ملزمة أوراق عمل الوحدة الخامسة التكامل

KhateebAcademy.com

Alpha Education Center

الإمارات THE EMIRATES

اوراق عمل مادة

الرياضيات

الصـف الثاني عشـر متقدم

الفصل الدراسي الثالث

2026/2025

اسم الطالب : ....

المدرسـة : ....

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتفوق

إعداد : محمد عمر الخطيب

رابط أوراق العمل http://t.me/omaralkhateeb12AD

الوحدة الخامسة : التكامل

الوحدة السادسة : تطبيقات التكامل

الوحدة السابعة : طرائق التكامل

الدالة الاصلية

اذا كانت الدالة $f(x)=x^2+c$ حيث c عدد ثابت فان مشتقتها الدالة $f'(x)=2x$

نقول ان الدالة $f(x)=x^2+c$ هي الدالة الاصلية للدالة $f'(x)=2x$

ونعبر عما سبق بالرموز

$$\int 2x\ dx = x^2+c$$

ويقرء.... تكامل $2x$ هو x^2+c

او التكامل غير المحدود للدالة $f'(x)=2x$ بالنسبة للمتغير x هو $f(x)=x^2+c$

---

(1) اوجد الدالة الاصلية للدالة $f(t)=3t^2$ وعبرها عن ذلك بالرموز

نعلم ان مشتقة الدالة $F(t)=t^3+c$ حيث c عدد ثابت هي الدالة $f(t)=3t^2$

لذلك فان الدالة الاصلية للدالة $f(t)=3t^2$ هي الدالة $F(t)=t^3+c$

ونكتب ذلك بالرموز

$$\int 3t^2\ dt = t^3+c$$

---

(2) اوجد الدالة الاصلية للدالة $f(x)=1$ وعبر عن ذلك بالرموز

---

(3) اوجد الدالة الاصلية للدالة $f(t)=1$ وعبر عن ذلك بالرموز

---

(4) اوجد الدالة الاصلية للدالة $g(\theta)=\cos\theta$ وعبر عن ذلك بالرموز

1) اذا كانت $F(x)=\ln\left|\sec x+\tan x\right|$

(أ) اوجد $F'(x)$

(ب) ما هي الدالة الاصلية للدالة $f(x)=\sec x$

---

2) بين ان الدالة $F(x)=2x\ln(ex)-3x$ هي الدالة الاصلية للدالة $f(x)=1+\ln x^2$ ، $x>0$

---

3) اذا كانت الدالة $F(x)=2\ln\left|x^3+5x+1\right|+c$ هي الدالة الاصلية للدالة

$f(x)=\dfrac{bx^2+10}{x^3+5x+1}$ فاوجد قيمة الثابت b

التكامل غير المحدود

تعريف : التكامل غير المحدود

مجموعة كل الدوال الاصلية للدالة $f(x)$ هو التكامل غير المحدود للدالة f بالنسبة إلى x

ويرمز لها بالرمز $\int f(x)\,dx$

أي أن $\int f(x)\,dx = F(x)+C$

نظرية : اذا كانت الدالة $F(x)$ هي الدالة الاصلية للدالة $f(x)$ ، و الدالة $\mathrm{G}(x)$ هي الدالة الاصلية للدالة $f(x)$ على الفترة I فان الفرق بين الدالتين ثابت

أي ان $\mathrm{G}(x) = F(x)+c$ او $\mathrm{G}(x) - F(x) = c$ حيث c عدد ثابت.

