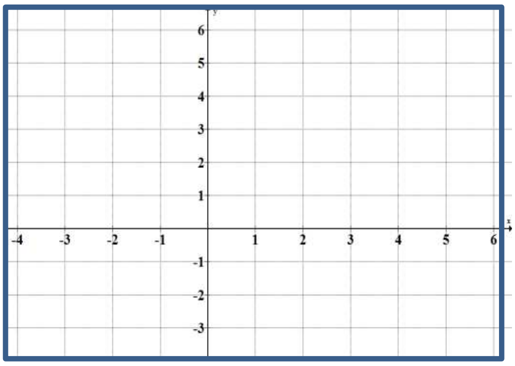


....

....

....

س3):- احسب مساحة المنطقة المحددة بالتمثيلين البيانيين $y = 3 - x$, $y = x^2 - 9$



....

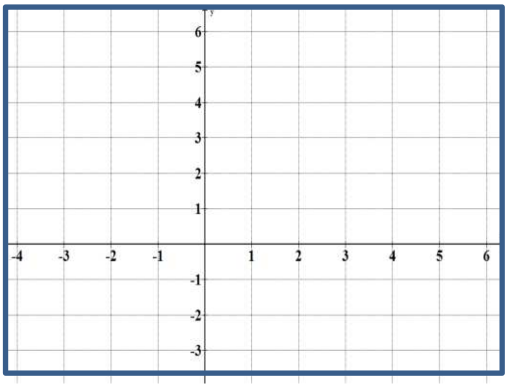
....

....

....

....

س4):- احسب مساحة المنطقة المحدودة بالتمثيلين البيانيين $y = 0$, $y = 2 - x$, $y = x^2$



....

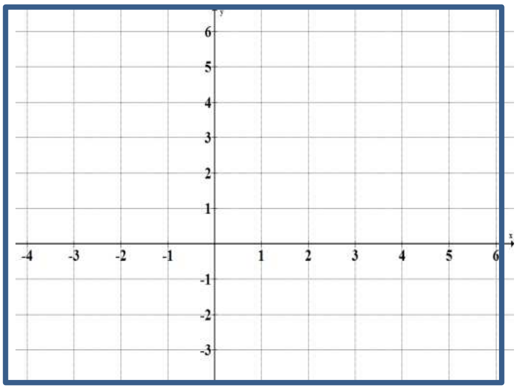
....

....

....

....

س5):- أوجد مساحة المنطقة المحدودة بالتمثيلين البيانيين $x = 2 - y^2 \quad , \quad x = y^2$



....

....

....

....

....

س6):- أوجد المساحة بين المنحنيين $y = x - 1 \quad , \quad y = e^x$ **على الفترة** $[-2,0]$.

....

....

....

....

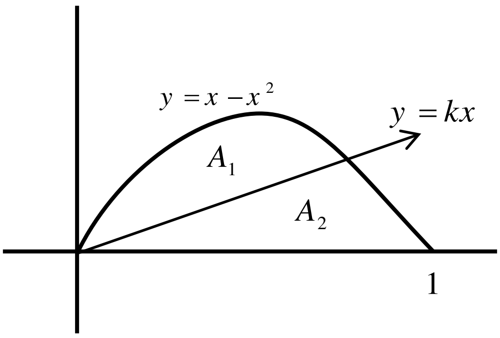
س7):- ارسم وأوجد مساحة المنطقة التي تحددها تقاطعات المنحنيات $y = x^2 \quad , \quad y = \sqrt{x}$

....

....

....

س8):- لتكن $y = x - x^2$ **و** $y = kx$ **كما في الشكل المجاور . أوجد قيمة** k **بحيث تكون** $A_1 = A_2$



....

....

....

....

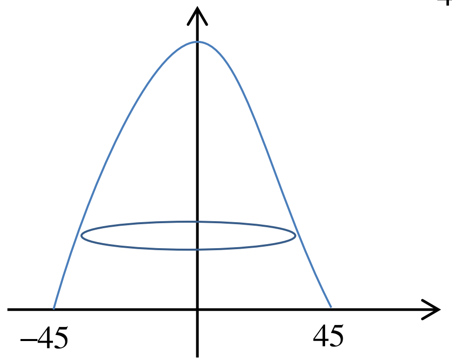
....

