ملخص دروس الوحدة الرابعة تطبيقات التفاضل والتكامل

الرياضيات
MATHEMATICS
12 ADVANCED

2025-2026

الصف الثاني عشر متقدم

12 Advanced

ملخص دروس الوحدة الرابعة الفصل الثاني

تطبيقات التفاضل والتكامل

CHAPTER 4

Applications of Differentiation

Teacher الاستاذ

IMAD ODEH عماد عودة

عزيزي الطالب وضعت هذه الملزمة لتساعدك في دراستك علما بان الكتاب المدرسي هو المرجع الرئيسي لنا جميعا

اطيب التمنيات للجميع

اسم الطالب: -

Mr. Imad Odeh 0507614804

https://t.me/Iomaths12 http://www.youtube.com/@imaths2022 https://www.Imaths-academy.com

CHAPTER 4

Applications of Differentiation

تطبيقات التفاضل و التكامل

Differentiation Rules | قواعد الاشتقاق

Function $f(x)$	Derivative $f'(x)$	Examples: Function $f(x)$	Examples: Derivative $f'(x)$
$f(x) = c$, constant	$f'(x) = 0$	$f(x) = 3$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$f(x) = x^5$	$f'(x) = 5x^4$
$y = f(x).g(x)$	$\frac{dy}{dx} = f'(x)g(x) + f(x).g'(x)$	$y = (x^2+5)(3x+1)$	$\frac{dy}{dx} = 2x(3x+1) + (x^2+5)(3)$
$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)g(x) - f(x).g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$	$y = \frac{x^3+1}{5x-2}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2(5x-2) - (x^3+1)(5)}{(5x-2)^2}$
$y = \frac{c}{f(x)}$	$\frac{dy}{dx} = -\frac{cf'(x)}{\left(f(x)\right)^2}$	$y = \frac{3}{x^2+2}$	$\frac{dy}{dx} = -\frac{3(2x)}{(x^2+2)^2}$
$y = \sqrt{f(x)}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$	$y = \sqrt{5x^2+1}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{10x}{2\sqrt{5x^2+1}}$
$y = (f(g(x))$	$\frac{dy}{dx} = f'\left(g(x)\right).g'(x)$	$y = (x^3+8)^5$	$\frac{dy}{dx} = 5(x^3+8)^4(3x^2)$

Function $f(x)$	Derivative $f'(x)$	Function $f(x)$	Derivative $f'(x)$
$g(x) = f^{-1}(x)$	$g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))}$	$y = \cot x$	$\dfrac{dy}{dx} = -\csc^2 x$
$y = e^{f(x)}$	$\dfrac{dy}{dx} = f'(x).e^{f(x)}$	$y = \csc x$	$\dfrac{dy}{dx} = -\csc x \cot x$
$y = \ln\lvert f(x)\rvert$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$	$y = \sin^{-1} x$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = a^{f(x)}$	$\dfrac{dy}{dx} = f'(x)a^{f(x)} \ln a$	$y = \cos^{-1} x$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = sin\, x$	$\dfrac{dy}{dx} = cos\, x$	$y = \tan^{-1} x$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2}$
$y = \cos x$	$\dfrac{dy}{dx} = -\sin x$	$y = \cot^{-1} x$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1}{1+x^2}$
$y = \tan x$	$\dfrac{dy}{dx} = \sec^2 x$	$y = \sec^{-1} x$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$
$y = \sec x$	$\dfrac{dy}{dx} = \sec x \tan x$	$y = \csc^{-1} x$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$

CHAPTER 4

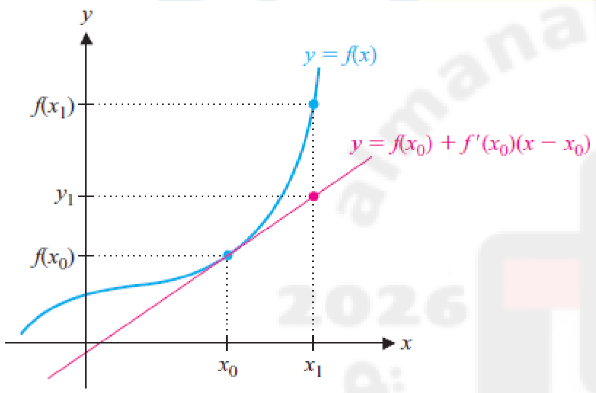
Applications of Differentiation

تطبيقات الاشتقاق

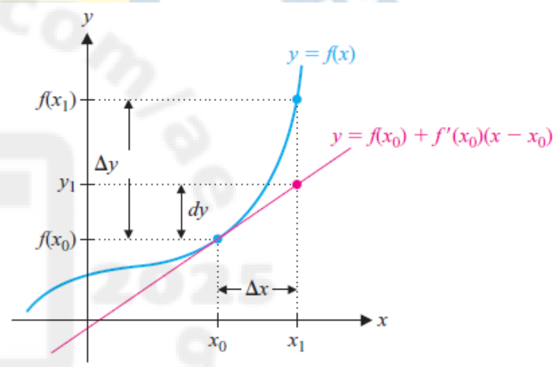
Lesson 4-1 الدرس

Linear Approximations and Newton's method

التقريبات الخطية وطريقة النيوتن



Linear approximation of $f(x_1)$
التقريب الخطي للدالة



Increments and differentials
الزيادات والتفاضلات

DEFINITION 1.1
The linear (or tangent line) approximation of $f(x)$ at $x = x_0$ is the function

التعريف 1.1
التقريب الخطي أو (المماس) للدالة $f(x)$ عند $x = x_0$

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f(x_1) \approx y_1 = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

Example 1 مثال

Find the linear approximation to جد التقريب الخطي ل

$$f(x) = \cos x \quad at \quad f(x_0) = \frac{\pi}{3}$$ عند

and use it to approximate $cos(1)$. واستخدمه لتقريب $cos(1)$

Example 2 مثال 2

Find the linear approximation to جد التقريب الخطي للدالة

$$f(x) = sin\, x \quad \text{for } x \text{ to } 0$$

EXERCISES تمارين

Ex1 تمرين1

Find the linear approximation to. جد التقريب الخطي للدالة

$$f\ (x)\ at\ x = x_0$$

Use the linear approximation to estimate the given number. ثم استخدم التقريب الخطي لتقدير العدد المعطى.

1) $f(x) = \sqrt{x}\ , x_0 = 1\ ,\ \sqrt{1.2}$

2) $f(x) = (x+1)^{1/3}\ , x_0 = 0\ ,\ \sqrt[3]{1.2}$

3) $f(x) = \sqrt{2x+9}\ , x_0 = 0\ ,\ \sqrt{8.8}$

4) $f(x) = \frac{2}{x}\ , x_0 = 1\ , \frac{2}{0.99}$

5) $f(x) = sin\ 3x\ , x_0 = 0\ ,\ sin(0.3)$

6) $f(x) = sin\ x\ x_0 = \pi\ ,\ ,\ sin(0.3)$

7) $f(x) = sin\ x\ x_0 = \frac{\pi}{3}\ \ sin(1)$

Ex2 تمرين2

Find the linear approximation to

جد التقريب الخطي للدالة

1) $f(x) = e^{3x}\ , x_0 = 0$

2) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}\ , x_0 = 1$

Example 3 مثال

Use a linear approximation to approximate

استخدم تقريبًا خطيًا لتقريب

1) $\sqrt[3]{8.02}$

2) $\sqrt[3]{8.07}$

3) $\sqrt[3]{8.15}$

4) $\sqrt[3]{25.2}$

EXERCISES تمارين

Exercise **تمرين**

Use linear approximations to estimate the quantity. استخدم التقريبات الخطية لتقدير الكمية

1) $\sqrt[3]{7.96}$

2) $\sqrt[4]{16.04}$

3) $\sqrt[4]{16.08}$

4) $\sqrt[4]{16.16}$

5) $\boldsymbol{sin(0.1)}$

6) $\boldsymbol{sin(1.0)}$

7) $\boldsymbol{sin\left(\frac{9}{4}\right)}$

8) $\boldsymbol{sin(3)}$

Example 4 | مثال 4

Suppose that based on market research, a company estimates that $f(x)$ thousand small cameras can be sold at the price of ADE x, as given in the accompanying table.

على فرض أنه بناءً على بحث في الأسواق، قدّرت شركة ما أنه يمكن بيع $f(x)$ ألف آلة تصوير صغيرة بسعر ADE x كما يبين الجدول التالي

x	6	10	14
$f(x)$	84	60	32

Estimate the number of cameras that can be sold at ADE 7.

قدر عدد الات التصوير التي يمكن بيعها بسعر ADE 7

EXERCISES تمارين

Ex 9 | تمرين 9

A company estimates that $f(x)$ thousand software games can be sold at the price of ADE x as given in the table.

قدّرت شركة ما أنه يمكن بيع $f(x)$ ألف لعبة برمجية بالسعر ADE x كما هو مُعطى في الجدول.

x	20	30	40
$f(x)$	18	14	12

Estimate the number of games that can be sold at

قدّر عدد اللعب التي يمكن بيعها بسعر

(a) AED24

(b) AED36.

Ex 10 | تمرين 10

A vending company estimates that $f(x)$ cans of soft drink can be sold in a day if the temperature is $x°F$ as given in the table.

قدّرت شركة بيع أنه يمكن بيع $f(x)$ علبة مشروبات غازية كل يوم إذا كانت درجة الحرارة $xF°$ كما هو مُعطى في الجدول.

x	60	80	100
$f(x)$	84	120	168

Estimate the number of cans that can be sold at

قدّر عدد العلب التي يمكن بيعها عند

(a) 72°

(b) 94°.

Ex 11 | **تمرين 11**

An animation director enters the position $f(t)$ of a character's head after t frames of the movie as given in the table.

مخرج رسوم متحركة يدخل الموقع $f(t)$ لرأس شخصية ما بعد t إطار من الفيلم كما هو موضح في الجدول.

t	200	220	240
$f(t)$	128	142	136

If the computer software uses interpolation to determine the intermediate positions, determine the position of the head at frame numbers

إذا كان برنامج الحاسوب يستخدم الاستكمال الداخلي لتحديد المواقع المتوسطة، فحدد موقع الرأس عند عدد الإطارات

(a) 208

(b) 232.

Ex 12 | **تمرين12**

A sensor measures the position $f(t)$ of a particle t microseconds after a collision as given in the table.

يقيس مستشعر الموقع$f(t)$ لجسيم بعد t ميكروثانية من تصادم كما هو مُعطى في الجدول.

t	200	220	240
$f(t)$	128	142	136

Estimate the position of the particle at times

قدّر موقع الجسيم عند الأزمنة

(a) $t = 8$

(b) $t = 12$.

تمارين واسئلة سنوات سابقة

Q1 Let ليكن

$$f(2) = -5, \qquad f'(2) = 1$$

the linear approximations of $f(x)$ is هو التقريب الخطي ل

a) $L(x) = 7 - x$

b) $L(x) = x - 7$

c) $L(x) = 11 - 5x$

d) $L(x) = -3 - x$

Q2 Find linear approximations of اوجد التقريب الخطي ل

$f(x) = \sin x$ $f(x)$ at $x_0 = \pi$ عند

a) $L(x) = \pi - x$

b) $L(x) = -\pi - x$

c) $L(x) = \pi + x$

d) $L(x) = -\pi + x$

Q3 Find linear approximations of اوجد التقريب الخطي ل

$$f(x) = \sqrt{x+8}\,, x_0 = 1$$

a) $L(x) = \frac{1}{6}x + \frac{17}{6}$

b) $L(x) = \frac{1}{6}x + \frac{17}{6}$

c) $L(x) = \frac{1}{6}x + \frac{17}{6}$

d) $L(x) = \frac{1}{6}x + \frac{17}{6}$

Q4 Find linear approximations of اوجد التقريب الخطي ل

$$f(x) = \sqrt{x+3}\,, x_0 = 1$$

a) $L(x) = 2 - \frac{1}{4}(x-1)$

b) $L(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-1)$

c) $L(x) = 1 - \frac{1}{4}(x-2)$

d) $L(x) = 1 + \frac{1}{4}(x-2)$

Q5 Find linear approximations of اوجد التقريب الخطي ل

$$f(x) = \sqrt{6x+16}\,, x_0 = 0$$

a) $L(x) = 4 - \frac{1}{4}x$

b) $L(x) = \frac{3}{4}x - 4$

c) $L(x) = 4 + \frac{3}{4}x$

d) $L(x) = 16 - 3x$

Q6 Find linear approximations of اوجد التقريب الخطي ل

$f(x) = \frac{2}{x}$ $f(x)$ at $x_0 = 1$ عند

a) $L(x) = 4 - 2x$

b) $L(x) = 6 - 2x$

c) $L(x) = 2x - 2$

d) $L(x) = 4 - 4x$

Q7 Use linear approximations of $\sqrt[3]{\boldsymbol{x+1}}$ استخدم التقريب الخطي ل

to approximate $\sqrt[3]{1.01}$ لإيجاد تقريب

a) $\frac{601}{600}$

b) $\frac{301}{300}$

c) $\frac{901}{900}$

d) $\frac{1201}{1200}$

Q8 Approximations the value of $\sqrt[4]{15}$ اوجد القيمة التقريبية ل

Using $f(x) = \sqrt[4]{x}$ at $x_0 = 16$ عند باستخدام

a) $\frac{129}{32}$

b) $\frac{127}{32}$

c) 2

d) $\frac{7}{8}$

Q9 Let

ليكن

$$f(3) = 7 \quad , \quad f'(3) = 2$$

Use it to approximate $f(3.02)$

استخدم التقريب لإيجاد

a) $f(3.02) \approx 7.04$

b) $f(3.02) \approx 3.06$

c) $f(3.02) \approx 1.76$

d) $f(3.02) \approx -70.4$

Q10 Find linear approximations of

اوجد التقريب الخطي ل

$$f(x) = \ln(x+1) \quad at \quad \boldsymbol{x_0 = 0}$$

Use it to approximate $\ln(1.1)$

استخدم التقريب لإيجاد

a) $L(x) = 1 - x$, $\ln(1.1) = 0.9$

b) $L(x) = 2x$, $\ln(1.1) = 0.2$

c) $L(x) = x$, $\ln(1.1) = 1.1$

d) $L(x) = x$, $\ln(1.1) = 0.1$

Q11 Find linear approximations of

اوجد التقريب الخطي ل

$$f(x) = \ln(1+2x) \quad at \quad x_0 = 0$$

Use it to approximate $\ln(1.05)$

استخدم التقريب لإيجاد

a) $L(x) = 2x$, $\ln(1.05) = 0.05$

b) $L(x) = 2x$, $\ln(1.05) = 2.1$

c) $L(x) = -2x$, $\ln(1.05) = -0.05$

d) $L(x) = 1 + 2x$, $\ln(1.05) = 1.05$

Q12

A company estimates that $f(x)$ thousand software games can be sold at the price of $\$x$ as given in the table.
Estimate the number of games that can be sold at 23$

تقدر إحدى الشركات أنه يمكن بيع $f(x)$ ألف لعبة برمجية بسعر $\$x$ دولار كما هو موضح في الجدول.

استخدم التقريب لإيجاد عدد الألعاب التي تم بيعها بسعر 23$

x	20	30	40
$f(x)$	18	14	12

a) 10.5

b) 12.8

c) 16.8

d) 6.5

Newton's Method طريقة نيوتن

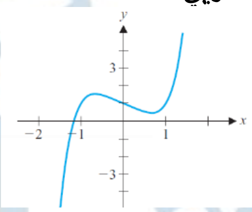
Newton-Raphson method طريقة نيوتن رافسون

$$x_{n+1} = x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0, 1, 2, 3 \dots \dots$$

Ex5 مثال

Use Newton's method to approximate جد الصفر التقريبي للدالة

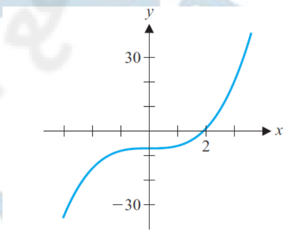
$f(x) = x^5 - x + 1.$



n	x_n
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Ex6 Use Newton's method to approximate جد الصفر التقريبي للدالة مثال

$\sqrt[3]{7}$



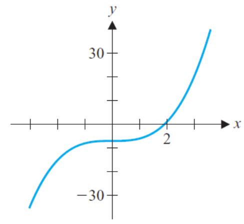
n	x_n
1	
2	
3	
4	

Example7 مثال

The Effect of a Bad Guess on Newton's Method **تأثير التخمين السيء على طريقة نيوتن**

Use Newton's method to find an approximate zero of ا ستخدم طريقة نيوتن لإيجاد صفر تقريبي للدالة

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1$$



n	x_n
1	
2	
3	
4	

Example 8 مثال

Unusually Slow Convergence for Newton's Method **التقارب البطيء على غير العادة مع طريقة نيوتن**

Use Newton's method to try to locate the zero of استخدم طريقة نيوتن لإيجاد صفر تقريبي للدالة

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1$$

1) $\boldsymbol{x_0 = -2}$

n	x_n
1	
2	
3	
4	
5	
6	

2) $\boldsymbol{x_0 = -1}$

n	x_n
1	
2	
3	
4	
5	
6	

3) $\boldsymbol{x_0 = 0}$

n	x_n
1	
2	
3	
4	
5	
6	

EXERCISES تمارين

Exercise 1 تمرين1

use Newton's method with the given x_0 compute x_1 and x_2 to

استخدم طريقة نيوتن مع قيم x_0 لحساب x_1 و x_2 ل

1) $x^3 + 3x^2 - 1 = 0,\ x_0 = 1$

n	x_n
1	
2	

2) $x^3 + 4x^2 - x - 1 = 0\ \ x_0 = -1$

n	x_n
1	
2	

3) $x^4 - 3x^2 + 1 = 0,\ x_0 = 1$

n	x_n
1	
2	

4) $x^4 - 3x^2 + 1 = 0,\ x_0 = -1$

n	x_n
1	
2	

Exercise 2 تمرين 2

Use Newton's method to find an approximate root استخدم طريقة نيوتن لإيجاد جذر تقريبي للدالة

1) $x^3 + 5x - 1 = 0 \quad x_0 = 0$

n	x_n
1	
2	
3	

2) $x^3 = e^{-x} \quad x_0 = 1$

n	x_n
1	
2	
3	

Lesson 4-2 الدرس

Indeterminate Forms and L'Hôpital Rule

THEOREM 2.1 (L'Hôpital's Rule)

Suppose that f and g are differentiable on the interval (a, b), except possibly at the point $c \in (a, b)$ and that $g'(x) \neq 0$ on (a, b), except possibly at c. Suppose further that $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ has the indeterminate form $\frac{0}{0}$ or $\frac{\infty}{\infty}$ and that $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (or $\pm\infty$). Then,

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

The conclusion of Theorem 2.1 also holds if $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ is replaced with any of the limits $\lim_{x \to c^+} \frac{f(x)}{g(x)}$, $\lim_{x \to c^-} \frac{f(x)}{g(x)}$, $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ or $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$. (In each case, we must make appropriate adjustments to the hypotheses.)

The Indeterminate Form الصيغ غير المحددة

$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\infty - \infty$	$0 \cdot \infty$
∞^0	1^∞	0^0	

The Indeterminate Form $\frac{0}{0}$ الصيغة غير المعرّفة

Ex1 Evaluate

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

EXERCISES تمارين

Ex	Find the indicated limits	اوجد كل من النهايات التالية تمرين
1)	$\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x^2-4}$	
2)	$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$	
3)	$\lim_{t\to 0}\frac{e^{2t}-1}{t}$	
4)	$\lim_{t\to 0}\frac{sint}{e^{3t}-1}$	
5)	$\lim_{t\to 0}\frac{tan^{-1}t}{sin\,t}$	
6)	$\lim_{t\to 0}\frac{sint}{sin^{-1}t}$	
7)	$\lim_{x\to 0}\frac{tan^{-1}x}{sin\,x}$	
8)	$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\ln(\sec x)}$	
9)	$\lim_{x\to \pi}\frac{sin2x}{\sin x}$	
10)	$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos\,x}{x^2}$	

Ex	Find the indicated limits	تمرين اوجد كل من النهايات التالية

11) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}$

12) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3}$

13) $\lim_{t\to 1}\frac{\sqrt{t}-1}{t-1}$

14) $\lim_{t\to 1}\frac{\ln t}{t-1}$

15) $\lim_{t\to 0}\frac{\sin(\sin t)}{\sin t}$

16) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{10-x}-3}$

17) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}$

18) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2+3x}$

19) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1} x}{\sin^{-1} x}$

The Indeterminate Form $\frac{\infty}{\infty}$ الصيغة غير المعرّفة

Ex2 Evaluate مثال

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x}$$

Ex3 Evaluate مثال

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x}$$

EXERCISES تمارين

Ex Find the indicated limits جد النهايات المعطاة. تمرين

3) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+2}{x^2-4}$

4) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x^2+4x+3}$

5) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^x}$

6) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^4}$

7) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x}}{x^4+2}$

8) $\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-3x}$

Ex5 Evaluate	مثال جد

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{csc\ x}$$

EXERCISES تمارين

Ex Find the indicated limits	تمرين جد النهايات المعطاة.
1) $\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-xin\ x}{x\sin^2 x}$	2) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2}$
3) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$	4) $\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\cot x}$
5) $\lim_{x\to0^+}(\tan x\ln x)$	

An Erroneous Use of L'Hôpital's Rule الاستخدام الخاطئ لقاعدة لوبيتال

Ex4 Find the mistake in the string of equalities مثال جد الخطأ في سلسلة المعادلات

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{e^x-1}$$

EXERCISES تمارين

Ex Find the indicated limits تمرين جد النهايات المعطاة.