(1) بين ان الدالة $F(x) = x^2(x^2+4)$ والدالة $\mathrm{G}(x) = \frac{1}{4}(2x^2+4)^2$ هما دوال اصلية لنفس الدالة

ملاحظة : التكامل هو العملية العكسية للمشتقة اي ان المشتقة تلغي التكامل والتكامل يلغي المشتقة

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x)$$ و $$\int\left[\frac{d}{dx}f(x)\right]dx = f(x)+c$$

(2) اذا كان $g(x) = x\sin x$ ، اوجد

$(a)\ \int g'(x)\,dx$

$(b)\ \frac{d}{dx}\int g(x)\,dx$

قواعد التكامل

ملاحظة: راجع قواعد الاشتقاق

(1) $\int a\,dx = ax + c$

(2) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad , n \neq -1$ $\qquad * \int (ax+b)^n\,dx = \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$

(3) $\int x^{-1} dx = \int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

(4) $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$ $\qquad * \int \sin(ax+b)\,dx = \dfrac{-\cos(ax+b)}{a} + c$

(5) $\int \cos x\,dx = \sin x + c$

(6) $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$

(7) $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + c$

(8) $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + c$

(9) $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + c$

(10) $\int e^x\,dx = e^x + c$ $\qquad * \int e^{ax+b}\,dx = \dfrac{1}{a} e^{ax+b} + c$ $\qquad * \int f'(x)\,e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + c$

(11) $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + c$ $\qquad * \int \dfrac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$

(12) $\int \dfrac{1}{x^2+1} dx = \tan^{-1} x + c$ $\qquad * \int \dfrac{1}{x^2+a^2} dx = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}(\dfrac{x}{a}) + c$

(13) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$ $\qquad * \int \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \sin^{-1}(\dfrac{x}{a}) + c$

(14) $\int \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} x + c$ $\qquad * \int \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-a^2}} dx = \dfrac{1}{a}\sec^{-1}(\dfrac{x}{a}) + c$

خواص التكامل غير المحدود

(1) $\int k\, f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$

(2) $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

يتوزع التكامل على الجمع والطرح

ولا يتوزع على الضرب او القسمة

اوجد التكاملات التالية (اوجد الدالة الاصلية)

(1) $\int -3 \quad dx$

(2) $\int 2x^4 \quad dx$

(3) $\int x^{\frac{-4}{3}} \quad dx$

(4) $\int \frac{1}{x^2} \quad dx$

(5) $\int \sqrt[3]{x^2} \quad dx$

(6) $\int \frac{2}{\sqrt[5]{x}} \quad dx$

(7) $\int t\sqrt{t} \quad dt$

(8) $\int \frac{1}{2y} \quad dy$

(9) $\int (2x-1)^4 \quad dx$

(10) $\int \frac{6}{(3x+2)^2} \quad dx$

قبل البدأ بالتكامل ...اسئل نفسك

(1) هل الدالة التي نريد ايجاد تكاملها هي ناتج جمع او طرح حدود وكل حدد قابل للتكامل

(2) هل الدالة التي نريد ايجاد تكاملها هي ناتج ضرب او قسمة ويمكن تحويلها الى جمع او طرح حدود وكل حدد قابل للتكامل

اوجد التكاملات التالية (اوجد الدالة الاصلية)

(1) $\int (4x^3 - 3x) \quad dx$

(2) $\int (3x^2 - \sqrt{x} + 2) \quad dx$

(3) $\int (\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{5}{x^4} + \frac{1}{x}) \quad dx$

(4) $\int t^2 (t^3 - \frac{1}{t^2}) \quad dt$

(5) $\int x^{\frac{2}{3}} (x^{\frac{-4}{3}} - 3) \quad dx$

اوجد التكاملات التالية (اوجد الدالة الاصلية)

(1) $\int \frac{x^4 - 3x + 1}{x^2} \, dx$

(2) $\int \frac{x^{1/3} - 3}{\sqrt[3]{x^2}} \, dx$

(3) $\int \frac{x + 2x^{3/4}}{x^{5/4}} \, dx$

(4) $\int \frac{t^2 - 1}{1 - t} \, dt$

(5) $\int \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2} \, dx$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int (3\sin x - \cos 4x) \quad dx$

(2) $\int \sec x(\tan x - \sec x) \quad dx$

(3) $\int (\sec 2x \tan 2x + \csc^2 5x) \quad dx$

(4) $\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \cot x} \quad dx$

(5) $\int \csc x(\sec x \tan x - \cot x) \quad dx$

(6) $\int \frac{2\sin x}{\cos^2 x} \quad dx$

(7) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} \quad dx$

اوجد التكاملات التالية:

(1) $\int (e^{x} + \frac{1}{x} - \cos 2x + 1) \quad dx$

(2) $\int (2x + x\sqrt{x} + e^{2x} - \sin 3x) \quad dx$

(3) $\int (2x^{-1} + \frac{1}{\sqrt{e^{2x}}} - x) \quad dx$

(4) $\int e^{x}(2e^{x} - 3) \quad dx$

(5) $\int (e^{x} - e^{-x})^{2} \quad dx$

(6) $\int \frac{e^{x} + 3}{e^{x}} \quad dx$

(7) $\int \frac{e^{2x} - 2e^{3x}}{e^{3x}} \quad dx$

اوجد التكاملات التالية:

(1) $\int \frac{e^x}{e^x+3}\ dx$

(2) $\int \frac{3}{3x-2}\ dx$

(3) $\int \frac{x}{x^2+1}\ dx$

(4) $\int \frac{-7}{2x+1}\ dx$

(5) $\int \frac{2x+1}{x(x+1)}\ dx$

(6) $\int \frac{5x^3}{x^4-5}\ dx$

(7) $\int \frac{\sec^2 x}{\tan x}\ dx$

(8) $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\ dx$

(9) $\int \cot x\ dx$

(10) $\int \tan 2x\ dx$

(11) $\int (\cot x+\tan x)\ dx$

اوجد التكاملات التالية:

(1) $\int e^{2x+1} \quad dx$

(2) $\int \cos x \, e^{\sin x} \quad dx$

(3) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} \quad dx$

(4) $\int x \, e^{x^2} \quad dx$

(5) $\int \frac{e^{\tan x}}{1-\sin^2 x} \quad dx$

(6) $\int e^{x^2+\ln x} \quad dx$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{3}{x^2+1} \quad dx$

(2) $\int \frac{x}{x^3+x} \quad dx$

(3) $\int \frac{x+1}{x^2+1} \quad dx$

(4) $\int \frac{5}{\sqrt{4-4x^2}} \quad dx$

(5) $\int \frac{-2}{\sqrt{x^4-x^2}} \quad dx$

ملاحظة : راجع المتطابقات واحفظها

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \sin^2 5x + \cos^2 5x \quad dx$

(2) $\int \tan^2 x \quad dx$

(3) $\int \cos^2 x - \sin^2 x \quad dx$

(4) $\int 2\sin x \cos x \quad dx$

(5) $\int \sin^2 x \quad dx$

(6) $\int \cos^2 3x \quad dx$

(7) $\int \frac{1}{1+\cos 2x} \quad dx$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} \quad dx$

---

(2) $\int \frac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x} \quad dx$

---

(3) $\int \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}} \quad dx, \qquad x \in [0, \pi]$

---

(4) $\int \frac{\tan x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} \quad dx, \qquad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

اوجد التكاملات التالية

تكاملات خاصة

(1) $\int \frac{1}{1+\sin x} \quad dx$

(2) $\int \sec x \quad dx$

(3) $\int \csc x \quad dx$

(4) $\int \frac{1}{e^{-x}+1} \quad dx$

(5) $\int \frac{1}{e^{x}+1} \quad dx$

مساعدة:

اضرب و اقسم على e^{-x}

او اضف واطرح للبسط e^{x}

(1) اوجد التكاملات التالية

يمكن كتابة الدالة النسبية $f(x)$ التي فيها درجة البسط اكبر من او تساوي درجة المقام على الشكل التالي

$$f(x) = \text{الناتج} + \frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$$

$$(a) \quad \int \frac{2x+3}{x+7} \quad dx$$

$$(b) \quad \int \frac{x^2+2}{x^2+1} \quad dx$$

---

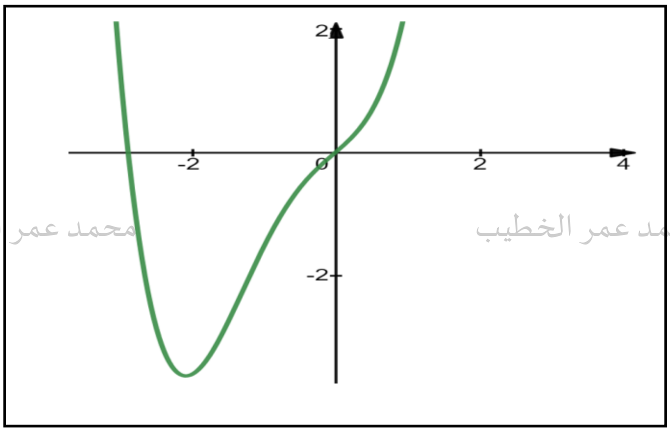
(2) اوجد الدالة الاصلية $F(x)$ للدالة $f(x)$

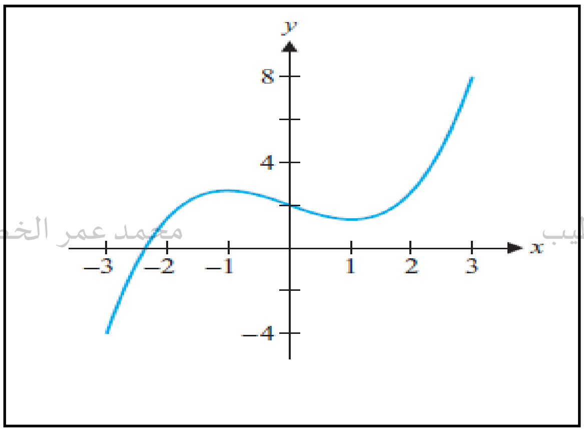
الحل بالتخمين

$$(a) \quad f(x) = 2x\cos x^2$$

$$(b) \quad f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x + \sqrt{x}\cos x$$

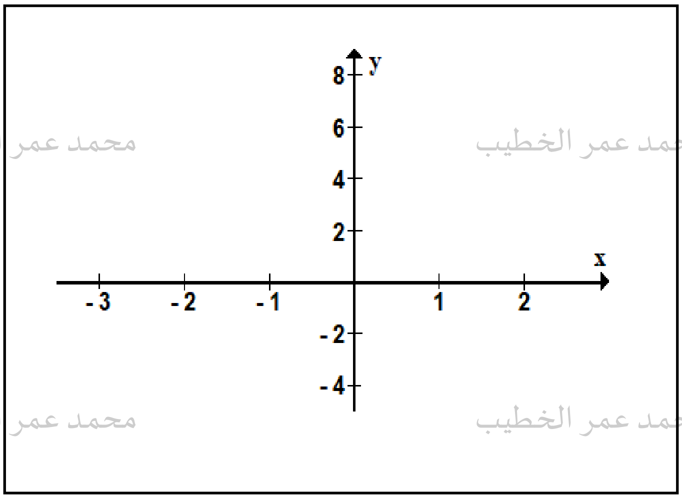
(1) عين الدالة $f(x)$ وعين الدالة الاصلية لها

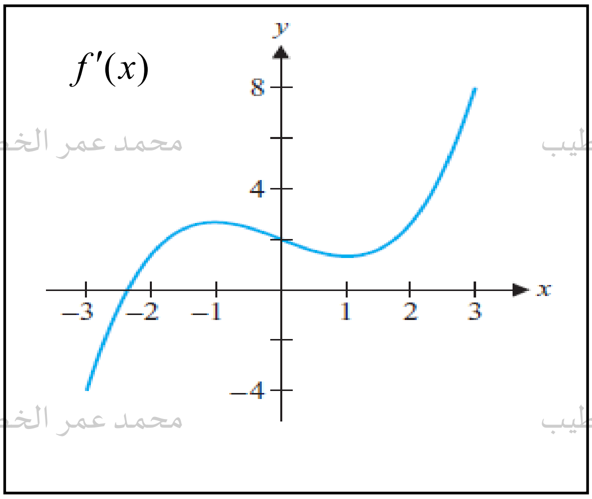




(2) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f'(x)$ ارسم بيان الدالة الاصلية $f(x)$