الحجوم $[6,2]$

سوف نجد حجم مجسم وكذلك الحجم الناتج من الدوران حول أحد المحورين أو حول مستقيم يوازي أحد المحورين .

1):- حجم المجسم الذي له مساحة مقطع عرضي $A(x)$ هو $\boxed{V=\int_a^b A(x)dx}$

س1):- أوجد حجم القبة التي لها مقطع عرضي يعطى بالعلاقة $y=-\frac{2}{45}x^2+90$ **لكل** $-45\le x\le 45$ **كما في الشكل المجاور ،**



س2):- أوجد حجم المجسمات التالية حيث مساحة المقطع العرضى $A(x)$ هي :-

1):- $A(x)=x+2 \quad , \quad -1\le x\le 3$

2):- $A(x)=10e^{0.01x} \quad , \quad 0\le x\le 10$

3):- $A(x)=\pi(4-x)^2 \quad , \quad 0\le x\le 2$

4):- قاعدة المجسم V هي المنطقة المحدودة بواسطة $y=2-x^2$, $y=x^2$ أوجد الحجم إذا كان لدى V

a) مقاطع عرضية مربعة   b) مقاطع عرضية على شكل نصف دائرة . c):- مقاطع عرضية مثلثات متساوية الأضلاع متعامدة على محور x .

....

....

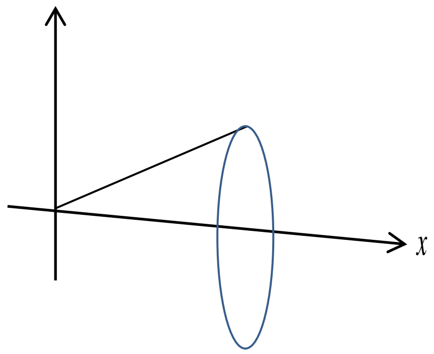
....

....

....

طريقة الأقراص :- يكون حجم المجسم الناتج عن التدويرحول محور x (المحور الأفقي) دورة كاملة هو :-

$$\boxed{V=\int_a^b \pi(f(x))^2dx}$$



ملاحظة:-

1):- الاسطوانة تتولد من دوران مستطيل .

2):- المخروط يتولد من دوران مثلث .

3):- الكرة تتولد من دوران نصف دائرة . وهكذا

س3):- احسب الحجم المجسم الناتج من دوران المنطقة تحت المنحنى $y=\sqrt{x}$ على الفترة $[0,4]$

....

....

....

....

س4):- احسب حجم المنطقة المحدودة بواسطة $x=0$, $y=2-x$, $y=0$ بالدوران دورة كاملة حول محور x

....

....

....

....

س5):- احسب حجم المنطقة الحدودة بواسطة $y=4-x^2$, $y=x^2$, بالدوران حول محور x

....

....

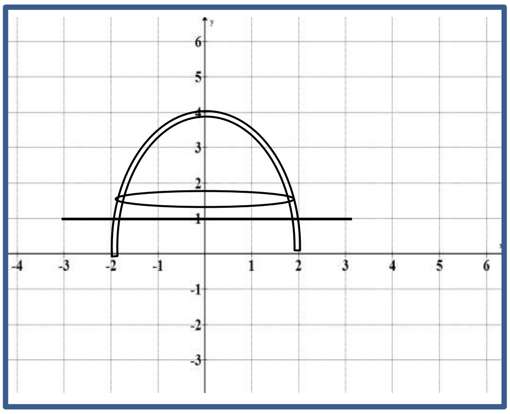
....

ملاحظة :- إذا كان الدوران حول محور y (المحور الرأسي) يكون :-

$$\boxed{V=\int_c^d \pi(x)^2dy} \quad \boxed{V=\int_c^d \pi(g(y))^2dy} \qquad g(y)=x$$

س6):- أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحدودة بين المنحنيين $y=1$, $y=4-x^2$

من $x=0$ الى $x=\sqrt{3}$ حول محور y



....