1) $\lim_{x\to -1}\frac{\cos^{-1}x}{x^2-1}$	2) $\lim_{t\to 1}\frac{\ln(\ln t)}{\ln t}$

The Indeterminate Form $\infty-\infty$ الصيغة غير المعرّفة

Ex6 Evaluate مثال جد

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(x+1)}-\frac{1}{x}\right]$$

EXERCISES تمارين

Ex	Find the indicated limits
1)	$\lim_{x \to 0} \left(\tan x + \frac{1}{x - \pi/2} \right)$
2)	$\lim_{x \to \infty} (\ln x - x)$
3)	$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$

The Indeterminate Form $0 . \infty$ الصيغة غير المعرّفة

Ex7 Evaluate جد مثال

$$\lim_{x \to \infty} \left[\frac{1}{x} \ln x \right]$$

Ex	Find the indicated limits
	$\lim_{x \to \infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$

The Indeterminate Form 1^{∞} الصيغة غير المعرّفة

Ex8 Evaluate مثال جد

$$\lim_{x \to 1^+} x^{\left(\frac{1}{x-1}\right)}$$

EXERCISES تمارين

Ex Find the indicated limits تمرين اوجد كل من النهايات التالية

1) $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

2) $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$

3) $\lim_{t \to \infty} \left(\frac{t-3}{t+2}\right)^t$

4) $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x-5}{2x+5}\right)^x$

5) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\left(\frac{1}{x}\right)}$

6) $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{\sqrt{x^2-4}}$

The Indeterminate Form	0^0	الصيغة غير المعرّفة

Ex9 Evaluate جد **مثال**

$$\lim_{x\to 0^+}(sin\ x)^x$$

Ex	Find the indicated limits	تمرين جد النهاية

$$\lim_{x\to 0^+}(\cos x)^{1/x}$$

The Indeterminate Form	∞^0	الصيغة غير المعرّفة

Ex10	Evaluate	مثال جد

$$\lim_{x\to\infty}(x+1)^{2/x}$$

EXERCISES تمارين

Ex	Find the indicated limits

1) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{x}$

2) $\lim_{x\to\infty}(x)^{\frac{2}{x}}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}(x)^{\frac{1}{x}}$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}(x)^{\frac{1}{\ln x}}$

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x}}$

7) $\lim\limits_{x\to 2^+}\left|\frac{x+1}{x-2}\right|^{\sqrt{x^2-4}}$

Rewrite as one fraction
إعادة كتابة المسائلة

Ex	Find the indicated limits	تمرين اوجد

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot x-\frac{1}{x}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{x}-\frac{2}{\sin 2x}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to\infty} te^{-t}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty} t\sin\left(\frac{1}{t}\right)$

تمارين خاصة

Ex	Find the indicated limits	تمرين اوجد
1)	$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$	
2)	$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{\ln x}=0$	
3)	$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)$	
4)	$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t-3}{2t+1}\right)^t$	

أسئلة سنوات سابقة

Q1 Evaluate اوجد

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}$$

a) $-\frac{1}{6}$
b) 6
c) 0
d) ∞

Q2 Evaluate اوجد

$$\lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x^3}$$

a) $-\frac{1}{6}$
b) $\frac{1}{6}$
c) 0
d) ∞

Q3 Evaluate اوجد

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x+x^2}$$

a) $-\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{2}$
c) 0
d) *does not exist* غير موجودة

Q4 Evaluate اوجد

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2-4x}$$

a) 0
b) $\frac{1}{4}$
c) $-\frac{1}{4}$
d) *does not exist* غير موجودة

Q5 Evaluate اوجد

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\sin(2x)}$$

a) 0

b) $\frac{1}{2}$

c) $-\frac{1}{2}$

d) *does not exist* غير موجودة

Q6 Evaluate

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{x - \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}$$

a) 2
b) 1
c) -1
d) *does not exist* غير موجودة

Q7 Evaluate

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sec x}{1 + \tan x}$$

a) 2
b) 1
c) -1
d) *does not exist* غير موجودة

Q8 Evaluate اوجد

$$\lim_{x \to 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$$

a) e^2

b) e^{-2}

c) 2

d) *does not exist* غير موجودة

Q9 Evaluate اوجد

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$$

a) e^2

b) e^{-2}

c) 2

d) *does not exist* غير موجودة

Lesson 4-3 الدرس

القيم العظمى والقيم الصغرى

MAXIMUM AND MINIMUM VALUES

DEFINITION 3.1

For a function f defined on a set S of real numbers and a number $c \in S$,

(i) $f(c)$ is the **absolute maximum** of f on S if $f(c) \geq f(x)$ for all $x \in S$ and
(ii) $f(c)$ is the **absolute minimum** of f on S if $f(c) \leq f(x)$ for all $x \in S$.

An absolute maximum or an absolute minimum is referred to as an **absolute extremum.** (The plural form of extremum is **extrema.**)

تعريف 3-1

لاي دالة $f(x)$ معرفة على الفتره S من مجموعة الاعداد الحقيقة ولأي عدد $c \in S$

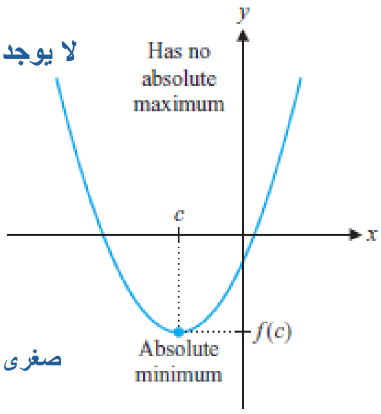
1) فان $f(c)$ هي قيمة مطلقة عظمى للدالة f على الفتره S إذا كان $f(c) \geq f(x)$ $for\ all\ x \in S$

2) فان $f(c)$ هي قيمة مطلقة صغرى للدالة f على الفتره S إذا كان $f(c) \leq f(x)$ $for\ all\ x \in S$

An absolute maximum or an absolute minimum is referred to as an absolute extremum. (The plural form of extremum is extrema.)

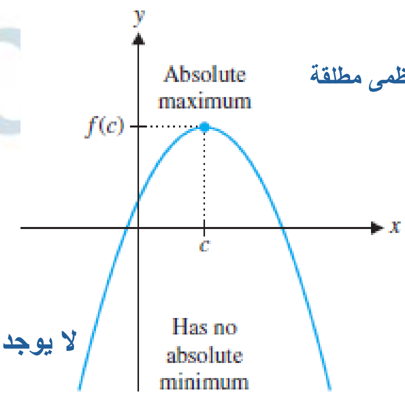
يُشار إلى القيمة العظمى المطلقة أو القيمة الصغرى المطلقة باسم القيم القصوى المطلقة. (الجمع من extremum هو extrema).

لا يوجد عظمى مطلقة



صغرى مطلقة

عظمى مطلقة



لا يوجد صغرى مطلقة

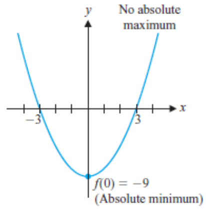
EXAMPLE 4.1 — مثال 4-1

(a) Locate any absolute extrema of — حدد أي قيمة قصوى مطلقة ل

$f(x) = x^2 - 9$ on the interval $(-\infty, \infty)$.

فترة مفتوحة يوجد قيمة صغرى مطلقة $f(0) = -9$
لا يوجد قيمة عظمى مطلقة

لا يوجد عظمى مطلقة



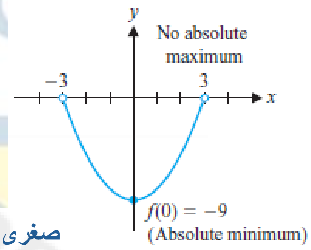
صغرى مطلقة

(b) Locate any **absolute extrema** of — حدد أي قيمة قصوى مطلقة ل

$\boldsymbol{f(x) = x^2 - 9}$ on the interval $(-3, 3)$.

فترة مفتوحة يوجد قيمة صغرى مطلقة $f(0) = -9$
لا يوجد قيمة عظمى مطلقة

لا يوجد عظمى مطلقة



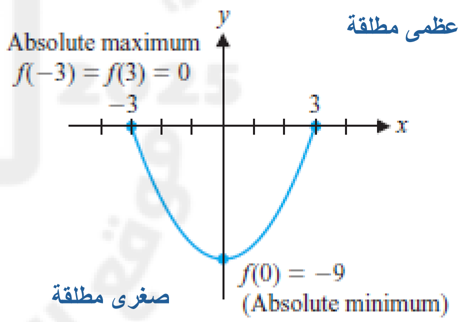
صغرى مطلقة

(c) Locate any **absolute extrema** of — حدد أي قيمة قصوى مطلقة ل

$\boldsymbol{f(x) = x^2 - 9}$ on the interval $[-3, 3]$.

فترة مغلقة يوجد
قيمة صغرى مطلقة $f(0) = -9$
قيمة عظمى مطلقة $f(-3) = f(3) = 0$

عظمى مطلقة



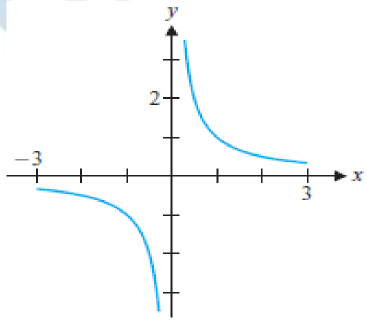
صغرى مطلقة

EXAMPLE 4.2 — مثال 4-2

Locate any absolute extrema of — حدد أي قيمة قصوى مطلقة ل

$f(x) = \frac{1}{x}$ on $[-3, 0) \cup (0, 3]$.

من الرسم يلاحظ ان الدالة غير متصلة و لا يوجد لها قيمة قصوى مطلقة
حيث يلاحظ انها تذهب الى سالب مالانهاية عندما تقترب الدالة من الصفر من اليسار والى ما لانهاية عندما تقترب من الصفر من اليمين



THEOREM 3.1 (Extreme Value Theorem) — نظرية 3.1 (نظرية القيم القصوى)

A continuous function f defined on a *closed, bounded* interval $[a, b]$ attains both an absolute maximum and an absolute minimum on that interval.

الدالة المتصلة f المُعرَّفة في الفترة المغلقة $[a , b]$ تحقق قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة في تلك الفترة.

EXAMPLE 4.3 — مثال 4-3

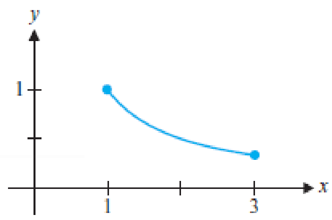
Locate any **absolute extrema** of — حدد أي قيمة قصوى مطلقة ل

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ on the interval } [1, 3].$$

دالة متصلة على فترة مغلقة يوجد

قيمة صغرى مطلقة $f(3) = \frac{1}{3}$

قيمة عظمى مطلقة $f(1) = 1$



Exercise — تمرين

Use the graph to locate the absolute extrema (if they exist) of the function on the given interval.

استخدم الرسم التالي لتحديد القيم القصوى المطلقة ان وجدت للدالة في الفترة المعطاة

1)

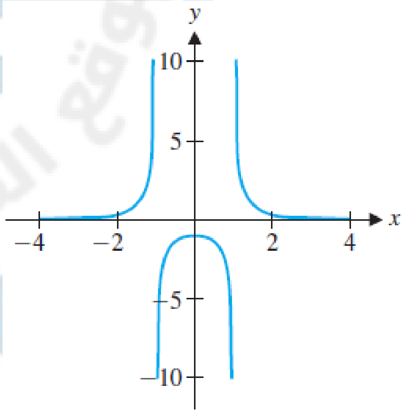
$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

a) $(0, 1) \cup (1, \infty)$

b) $(-1, 1)$

c) $(0, 1)$

d) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$



2)

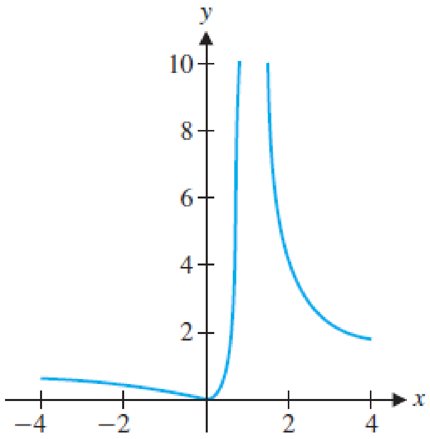
$$f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$$

a) $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

b) $(-1, 1)$

c) $(0, 1)$

d) $[-2, -1]$



DEFINITION 3.2

(i) $f(c)$ is a **local maximum** of f if $f(c) \geq f(x)$ for all x in some *open* interval containing c.

(ii) $f(c)$ is a **local minimum** of f if $f(c) \leq f(x)$ for all x in some *open* interval containing c.

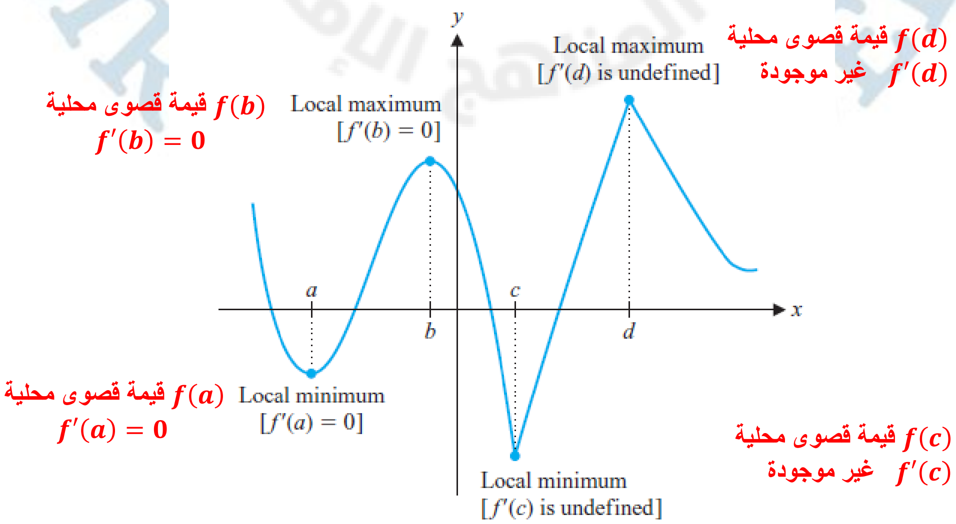
In either case, we call $f(c)$ a **local extremum** of f.

تعريف 3.2

i. $f(c)$هي قيمة عظمى محلية للدالة f إذا كانت $f(c) \geq f(x)$ لكل في فترة مفتوحة تحتوي على.

ii. $f(c)$هي قيمة صغرى محلية للدالة إذا كانت $f(c) \leq f(x)$ لكل في فترة مفتوحة تحتوي على.

في كلتا الحالتين نطلق على قيمة قصوى محلية للدالة.



REMARK 3.1

Local maxima and minima (the plural forms of maximum and minimum, respectively) are sometimes referred to as relative maxima and minima, respectively.

ملاحظة

يُشار أحيانًا إلى القيم القصوى والدنيا المحلية باسم القيم القصوى والدنيا النسبية على التوالي.

في هذا الدرس فقط سوف نعتمد على القصوى المحلية من خلال الرسم فقط

EXAMPLE 4.4 — مثال 4-4

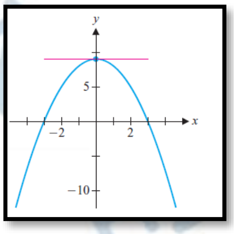
Locate any **local extrema** for

$$f(x) = 9 - x^2$$

and describe the behavior of the derivative at the local extremum.

حدد أي قيمة قصوى محلية ل

صف سلوك المشتقة عند القيمة القصوى المحلية



EXAMPLE 4.5 — مثال 4-5

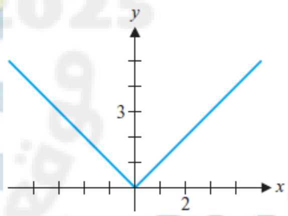
Locate any **local extrema** for

$$f(x) = |x|$$

and describe the behavior of the derivative at the local extremum.

حدد أي قيمة قصوى محلية ل

صف سلوك المشتقة عند القيمة القصوى المحلية



DEFINITION 3.3 — **تعريف 3.3**

A number c in the domain of a function f is called a **critical number** of f if $f'(c) = 0$ or $f'(c) = 0$ is undefined.

يكون العدد C في مجال الدالة $f(x)$ نقطة حرجة للدالة $f(x)$

إذا كان $f'(c) = 0$ او $f'(c)$ غير موجودة

THEOREM 3.2 (Fermat's Theorem) — **3.2 نظرية فيرمات**

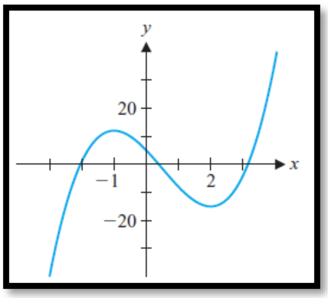
Suppose that $f(c)$ is a local extremum (local maximum or local minimum). Then c must be a critical number of f.

إذا كانت $f(c)$ هي قيمة قصوى محلية للدالة $f(x)$ فان c هي نقطة حرجة والعكس غير صحيح

EXAMPLE 4.6 — مثال 4-6

Find the critical numbers — اوجد النقاط الحرجة ل

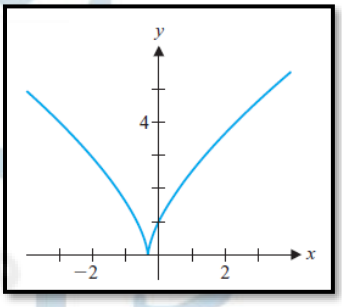
$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5.$$



EXAMPLE 4.7 — مثال 4-7

Find the critical numbers — اوجد النقاط الحرجة ل

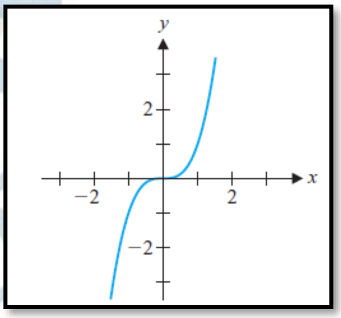
$$f(x) = (3x + 1)^{\frac{2}{3}}.$$



EXAMPLE 4.8 — مثال 4-8

Find the critical numbers — اوجد النقاط الحرجة ل

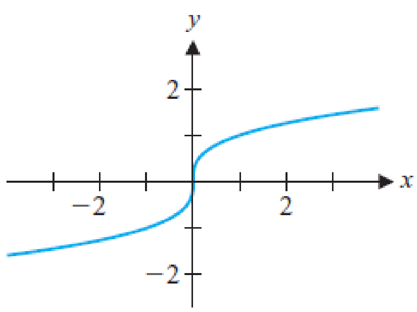
$$f(x) = x^3.$$



EXAMPLE 4.9 — مثال 4-9

Find the critical numbers — اوجد النقاط الحرجة ل

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}.$$



EXAMPLE 4.10 | **مثال 4-10**

Find the critical numbers

اوجد النقاط الحرجة ل

$$f\,(x) = \frac{2x^2}{x+2}$$

THEOREM 3.3 | **نظرية 3.3**

Suppose that $\boldsymbol{f}$ is continuous on the closed interval $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. Then, each absolute extremum of $\boldsymbol{f}$ must occur at an endpoint ($\boldsymbol{a}$ or $\boldsymbol{b}$) or at a critical number.

إذا اكانت الدالة $\boldsymbol{f}$ متصلة على الفترة المغلقة $[\boldsymbol{a}\,,\boldsymbol{b}]$فان القيم **القصوى المطلقة** يجب ان تقع عن **أطراف الفترة** او عند **النقاط الحرجة**

REMARK 3.4

Theorem 3.3 gives us a simple procedure for finding the absolute extrema of a continuous function on a closed, bounded interval:

1. Find all critical numbers in the interval and compute function values at these points.
2. Compute function values at the endpoints.
3. The largest of these function values is the absolute maximum and the smallest of these function values is the absolute minimum.

لإيجاد القيم القصوى المطلقة للدالة متصلة على فترة مغلقة

1) اوجد جميع الاعداد الحرجة
2) احسب قيمة الدالة عند الاعداد الحرجة وعند أطراف الفترة
3) أكبر قيمة تكون قيمة عظمى مطلقة وأصغر قيمة تكون صغرى مطلقة

EXAMPLE 4.11 | **مثال 4-11**

Find the absolute extrema of

اوجد القيم القصوى المطلقة

$\boldsymbol{f\,(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5}$ on the interval $[\boldsymbol{-2, 4}]$.

EXAMPLE 4.12 — مثال 4-12

Find the absolute extrema of

اوجد القيم القصوى المطلقة

$f(x) = 4x^{5/4} - 8x^{1/4}$ on the interval $[0,4]$.

EXERCISES تمارين

Find the absolute extrema of the given function on each indicated interval.

اوجد القيم القصوى المطلقة ل

1) $f(x) = x^3 - 3x + 1$ on a) [0,2], b) [-3,2]

2) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$ on $[0, 4]$

3) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$ a) $[-3,1]$ b) $[-1,3]$

4) $f(x)=\sqrt{x^3-3x^2+2x}$, $[-1,3]$

5) $f\ (x)=\ x^{2/3}$ a) $[-4,-2]$, b) $[-1,3]$

6) $f\ (x)=\ x^{4/5}$, $[-2,3]$

7) $f\ (x)=\sin x+\cos x$ a) $[0,2\pi]$ b) $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$

8) $f(x) = e^{-x^2}$ a) $[0,2]$ b) $[-3,2]$

9) $f(x) = x^2 e^{-4x}$ a) $[-2,0]$ b) $[0,4]$

10) $f(x) = \dfrac{3x^2}{x-3}$ a) $[-2,2]$ b) $[2,8]$

11) $f(x) = \tan^{-1}(x^2)$ a) $[0,1]$ b) $[-3,4]$

12) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ a) $[0,2]$ b) $[-3,4]$

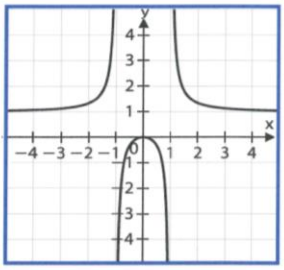
13) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+16}$ a) $[0,2]$ b) $[0,6]$

أسئلة سنوات سابقة

Q1 Use the graph to determine the absolute extrema of the function on the given interval

س1 استخدم الرسم البيان لتحديد القيم القصوى المطلقة للدالة ان وجدت على الفترة المعطاة

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}, \qquad (-1,1)$$



a) (0,0) minimum absolute value

b) $(0,-1)$ minimum absolute value

c) (0,0) maximum absolute value

d) $N0$ *absolute extrema*

Q2 Find the absolute extrema of the function on the given interval

س2 اوجد القيم القصوى المطلقة للدالة على الفترة المعطاة

$$f(x) = x^3 - 12x + 10 \ , [\,0,3\,]$$

a) $f(0) = 10\,, f(3) = 1$

b) $f(0) = 10\,, f(2) = -6$

c) $f(2) = -6\,, f(3) = 1$

d) $f(0) = 10\,, f(2) = -6, f(3) = 1$

Q3 Find the absolute minimum of the function on the given interval

س3 اوجد القيمة الصغرى المطلقة للدالة على الفترة المعطاة

$$\boldsymbol{f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1\,, \quad ,[-2,1]}$$

a) -7

b) $-\frac{1}{4}$

c) 0

d) 2

Q4 Find the absolute extrema of

س4 اوجد القيم القصوى المطلقة ل

$f(x) = e^{x^2}$ on the interval [0,2]

a) $f(1) = 0\,, f(2) = e^{-4}$

b) $f(0) = 1\,, f(2) = e^{-4}$

c) $f(0) = 1\,, f(2) = e^4$

d) $f(1) = 0\,, f(2) = e^4$

Q5	Find all critical points of	اوجد جميع الاعداد الحرجة ل	س5

$$f(x) = x^4 + 3x^3 + 2$$

a) $x = -\frac{9}{4}, x = 1, x = \frac{9}{4}$

b) $x = -\frac{9}{4}, x = \frac{9}{4}$

c) $x = -\frac{9}{4}, x = 0$

d) $x = 0, x = \frac{9}{4}$

Q6	Find all critical points of	اوجد جميع الاعداد الحرجة ل	س6

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$$

a) $x = -\frac{1}{2}, x = 0, x = \frac{1}{2}$

b) $x = -\frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}$

c) $x = -2, x = 2$

d) $x = -2, x = 0, x = 2$

Q8	find all critical numbers of	اوجد كل الاعداد الحرجة ل	س8

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$$

a) $x = -3, x = 0$

b) $x = -9, x = 1$

c) $x = -1, x = 1$

d) $x = -1, x = 3$

Q9	find all critical numbers of	اوجد كل الاعداد الحرجة ل	س9

$$\boldsymbol{f(x) = x^3 - 3x + 1}$$

a) $\boldsymbol{x = 0}, \quad \boldsymbol{x = 1}$

b) $\boldsymbol{x = \pm 1}$

c) $\boldsymbol{x = \pm 3}$

d) $\boldsymbol{x = -1, x = 0}$

Q10	find all critical numbers of	اوجد كل الاعداد الحرجة ل	س10

$$f(x) = -9x^2 - 12x - 6$$

a) $x = -\frac{2}{3}$

b) $x = \pm\frac{2}{3}$

c) $x = 3, x = -2$

d) $x = -3, x = 2$

Q11	Find the absolute extrema of the given function on the indicated interval.	أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة المعطاة على الفترة المشار إليها.	س11

$$f(x) = \sqrt{x^3 - 3x^2 + 2x}\ ,[-1,3\,]$$

Q12	Find the absolute extrema of the given function on the indicated interval.	أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة المعطاة على الفترة المشار إليها.	س12

$$f(x) = x^2 e^{-x}\ ,[-1,4\,]$$

ملاحظة بقية التمارين على القيم القصوى المحلية يتم مناقشتها في الدرس التالي

Lesson 3.4 الدرس
تزايد وتناقص دالة
INCREASING AND DECREASING FUNCTIONS

DEFINITION 4.1 التعريف 4.1

A function f is **increasing** on an interval I if for every $x_1, x_2 \in I$ with $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$ [i.e., $f(x)$ gets larger as x gets larger].
A function f is **decreasing** on the interval I if for every $x_1, x_2 \in I$ with $x_1 < x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$ [i.e., $f(x)$ gets smaller as x gets larger].