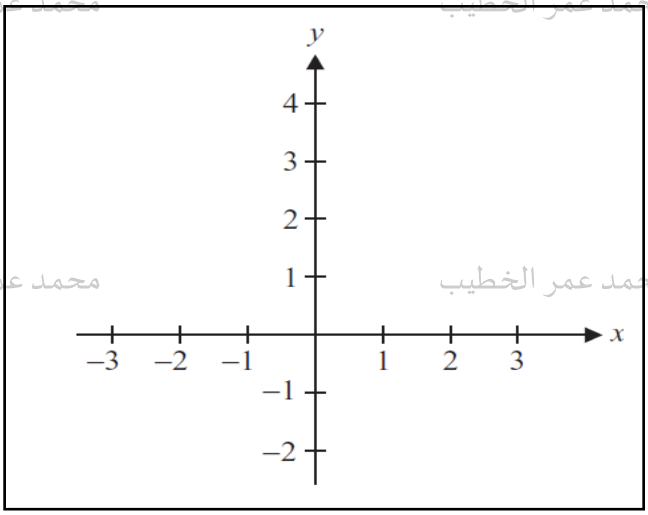
يوجد اجابات كثيرة صحيحة خرى

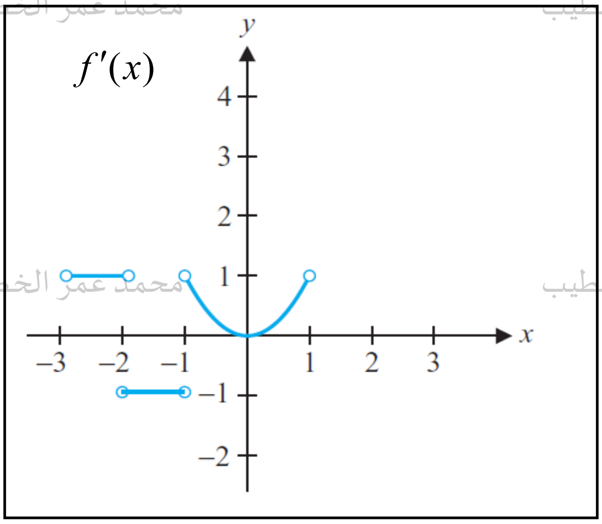




(3) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f'(x)$ ارسم بيان الدالة الاصلية $f(x)$