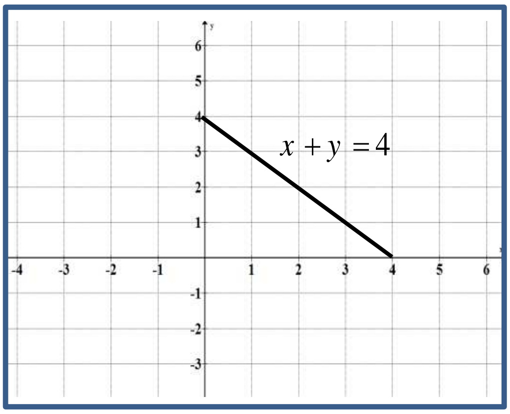
....

....

....

....

س7):- أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $x + y = 4$ والمحورين الإحداثيين بالدوران حول محور y . ثم تحقق هندسياً من خلال قانون حجم المخروط .



....

....

....

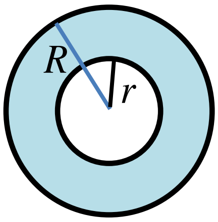
....

....

حجم المخروط :- $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

حساب الحجم عن طريق الحلقات :-

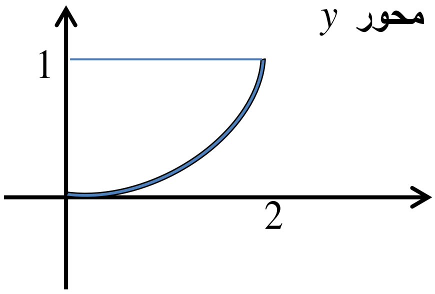
$$\boxed{V = \int_a^b \pi (R)^2 dx - \int_a^b \pi (r)^2 dx}$$



س8):- احسب حجم المنطقة المحدودة بالتمثيلين البيانيين

$y = \frac{1}{4}x^2 \quad , x = 0 \quad , \quad y = 1$ بالدوران حول 1) محور x

2) محور y



....

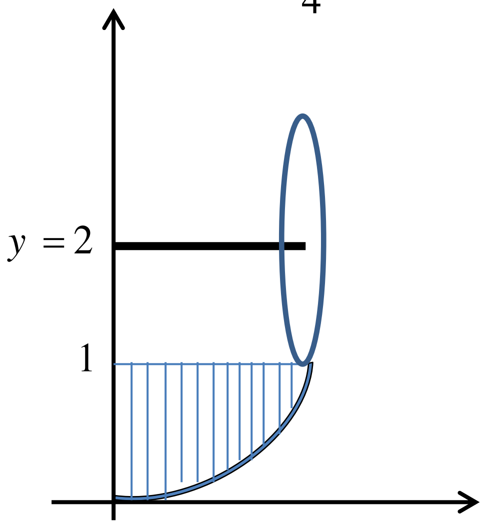
....

....

....

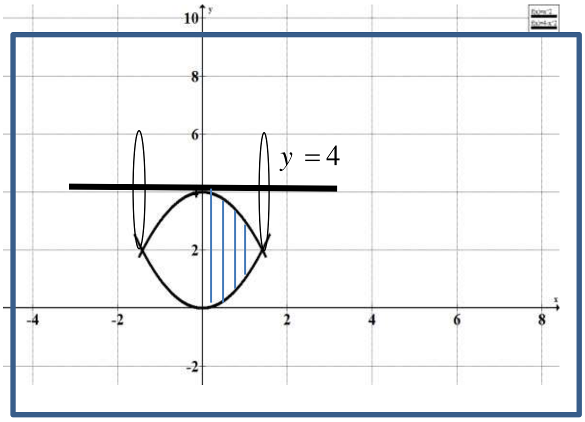
....

س9):- احسب حجم المنطقة المحدودة بين المنحنيين $y=1$, $x=0$, $y=\frac{1}{4}x^2$ وذلك بالدوران حول المستقيم $y=2$



....
....
....
....
....