تكون دالة متزايدة في الفترة إذا كانت لكل I $x_1, x_2 \in$ عندما $x_1 < x_2$ فإنّ $f(x_1) < f(x_2)$
[بمعنى f ، تصبح أكبر كلما أصبحت x أكبر]
تكون دالة متناقصة في الفترة إذا كانت لكل I $x_1, x_2 \in$ عندما $x_1 < x_2$ فانّ $f(x_1) > f(x_2)$
[بمعنى f ، تصبح أكبر كلما أصبحت x أصغر]

THEOREM 4.1 النظرية 4.1

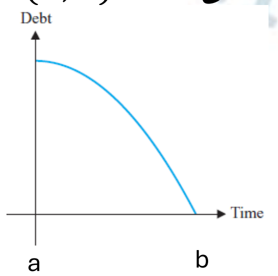
Suppose that f is differentiable on an interval I .
على فرض أن f قابلة للاشتقاق في الفترة I

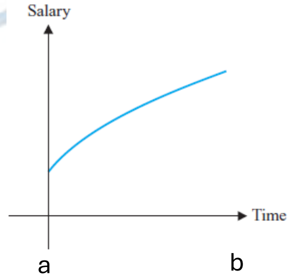
(i) If $f'(x) > 0$ for all $x \in I$, then f is increasing on I .
(ii) If $f'(x) < 0$ for all $x \in I$, then f is decreasing on I .

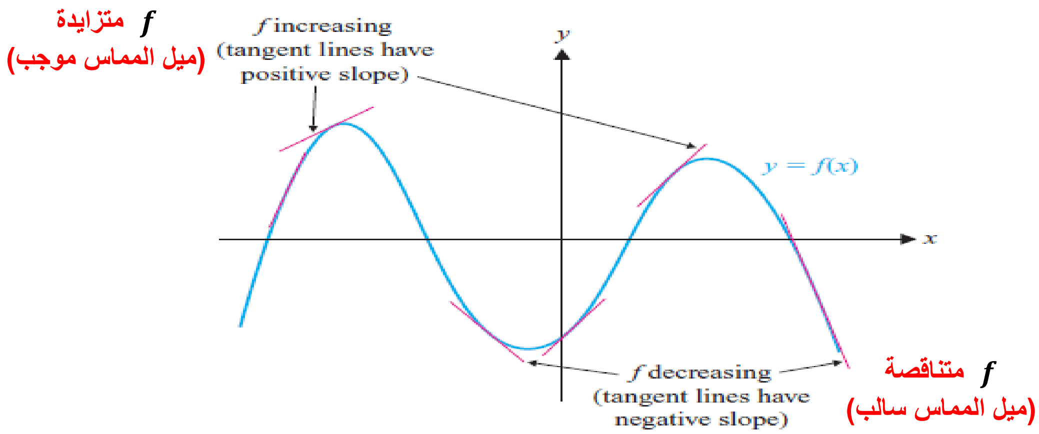
(i) أذا $f'(x) > 0$ كانت لكل قيم $x \in I$ ، فإن f تكون متزايدة في I
(ii) إذا $f'(x) < 0$ كانت لكل قيم $x \in I$ ، فإن f تكون متناقصة في I .

التزايد والتناقص واشارة المشتقة الأولى
Increasing and decreasing and first derivative

$f'(x) < 0, x \in (a,b)$	$f'(x) > 0, \in (a,b)$
$f(x)$ decreasing متناقصة على الفترة (a,b)	$f(x)$ increasing متزايدة على الفترة (a,b)







THEOREM 4.2 (First Derivative Test) النظرية **4.2** اختبار المشتقة الأولى

Suppose that f is continuous on the interval $[a, b]$ and $c \in (a, b)$ is a critical number.

i. If $f'(x) > 0$ for all $x \in (a, c)$ and $f'(x) < 0$ for all $x \in (c, b)$ (i.e., f changes from increasing to decreasing at c), then $f(c)$ is a local maximum.

ii. If $f'(x) < 0$ for all $x \in (a, c)$ and $f'(x) > 0$ for all $x \in (c, b)$ (i.e., f changes from decreasing to increasing at c), then $f(c)$ is a local minimum

iii. If $f'(x)$ has the same sign on (a, c) and (c, b), then $f(c)$ is not a local extremum.

على فرض أن f متصلة في الفترة $[a, b]$ و $c \in (a, b)$ هو عدد حرج

i. إذا كانت $f'(x) > 0$ لكل $x \in (a, c)$، و $f'(x) < 0$ لكل $x \in (c, b)$ (أي f تتغير من التزايد الى التناقص عند c فإن $f(c)$ هي قيمة عظمى محلية)

ii. إذا كانت $f'(x) < 0$ لكل $x \in (a, c)$، و $f'(x) > 0$ لكل $x \in (c, b)$ (أي f تتغير من التناقص الى التزايد عند c فإن $f(c)$ هي قيمة عظمى محلية)

iii. إذا كانت f لها الإشارة نفسها في الفترتين (a, c) و (c, b) فإن $f(c)$ ليست قيمة قصوى محلية

اختبار المشتقة الأولى
First derivative test

		$f'(c) = 0$ or undefined	$f'(d) = 0$ or undefined	
$x =$	a	c	d	b
إشارة $f'(x)$	+ + + + + $f'(x) > 0$	- - - - - $f'(x) < 0$	+ + + + + $f'(x) > 0$	
$f(x)$	Increasing متزايدة	Decreasing متناقصة	Increasing متزايدة	

$f(c)$ Local maximum عظمى محلية

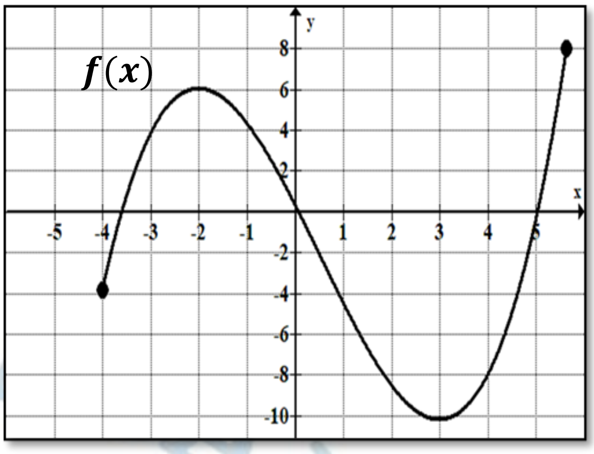
$f(d)$ Local minimum صغرى محلية

Increasing متزايدة for all $x \in (a, c) \cup (d, b)$

decreasing متناقصة for all $x \in (c, d)$

EXAMPLE Use the graph to answer مثال اعتمد على الرسم التالي للإجابة عما يليه

1) Absolute maximum
   القيمة العظمى المطلقة ....
2) Absolute minimum
   القيمة الصغرى المطلقة................................
3) Local maximum
   القيمة العظمى المحلية................................
4) Local minimum
   القيمة الصغرى المحلية ....
5) Increasing interval(s)
   فترات التزايد ....
6) Decreasing interval(s)
   فترات التناقص ....



EXAMPLE 4.1 مثال 4-1

Find the intervals where the function is increasing and decreasing. Use this information to determine all local extrema

حدد فترات التزايد وفترات التناقص ثم حدد جميع القيم القصوى المحلية وبين نوعها

$$f\ (x)\ =\ 2x^3 + 9x^2 - 24x - 10$$

EXAMPLE 4.2 مثال 4-2

Find the intervals where the function is increasing and decreasing. Use this information to determine all local extrema

حدد فترات التزايد وفترات التناقص ثم حدد جميع القيم القصوى المحلية وبين نوعها

$$f\ (x)\ =\ 3x^4 + 40x^3 - 0.06x^2 - 1.2x$$

EXAMPLE 4.4 مثال 4-4

Find the intervals where the function is increasing and decreasing. Use this information to determine all local extrema

حدد فترات التزايد وفترات التناقص ثم حدد جميع القيم القصوى المحلية وبين نوعها

$$f(x) = x^{\frac{5}{3}} - 3x^{\frac{2}{3}}.$$

EXERCISES تمارين

Find the intervals where the function is increasing and decreasing. Use this information to determine all local extrema

حدد فترات التزايد وفترات التناقص ثم حدد جميع القيم القصوى المحلية وبين نوعها

1) $y = x^3 - 3x + 2$

2) $y = x^3 + 2x^2 + 1$

3) $y = x^4 - 8x^2 + 1$

4) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

5) $y = (x + 1)^{\frac{2}{3}}$

6) $y = (x - 1)^{\frac{1}{3}}$

7) $y = sin\, x + cos\, x$

8) $y = sin^2 x$

9) $y = e^{x^2 - 1}$

10) $y = \ln(x^2 - 1)$

Find all critical numbers and use the First Derivative Test to classify each as the location of a local maximum, local minimum or neither.	اوجد جميع النقاط الحرجة ثم استخدم اختبار المشتقة الأولى لتحديد نوع كل منها
1) $y = x^4 + 4x^3 - 2$	2) $y = x^5 - 5x^2 + 1$
3) $y = xe^{-x^2}$	4) $y = x^2 e^{-x}$
5) $y = tan^{-1}(x^2)$	

6) $y = \sin^{-1}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$

7) $y = \frac{x}{1 + x^3}$

8) $y = \frac{x}{1 + x^4}$

9) $y = \sqrt{x^3 + 3x^2}$

10) $y = x^{\frac{4}{3}} + 4x^{\frac{1}{3}}$

نكمل تمارين الدرس السابق وفقا لنظرية الدرس الحالي

EXERCISES تمارين

Find all critical numbers by hand. Determine whether the critical number represents a local maximum, local minimum or neither.

اوجد جميع النقاط الحرجة ثم حدد اين منها قيمة عظمى محلية واي منها قيمة صغرى محلية واي منها ليست عظمى او صغرى

1) $f(x) = x^2 + 5x - 1$

2) $f(x) = -x^2 + 4x + 2$

3) $f(x) = x^3 - 3x + 1$

4) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$

5) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x$

6) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x$

5) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

6) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2$

7) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2$

8) $f(x) = x^4 + 6x^2 - 2$

9) $f(x) = \sin x \cos x \;, [0, 2\pi]$

10) $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$

11) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x + 2}$

12) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 4}{x - 1}$

13) $f(x) = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

14) $f(x) = xe^{-2x}$

15) $f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3} + 4x^{-2/3}$

16) $f(x) = x^{7/3} - 28x^{1/3}$

17) $f(x) = 2x\sqrt{x+1}$

18) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

19) $f(x) = xe^{-2x}$

20) $f(x) = |x^2 - 1|$

21) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1, & x < 0 \\ x^2 - 4x + 3, & x \geq 0 \end{cases}$

22) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & -\pi < x < \pi \\ -\tan x, & |x| \geq \pi \end{cases}$

Find the $\boldsymbol{x}$ −coordinate of the local maximum of اوجد احداثيات $\boldsymbol{x}$ للقيمة العظمى المحلية ل

1) $f(x) = x^3 + 4x^2 + 2x$	2) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$
3) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^3}$	4) $f(x) = x^2 e^{-x}$

Q12	Find value of k such that the function $\boldsymbol{f(x)}$ has a local extremum value at $\boldsymbol{x=2}$	اوجد قيمة $\boldsymbol{k}$ والتي تجعل للدالة $\boldsymbol{f(x)}$ قيمه قصوى محلية عند $\boldsymbol{x=2}$	س12

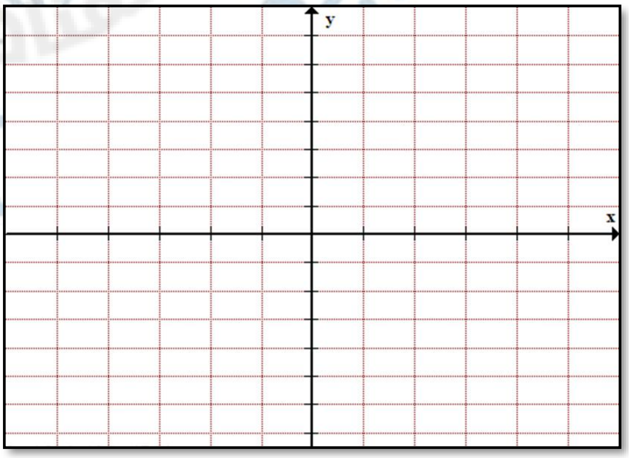
$$f(x)=x^3+\boldsymbol{k}x+5$$

Q13	Find value of a, b such that the function $\boldsymbol{f(x)}$ has a local extremum value at $\boldsymbol{f(-1)=7}$	اوجد قيمة $\boldsymbol{a, b}$ والتي تجعل للدالة $\boldsymbol{f(x)}$ قيمه قصوى محلية هي $\boldsymbol{f(-1)=7}$	س13

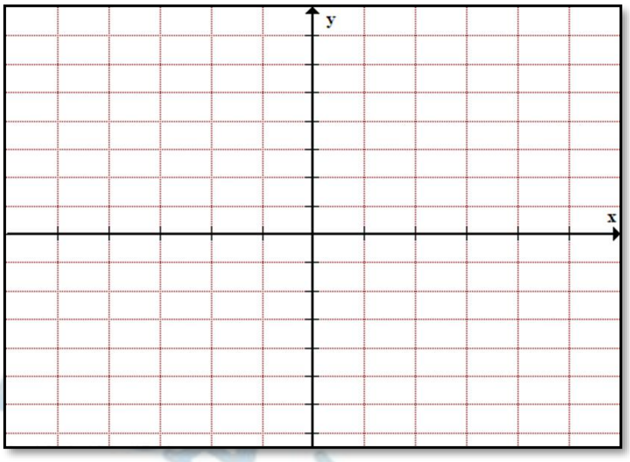
$$f(x)=\boldsymbol{a}x^3+\boldsymbol{b}x+3$$

sketch a graph of a function with the given properties.	ارسم بيان الدالة التي لها الخواص التالية

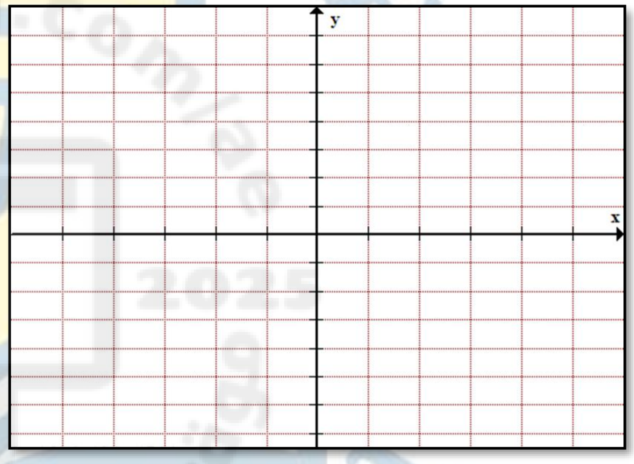
1) $f(0)=1, f(2)=5, f'(x)<0\ for\ x<0\ and\ x>2,$
$f'(x)>0\ for\ 0<x<2.$



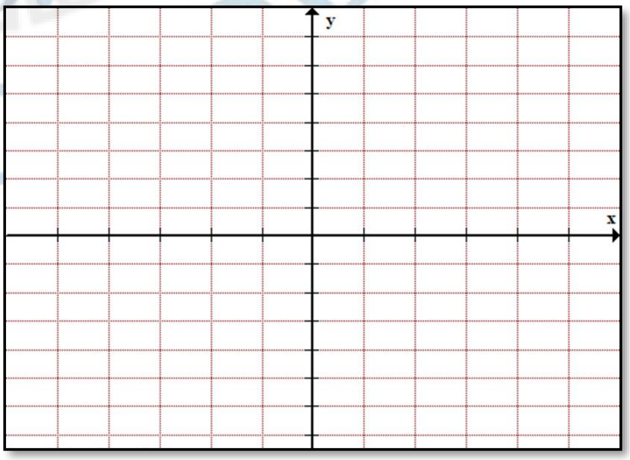
2) $f(-1) = 1, f(2) = 5, f'(x) < 0 \, for \; x < -1 \; and \; x > 2, f'(x) > 0 \; for \; -1 < x < 2,$
$f'(-1) = 0, f'(2) \; does \; not \; exist.$



3) $f(3) = 0, f'(x) < 0 \; for \; x < 0 \; and \; x > 3, f'(x) > 0 \; for 0 < x < 3, f'(3) = 0,$
$f(0) \; and \; f'(0) \; do \; not \; exist.$



4) $f(-1) = 2, f(1) = -2, f'(x) < 0 \; for \; -2 < x < 2 \; and \; f'(x) > 0 \; for \; x < -2 \; and \; x > 2.$



5) Assume that $\boldsymbol{f}$ is an increasing function with inverse function $\boldsymbol{f^{-1}}$. Show that $\boldsymbol{f^{-1}}$ is also an increasing function.	افرض ان الدالة $\boldsymbol{f}$ متزايدة ولها دالة معكوس هي $\boldsymbol{f^{-1}}$ بين ان الدالة $\boldsymbol{f^{-1}}$ هي دالة متزايدة أيضا

أسئلة سنوات سابقة واسئلة أخرى

Q1 Find the local minimum of the function where $\boldsymbol{f(x)}$ is graphically represented below.	س1 اوجد القيم الصغرى المحلية الدالة $f(x)$ والموضحة بيانيا

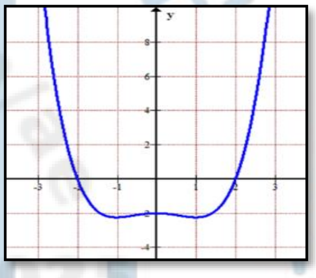
$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2-2$$

a) $f(0)=-2$

b) $f(-2)=0$

c) $f(2)=0$

d) $f(-1)=-2.25\,,f(1)=-2.25$



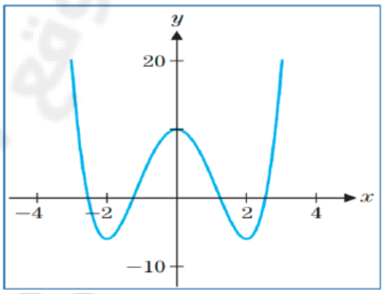
Q2 Find the intervals where the function $f(x)$ is increasing	س2 اوجد الفترات التي تكون فيها الدالة $f(x)$ متزايدة

a) $(-\infty,-2)\cup(0,2)$

b) $(-2,0)\cup(2,\infty)$

c) $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$

d) $(-2,0)\cup(0,2)$



Q3 Find the intervals where the function $g(x)$ is increasing	س3 اوجد الفترات التي تكون فيها الدالة $g(x)$ متزايدة

$$g(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-70x+5\,,$$

a) $(-\infty,-10)\cup(7,\infty)$

b) $(-\infty,-7)\cup(10,\infty)$

c) $(-\infty,10)$

d) $(-10,7)$

Q4	Find the intervals where the function $f(x)$ is decreasing	اوجد الفترات التي تكون فيها الدالة $f(x)$ متناقصة	س4

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1\,,$$

a) $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$

b) $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$

c) $(-1,3)$

d) $(-3,1)$

Q5	Find the $\boldsymbol{x}$ −coordinate of the local maximum of	اوجد احداثيات $\boldsymbol{x}$ للقيمة العظمى المحلية ل	س5

$$\boldsymbol{f(x) = x^2 e^{-x}}$$

a) $x = -2$

b) $x = -\frac{1}{2}$

c) $x = 0$

d) $x = 2$

Q6	Find the intervals of increase and decrease for	اوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة	س6

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1.$$

a) Increasing on $(-\infty, -1) \cup [0,1)$ متزايدة على
and decreasing on $(-1, 0)$ متناقصة على

b) Increasing on $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$ متزايدة على
and decreasing on $(-2, 0)$ متناقصة على

c) Increasing on $(0, \frac{4}{3})$ متزايدة على
and decreasing on $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{4}{3}, \infty\right)$ متناقصة على

d) Increasing on $(0,1)$ متزايدة على
and decreasing on $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$متناقصة على

Q7	On which interval(s) is the function increasing?	على أي فترة تكون الدالة متزايدة	س7

$$f(x) = e^{x^2}$$

a) $(-\infty, 0)$

b) $(0, \infty)$

c) $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

d) $(-1,1)$

Q8	Find the x −coordinate of the local maximum of	اوجد احداثيات x للقيمة العظمى المحلية ل	س8

$$y = \frac{x}{1 + x^3}$$

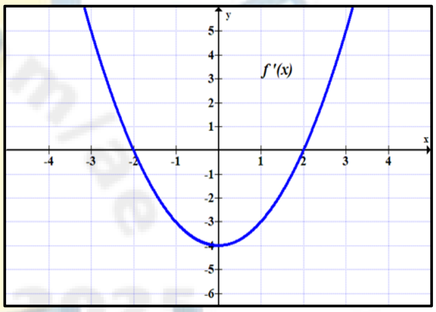
a) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

b) $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$

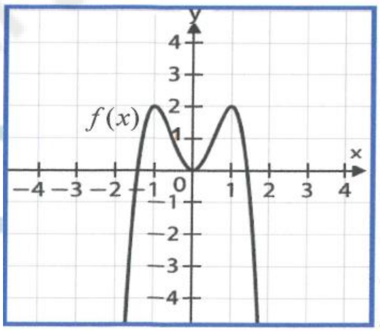
c) $-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

d) $-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$

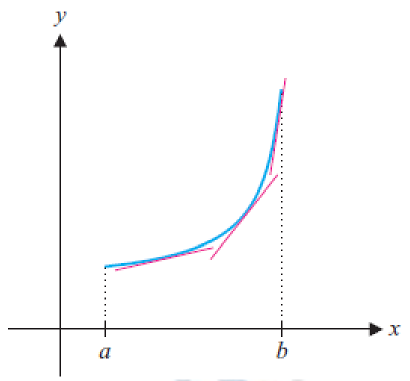
Q9	The graph represents $f'(x)$ determine where $f(x)$ is decreasing	الرسم الموضح ادناه يمثل بيان $f'(x)$ حدد الفترات تكون عندها الدالة $f(x)$ متناقصة	س9

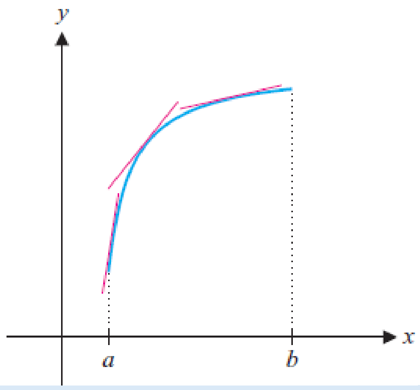


Q10	The graph represents $f'(x)$ determine where $f(x)$ is decreasing	الرسم الموضح ادناه يمثل بيان $f(x)$ حدد الفترات تكون عندها الدالة $f(x)$ متناقصة	س10

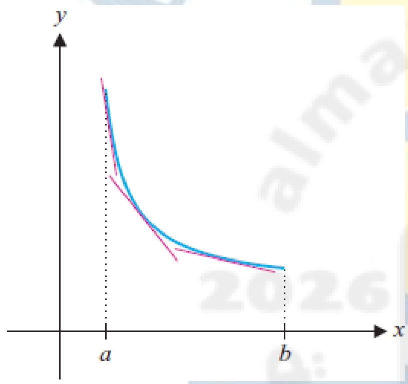


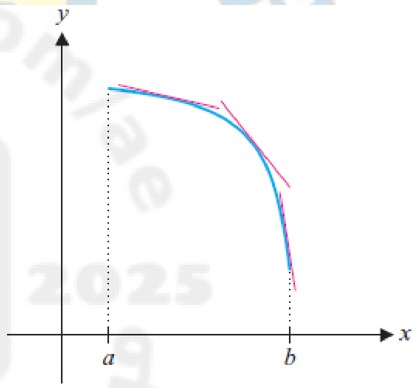
Lesson 4.5 الدرس
CONCAVITY AND THE SECOND DERIVATIVE TEST
التقعر واختبار المشتقة الثانية





Concave up, increasnig **مقعر لاعلى , متزايدة**	**Concave down, increasing** **مقعر لاسفل, متزايدة**





Concave up, decreasnig **مقعر لاعلى , متناقصة**	**Concave down, decreasing** **مقعر لاسفل, متناقصة**

DEFINITION 5.1 — التعريف 5.1

For a function f that is differentiable on an interval I , the graph of f is
i. **concave up** on I if f' is increasing on I or
ii. **concave down** on I if f' is decreasing on I .