يوجد اجابات كثيرة صحيحة
ويفضل ان تكون الدالة
الاصلية متصلة





سيتم مناقشة التكامل المحدود بشكل موسع في الدرس الرابع

التكاملات المحدودة

اوجد قيمة كل مما يلي

(1) $\int_{1}^{3} (2x-1)\, dx =$

(2) $\int_{0}^{2} 3x(x+2)\, dx =$

(3) $\int_{0}^{\ln 2} e^{x}\, dx =$

(4) $\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2+1}\, dx =$

(5) $\int_{0}^{1} \frac{x}{x^2+1}\, dx =$

(6) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sec^2 x\, dx =$

(7) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x - \cos 3x\, dx =$

المعادلات التفاضلية

الدالة الاصلية

اوجد الدالة $f(x)$ التي تحقق

(1) $f'(x) = 3x^2 - e^x$

(2) $f'(x) = \sqrt{x} + \sin 2x$

(3) $f'(x) = \sec^2 x - \csc^2 x$

(4) $f''(x) = 12x + \cos 3x$

اوجد الدالة $f(x)$ التي تحقق الشروط التالية

(1) $f'(x) = 3e^x + 2x \qquad f(0) = 4$

---

(2) $f'(x) = \dfrac{1}{x^2} + 2x \qquad f(1) = 4$

---

(3) $f'(x) = \sec^2 x \qquad f(\dfrac{\pi}{4}) = -1$

---

(4) $f'(x) = \cos x + \sin x \qquad f(\pi) = 1$

اوجد الدالة $f(x)$ التي تحقق الشروط التالية

(1) $f''(x)=12x^2+4e^{2x}$ $\quad f(0)=3 \quad , \quad f'(0)=2$

---

(2) $f''(t)=2t+2$ $\quad f(0)=2 \quad , \quad f(3)=2$

التطبيقات

الدالة المكانية ⇐ دالة السرعة المتجهة ⇐ دالة التسارع

بالاشتقاق

الدالة المكانية ⇒ دالة السرعة المتجهة ⇒ دالة التسارع

بالتكامل

(1 حدد الدالة المكانية $s(t)$ لدالة السرعة المتجهة $v(t)=10\,t+5$ حيث $s(0)=10$

(2 حدد الدالة المكانية $s(t)$ لدالة السرعة المتجهة $v(t)=3e^{-t}-2$ حيث $s(0)=0$

(3 حدد الدالة المكانية اذا كانت دالة التسارع $a(t)=t^2+1$ والسرعة المتجهة الابتدائية $v(0)=4$ والموقع الابتدائي $s(0)=0$

1) حدد الدالة المكانية لدالة التسارع $a(t)=3\sin t$ حيث $s(0)=0, v(0)=4$

---

2) سقط جسم من ارتفاع برج الشيخ خليفة عن ارتفاع $828m$ اذا كان تسارع الجسم بعد t ثانية يعطى بالعلاقة $a(t)=-9.8\ m/s^2$ و السرعة الابتدائية للجسم هي $-30m/s$ ، اوجد الدالة المكانية للجسم ثم اوجد ارتفاع الجسم عن الارض بعد 10 ثواني من بدء الحركة.

---

3) قذف جسم للأعلى من ارتفاع $80\,ft$ اذا كان تسارع الجسم ثابت هو $a(t)=-32\ ft/s^2$ و السرعة الابتدائية للجسم هي $64\,ft/s$ ، اوجد اقصى ارتفاع يصل اليه الجسم.

(1) اذا كانت سيارة تتسارع من $20m/s$ الى $60m/s$ في 4 ثواني ، اوجد المسافة التي تقطعها السيارة خلال اول 5 ثواني ، علماً بان التسارع ثابت وبداية الحركة عند الموضع صفر.

---

(2) اذا كانت دالة السرعة المتجهة لجسم يتحرك على خط مستقيم يعطى بالعلاقة $v(t)=-s(t)$ حيث $s(0)=e$ فأوجد دالة الوضع $s(t)$

1) اوجد الدالة $f(x)$ التي لها ميل المماس عند اي نقطة $m = 2x$ و تمر بالنقطة $(2,5)$

2) اوجد الدالة $f(x)$ التي تمر بالنقطة $(0,1)$ ولها مماس افقي عند نفس النقطة حيث $f''(x) = 6x$

3) يكلف طباعة الكتاب الأول 1600 درهم وتعطى التكلفة الحدية لطباعة x نسخة من نفس النوع

بالعلاقة $c'(x) = \frac{200}{\sqrt{x}}$ ، اوجد تكلفة طباعة 400 كتاب.

خزان للماء يحتوي على 288 لتر وتتغير كمية الماء في الخزان بمعدل $f(t)=4t-t^2$ لتر في الدقيقة

(1) اكتب المعادلة التفاضلية التي تنمذج معدل كمية الماء $\text{v}(t)$ بالخزان عند الزمن t مع الشروط

(2) اوجد كمية الماء $\text{v}(t)$ بالخزان عند اي زمن .

(3) اوجد كمية الماء بالخزان بعد 9 دقائق.

(4) حدد الزمن الذي يصبح فيه الخزان فارغ.