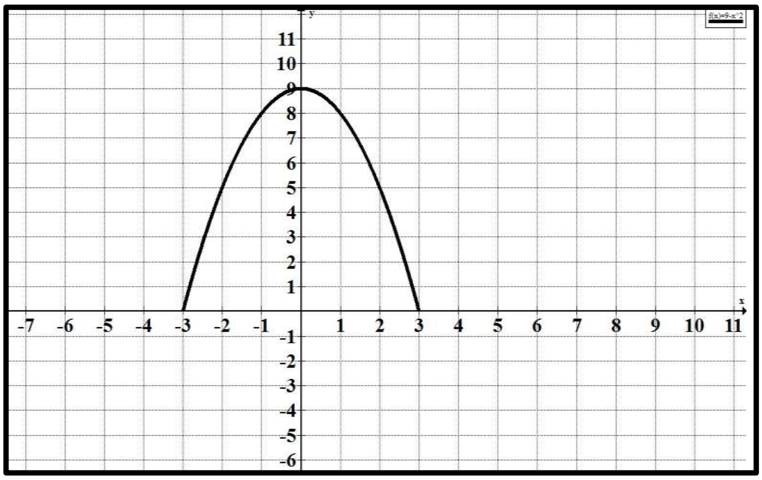
س10):- احسب حجم المنطقة المحدودة بين $y=x^2$, $y=4-x^2$ وذلك بالدوران حول المستقيم $y=4$



....
....
....
....
....

س11):- لتكن R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y=9-x^2$ والمستقيم $y=0$ أوجد أحجام المجسمات التي نحصل عليها من دوران المنطقة حول :-

1):- محور y 2):- المستقيم $y=10$ 3):- المستقيم $x=4$



....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

س12):- على فرض يتم دوران مثلث رؤوسه $(-1,-1),(0,1),(1,-1)$ حول المحور y أثبت أن حجم المجسم هو $\frac{2}{3}\pi$

....

....

....

....

....

س13):- على فرض يتم تدوير الدائرة $x^2+y^2=1$ حول محور x بين أن حجم الكرة هو $\frac{4}{3}\pi$

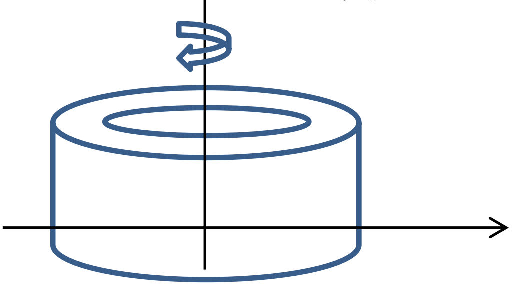
س14):- إن قاعدة المجسم V هي الدائرة $x^2+y^2=1$ أوجد الحجم إذا كان لدى V

1): مقاطع عرضية مربعة متعامدة على المحور x　　**2):-** مقاطع عرضية على شكل نصف دائرة متعامدة على المحور x

$[8-3]$ الأحجام بالأصداف الأسطوانية

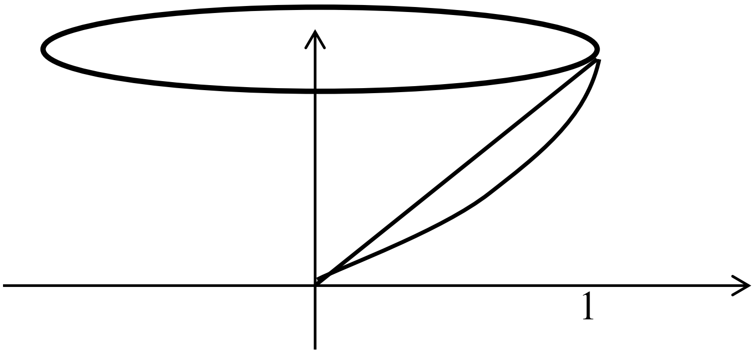
يعتبر بديلاً لطريقة الحلقات التي مرت سابقاً . والتي يكون فيها حساب الحجم أسهل في بعض الأحيان .

$$V=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}2\pi c_i f(c_i)\Delta x=\int_a^b 2\pi\ \underbrace{x}_{\text{نصف القطر}}\ \underbrace{f(x)}_{\text{الارتفاع}}\ \underbrace{dx}_{\text{السماكة}}$$



س1:- استخدم طريقة الأصداف لأيجاد حجم المجسم الذي تكون من دوران المنطقة المحدودة بالتمثيلين

$y = x^2$, $y = x$ في الربع الأول حول المحور y



....