لكل دالة f قابلة للاشتقاق في الفترة I يكون التمثيل البياني للدالة f
i. مقعّرًا إلى الأعلى في I إذا كانت f' متزايدة في I
ii. مقعّرًا إلى الأسفل في I إذا كانت f' متناقصة في I

THEOREM 5.1 — نظرية 5.1

Suppose that f'' exists on an interval I .

i.If $f''(x) > 0$ on I , then the graph of f is concave up on I
ii.If $f''(x) < 0$ on I , then the graph of f is concave up on I

على فرض أن f'' موجودة في الفترة I

i. إذا كانت $f''(x) > 0$ في I ، فإن التمثيل البياني للدالة f مقعراً إلى الأعلى في I
ii. إذا كانت $f''(x), 0$ في I ، فإن التمثيل البياني للدالة f مقعراً إلى الأسفل في I

DEFINITION 5.2 — التعريف 5.2

Suppose that $\boldsymbol{f}$ is continuous on the interval $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ and that the graph changes concavity at a point $\boldsymbol{c} \in (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ (i.e., the graph is concave down on one side of $\boldsymbol{c}$ and concave up on the other). Then, the point $(\boldsymbol{c},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}))$ is called an **inflection point** of $\boldsymbol{f}$.

على فرض أن $\boldsymbol{f}$ متصلة في الفترة $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ وأن التمثيل البياني يغير التقعر عند النقطة $\boldsymbol{c} \in (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ (أي، يتقعر التمثيل البياني إلى الأسفل على جانب واحد من $\boldsymbol{c}$ ، بينما يتقعر إلى الأعلى على الجانب الآخر) إذًا، يُطلق على النقطة $(\boldsymbol{c},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}))$ نقطة انعطاف ل $\boldsymbol{f}$

لإيجاد فترات التقعر ونقاط الانعطاف نقوم بأنشاء ودراسة الجدول التالي

		$f''(c)=0$ or undefined		$f''(d)=0$ or undefined	
$x=$	a		c		d	b

$x=$	a ... c	c ... d	d ... b
إشارة $f''(x)$	+ + + + + $f''(x)>0$	- - - - - $f''(x)<0$	+ + + + + $f''(x)>0$
$f(x)$	∪ Concave up مقعرة لأعلى	∩ Concave down مقعرة لأسفل	∪ Concave up مقعرة لأعلى

$(c,f(c))$ inflection point نقطة انعطاف

$(d,f(d))$ inflection point نقطة انعطاف

Concave up مقعرة لأعلى for all $x \in (a,c) \cup (d,b)$

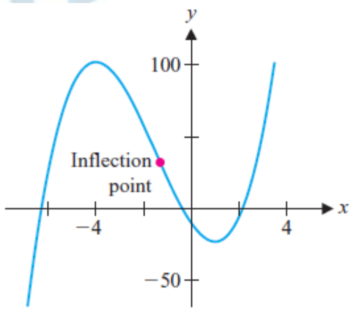
Concave down مقعرة لأسفل for all $x \in (c,d)$

EXAMPLE 5.1 — مثال 5-1

1- Determine where the graph of $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ is <u>concave up</u> and <u>concave down</u>
2- find any <u>inflection points</u>
3- draw a graph showing all significant features of the function.

حدد الفترات التي يكون عندها منحنى الدالة $f(x)$ مقعر لأعلى والفترات التي يكون عندها مقعر لأسفل
حدد نقاط الانعطاف ان وجدت
مثل المنحنى بيانيا

$$f\ (x) = \ 2x^3 + 9x^2 - 24x - 10$$

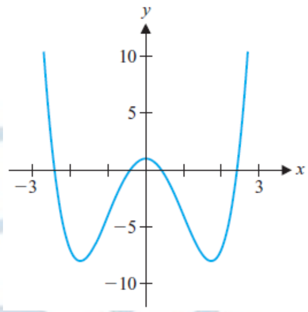


EXAMPLE 5.2 — مثال 5-2

1- Determine where the graph of $f(x)$ is **concave up** and **concave down**
2- find any **inflection points**
3- draw a graph showing all significant features of the function.

1- حدد الفترات التي يكون عندها منحنى الدالة $f(x)$ مقعر لأعلى والفترات التي يكون عندها مقعر لأسفل
2- حدد نقاط الانعطاف ان وجدت
3- مثل المنحنى بيانيا

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 1$$

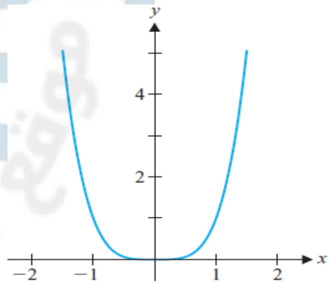


EXAMPLE 5.3 — مثال 5-3

1- Determine where the graph of $f(x)$ is **concave up** and **concave down**
2- find any **inflection points**
3- draw a graph showing all significant features of the function.

1- حدد الفترات التي يكون عندها منحنى الدالة $f(x)$ مقعر لأعلى والفترات التي يكون عندها مقعر لأسفل
2- حدد نقاط الانعطاف ان وجدت
3- مثل المنحنى بيانيا

$$f(x) = x^4$$



EXERCISES تمارين

1- Determine where the graph of $f(x)$ is **concave up** and **concave down**
2- find any **inflection points**

1- حدد الفترات التي يكون عندها منحنى الدالة $f(x)$ مقعر لأعلى والفترات التي يكون عندها مقعر لأسفل
2- حدد نقاط الانعطاف ان وجدت

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$

2) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 2x + 3$

3) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

4) $f(x) = x + 3(1 - x)^{\frac{1}{3}}$

5) $f(x) = \sin x - \cos x$

6) $f(x) = \tan^{-1}(x^2)$

7) $f(x) = x^{\frac{4}{3}} + 4x^{\frac{1}{3}}$

8) $f(x) = xe^{-4x}$

THEOREM 5.2 (Second Derivative Test) — نظرية 5.2 (اختبار المشتقة الثانية)

Suppose that f'' is continuous on the interval (a, b) and $f'(c) = 0$, for some number $c \in (a, b)$.

على فرض أن f'' متصلة في الفترة (a, b) و $f'(c) = 0$ ، لكل $c \in (a, b)$

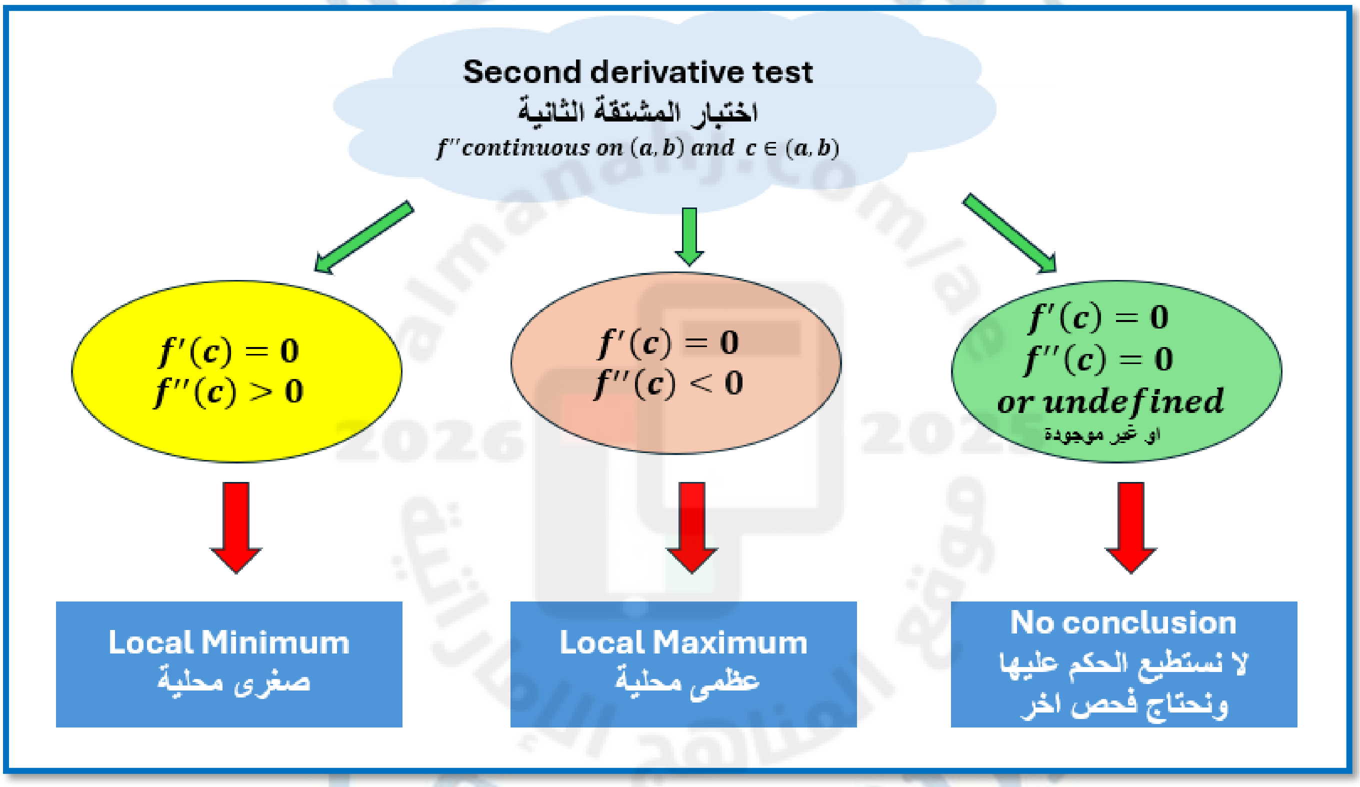
i. If $f''(c) < 0$, then $f(c)$ is a local maximum.
ii. If $f''(c) > 0$, then $f(c)$ is a local minimum

i. إذا كانت $f''(c) < 0$ ، فإن $f(c)$ هي قيمة عظمى محلية.
ii. إذا كانت $f''(c) > 0$ ، فإن $f(c)$ هي قيمة صغرى محلية.

REMARK 5.1 — ملحوظة 5.1

If $f''(c) = 0$ or $f''(c)$ is undefined, the Second Derivative Test yields no conclusion. That is, $f(c)$ maybe a local maximum, a local minimum or neither. In this event, we must rely on other methods (such as the First Derivative Test) to determine whether $f(c)$ is a local extremum.

إذا كانت $f''(c) = 0$ أو $f''(c)$ غير معرفين، فإن اختبار المشتقة الثانية لا يعطي أي استنتاج. بمعنى أنه قد تكون $f(c)$ قيمة عظمى محلية أو قيمة صغرى محلية أو غير ذلك. في هذه الحالة، يجب أن نعتمد على طرائق أخرى (مثل اختبار المشتقة الأولى) في تحديد ما إذا كانت قيمة قصوى محلية.

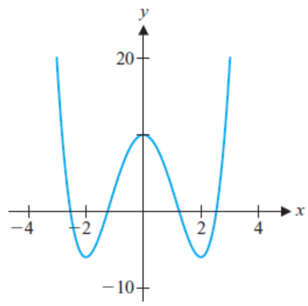


EXAMPLE 5.4 — مثال 5-4

Use the Second Derivative Test to find the local extrema of

استخدم اختبار المشتقة الثانية لتحديد القيم القصوى المحلية

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 10.$$



EXERCISES تمارين

Find all critical numbers and use the second derivative Test to determine all local extrema.

اوجد جميع النقاط الحرجة ثم استخدم اختبار المشتقة الثانية لتحديد القيم القصوى المحلية ونوعها

1) $f(x) = x^4 + 4x^3 - 1$

2) $f(x) = x^4 + 4x^2 + 1$

3) $f(x) = xe^{-x}$

4) $f(x) = e^{-x}$

5) $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x}$

6) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

REMARK 5.1 | ملحوظة 5.1

If $f''(c) = 0$ or $f''(c)$ is undefined, the Second Derivative Test yields no conclusion.
That is, $f(c)$ maybe a local maximum, a local minimum or neither. In this event, we must rely on other methods (such as the First Derivative Test) to determine whether $f(c)$ is a local extremum.

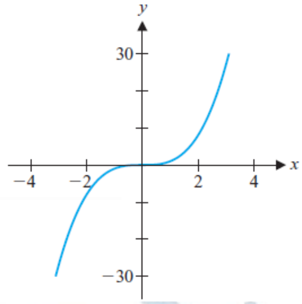
إذا كانت $f''(c) = 0$ أو $f''(c)$ غير معرفيّن، فإن اختبار المشتقة الثانية لا يعطي أي استنتاج. بمعنى أنه قد تكون $f(c)$ قيمة عظمى محلية أو قيمة صغرى محلية أو غير ذلك. في هذه الحالة، يجب أن نعتمد على طرائق أخرى (مثل اختبار المشتقة الأولى) في تحديد ما إذا كانت قيمة قصوى محلية.

EXAMPLE 5.5 | مثال 5-5

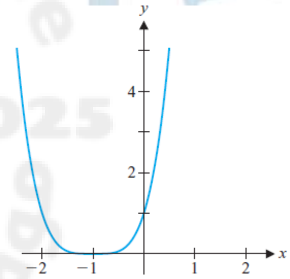
Use the Second Derivative Test to try to classify any local extrema for

استخدم اختبار المشتقة الثانية في محاولة تصنيف أي قيم قصوى محلية

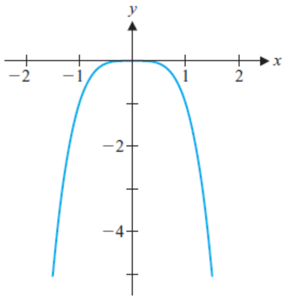
(a) $f(x) = x^3$



(b) $g(x) = (x+1)^4$



(c) $h(x) = -x^4$

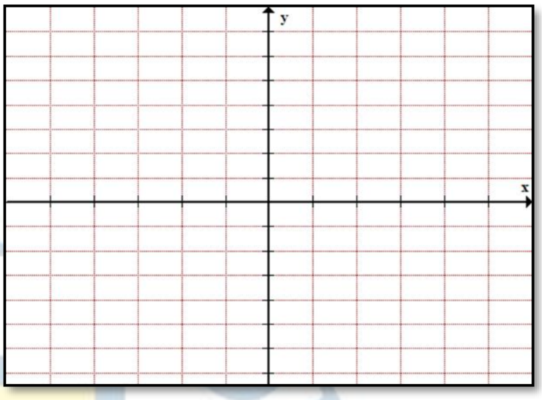


يفضل تأجيل هذان المثالان للدرس التالي

EXAMPLE 5.6 مثال 5-6

Draw a graph of $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ showing all significant features. ارسم بيان الدالة $f(x)$ مبيناً جميع خصائصها

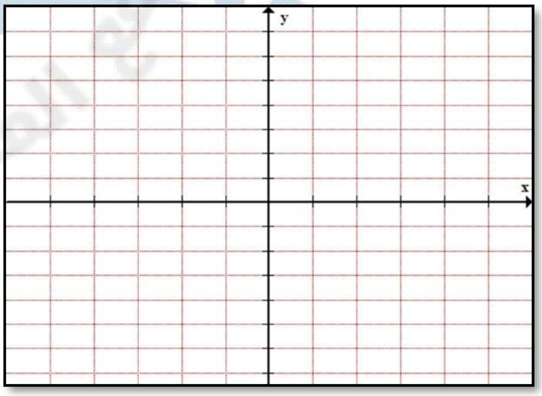
$$\boldsymbol{f}(x) = x + \frac{25}{x}$$



EXAMPLE 5.7 مثال 5-7

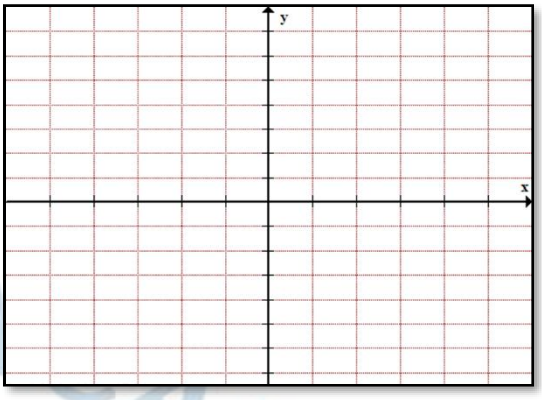
Draw a graph of $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ showing all significant features. ارسم بيان الدالة $f(x)$ مبيناً جميع خصائصها

$$\boldsymbol{f}(x) = (x+2)^{\frac{1}{5}} + 4$$

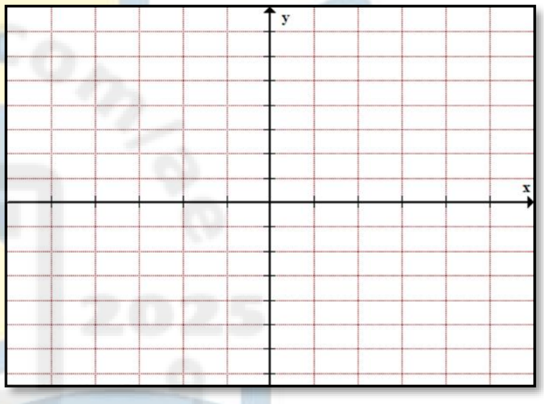


sketch a graph of a function with the given properties. ارسم بيان الدالة التي لها الخواص التالية

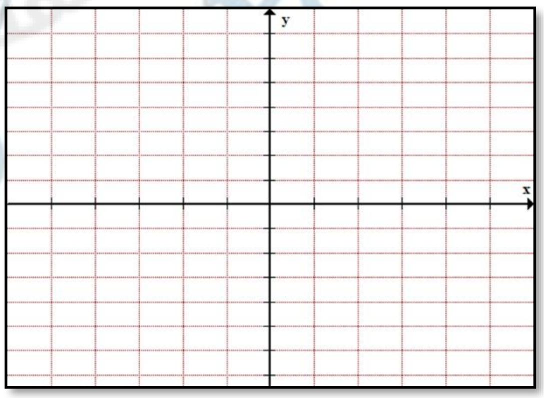
1) $f(0) = 0, f'(x) > 0$ for $x < -1$ and $-1 < x < 1, f'(x) < 0$ for $x > 1, f''(x) > 0$ for $x < -1, 0 < x < 1$ and $x > 1,$ $f''(x) < 0$ for $-1 < x < 0$



2) $f(1) = 0, f'(x) < 0$ for $x < 1, f'(x) > 0$ for $x > 1, f''(x) < 0$ for $x < 1$ and $x > 1$



3) $f''(x) > 0$ for $x \neq 0, f'(0)undefined, f'(x) > 0$ for $x < 0$ and $f''(x) < 0$ for $x > 0.$

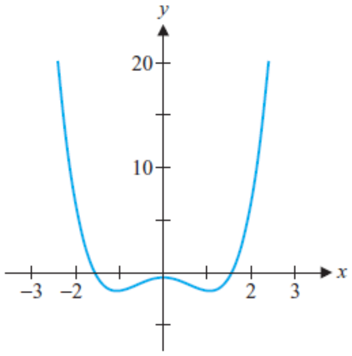


Exercise	تمرين

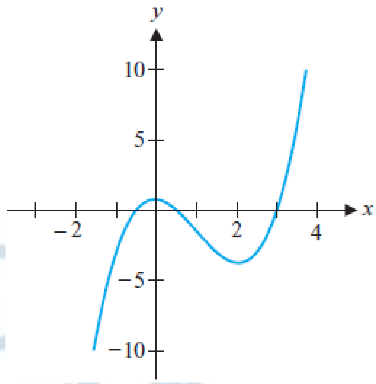
a) Estimate the intervals of increase and decrease,
b) the locations of local extrema,
c) intervals of concavity and locations of inflection points.

أ) قدر فترات التزايد وفترات التناقص
ب) قيم x التي عندها قيم قصوى محلية
ت) فترات التقعر لأعلى وفترات التقعر لأسفل نقاط الانعطاف

1)



2)



Exercise	تمرين

(a) Find all critical numbers
(b) Identify all intervals of increase and decrease
(c) Determine whether each critical number represents a local maximum, local minimum or neither
(d) Determine all intervals of concavity and
(e) Find all inflection points.

(أ) أوجد جميع الأعداد الحرجة
(ب) حدد جميع فترات التزايد والتناقص
(ت) حدد ما إذا كان كل عدد حرج يمثل قيمة عظمى محلية، أو قيمة صغرى محلية، أو لا شيء منهما
(ث) حدد جميع فترات التقعر
(ج) أوجد جميع نقاط الانعطاف.