(5) حدد الفترة التي يتزايد فيها مستوى الماء ومتى يتناقص

رمز المجموع (سيجما) $\sum$

(1) المتتالية العددية : هي مجموعة من الاعداد بترتيب معين

وهي اما تكون منتهيه مثل $2,5,8,11,14,17,20$ او غير منتهية مثل $1,1,2,3,5,8,13,21,...$

ويمكن كتابة حدود المتتالية في بعض المتتاليات على شكل دالة مجالها مجموعة الاعداد الطبيعية

مثلاً يمكن كتابة حدود المتتالية $2,5,8,11,14,17,20,...$ بالدالة $a_i = 3i - 1$ حيث $i \geq 1$

(2) المتسلسلة العددية : هي مجموع لمتتالية من الحدود

وهي اما تكون منتهيه مثل $2+5+8+11+14$ او غير منتهية مثل $1+2+4+8+16+...$

ويمكن كتابة المسلسلة في بعض الاحيان بطريقة مختصرة واستخدام رمز المجموع سيجما $\sum$

مثلاً يمكن كتابة $2+5+8+11+...+59 = \sum_{i=1}^{20} 3i - 1$

اكتب كل مما يلي بدون استخدام رمز المجموع (سيجما) $\sum$

(1) $\sum_{i=1}^{7} 2i + 1$.

(2) $\sum_{i=1}^{10} i^2 - 3i$

(3) $\sum_{n=1}^{10} (n-2)(n+2)$

(4) $\sum_{i=2}^{100} (-1)^i \frac{1}{i}$

(5) $\sum_{i=1}^{20} \sin(\frac{\pi}{2} i)$

(6) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i!}{e^i}$

اكتب كل مما يلي باستخدام رمز المجموع (سيجما) $\sum$

المتسلسلة الحسابية

اذا كان الفرق بين اي حددين متتالين ثابت تسمى متسلسلة حسابية ويكون الحد العام للمتسلسلة الحسابية هو

$$a_i = a_1 + (i-1)d$$

حيث a_1 الحد الأول

$d = a_2 - a_1$ الاساس (الفرق)

(1) $3+6+9+12+15+\ldots+99$

(2) $2+9+16+23+30+\ldots+149$

(3) $0.4+0.8+1.2+1.6+2.0+\ldots+20$

(4) $2.05+2.15+2.25+2.35+\ldots+6.75$

اكتب كل مما يلي باستخدام رمز المجموع (سيجما) $\sum$

المتسلسلة الهندسية

اذا كان قسمة اي حددين متتالين ثابت

تسمى متسلسلة هندسية ويكون الحد العام

للمتسلسلة الهندسية هو

$$a_i = a_1 \times r^{i-1}$$

حيث a_1 الحد الأول

$r = \frac{a_2}{a_1}$ الاساس (النسبة)

(1) $1+3+9+27+...+2187$

(2) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+...-\frac{1}{1024}$

(3) $1\times 2+2\times 3+3\times 4+4\times 5+5\times 6+...+20\times 21$

(4) $\sqrt{2-1}+\sqrt{3-1}+\sqrt{4-1}+...+\sqrt{100-1}$

(5) $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}-...-\frac{1}{400}$

خواص وقوانين المجموع (سيجما)

اذا كانت n عدد صحيح موجب و a,b,c اعداد حقيقية فان

(1) $\sum_{i=1}^{n} c = nc$ $\qquad \sum_{i=1}^{20} 3 = 20\times 3 = 60$

(2) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ $\qquad \sum_{i=1}^{20} i = \frac{20(21)}{2} = 210$

(3) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $\qquad \sum_{i=1}^{20} i^2 = \frac{20(21)(41)}{6} = 2870$

(4) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ $\qquad \sum_{i=1}^{20} i^3 = \left[\frac{20(21)}{2}\right]^2 = 44100$

المتسلسلات الهندسية المنتهية

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^n$$

الحد الأول
مكان i=0

عدد الحدود
(n-0)+1

(5) $\sum_{i=0}^{n} a r^i = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} \quad , r\neq 1$