....

....

....

....

س2:- في كل من التمارين التالية ارسم صدفة نوعية وحدد نصف قطر وارتفاع كل صدفة ثم احسب الحجم

a):- يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$ والمحور x حيث $-1 \le x \le 1$ حول $x = 2$

....

....

....

b):- يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$ والمحور x حيث $-1 \le x \le 1$ حول $x = -2$

....

....

....

c):- يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $x = 1$, $y = -x$, $y = x$, حول المحور y

....

....

....

D):- يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $x = 1$, $y = -x$, $y = x$, حول $x = 1$

....

....

E):- يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $0 \le x \le 4\ ,$ $y=\sqrt{x^2+1}$ $y=0,$ حول $x=0$

....

....

....

F):- يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $x^2+y^2=1$ حول $y=2$

....

....

....

س3):- أوجد حجم المجسم الذي تكون من دوران المنطقة المحدودة بالتمثيل البياني $y=4-x^2$ والمحور x حول المستقيم $x=3$

....

....

....

س4):- لتكن R هي المنطقة المحدودة بالتمثيلين البيانيين $y=2-x$, $y=x$ و $y=0$ احسب حجم المجسم الذي تكون من دوران المنطقة R حول المستقيمات :-

a):- $y=2$　　b):- $y=-1$　　c): $x=3$

....

....

....

....

س5):- استخدم افضل طريقة مناسبة لإيجاد كل حجم .

يتم دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y=4-x$ ، $y=4$ و $y=x$ حول :-

a): المحور x b):- المحور y c):- $x=4$ d):- $y=4$

....

....

....

....

....

....

$[6-4]$ طول القوس ومساحة السطح

$$\boxed{S=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}$$

1):- احسب طول المنحنى لكل مما يلي :-

a):- $(f'(x))^2=(x-2)^2-1$ على الفترة $[2,4]$

....

....

....

b):- $f'(x)=\sqrt{x^2-6x+8}$ في الفترة $[0,6]$

....

....

....

c):- $y=\sqrt{1-x^2}$ والفترة $-1\le x\le 1$

....

....

....

d):- $y=x^3$ والفترة $-2\le x\le 2$ عددياً .

....

....

....

مساحة السطح

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

س1):- احسب مساحة سطح كرة نصف قطرها r

....

....

....

س2):- احسب مساحة السطح المتولد عن قطعة المنحنى $y=\sqrt{x}$ حيث $0 \le x \le 1$ حول محور x

....

....

....

[6−5] حركة المقذوفات Projectile Motion

قانون نيوتن الثاني للحركة $F = ma$ حيث F هو مجموع القوى المؤثرة و m هو كتلة الجسم و a هو تسارع الجسم . القوة الناتجة عن الجاذبية $F = -mg$

التسارع $a(t) = h''(t)$ ، $-mg = mh''(t)$ أو $h''(t) = -g$

س1):- إذا كان ارتفاع لوح الغطس $4.5\ m$ فوق مستوى سطح المياه وبذأ الغواص بسرعة متجهة ابتدائية $2.4\ m/s$ (في اتجاه لأعلى) . كم بلغت السرعة المتجهة للغواص عند الاصطدام (بافتراض عدم وجود مقاومة هواء)

....

....

....

س2):- تم قذف كرة للأعلى بشكل مستقيم من الأرض بسرعة متجهة ابتدائية $19.6\ m/s$ بتجاهل مقاومة الهواء . أوجد معادلة لارتفاع الكرة عند أي زمن t . وحدد القيمة العظمى للإرتفاع ومقدار الزمن الذي قطعته الكرة في الهواء .

....

....

....

....

....

....

$[6-6]$ تطبيقات التكامل على الفيزياء والهندسة

الشغل $W = F\,d$

لإيجاد الشغل المبذول نتبع ما يلي :-

1): نحدد قيمة الثابت للنابض .

2):- نجد $F(x)$

3):- نجري عملية التكامل $W = \int_0^b F(x)dx$

$F(x) = kx$ حيث k (ثابت النابض).