1)	$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$

2) $f(x) = x^4 - 4x + 1$

3) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2$

4) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x$

1)	$f(x) = xe^{-4x}$

2)	$f(x) = x^2 \ln x$

3)	$f(x) = \dfrac{x - 90}{x^2}$

4)	$f(x) = (x^2 - 1)^{2/3}$

5)	$f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$

6)	$f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$

Imad Odeh

أسئلة سنوات سابقة وأخرى

Q1 On which interval(s) is the function concave upwards? أي الفترات يكون عندها منحنى الدالة مقعرا للأعلى س1

$$f(x) = x^4 - 6x^2$$

a) $(-\infty, 0)$

b) $(0, \infty)$

c) $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

d) $(-1,1)$

Q2 On which interval(s) is the function concave upwards? أي الفترات يكون عندها منحنى الدالة مقعرا للأعلى س2

$$f(x) = xe^x$$

a) $(-\infty, -2)$

b) $(-2, \infty)$

c) $(0, \infty)$

d) $(-\infty, 0)$

Q3 Which of the following is inflection point of أي مما يلي هي نقطة انعطاف للدالة س3

$$f(x) = x^5 + x$$

a) $(0,0)$

b) $(1,2)$

c) $(-1,-2)$

d) $(2,34)$

Q4 Determine the intervals where f is concave up and concave down. حدد فترات التقعر للأعلى وفترات التقعر للأسفل س4

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 2$$

a) Concave up on $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ مقعر لأعلى
and concave down on $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ مقعر لأسفل

b) Concave up on $(-1, 1)$ مقعر لأعلى
and concave down on $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ مقعر لأسفل

c) Concave up on $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ مقعر لأعلى
and concave down on $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ مقعر لأسفل

d) Concave up on $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ مقعر لأعلى
and concave down on $(-1, 1)$ مقعر لأسفل

Q1	Find the inflection point of	اوجد نقاط الانعطاف ل	س1

$$f(x) = x^4 + 12x^3 - x$$

a) $(-6, f(-6)), (0, f(0))$

b) $(-6, f(-6)), (6, f(6))$

c) $(6, f(6)), (0, f(0))$

d) $(-6, f(-6)), (0, f(0)), (6, f(6))$

Q2	Find the inflection point of	اوجد نقاط الانعطاف ل	س2

$$f(x) = x^4 - 6x^2 - 2x + 3$$

a) $(-1, -4), (1,0)$

b) $(-1,4), (1,0)$

c) $(-1,0), (1,4)$

d) $(-1,0), (1, -4)$

Q3	Find the inflection point of	اوجد نقاط الانعطاف ل	س3

$$f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x - 10 \ is$$

a) $\left(-\frac{3}{2}, \frac{79}{2}\right)$

b) $\left(\frac{3}{2}, \frac{79}{2}\right)$

c) $(-3,79)$

d) $\left(-\frac{3}{2}, -79\right)$

Q4	Find the inflection point of	اوجد نقاط الانعطاف ل	س4

$$f(x) = tan^{-1}(x^2)$$

a) $\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, f\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)\right), \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, f\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)\right)$

b) $(2, f(2))$

c) $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$

d) $\left(-\frac{1}{3}, f\left(-\frac{1}{3}\right)\right), \left(\frac{1}{3}, f\left(\frac{1}{3}\right)\right)$

Q5	Determine where the graph of the function $f(x)$ is concave up	حدد اين يكون التمثيل البيان للدالة $f(x)$ مقعرا لأعلى	س5

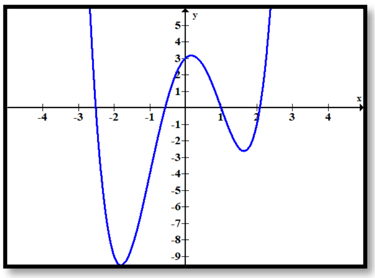
$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 2x + 3$$

a) $(-\infty, -1)$

b) $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

c) $(1,1)$

d) $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$



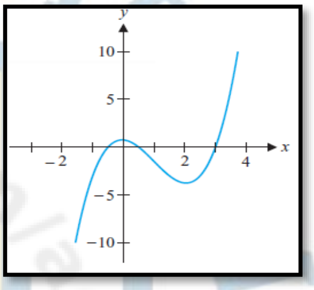
Q6	Determine where the graph of the function $f(x)$ is concave up	حدد اين يكون التمثيل البيان للدالة $f(x)$ مقعرا لأعلى	س6

a) $(-\infty, 1)$

b) $(1, \infty)$

c) $(2, \infty)$

d) $(3, \infty)$



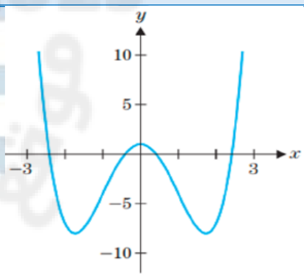
Q7	Determine where the graph of the function $f(x)$ is concave down	حدد اين يكون التمثيل البيان للدالة $f(x)$ مقعرا للأسفل	س7

a) $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

b) $(-1,1)$

c) $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

d) $(-\infty, \infty)$



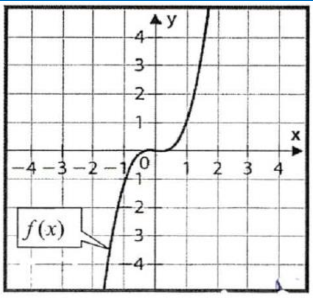
Q8	Estimate the interval(s) where the curve of the $f(x)$ concave up and where concave down	قدر الفترات التي يكون فيها التمثيل البياني للدالة $f(x)$ مقعرا لأعلى والفترات التي يكون فيها مقعرا لأسفل	س8

a) Concave upward $(-0.5, 0.5)$ مقعر لأعلى
Concave downward $(-\infty, -0.5) \cup (0.5, \infty)$ مقعر لأسفل

b) concave upward $(-1,1)$ مقعر لأعلى
Concave downward $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ مقعر لأسفل

c) Concave upward $(0,1)$ مقعر لأعلى
Concave downward $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ مقعر لأسفل

d) Concave upward $(0, \infty)$ مقعر لأعلى
Concave downward $(-\infty, 0)$ مقعر لأسفل



Q9 Suppose f is a polynomial function such that — تمرين4 لتكن f دالة حدودية بحيث

$$f'(-3) = 0\,,\; f''(-3) = -25$$

So — فان

a) $(-3, f(-3))$ is local minimum point

b) $(-3, f(-3))$ is local Maximum point

c) $(-3, f(-3))$ is inflection point

d) $(-3, f(-3))$ is absolute maximum point

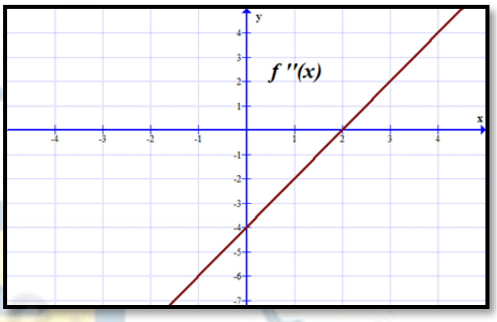
Q10 The graph represents $f''(x)$ Find the interval where $f(x)$ will be concave upward — س10 اعتمد على الرسم البياني الذي يمثل $f''(x)$ اوجد فترات التقعر للأعلى

a) $(-\infty, 2)$

b) $(2, \infty)$

c) $(-\infty, \infty)$

d) $\emptyset$



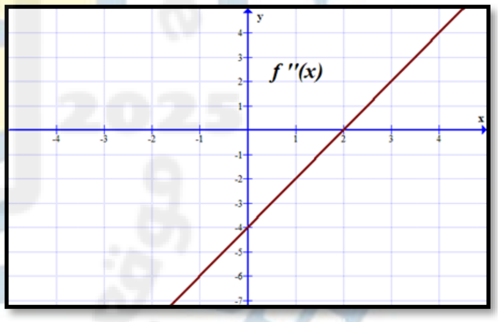
Q11 The graph represents $f''(x)$ Find the inflection point — س11 اعتمد على الرسم البياني الذي يمثل $f''(x)$ اوجد نقاط الانعطاف

a) $(2,0)$

b) $(-4\,,0)$

c) $(2, f(2))$

d) $(-4, f(-4))$



Q12 What is the coordinate of inflection point where the function change from concave down to concave upward — س12 اوجد احداثي نقطة الانعطاف التي يغير عندها منحنى الدالة من نقعره من تقعر الى الأسفل الى تقعر الى الأعلى

$$f(x) = \cos x - \sin x \qquad for\;\; 0 \le x \le 2\pi$$

Q13	Find the interval where $f(x)$ will be concave upward If	اوجد فترات التقعر للأعلى إذا علمت ان	س13

$$f'(x) = x^2 - 4x - 5\,,$$

Q14	If the graph of $f(x)$ has inflection point at $(1, -2)$ find the value of a and b	إذا كان الرسم البياني للدالة $f(x)$ نقطة انعطاف عند $(1, -2)$ اوجد قيمة كل من a و b	س14

$$f(x) = ax^3 - 6x^2 + bx - 7$$

Lesson 3.6 الدرس

OVERVIEW OF CURVE SKETCHING

نظرة عامة على رسم المنحنيات

Steps that you should take when trying to draw a graph of $y = f(x)$.

الخطوات التي يجب اتباعها لرسم منحنى الدالة $y = f(x)$.

- Domain
- Vertical Asymptotes
- First Derivative Information
- Vertical Tangent Lines
- Second Derivative Information
- Horizontal Asymptotes
- Intercepts

- حدد المجال
- اوجد المقاربات العمودية
- اوجد المشتقة الأولى ونتائجها
- اوجد المماسات العمودية
- اوجد المشتقة الثانية ونتائجها
- اوجد المقاربات الافقية
- اوجد المقاطع مع المحاور

EXAMPLE 6.1 مثال 1-6

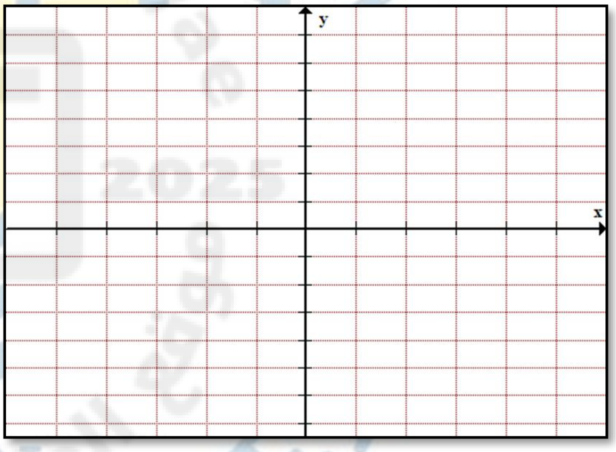
Draw a graph of $f(x)$ showing all significant features.

ارسم بيان الدالة $f(x)$ مبيناً جميع خصائصها

$$f(x) = x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 8x + 1,$$

a) Find the critical points.

e) Sketch the graph of f .



b) Find the intervals where f is increasing and decreasing.

c) Find the intervals where f is concave up and concave down.

d) Find the inflection points, if any.

EXAMPLE 6.2 مثال 6-2

Draw a graph of $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ showing all significant features. ارسم بيان الدالة $f(x)$ مبيناً جميع خصائصها

$$f\,(x) = \frac{x^2 - 3}{x^3}$$

a) Find all asymptotes, if any

Vertical asymptotes

Horizontal asymptote

Slant asymptote

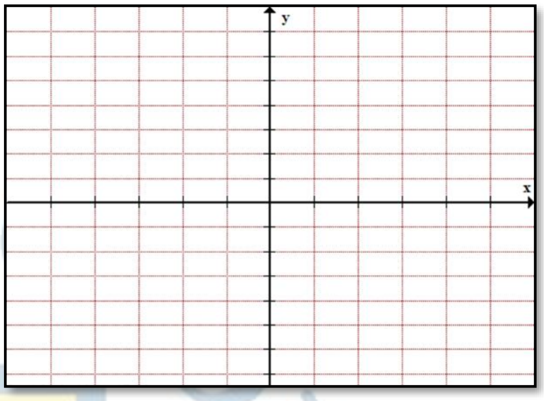
b) Find the critical points.

c) Find the intervals where $\boldsymbol{f}$ is increasing and decreasing.

d) Find the intervals where $\boldsymbol{f}$ is concave up and concave down.

e) Find the inflection points, if any.

f) Sketch the graph of $\boldsymbol{f}$.



EXAMPLE 6.3 مثال 3-6

Draw a graph of $f(x)$ showing all significant features. ارسم بيان الدالة $f(x)$ مبيناً جميع خصائصها

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

a) Find all asymptotes, if any

Vertical asymptotes

Horizontal asymptote

Slant asymptote

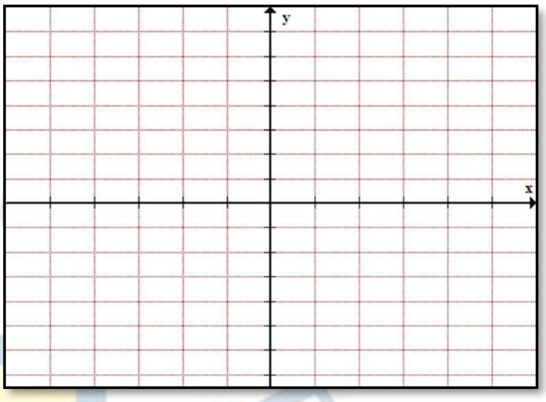
b) Find the critical points.

c) Find the intervals where f is increasing and decreasing.

d) Find the intervals where f is concave up and concave down.

e) Find the inflection points, if any.

f) Sketch the graph of f .



Exercise تمارين

Q1	Given $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-2}$, $f'(x)=\dfrac{4x}{(x^2-2)^2}$, $f'(x)=\dfrac{4(3x^2+2)}{(x^2-2)^3}$	ليكن	س1

a) Find all asymptotes, if any

Vertical asymptotes

Horizontal asymptote

Slant asymptote

b) Find the critical points

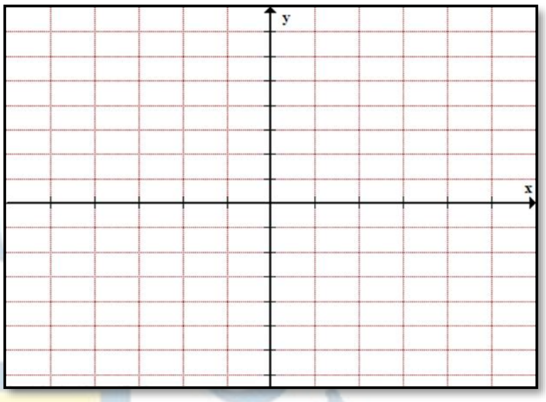
c) Find the intervals where f is increasing and decreasing.

d) Classify the critical numbers as local Max or Min

e) Find the intervals where f is concave up and concave down.

f) Find the inflection points, if any.

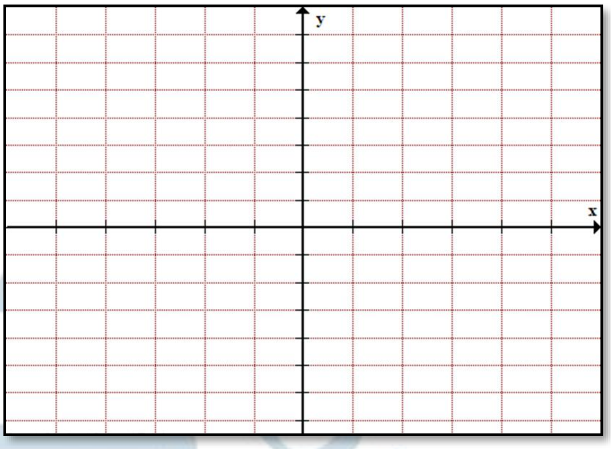
g) Sketch the graph of f .



Q2 تمرين

Draw a graph of $f(x)$ showing all significant features. ارسم بيان الدالة $f(x)$ مبيناً جميع خصائصها

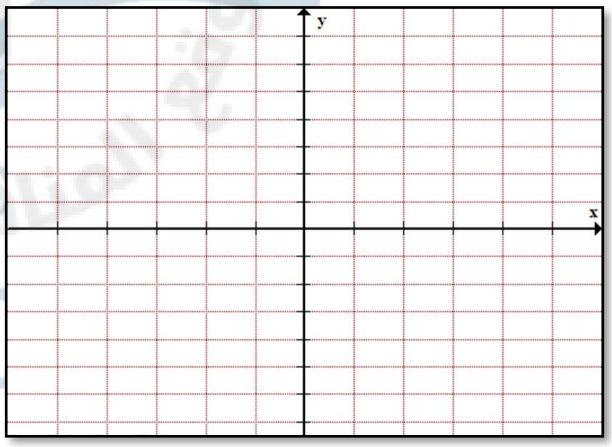
$$f(x) = \frac{3x^2}{x^2+1}$$



Q3 تمرين

Draw a graph of $f(x)$ showing all significant features. ارسم بيان الدالة $f(x)$ مبيناً جميع خصائصها

$$f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$$

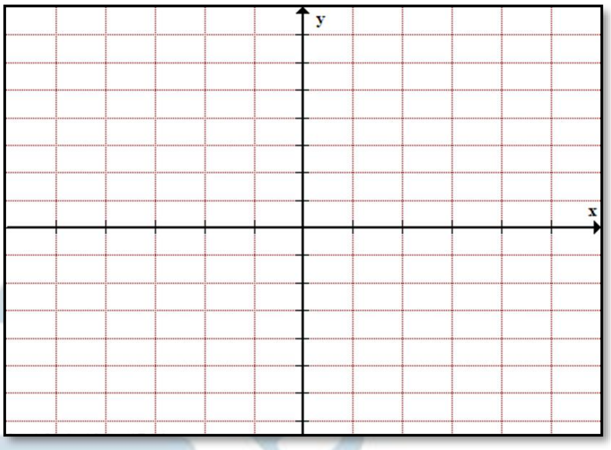


Q4 تمرين

sketch a graph of the function and completely discuss the graph.

ارسم بيان الدالة $f(x)$ مبيناً جميع خصائصها

$$f\,(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

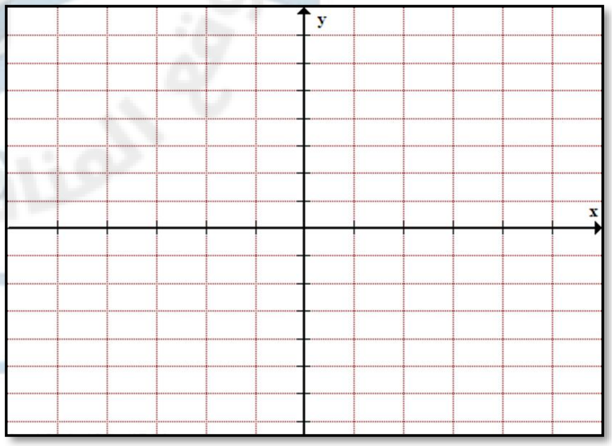


Q5 تمرين

sketch a graph of the function and completely discuss the graph.

ارسم بيان الدالة $f(x)$ مبيناً جميع خصائصها

$$f\,(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

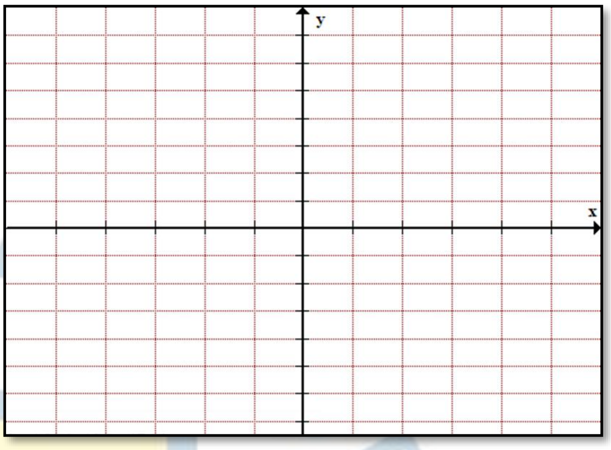


Q6 تمرين

sketch a graph of the function and completely discuss the graph.

ارسم بيان الدالة $f(x)$ مبيناً جميع خصائصها

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$$

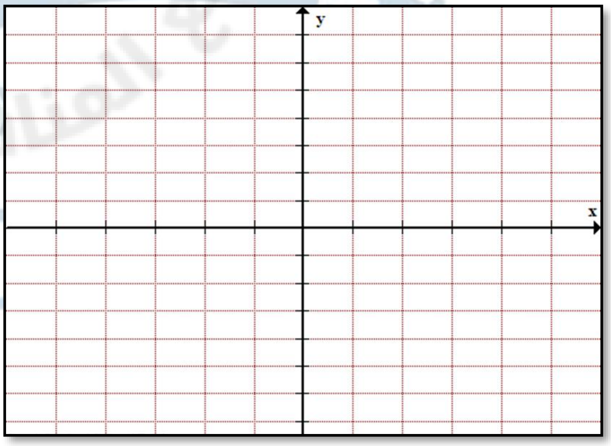


Q7 تمرين

sketch a graph of the function and completely discuss the graph.

ارسم بيان الدالة $f(x)$ مبيناً جميع خصائصها

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$$



Find slant asymptotes of the function اوجد جميع خطوط التقارب المائلة للدالة

1) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{x}$

2) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{x - 1}$

3) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^2}$

4) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

5) $f(x) = \dfrac{x^4}{x^3 + 1}$

6) $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^3 + x}$

Find a function whose graph has the given asymptotes.	اوجد الدالة التي يكون لتمثيلها البياني خطوط التقارب

1) $x = 3, x = -8 \; and \; y = 8$

2) $x = 1, x = 2 \; and \; y = 3$

3) $x = -1, x = 1 \; and \; y = 0$

4) $x = 1, x = 2 \; and \; y = 3$

5) $x = 1-, x = 1, y = -2 \; and \; y = 2$

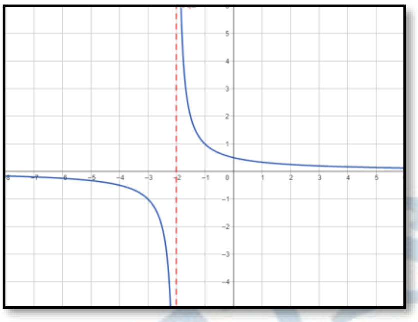
6) $x = 1, y = 2 \; and \; x = 3$

أسئلة سنوات سابقة وأخرى

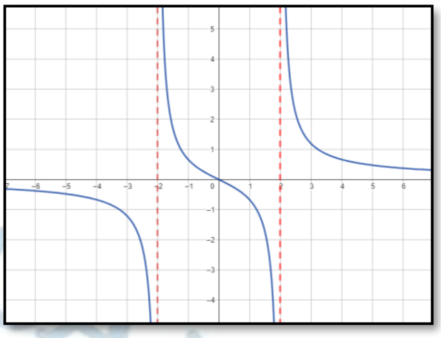
Q1 Determine the graph of the function — س1 حدد التمثيل البياني للدالة

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

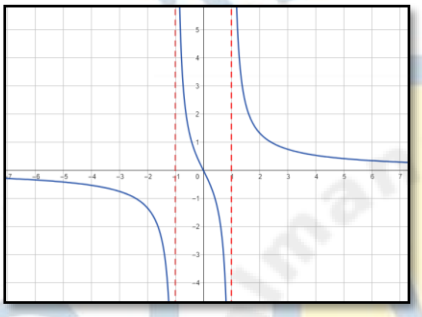
a)



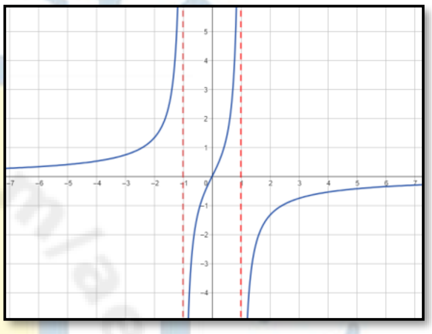
b)



c)



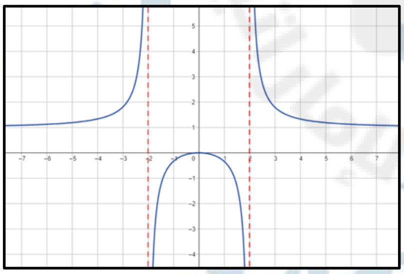
d)



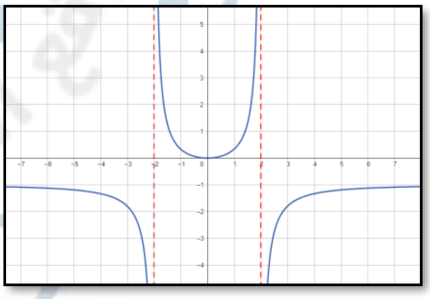
Q2 Determine the graph of the function — س2 حدد التمثيل البياني للدالة

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

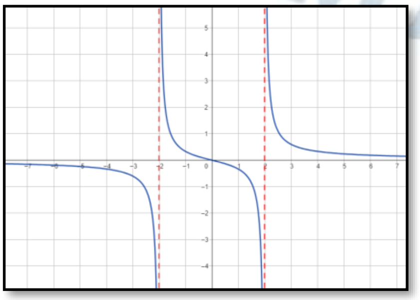
a)



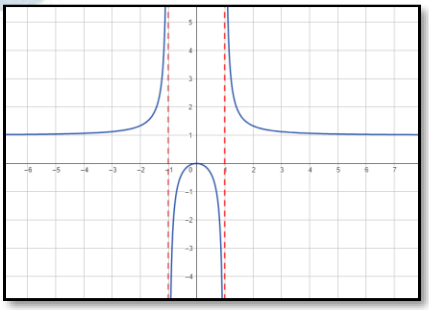
b)



c)



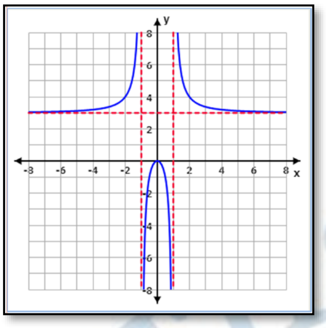
d)



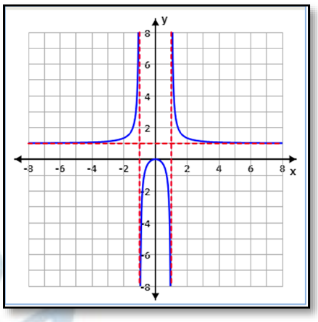
Q3 Determine the graph of the function حدد التمثيل البياني للدالة س3

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

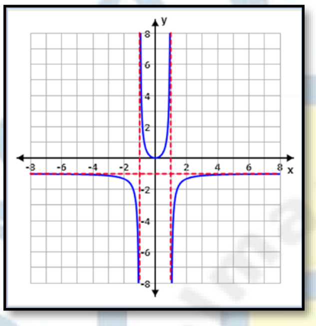
a)



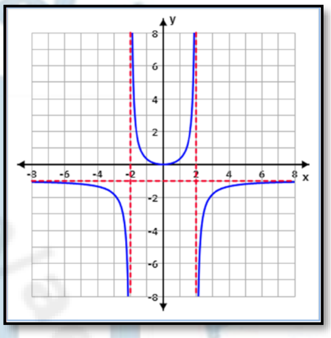
b)



c)



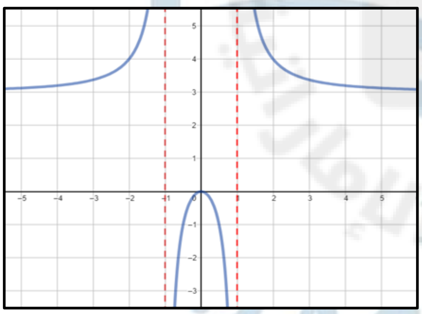
d)



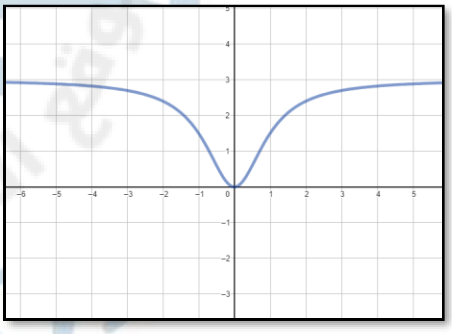
Q4 Determine the graph of the function حدد التمثيل البياني للدالة س4

$$f(x) = \frac{3x^2}{x^2 + 1}$$

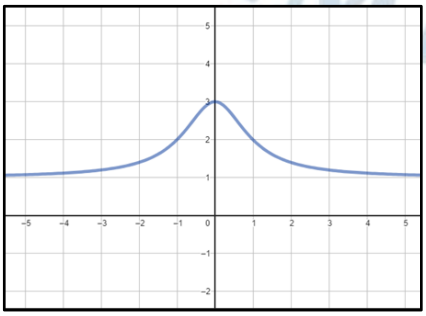
a)



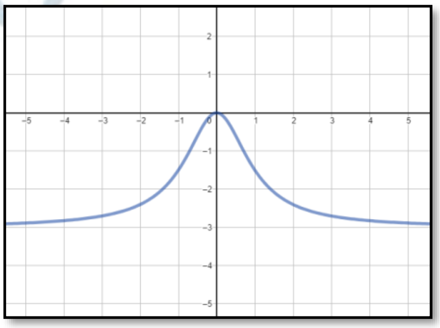
b)



c)



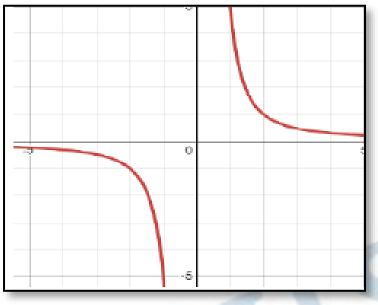
d)



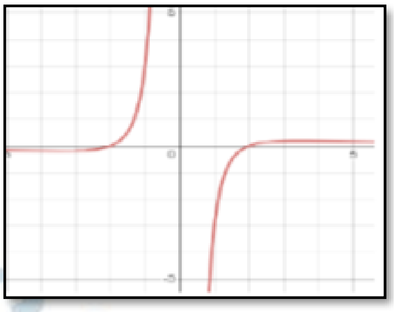
Q5 Determine the graph of the function حدد التمثيل البياني للدالة س5

$$f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^3}$$

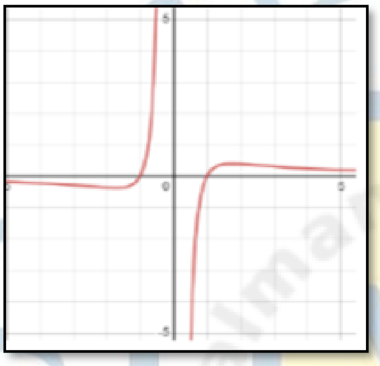
a)



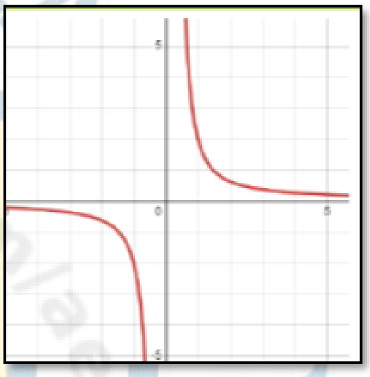
b)



c)



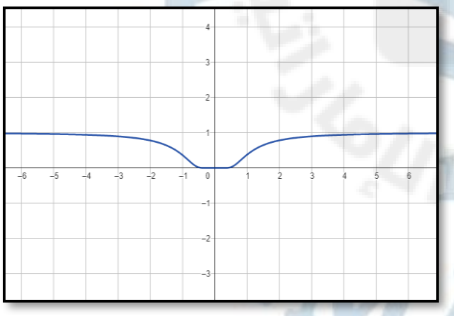
d)



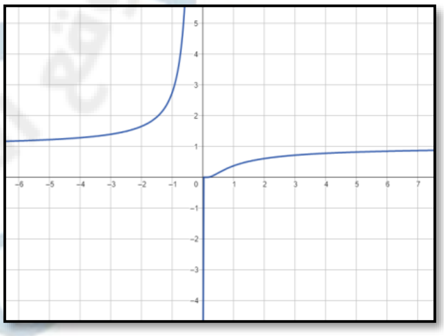
Q16 Determine the graph of the function حدد التمثيل البياني للدالة س16

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

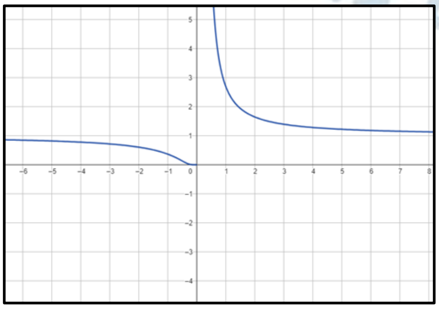
a)



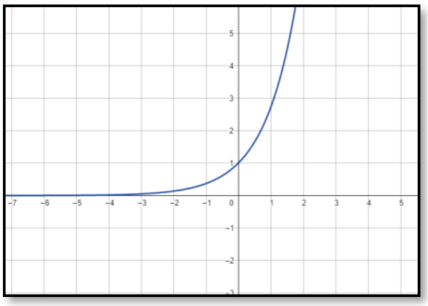
b)



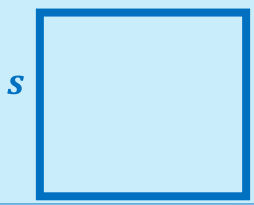
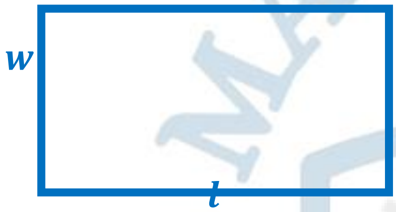
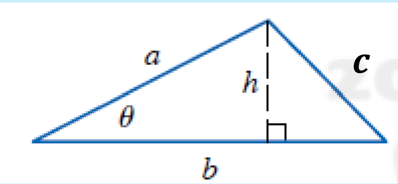
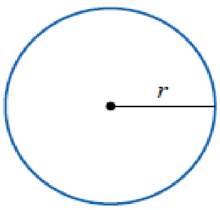
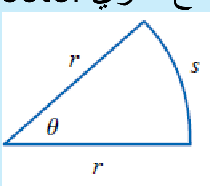
c)

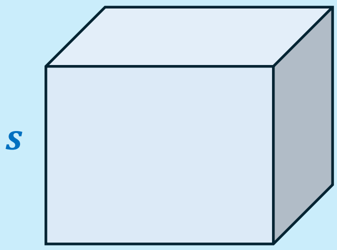
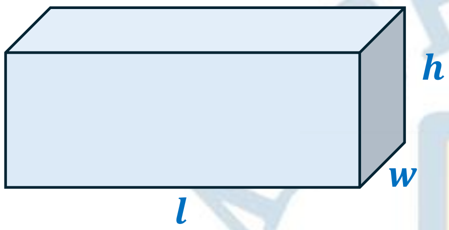
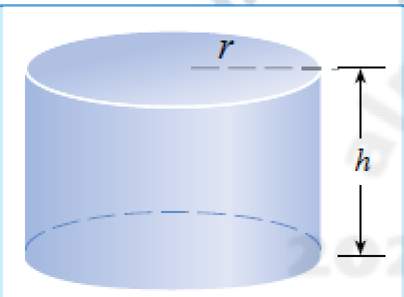
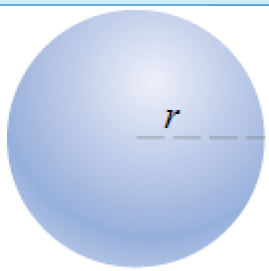
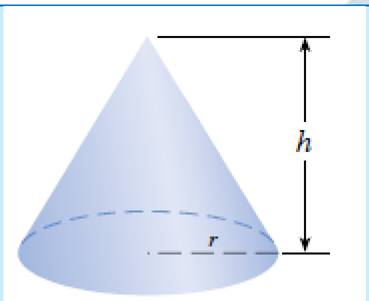


d)



Lesson 4.7 الدرس
OPTIMIZATION القيم المثلى

Shape الشكل	Area المساحة	Circumference/Perimeter المحيط
Square مربع  	$A = s^2$	$P = 4s$
Rectangle مستطيل  	$A = l\,w$	$P = 2l + 2w$
Triangle مثلث  	$A = \frac{1}{2}\,b\,h$ $A = \frac{1}{2}\,ab\sin\theta$	$P = a + b + c$
Circle دائرة  	$A = \pi\,r^2$	$c = 2\,\pi\,r$
Sector قطاع دائري  	$A = \frac{1}{2}\,r^2\theta$	$c = 2\,r + s$ $s = r\theta$

Shape الشكل	**Volume** **الحجم**	**Surface area** **المساحة السطحية**
	$v = s^3$	$A = 6s^2$
	$v = l\,w\,h$	$A = 2lw + 2lh + 2wh$
	$v = \pi\,r^2 h$	$A = 2\pi rh + 2\pi r^2$
	$v = \frac{4}{3}\pi\,r^3$	$A = 4\pi r^2$
	$v = \frac{1}{3}\pi\,r^2 h$	

- Draw a picture and label it
- Determine what the variables are and how they are related.
- Decide what quantity needs to be maximized or minimized.
- Write an expression for the quantity to be maximized or minimized in terms of only *one* variable.
- Determine the minimum and maximum allowable values (if any) of the variable you're using.
- Solve the problem and be sure to answer the question that is asked.

- أقرأ المسألة جيدًا، ثم أُحدِّد المعلومات اللازمة لحلِّ المسألة.
- أرسم مُخطَّطًا يُمثِّل المسألة، ثم أُدوِّن عليه المعلومات المُهِمَّة لحلِّ المسألة، وأختار رمزًا يُمثِّل الكمية التي أُريد أنْ أجد لها أكبر قيمة أو أقل قيمة ورموزًا للكميات المُتغيِّرة الأخرى في المسألة
- حدد نوع المتغيرات والثوابت وحدد علاقة كل منها ببعضها البعض
- حدد ما هو المطلوب إيجاد أصغر قيمة او أكبر قيمة له
- اكتب التعبير الذي يحدد المقدار المطلوب إيجاد أصغر قيمة له او أكبر قيمة له بدلالة متغير واحد
- • حدد الحد الأدنى والحد الأقصى للقيم المسموح بها (إن وجدت) للمتغير الذي تستخدمه (حدد المجال).
- اوجد المشتقة الأولى
- أجد القِيَم التي تكون عندها مشتقة الدالة صفرًا أو غير موجودة، وقيمتي الدالة عند طرفي الفترة

EXAMPLE 7.1 مثال 1-7

You have 40 (linear) feet of fencing with which to enclose a rectangular space for a garden. Find the largest area that can be enclosed with this much fencing and the dimensions of the corresponding garden.

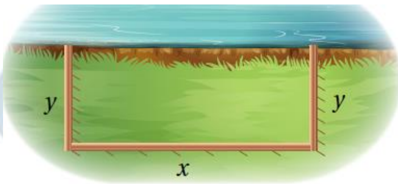
لديك 40 قدمًا من السياج الذي يمكنك إحاطة مساحة مستطيلة به لحديقة. اوجد عن أكبر مساحة يمكن إحاطتها بهذا القدر من السياج وأبعاد الحديقة.

Exercise تمارين

Q1 س1

A three-sided fence is to be built next to a straight section of river, which forms the fourth side of a rectangular region. The enclosed area is equal **1800 ft^2**.
Find the minimum perimeter and the dimensions of the corresponding enclosure.

سيتم بناء سياج ثلاثي الجوانب بجوار قسم مستقيم من النهر، والذي يشكل الجانب الرابع لمنطقة مستطيلة الشكل. المساحة المغلقة تساوي 1800 قدم مربع.
أوجد الحد الأدنى للمحيط وأبعاد المنطقة المغلقة المقابلة.



Q2 س2

A three-sided fence is to be built next to a straight section of river, which forms the fourth side of a rectangular region. There 96 feet of fencing are available.
Find the maximum enclosed area and the dimensions of the corresponding enclosure.

سيتم بناء سياج ثلاثي الجوانب بجوار قسم مستقيم من النهر، والذي يشكل الجانب الرابع لمنطقة مستطيلة الشكل. يتوفر سياج بطول 96 قدمًا.
ابحث عن أقصى مساحة محاطة وأبعاد السياج المقابل.

Q3 س3

A two-pen corral is to be built. The outline of the corral forms two identical adjoining rectangles. If there is $\mathbf{120}\ \boldsymbol{ft}$ of fencing available, what dimensions of the corral will maximize the enclosed area?

سيتم بناء حظيرة ذات حجرتين. يشكل مخطط الحظيرة مستطيلين متجاورين متطابقين. إذا كان هناك 120 قدمًا من السياج المتاح، فما أبعاد الحظيرة التي ستزيد من مساحة المنطقة المغلقة إلى أقصى حد؟

Q4 س4

A showroom for a department store is to be rectangular with walls on three sides, $\mathbf{6}\boldsymbol{ft}$ door openings on the two facing sides and a $\mathbf{10}\boldsymbol{ft}$ door opening on the remaining wall. The showroom is to have $800\ ft^2$ of floor space. What dimensions will minimize the length of wall used?

صالة عرض مكونة من ثلاثة جدران بحيث يكون هناك بوابتان عرض كل منها $6ft$ في الجدارين المتقابلين وبوابة أخرى في الجدار الثالث عرضها $10ft$ إذا كانت مساحة صالة العرض $800ft^2$اوجد ابعاد الصالة بحيث يكون طول الجدران اقل ما يمكن؟

Q5 س5

Show that the rectangle of maximum area for a given perimeter ***P*** is always a square.

أثبت أن المستطيل الذي له أقصى مساحة لمحيط معين P يكون دائمًا مربعًا.

Q6 س6

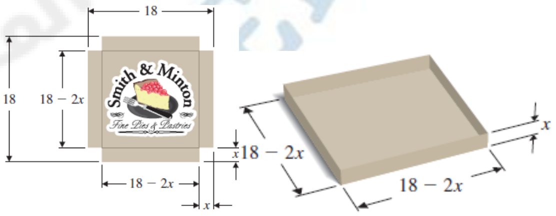
Show that the rectangle of minimum perimeter for a given area A is always a square.

أثبت أن المستطيل الذي له الحد الأدنى من المحيط لمساحة معينة A يكون دائمًا مربعًا.

EXAMPLE 7.2 مثال 2-7

A square sheet of cardboard 18″ on a side is made into an open box (i.e., there's no top), by cutting squares of equal size out of each corner and folding up the sides along the dotted lines. Find the dimensions of the box with the maximum volume.

يراد صناعة صندوق مفتوح من الأعلى بواسطة ورقة مربعة من الورق المقوى طول ضلعها 18 بوصة عن طريق قطع مربعات متساوية الحجم من كل زاوية وطوي الأضلاع. أوجد أبعاد الصندوق ذو اكبر حجم.



Exercise تمارين

Q1 س1

A box with no top is to be built by taking a $6'' by 10''$ sheet of cardboard, cutting x *in.* squares out of each corner and folding up the sides. Find the value of x that maximizes the volume of the box.

يمكن صنع صندوق بدون غطاء من خلال أخذ ورقة من الورق المقوى مقاس 10×6، وقطع مربعات مقاس x بوصة من كل زاوية وطي الجوانب. أوجد قيمة x التي تزيد من حجم الصندوق إلى أقصى حد.

Q2 س2

A box with no top is to be built by taking a $12''$ *by* $16''$ sheet of cardboard, cutting x *in.* squares out of each corner and folding up the sides. Find the value of x that maximizes the volume of the box.

يمكن صنع صندوق بدون غطاء من خلال أخذ ورقة من الورق المقوى مقاس 16×12 بوصة، وقطع مربعات مقاس x بوصة من كل زاوية وطي الجوانب. أوجد قيمة x التي تزيد من حجم الصندوق إلى أقصى حد.

Q3 | س3

a) A box with no top is built by taking a $6'' \; by \; 6''$ piece of cardboard, cutting $x \; in.$ squares out of each corner and folding up the sides. The four $x \; in.$ squares are then taped together to form a second box (with no top or bottom). Find the value of x that maximizes the sum of the volumes of the boxes.

b) Repeat the problem starting with a $4'' \; by \; 6''$ piece of cardboard.

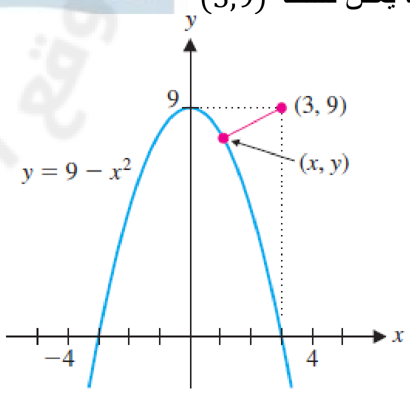
أ) يمكن بناء صندوق بدون غطاء عن طريق أخذ قطعة من الورق المقوى مقاس 6×6، وقطع مربعات مقاس x بوصة من كل زاوية وطي الجوانب. ثم يتم لصق المربعات الأربعة مقاس x بوصة معًا لتكوين صندوق ثانٍ (بدون غطاء أو قاع).
أوجد قيمة x التي تزيد من مجموع أحجام الصناديق إلى الحد الأقصى.

ب) كرر المسألة بدءًا من قطعة من الورق المقوى مقاس 6×4.

EXAMPLE 7.3 | مثال 7-3

Find the point on the parabola $y = 9 - x^2$ closest to the point (3, 9).

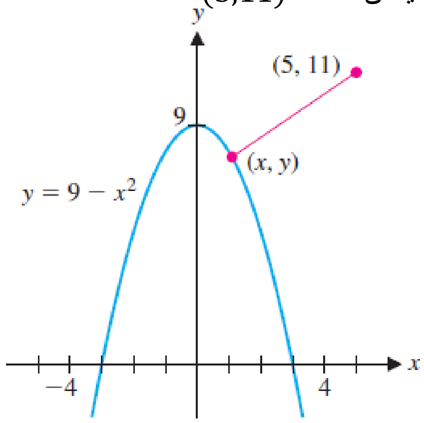
اوجد نقطة على منحنى الدالة $y = 9 - x^2$ والتي تكون أقرب ما يمكن للنقطة (3,9)



EXAMPLE 7.4 مثال 7-4

Find the point on the parabola $y = 9 - x^2$ closest to the point (5, 11).

اوجد نقطة على منحنى الدالة $y = 9 - x^2$ والتي تكون أقرب ما يمكن للنقطة (5,11)



Exercise تمارين

Q1 س1

Find the point on the curve $y = x^2$ closest to the point $(0, 1)$.

اوجد نقطة على منحنى الدالة $y = x^2$ والتي تكون أقرب ما يمكن للنقطة (0,1)

Q2 س2

Find the point on the curve $y = 2x^2$ closest to the point $(2, 1)$.

اوجد نقطة على منحنى الدالة $y = 2x^2$ والتي تكون أقرب ما يمكن للنقطة (2,1)

Q3 س3

Find the point on the curve $y = x^2$ closest to the point $(3, 4)$.

اوجد نقطة على منحنى الدالة $y = x^2$ والتي تكون أقرب ما يمكن للنقطة (3,4)

EXAMPLE 7.5 مثال 7-5

A soda can is to hold 12 fluid ounces. Find the dimensions that will minimize the amount of material used in its construction, assuming that the thickness of the material is uniform (i.e., the thickness of the aluminum is the same everywhere in the can).

يجب أن تتسع علبة الصودا لـ 12 أونصة سائلة. ابحث عن الأبعاد التي ستقلل من كمية المواد المستخدمة في تصنيعها، على افتراض أن سمك المادة موحد (أي أن سمك الألومنيوم هو نفسه في كل مكان في العلبة).