س1):- تعمل قوة قدرها 10 نيوتن على تمدد نابض $0.08m$ من طوله الطبيعي . أوجد الشغل المبذول في تمدد النابض $0.16m$ أكثر من طوله الطبيعي .

....

....

....

س2):- أحدثت قوة من 5 نيوتن تمدد على نابض $5cm$. أوجد الشغل المبذول في تمدد هذا النابض $6cm$ أبعد من طوله الطبيعي .

....

....

....

ملاحظة :- لا تنسى تحويل الوحدات (إذا كانت مختلفة) لنوع واحد .

$[6-7]$ مركز الكتلة

يعطى مركز كتلة الجسم بالعلاقة

$$\boxed{\bar{x}=\frac{M}{m}=\frac{\int_a^b x\ p(x)dx}{\int_a^b p(x)}}$$

حيث M هي الكثافة ، m هي الكتلة .

س3):- احسب الكتلة ومركز الكتلة لجسم ما بكثافة تبلغ $0\le x\le 6,\ \ p(x)=\frac{x}{6}+2\ \ kg/m$

ثم بين أن مركز الكتلة ليس عند $x=3$.

....

....

....

4):- إذا كانت كثافة سلك مستقيم $p(x)=2\sqrt{x}\ \ _{k/m}$ وإذا كان طرفا السلك عند $x=0\,,\,x=4$

احسب مركز كتلة السلك .

....

....

....

س5):- لدينا ثلاث كتل هي $p=3$, $p=2$, $p=4$ كيلو غرام في المواضع

$(1,3)\,,(-2,1)\,,(4,-2)$ على الترتيب . احسب مركز الكتلة .

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i x_i}{p}$$

....

....

$$\bar{y}=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i y_i}{p}$$

....

الاحتمال $[6-7]$

تعريف دقيق لـ pdf (كثافة الاحتمال) :- على فرض أن X هي متغير عشوائي له فرضيته أي قيمة x لكل $a \le x \le b$ تكون كثافة الاحتمال لـ X دالة $f(x)$ تحقق .

1):- $f(x) \ge 0$ لكل $a \le x \le b$ (لا يمكن أن تكون سالبة).

2):- $\int_a^b f(x)dx = 1$ الاحتمال الكلي 1

يعطي الاحتمال الذي تقع فيه قيمة X (المرئية) بين c,d بالمساحة تحت التمثيل البياني لـ pdf

$$P(c \le X \le d) = \int_c^d f(x)dx$$

ملاحظة :- $pdf = probability\ density\ function$

س1):- أثبت أن كل من الدوال المعطاة هي دالة pdf على الفترة المعينة .

a):- $[0,1]\ ,\ f(x) = 3x^2$

....

....

....

b):- $[0,1]\ ,\ f(x) = 2x^3 + x$

....

....

....

c):- $[0,\pi]\ ,\ f(x) = \frac{1}{2}\sin x$

....

....

....

تعريف :- يعطى الوسط μ لمتغير عشوائي له $pdf \ f(x)$ على الفترة $[a,b]$ بالصيغة

$$\mu = \int_a^b xf(x)dx$$

س2):- أوجد قيمة c التي تكون عندها $pdf \ f(x)$ على الفترة المعينة

a):- $f(x) = cx + x^2 \ , \ [0,1]$

....

....

....

b):- $f(x) = \dfrac{c}{1+x^2} \ , \ [0,1]$

....

....

....

س3):- على فرض أن العمر الافتراضي بالاعوام لعلامة تجارية معينة لمصباح يتم توزيعه أسياً بواسطة pdf $f(x) = 4e^{-4x}$. أوجد احتمال أن يدوم مصباح محدد لمدة 3 أشهر أو أقل .

....

....

....

س4):- على فرض أن $f(x) = \dfrac{0.4}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.08(x-68)^2}$ هي دالة كثافة الاحتمال لأطوال أشخاص ذكور في دولة الأمارات العربية المتحدة . أوجد احتمال أن يكون طول شخص إماراتي تم اختياره عشوائياً بين $177\,cm$ و $180\,cm$

....

....

....

مع خالص تحياتي للجميع (لا تنسونا من صالح دعائكم) يتبع الى الوحدة الأخيرة