Exercise تمارين

Q1 تمرين1

A soda can in the shape of a cylinder is to hold **16 fluid ounces.**
Find the dimensions of the can that minimize the surface area of the can.

علبة مشروب غازي أسطوانية الشكل تتسع لـ 16 أونصة سائلة.
أوجد أبعاد العلبة التي تقلل مساحة سطحها إلى أدنى حد.

Q2

تمرين2

A soda can is to hold 12 fluid ounces. Suppose that the bottom and top are twice as thick as the sides. Find the dimensions of the can that minimize the amount of material used. (Hint: Instead of minimizing surface area, minimize the cost, which is proportional to the product of the thickness and the area.)

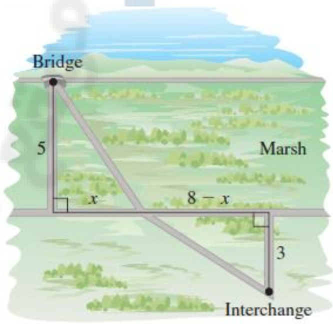
تتسع العلبة من السائل $12\ fl\ oz$. على فرض أن سمك القمة والقاع ضعف سمك الجوانب. جد أبعاد العلبة التي تحقق القيمة الصغرى للمادة المستخدمة. (إرشاد: بدلًا من ايجاد القيمة الصغرى لمساحة السطح جد القيمة الصغرى للتكلفة مساحة السطح، قلل التكلفة، التي تتناسب مع ناتج السمك والمساحة).

EXAMPLE 7.5

مثال 7-5

The state wants to build a new stretch of highway to link an existing bridge with a turnpike interchange, located 8 miles to the east and 8 miles to the south of the bridge. There is a 5-mile-wide stretch of marshland adjacent to the bridge that must be crossed. Given that the highway costs $10 million per mile to build over the marsh and only $7 million per mile to build over dry land, how far to the east of the bridge should the highway be when it crosses out of the marsh?

تريد الولاية بناء امتداد جديد من الطريق السريع لربط جسر قائم بتقاطع طريق سريع يقع على بعد 8 أميال إلى الشرق و8 أميال إلى الجنوب من الجسر. هناك امتداد من الأراضي المستنقعية بعرض 5 أميال بجوار الجسر يجب عبوره. نظرًا لأن تكلفة بناء الطريق السريع 10 ملايين دولار لكل ميل فوق المستنقع و7 ملايين دولار فقط لكل ميل فوق الأراضي الجافة، فإلى أي مدى يجب أن يكون الطريق السريع شرق الجسر عندما يعبر المستنقع؟

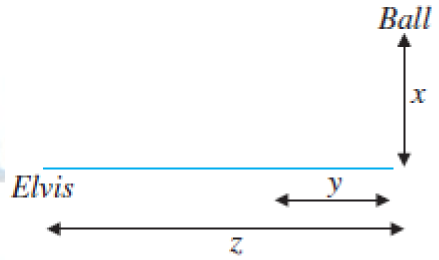


Exercise تمارين

Q12 س12

Elvis the dog stands on a shoreline while a ball is thrown $x = 4$ meters into the water and $z = 8$ meters down shore. If he runs $6.4\ m/s$ and swims $0.9\ m/s$, find the place (y) at which he should enter the water to minimize the time to reach the ball. Show that you get the same y-value for any $z > 1$.

يقف الكلب الفيس على الشاطئ بينما يتم رمي كرة $x = 4$ أمتار في الماء و $z = 8$ أمتار في اتجاه الشاطئ. إذا ركض بسرعة ثانية/متر 6.4 وسبح بسرعة ثانية/متر 0.9، فابحث عن المكان (y) الذي يجب أن يدخل فيه الماء لتقليل الوقت اللازم للوصول إلى الكرة. أظهر أنك حصلت على نفس قيمة y لأي $z > 1$.



Q13 س13

Suppose a wire $2\ ft$ long is to be cut into two pieces, each of which will be formed into a square. Find the size of each piece to maximize the total area of the two squares.

افترض أن سلكًا طوله 2 قدم سيتم قطعه إلى قطعتين، كل منهما سيتم تشكيلها على شكل مربع. أوجد حجم كل قطعة لتعظيم المساحة الإجمالية للمربعين.

Q14 | س14

An advertisement consists of a rectangular printed region plus **1** ***in***. margins on the sides and **2** ***in***. margins at top and bottom. If the area of the printed region is to be **92** $\boldsymbol{in^2}$, find the dimensions of the printed region and overall advertisement that minimize the total area.

يتكون الإعلان من منطقة مطبوعة مستطيلة بالإضافة إلى هوامش 1 بوصة على الجانبين وهوامش 2 بوصة في الأعلى والأسفل. إذا كانت مساحة المنطقة المطبوعة 92 بوصة مربعة، فابحث عن أبعاد المنطقة المطبوعة والإعلان الإجمالي الذي يقلّل المساحة الإجمالية.

Q15 | س15

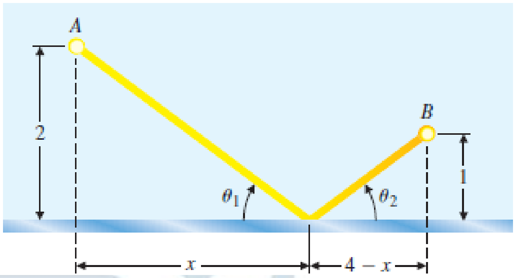
An advertisement consists of a rectangular printed region plus 1-in. margins on the sides and 1.5-in. margins at top and bottom. If the total area of the advertisement is to be 120 in.2, what dimensions should the advertisement be to maximize the area of the printed region?

يتكون الإعلان من منطقة مطبوعة مستطيلة بالإضافة إلى هوامش 1 بوصة على الجانبين وهوامش 1.5 بوصة في الأعلى والأسفل. إذا كانت المساحة الإجمالية للإعلان 120 بوصة مربعة، فما هي الأبعاد التي يجب أن تكون عليها الإعلان لتحقيق أقصى قدر من مساحة المنطقة المطبوعة؟

Q15 — س15

Suppose that light reflects off a mirror to get from point **A** to point **B** as indicated in the figure. Assuming a constant velocity of light, we can minimize time by minimizing the distance traveled.
Find the point on the mirror that minimizes the distance traveled. Show that the angles in the figure are equal (the angle of incidence equals the angle of reflection).

على فرض أن الضوء ينعكس عن مرآة لينتقل من النقطة Aإلى النقطة B كما هو موضح في الشكل. بافتراض ثبات سرعة الضوء، يمكننا تقليل الزمن بتقليل المسافة المقطوعة.
أوجد النقطة على المرآة التي تُقلل المسافة المقطوعة. بيّن أن الزوايا في الشكل متساوية (زاوية السقوط تساوي زاوية الانعكاس).



Q15 — س15

A Norman window has the outline of a semicircle on top of a rectangle. Suppose there is $8+\pi$ feet of wood trim available. Discuss why a window designer might want to maximize the area of the window. Find the dimensions of the rectangle (and, hence, the semicircle) that will maximize the area of the window.

نافذة نورماندي لها شكل نصف دائرة فوق مستطيل.
لنفترض أن هناك $8+\pi$ قدم من إطار خشبي متاح.
ناقش لماذا قد يرغب مصمم النوافذ في زيادة مساحة النافذة إلى أقصى حد.
أوجد أبعاد المستطيل وبالتالي نصف الدائرة التي ستحقق القيمة العظمى لمساحة النافذة.

أسئلة سنوات سابقة وأخرى

Q1 | س1

Find the minimum distance from the point (2,1) to the graph of $y = \sqrt{x} + 1$

اوجد أقصر مسافة بين النقطة $(2,1)$ ومنحنى الدالة

a) $\frac{\sqrt{11}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{7}}{2}$

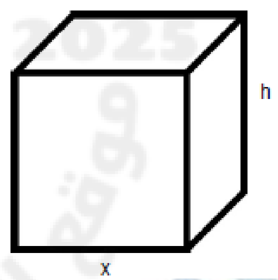
c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{15}}{2}$

Q2 | س2

An open rectangular box with a square base of side length $\boldsymbol{x}$ and height $\boldsymbol{h}$ must have a volume of $\boldsymbol{V = 32\ cm^3}$.
Find the dimensions $\boldsymbol{x}$ and h of the box that minimize the amount of material used.
(Hint. Volume: $\boldsymbol{V = x^2 h}$, Surface area $\boldsymbol{S = x^2 + 4xh}$).

صندوق مستطيل مفتوح ذو قاعدة مربعة طول ضلعها $\boldsymbol{x}$ وارتفاعها $\boldsymbol{h}$ ،
يجب أن يكون حجمه $\boldsymbol{V = 32cm^3}$.
أوجد أبعاد الصندوق $\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{h}$ التي تُقلل كمية المواد المستخدمة إلى أدنى حد.
(تلميح: الحجم: $\boldsymbol{V = x^2 h}$، مساحة السطح: $\boldsymbol{S = x^2 + 4xh}$).

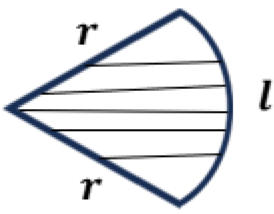


Q3 | س3

A circular sector with a perimeter of $\boldsymbol{12\ cm}$. Find the length of the radius of its circle, which makes its area as large as possible. Note that the area of the sector is given by

قطاع دائري محيطه $\boldsymbol{12\ cm}$ اوجد طول نصف قطر دائرته والتي تجعل مساحته أكبر ما يمكن علما ان مساحة القطاع تعطى بالعلاقة

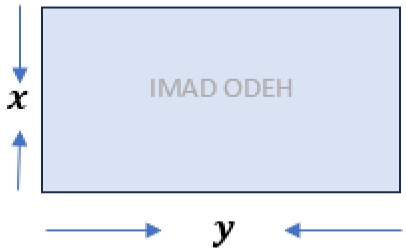
$$\boldsymbol{A = \frac{1}{2} r l}\ ,$$



Q4 — س 4

You have $60\ m$ fencing with which to enclose a rectangular space for a garden. Find the dimensions of the garden to get the largest area that can be enclosed by this fence.

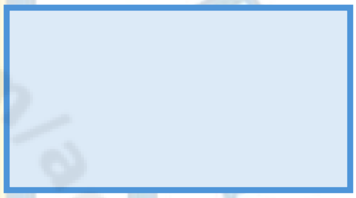
لديك سياج طوله $60m$ لتحيط به حديقة مستطيلة الشكل. اوجد ابعاد الحديقة لتحصل على أكبر مساحة ممكنة يمكن احاطتها بهذا السياج



Q5 — س5

A rectangle has length $x\ \ m$ and its perimeter is $20\ m$ What is the maximum area of such a rectangle?

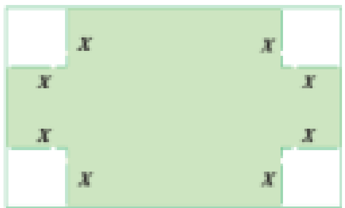
مستطيل طوله x متر ومحيطه يساوي $20\ m$ اوجد أكبر مساحة للمستطيل



Q6 — س 6

A box with no top is to be built by taking a $12\ \ by\ 16$ sheet of cardboard, cutting $x\ \ in.$ squares out of each corner and folding up the sides. Find the value of x that maximizes the volume of the box.

يراد صنع صندوق مفتوح من الأعلى باستخدام قطعة من الكرتون طولها $16\ in$ وعرضها $12\ in$ وذلك بقطع مربعات متساوية طول ضلع كل منها يساوي $x\ in$ عند كل زاوية من زواياها ثم يتم ثنيها للحصول على الصندوق اوجد قيمة x والتي تجعل حجم الصندوق ابر ما يمكن



Q7 | س7

The energy required for a bird to fly at speed v is proportional to P
Find v that satisfies the largest value of energy

الطاقة اللازمة لطائر لكي يطير بسرعة vتتناسب مع P
اوجد v التي تحقق القيمة الصغرى للطاقة

$$P = \frac{1}{v} + cv^3 \ , \qquad c > 0$$

Q8 | س8

Find the maximum area of a rectangle having a base on the x-axis and upper vertices on the parabola

اوجد مساحة المستطيل ذو أكبر مساحة والذي يقع رأسين من رؤوسه على محور x والرأسان الاخران على منحنى الدالة

$$y = 12 - x^2$$

Lesson 3.8 الدرس

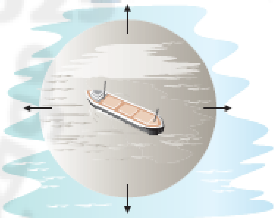
RELATED RATES المعدّلات المرتبطة

1. Make a simple sketch, if appropriate. 2. Set up an equation relating all of the relevant quantities. 3. Differentiate (implicitly) both sides of the equation with respect to time (t). 4. Substitute in values for all known quantities and derivatives. 5. Solve for the remaining rate.	1. أقرأ المسألة جيدًا، ثم أحدِّد المُتغيِّر الذي أريد إيجاد مُعدَّل تغيُّره، ومُعدَّلات التغيُّر المعطاة. 2. أرسم مُخطَّطًا يُمثِّل المسألة، ثم أُدوِّن عليه المعلومات المُهِمَّة لحلِّ المسألة، مثل: الكميات الثابتة، والكميات المُتغيِّرة بمرور الزمن. 3. أكتب معادلة تربط بين المُتغيِّر الذي أُريد إيجاد مُعدَّل تغيُّره والمُتغيِّرات التي علمْتُ مُعدَّلات تغيُّرها. 4. أستعمل قاعدة السلسلة والاشتقاق الضمني لإيجاد مشتقة طرفي المعادلة بالنسبة إلى t. المُتغيِّر الوسيط 5. أُعوِّض في المعادلة الناتجة جميع القِيَم المعلومة للمُتغيِّرات ومُعدَّلات تغيُّرها، 6. أَحُلُّ المعادلة تبعًا لمُعدَّل التغيُّر المطلوب إيجاده.

EXAMPLE 8.1 — مثال 1-8

An oil tanker has an accident, and oil pours out at the rate of **150** gallons per minute. Suppose that the oil spreads onto the water in a circle at a thickness of $\frac{1}{10}''$ Given that 1 ft3 equals **7.5** gallons, determine the rate at which the radius of the spill is increasing when the radius reaches **500** feet.

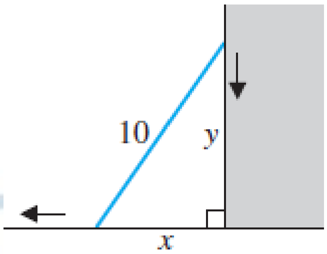
تعرضت ناقلة نفط لحادث وتسرب النفط بمعدل 150 جالون /دقيقة على فرض ان النفط ينتشر على الماء في دائرة بسمك $\frac{1}{10}''$ اعتبر ان $1ft^3$ يساوي جالون 7.5 اوجد معدل تزايد نصف قطر التسرب عند وصول القطر الى $500ft$



EXAMPLE 8.2 — مثال 8-2

A $\mathbf{10}\ \boldsymbol{ft}$ ladder leans against the side of a building. If the top of the ladder begins to slide down the wall at the rate of $\mathbf{2}\ \boldsymbol{ft/sec}$, how fast is the bottom of the ladder sliding away from the wall when the top of the ladder is $\mathbf{8}\ \boldsymbol{ft}$ off the ground?

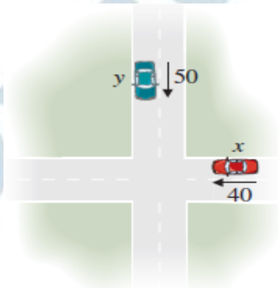
يرتكز سلم بطول $\mathbf{10}\ \boldsymbol{ft}$ على جانب المبنى. إذا بدأ الجزء العلوي من السلم في الانزلاق إلى أسفل الجدار بمعدل $\mathbf{2}\ \boldsymbol{ft/sec}$ ، فما سرعة انزلاق الجزء السفلي من السلم مبتعدًا عن الحائط عندما يكون الجزء العلوي من السلم مرتفعًا عن الأرض ب $\mathbf{8}\ \boldsymbol{ft}$



EXAMPLE 8.3 — مثال 8-3

A car is traveling at 50 mph due south at a point $\frac{1}{2}$ mile north of an intersection. A police car is traveling at 40 mph due west at a point $\frac{1}{4}$ mile east of the same intersection. At that instant, the radar in the police car measures the rate at which the distance between the two cars is changing. What does the radar gun register?

تسير سيارة شرطة بسرعة $\mathbf{50}\boldsymbol{mph}$ تجاه الجنوب من نقطة تبعد شمال التقاطع $\frac{1}{2}\boldsymbol{mi}$. وتسير سيارة شرطة بسرعة $\mathbf{40}\boldsymbol{mph}$ من نقطة تبعد $\frac{1}{4}\boldsymbol{mi}$ شرق التقاطع نفسه. في هذه اللحظة، يقيس الرادار في سيارة الشرطة المعدل الذي تتغير به المسافة بين السيارتين. فما الذي سيسجله جهاز الرادار؟



EXAMPLE 8.4

مثال 8-4

A small company estimates that when it spends x thousand dollars for advertising in a year, its annual sales will be described by $s = 60 - 40e^{-0.05x}$ thousand dollars. The four most recent annual advertising totals are given in the following table.

تقوم شركة صغيرة بتقدير أنه عند إنفاق ألف درهم على الإعلانات في السنة، فمن الممكن وصف مبيعاتها السنوية بالدالة $s = 60 - 40e^{-0.05x}$ ألف درهم. يوضح الجدول التالي آخر أربعة إجماليات للإعلانات السنوية.

Year	1	2	3	4
Advertising Dollars	14,500	16,000	18,000	20,000

Estimate the current (year 4) value of $x'(t)$ and the current rate of change of sales.

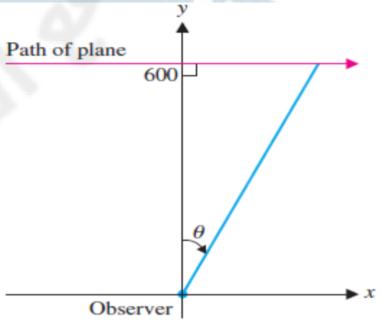
قدر القيمة الحالية (السنة 4) ل $x'(t)$ والمعدل الحالي للتغير في المبيعات.

EXAMPLE 8.5

مثال 8-5

A spectator at an air show is trying to follow the flight of a jet. The jet follows a straight path in front of the observer at $540\ mph$. At its closest approach, the jet passes $600\ feet$ in front of the person. Find the maximum rate of change of the angle between the spectator's line of sight and a line perpendicular to the flight path, as the jet flies by.

يحاول مراقب عرض جوي تتبع رحلة لطائرة نفاثة. تسير الطائرة النفاثة في خط مستقيم أمام المراقب بسرعة $540\ mph$. وعند أقرب نقطة لها، تمر الطائرة النفاثة أمام المراقب على بعد $600\ feet$ جد معدل تغير الزاوية بين خط نظر المراقب والخط العمودي على مسار الطيران، عند مرور الطائرة النفاثة به.



EXERCISES 3.8 تمارين

Q1 س1

Assume that the infected area of an injury is circular.
(a) If the radius of the infected area is $\mathbf{3}\ \boldsymbol{mm}$ and growing at a rate of $\mathbf{1}\ \boldsymbol{mm/hr}$, at what rate is the infected area increasing?
(b) Find the rate of increase of the infected area when the radius reaches $\mathbf{6}\ \boldsymbol{mm}$. Explain in commonsense terms why this rate is larger than that of part (a).

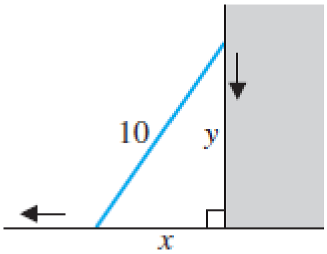
افترض أن المنطقة المصابة دائرية.
(أ) إذا كان نصف قطر المنطقة المصابة 3 مم وينمو بمعدل 1 مم/ساعة، فما معدل زيادة المنطقة المصابة؟
(ب) أوجد معدل زيادة المنطقة المصابة عندما يصل نصف القطر إلى 6 مم. اشرح بمصطلحات منطقية لماذا يكون هذا المعدل أكبر من المعدل في الجزء (أ).

Q2 س2

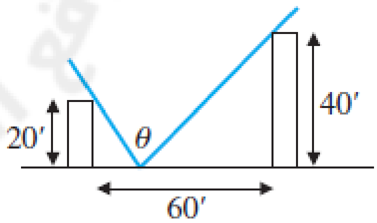
Suppose a forest fire spreads in a circle with radius changing at a rate of **5 feet per minute.** When the radius reaches **200 feet**, at what rate is the area of the burning region increasing?

حريق في الغابة انتشر في دائرة يتغير نصف قطرها بمعدل 5 أقدام في الدقيقة. اوجد معدل تزايد مساحة المنطقة المحترقة عندما يصل نصف القطر إلى 200 قدم؟

Q3	س3
A $10\ ft$ ladder leans against the side of a building. If the bottom of the ladder is pulled away from the wall at the rate of $3\ ft/s$ and the ladder remains in contact with the wall, (a) find the rate at which the top of the ladder is dropping when the bottom is $6\ ft$ from the wall. (b) Find the rate at which the angle between the ladder and the horizontal is changing when the bottom of the ladder is $6\ ft$ from the wall.	يتكئ سلم طوله **10 أقدام** على جانب مبنى. إذا تم سحب الجزء السفلي من السلم بعيدًا عن الحائط بمعدل **3 أقدام/ثانية** وظل السلم على اتصال بالحائط، (أ) أوجد المعدل الذي ينخفض به الجزء العلوي من السلم عندما يكون الجزء السفلي على بعد **6 أقدام** من الحائط. (ب) أوجد المعدل الذي تتغير به الزاوية بين السلم والأفقي عندما يكون الجزء السفلي من السلم على بعد **6 أقدام** من الحائط.



Q4	س4
Two buildings of height $20\ feet$ and $40\ feet$, respectively, are $60\ feet$ apart. Suppose that the intensity of light at a point between the buildings is proportional to the angle θ in the figure. (a) If a person is moving from right to left at $4\ ft/s$, at what rate is θ changing when the person is exactly halfway between the two buildings? (b) Find the location at which the angle θ is maximum.	مبنيان ارتفاعهما 20 قدمًا و40 قدمًا على التوالي، ويفصل بينهما 60 قدمًا. افترض أن شدة الضوء عند نقطة بين المبنيين تتناسب مع الزاوية θ في الشكل. (أ) إذا كان شخص يتحرك من اليمين إلى اليسار بسرعة 4 أقدام/ثانية، فما معدل تغير الزاوية θ عندما يكون الشخص في منتصف المسافة تمامًا بين المبنيين؟ (ب) أوجد الموقع الذي تكون فيه الزاوية θ في أقصى حد لها.



Q5	س5

A plane is located $x = 40$ miles (horizontally) away from an airport at an altitude of h miles. Radar at the airport detects that the distance $s(t)$ between the plane and airport is changing at the rate of $s'(t) = -240\ mph$.
(a) If the plane flies toward the airport at the constant altitude $h = 4$, what is the speed $|x'(t)|$ of the airplane?
(b) Repeat with a height of $6\ miles$. Based on your answers, how important is it to know the actual height of the airplane?

توجد طائرة على مسافة $x = 40$ ميلاً (أفقيًا) من مطار على ارتفاع h أميال. يكتشف الرادار في المطار أن المسافة $s(t)$ بين الطائرة والمطار تتغير بمعدل $s'(t) = -240$ ميلاً في الساعة.
(أ) إذا طارت الطائرة باتجاه المطار على ارتفاع ثابت $h = 4$، فما سرعة $|x'(t)|$ الطائرة؟
(ب) كرر ذلك على ارتفاع 6 أميال. بناءً على إجاباتك، ما مدى أهمية معرفة الارتفاع الفعلي للطائرة؟

Q6	س 6

A camera tracks the launch of a vertically ascending spacecraft. The camera is located at ground level 2 miles from the launchpad.
If the spacecraft is $3\ miles$ up and traveling at $0.2\ mile\ per\ second$, at what rate is the camera angle (measured from the horizontal) changing?

ترصد كاميرا انطلاق مركبة فضائية تنطلق عموديا، إذا كانت الكاميرا على بعد 2 ميل من نقطة انطلاق المركبة اوجد سرعة تغير زاوية رصد المركبة إذا كانت سرعة انطلاق المركبة 0.2ميل/الثانية عندما تكزن على ارتفاع 3 ميل

Q7 | **س 7**

Sand is dumped such that the shape of the sandpile remains a cone with height equal to twice the radius. If the sand is dumped at the constant rate of $36ft^3/s$. Find the rate t which the radius is increasing when the height reaches $6\ ft$.

(Hint: Cone volume $v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$)

يسقط الرمل بحيث يشكل الرمل كومة على شكل مخروطي بارتفاع يساوي مثلي نصف القطر. إذا الرمال يسقط بمعدل ثابت قدره $36ft^3/s$ اوجد المعدل الذي يزداد فيه نصف القطر عندما يصل الارتفاع إلى 6 أقدام.

(تلميح: حجم المخروط $\left(v = \frac{1}{3}\pi r^2 h\right)$

Q8 | **س 8**

A dock is $6\ ft$ above water. Suppose you stand on the edge of the dock and pull a rope attached to a boat at the constant rate of $2\ ft/s$. Assume that the boat remains at water level. At what speed is the boat approaching the dock when it is $20\ ft$ from the dock?

رصيف على ارتفاع 6 أقدام فوق الماء. لنفترض أنك تقف على حافة الرصيف وتسحب حبلًا مربوطًا بقارب بمعدل ثابت قدره 2 قدم/ثانية. افترض أن القارب لا يزال عند مستوى الماء. ما السرعة التي يقترب بها القارب من الرصيف عندما يكون على بعد 20 قدمًا من الرصيف؟

Q9 | س 9

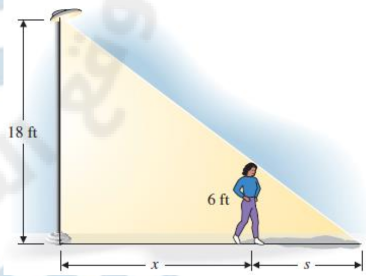
Suppose that you are blowing up a balloon by adding air at the rate of $\mathbf{1}\ \boldsymbol{ft^3/s}$. If the balloon maintains a spherical shape, the volume and radius are related by $\boldsymbol{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$. Compare the rate at which the radius is changing when $\boldsymbol{r = 0.01}$ ft versus when $\boldsymbol{r = 0.1\ ft}$.

لنفترض أنك تقوم بنفخ بالون بإضافة الهواء بمعدل $\mathbf{1}\ \boldsymbol{ft^3/s}$. إذا كان البالون يحتفظ بشكله الكروي، فإن الحجم ونصف القطر يرتبطان بـ $\boldsymbol{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$. قارن معدل تغير نصف القطر عندما يكون $\boldsymbol{r = 0.01}$ قدم مقابل عندما يكون $\boldsymbol{r = 0.1}$ قدم

Q10 | س 10

Suppose a 6-ft-tall person is $\mathbf{12}\ \boldsymbol{ft}$ away from an $\mathbf{18}\ \boldsymbol{ft}$-tall lamppost.
If the person is moving away from the lamppost at a rate of $\mathbf{2}\ \boldsymbol{ft/s}$, at what rate is the length of the shadow changing?

افترض أن شخصًا يبلغ طوله 6 أقدام يبعد 12 قدمًا عن عمود إنارة طوله 18 قدمًا.
إذا كان الشخص يتحرك بعيدًا عن عمود الإنارة بمعدل $2\ ft/s$، فما المعدل الذي يتغير به طول الظل؟



Q11	س11
Suppose a forest fire spreads in a circle with radius changing at a rate of $5\ ft\ /\ min$. When the radius reaches $200\ ft$, at what rate is the area of the burning region increasing?	حريق غابات ينتشر على شكل دائرة حيث يتغير نصف قطرها بمعدل $5ft/min$. اوجد معدل تغير مساحة المنطقة المحترقة عندما يكون نصف قطرها $200ft$

Q12	س12
Sand is poured from the pipe with rate $9\ m^3/s$ So that formed a conical pile by a height equal to half the diameter of the base of the cone. Find the rate of increase in the height of the sand pile when it reaches a height of 3 meters.	ينصب رمل من أنبوب بمعدل $9\ m^3/sec$ بحيث يشكل كومة مخروطية ارتفاعها يساوي نصف قطر قاعدة المخروط. اوجد معدل تزايد ارتفاع كومة الرمل عندما يكون ارتفاعها $3m$

Q13	س13

L and M two vertical roads in **C**, a gas station is $\boldsymbol{12\ km}$ on M road from the intersection point **C**. If a car moves towards **C** with velocity $\boldsymbol{26\ km/h}$. find the rate of changing distance between the car and the station when car about 5 km from C

M و L طريقان مستقيمان متعامدان في النقطة $\boldsymbol{C}$. تقع محطة وقود على الطريق M وتبعد $12\boldsymbol{km}$عن نقطة التقاطع $\boldsymbol{C}$. أذا تحركت سيارة على الطريق L بسرعة $26\ \boldsymbol{km/h}$ في اتجاه النقطة $\boldsymbol{C}$, فما معدل تغير المسافة بين السيارة ومحطة الوقود عندما تكون السيارة على بعد $\boldsymbol{5\ km}$ من نقطة التقاطع ؟

Q14	س14

An isosceles triangle **10 cm** each and the angle between them $\boldsymbol{\theta}$ if the angle change with rate $\boldsymbol{\frac{\pi}{60}\ rad\ /min}$. Find the rate of change of the tringle area when $\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{3}}$

مثلث متطابق الضلعين طول كل من ضلعيه المتطابقين $\boldsymbol{10\ cm}$وقياس الزاوية بينهما θ. إذا تغيرت θ بمعدل $\pi/60\ \ rad/min$ فان معدل تغير مساحة المثلث عندما $\theta = \pi/3$ هو

Q15 — س15

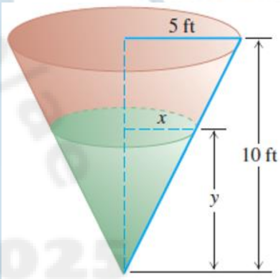
The radius of a circle is changing at the rate of $\frac{1}{\pi}$ in/s.
At what rate is the circle's area changing when $r = 5\ in$?

يتغير نصف قطر دائرة بمعدل $\frac{1}{\pi}$ in/s اوجد معدل تغير مساحة الدائرة عندما يكون نصف قطرها 5cm

Q16 — س16

Water runs into a conical tank at the rate of $\mathbf{9\ ft^3/min}$. The tank stands point down and has a height of $\mathbf{10\ ft}$ and a base radius of $\mathbf{5\ ft}$. How fast is the water level rising when the water is $\mathbf{6\ ft}$ deep?

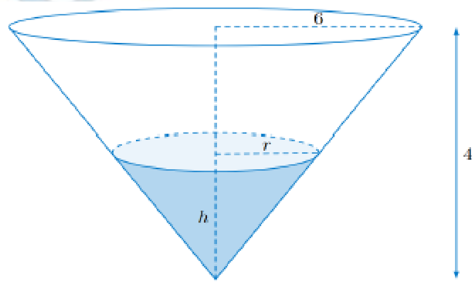
يتدفق الماء إلى خزان مخروطي بمعدل **9** قدم مكعب/دقيقة. الخزان موضوع ورأسه لأسفل، ويبلغ ارتفاعه **10** أقدام ونصف قطر قاعدته **5** أقدام. ما هو معدل ارتفاع مستوى الماء عندما يكون عمقه **6** أقدام؟



Q17 — س17

Water runs into a conical tank at the rate of $\mathbf{10\ ft^3/min}$. The tank stands point down and has a height of $\mathbf{4\ ft}$ and a base radius of $\mathbf{6\ ft}$. How fast is the water level rising when the water is $\mathbf{2\ ft}$ deep?

يتدفق الماء إلى خزان مخروطي بمعدل 10 قدم مكعب/دقيقة. الخزان موضوع ورأسه لأسفل، ويبلغ ارتفاعه 4 أقدام ونصف قطر قاعدته 6 أقدام. ما هو معدل ارتفاع مستوى الماء عندما يكون عمقه 2 أقدام؟



Lesson 3.9 الدرس

معدلات التغير في الاقتصاد والعلوم

RATES OF CHANGE IN ECONOMICS AND SCIENCES

EXAMPLE 9.1 مثال 1-9

Suppose that

$$C(x) = 0.02x^2 + 2x + 4000$$

is the total cost (in dollars) for a company to produce x units of a certain product.
Compute the marginal cost at $x = 100$ and compare this to the actual cost of producing the 100^{th} unit

على فرض أن

هو إجمالي التكلفة بالدرهم لشركة تنتج x وحدة من منتجات معينة. اوجد قيمة التكلفة الحدية عند $x = 100$ وقارنها بالتكلفة الفعلية لإنتاج 100 وحدة.

EXAMPLE 9.2 مثال 2-9

Suppose that

$$C(x) = 0.02x^2 + 2x + 4000$$

is the total cost (in dollars) for a company to produce x units of a certain product.
Find the production level x that minimizes the average cost

على فرض ان

هي التكلفة الإجمالية (بالدولار) التي تتحملها الشركة لإنتاج x وحدات من منتج معين.
اوجد مستوى الإنتاج x الذي يحقق القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة

EXAMPLE 9.2 مثال 2-9

Let $R(x)$ be the revenue and $C(x)$ be the cost of manufacturing x items. Profit is defined as

ليكن $R(x)$ هو الإيراد و$C(x)$ هو تكلفة تصنيع x من العناصر. يتم تعريف الربح على أنه

$$P(x) = R(x) - C(x)$$
$$R(x) = 10x - 0.001x^2$$
$$C(x) = 2x + 5000$$

Find the maximum profit

اوجد القيمة العظمى للأرباح

EXERCISES 3.8 تمارين

Q1 س 1

If the cost of manufacturing x items is $C(x)$ find the marginal cost at $x = 30$

إذا كانت تكلفة تصنيع x منتج هي $C(x)$ اوجد التكلفة الحدية عند $x = 30$

$$C(x) = x^3 + 20x^2 + 90\,x + 15$$

Q2	س 2

Suppose that $C(x) = 10e^{0.02x}$ is the total cost (in dollars) for a company to produce x units of a certain product.

افترض ان $C(x) = 10e^{0.02x}$ هي التكلفة الكلية بالدولار لإنتاج xمن الوحدات

a) Compute the **marginal cost at $x = 100$**

أ) اوجد التكلفة الحدية لإنتاج $x = 100$

b) **Actual cost of** producing the **100th unit**

ب) اوجد التكلفة الفعلية لإنتاج $x = 100$

c) Find the production level that will **minimize** the average cost.

جـ) اوجد مستوى الإنتاج والذي يجعل التكلفة المتوسطة اقل ما يمكن

Q3 The cost of manufacturing x items is given by

س 3 إذا كانت تكلفة تصنيع x عناصر تعطى بالعلاقة

$$C(x) = 0.02x^2 + 20x + 1800$$

a) Compute the **marginal cost at $x = 20$**

ت) اوجد التكلفة الحدية لإنتاج $x = 20$

b) **Actual cost of** producing the **20th unit**

ث) اوجد التكلفة الفعلية لإنتاج $x = 20$

c) Find the value of x that minimizes the average cost

ج) اوجد مستوى الإنتاج x الذي يحقق القيمة الصغرى لمتوسط التكلفة

Q3

س 3

Suppose that $C(x) = 0.02x^2 + 4x + 1200$ is the cost of manufacturing x items. Show that $C'(x) > 0$ and explain in business terms why this has to be true. Show that $C''(x) > 0$ and explain why this indicates that the manufacturing process is not very efficient.

لنفترض أن $C(x) = 0.02x^2 + 4x + 1200$ هي تكلفة تصنيع x وحدة. أثبت أن $C'(x) > 0$، واشرح من منظور تجاري لماذا يجب أن يكون هذا صحيحًا.
أثبت أن $C''(x) > 0$، واشرح لماذا يشير هذا إلى أن عملية التصنيع ليست فعالة للغاية.

EXAMPLE 9.3 مثال 3-9

Suppose that على فرض أن

$$f(p) = 400(20 - p)$$

is the demand for an item at price p (in AED) with $p < 20$.
(a) Find the elasticity of demand.
(b) Find the range of prices for which $E < -1$. Compare this to the range of prices for which revenue is a decreasing function of p.

هو طلب منتج معين بسعر p بالدرهم حيث $p < 20$
أ) جد مرونة الطلب.
ب) اوجد مدى السعر التي تجعل $E < -1$
قارن مدى الأسعار الذي تكون فيه الايرادات دالة متناقصة ل p

EXERCISES 3.8 تمارين

Q4 س 4

Suppose that $f(p) = 200(30 - p)$ is the **demand.**

على فرض ان دالة الطلب هي
$f(p) = 200(30 - p)$

a) Find the **elasticity of demand.**

أ) **اوجد مرونة الطلب**

b) Find the **range of prices** for which the **demand is elastic** $(E < -1)$

ب) **اوجد مدى السعر الذي يكون عنده الطلب مرن** $(E < -1)$

c) Compare this to **the range of prices** for which **revenue** is a **decreasing function of** p..

جـ) قارن مدى السعر الذي قمت بإيجاده سابقا بالسعر الذي يجعل العائد يتناقص

EXAMPLE 9.4 مثال 9-4

In an autocatalytic chemical reaction, the reactant and the product are the same. The reaction continues until some saturation level is reached. From experimental evidence, chemists know that the reaction rate is jointly proportional to the amount of the product present and the difference between the saturation level and the amount of the product. If the initial concentration of the chemical is $\mathbf{0}$ and the saturation level is $\mathbf{1}$ (corresponding to $\mathbf{100\%}$), this means that the concentration $\boldsymbol{x(t)}$ of the chemical satisfies the equation

في التفاعل الكيميائي ذاتي التحفيز تتشابه المواد المتفاعلة والمنتج. يستمر التفاعل حتى الوصول إلى مستوى التشبع. يعرف الكيميائيين من الأدلة التجريبية أن سرعة التفاعل تتناسب مع قيمة المنتج المعروض والفرق بين مستوى التشبع وقيمة المنتج. إذا كان التركيز الأولي من المادة الكيميائية هو 0 ومستوى التشبع هو 1 (بما يناظر 100%)فهذا يعني أن التركيز $x(t)$ للمادة الكيميائية يحقق المعادلة

$$x'(t) = rx(t)[1 - x(t)], \text{ where } r > 0 \text{ is a constant.}$$

Find the concentration of chemical for which the reaction rate $x'(t)$ is a maximum

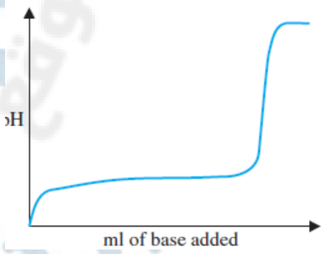
جد تركيز المادة الكيميائية الذي تصل فيه سرعة تفاعلها $x'(t)$ الى القيمة العظمى

EXAMPLE 9.5 مثال 9-5

Find the value of $\boldsymbol{x}$ at which the rate of change of $\boldsymbol{pH}$ is the smallest. Identify the corresponding point on the titration curve in Figure

جد قيمة x التي يكون فيها معدل تغير الرقم الهيدروجيني pH صغير جدا. حدد النقطة المقابلة على منحنى المعايرة في الشكل

$$p(x) = c + \ln\frac{x}{1-x}$$



EXERCISES 3.8 تمارين

Q5 س 5

If the concentration of a **chemical changes** according to the equation

إذا كان التركيز الكيميائي يتغير وفقا للمعادلة التالية

$$x'(t) = 2x(t)[4 - x(t)]$$

a) Find the **concentration** $x(t)$ for which the **reaction rate is maximum**

أ) اوجد التركيز الذي يحقق أكبر قيمة لسرعة التفاعل

b) Find The **Limiting concentration.**

ب) اوجد حدود التركيز

Q6 س 6

If the concentration of a **chemical changes** according to the equation

إذا كان التركيز الكيميائي يتغير وفقا للمعادلة التالية

$$x'(t) = 0.3x(t)[4 - x(t)]$$

Find the **concentration** $x(t)$ for which the **reaction rate is maximum**

ت) اوجد التركيز الذي يحقق أكبر قيمة لسرعة التفاعل

Q7 | **س 7**

In the titration of a weak acid and strong base, the pH is given by $c + ln\frac{x}{1-x}$, where f is the fraction ($0 < x < 1$) of converted acid. What happens to the rate of change of pH as x approaches 1?

عند معايرة حمض ضعيف مع قاعدة قوية يحدد الرقم الهيدروجيني بـ

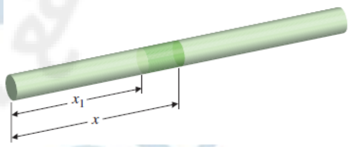
$$pH = c + ln\frac{x}{1-x}$$

والذي في فيه الكسر ممثل بالدالة f
ماذا يحدث لمعدل التغير في pH عندما تصل x ($0 < x < 1$) الى 1

EXAMPLE 9.6 | **مثال 6-9**

Suppose that the mass of the first x meters of a thin rod is given by $f(x) = \sqrt{2x}$. Compute the linear density at $x = 2$ and at $x = 8$, and compare the densities at the two points

على فرض أن كثافة الأمتار الأولى من قضيب معدني رقيق تعطى بالدالة $f(x) = \sqrt{2x}$ فاحسب الكثافة الخطية عند $x = 2$ وعند $x = 8$ ، وقارن الكثافتين عند النقطتين.



EXERCISES 3.8 تمارين

Q11 — س 11

The mass of the first x meters of a thin rod is given by the function $m(x)$ on the indicated interval.
Find the linear mass density function for the rod. Briefly describe the composition of the rod.

إذا كانت كتلة ال x متر الأولى من قضيب معدني تعطى بالعلاقة $m(x)$ في الفترة المعطاة
اوجد الدالة الخطية لكثافة الكتلة للقضيب المعدني في كل مما يلي.
باختصار صف تركيب القضيب المعدني

a) $m(x) = 4x - \sin x$ grams for $0 \le x \le 6$

b) $m(x) = 4x$ grams for $0 \le x \le 2$

c) $m(x) = (x - 1)^3 + 6x$ grams for $0 \le x \le 2$

d) $m(x) = 4x^2$ grams for $0 \le x \le 2$

Q11 — س 11

Suppose that the mass of the first x meters of a thin rod is given by $m(x) = 20 + x^2$ for $0 \le x \le 4$.
Find the density of the rod and briefly describe the composition of the rod.

لنفترض أن كتلة أول x متر من قضيب رفيع تُعطى بالعلاقة $m(x) = 20 + x^2$، حيث $0 \le x \le 4$.

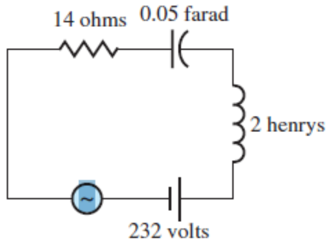
أوجد كثافة القضيب، واشرح بإيجاز تركيبه.

EXAMPLE 9.7 مثال 9-7

The electrical circuit shown in Figure includes a $\mathbf{14 - ohm}$ resistor, a $\mathbf{2 - henry\ inductor}$, a $\mathbf{0.05 - farad}$ capacitor and a battery supplying $\mathbf{232\ volts}$ of $\boldsymbol{AC}$ current modeled by the oscillating function $\mathbf{232\ sin\ 2t}$, where $\boldsymbol{t}$ is measured in seconds.
Find the current in the circuit at any time $\boldsymbol{t}$.

تتضمن الدارة الكهربائية المبينة في الشكل مقاوم 14 أوم وأداة ومعايق 2 هنري ومكثّف 0.05فاراد وبطارية إمداد 232 فولت من التيار المتردد المنمذج بالدالة المتذبذبة $\mathbf{232 sin\ 2t}$ حيث إن تقاس بالثواني. فجد التيار في الدارة عند أي وقت $\boldsymbol{t}$

$$\boldsymbol{Q(t) = 10e^{-5t} + 2te^{-2t} + 3\ sin2t - 7cos\ 2t\ coulombs}$$



EXERCISES 3.8 تمارين

Q8 س 8

Suppose that the charge in an electrical circuit is $\boldsymbol{Q(t)}$ coulombs. Find the current

افرض ان الشحنة في دائرة كهربائية تعطى بالعلاقة $\boldsymbol{Q(t)}$ اوجد التيار

$$\boldsymbol{Q(t) = e^{-2t}\,(cos\ 3t - 2\ sin\ 3t)}$$

Q9 س 9

Suppose that the charge in an electrical circuit is $\boldsymbol{Q(t)}$ coulombs. Find the current

افرض ان الشحنة في دائرة كهربائية تعطى بالعلاقة $\boldsymbol{Q(t)}$ اوجد التيار

$$\boldsymbol{Q(t) = e^{-3t}\ sin\ 2t}$$

Q10 س 10

Suppose that the charge in an electrical circuit is $Q(t)$ coulombs. Find the current

افرض ان الشحنة في دائرة كهربائية تعطى بالعلاقة $Q(t)$ اوجد التيار

$$Q(t) = e^{-3t}(\cos 2t + 4\sin 3t)$$

EXAMPLE 9.8 مثال 8-9

Suppose that a population grows according to the equation $p'(t) = 2p(t)[1 - p(t)]$ (the logistic equation with $r = 2$). Find the population for which the growth rate is a maximum. Interpret this point graphically.

على فرض أن النمو السكاني يعطى بالمعادلة المعادلة $p'(t) = 2p(t)[1 - p(t)]$ (اللوجستية باستخدام $r = 2$) جد التعداد السكاني الذي يكون فيه معدل النمو هو القيمة العظمى. فسّر هذه النقطة بيانيًا.

EXERCISES 3.8 تمارين

Q12 س 12

Suppose that a **population grows** according to the logistic growth equation.

افرض ان النمو السكاني يعطى وفقا لمعادلة النمو اللوجيستي التالية

$$p'(t) = 2p(t)[7 - 2p(t)].$$

Find the **population** for which the **growth rate is a maximum.**

اوجد التعداد السكاني والتي يصل عندها معدل النمو السكاني القيمة العظمى

Q13	س 13
Suppose that a **population grows** according to the logistic growth equation.	افرض ان النمو السكاني يعطى وفقا لمعادلة النمو اللوجيستي التالية

$$p'(t) = 4p(t)[5 - p(t)].$$

Find the **population** for which the **growth rate is a maximum.**

اوجد التعداد السكاني والتي يصل عندها معدل النمو السكاني القيمة العظمى

اطيب التمنيات للجميع