عدد الحدود
(n-1)+1

او $\sum_{i=1}^{n} a r^i = \frac{ar(1-r^n)}{1-r} \quad , r\neq 1$

الاس (عدد الحدود)

(الاساس -1) × الحد الاول
―――――――――
الاساس -1

المتسلسلة الهندسية غير المنتهية

الحد الأول
مكان i=m

$$\sum_{i=m}^{\infty} a r^i = \frac{a r^m}{1-r} \quad , \quad |r|<1$$

خواص المجموع

(1) $\sum_{i=1}^{n}(c a_i \pm d b_i) = c\sum_{i=1}^{n} a_i \pm d\sum_{i=1}^{n} b_i$

(2) $\sum_{i=1}^{m-1} a_i + \sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \Leftrightarrow \sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{m-1} a_i \quad or \quad \sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n-m} a_{i+m}$

(1) اكتب كل الحدود واحسب المجموع

$$(a)\quad \sum_{i=1}^{5}(4i+2)=$$

$$(b)\quad \sum_{i=3}^{7}(i^2+i)=$$

(2) استخدم قواعد المجموع لحساب

$$(a)\quad \sum_{i=1}^{25}3=$$

$$(b)\quad \sum_{i=1}^{15}(2i-3)=$$

$$(c)\quad \sum_{i=1}^{20}(5-i)=$$

$$(d)\quad \sum_{i=1}^{125}(i^2+i+5)=$$

$$(e)\quad \sum_{i=1}^{20}i(i-3)=$$

$$(f)\quad \sum_{i=1}^{10}i^3=$$

استخدم قواعد المجموع لحساب

(1) $\sum_{i=0}^{100}(5i+2)=$

(2) $\sum_{i=5}^{20}(5i+2)=$

(3) $\sum_{i=4}^{20}(i-3)(i+3)=$

(4) $\sum_{k=0}^{n}(k^2+1)=$

(5) $\sum_{i=1}^{10}3\times 2^i=$

(6) $\sum_{i=0}^{8}4\times 2^{-i}=$

(7) $\sum_{i=1}^{\infty}e^{-i}=$

(1) اذا كان $f(x)=2x-3$ فاوجد

$$f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(50)$$

---

(2) احسب مجموع قيم الدالة $f(x)=3x+5$ عند

$$x=0.4\ ,0.8\ ,1.2\ ,1.6\ ,2.0\ ,2.4\ ,2.8\ ,3.2\ ,3.6\ ,\ldots,40$$

---

(3) احسب المجموع بالصيغة $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$ لقيم x_i المعطاه

$$f(x)=x^2+4x \qquad x=2\ ,4\ ,6\ ,8\ ,10\ ,\ldots,100$$

اوجد ناتج كل مايلي واحسب نهاية المجموع عندما تقترب n من ∞

(1) $$\sum_{i=1}^{n} \frac{5i}{n^2}$$

---

(2) $$\sum_{i=1}^{n} \frac{2i^2}{n^3}$$

اوجد ناتج كل مايلي واحسب نهاية المجموع عندما تقترب n من ∞

(1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^{2}+2\left(\frac{i}{n}\right)\right]$

(2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}2\times 3^{-i}$

مجموع ريمان لحساب المساحة

التجزئة المنتظمة

تسمى المجموعة $\{x_0, x_1, x_2, x_3, ... x_n\}$ تجزئة منتظمة للفترة $[a,b]$ اذا تحققت الشروط التالية

(1) $x_0 = a$ و $x_n = b$

(2) $x_i < x_{i+1}$ لكل قيم i

(3) $\Delta x_i = \Delta x = x_{i+1} - x_i$ قيمة ثابتة لكل قيم i

مثال: المجموعة $\{2,4,6,8,10\}$ هي تجزئة منتظمة للفترة $[2,10]$

تسمى كل فترة $[x_{i-1}, x_i]$ فترة جزئية للتجزئة ويكون عدد الفترات الجزئية هو n وعدد عناصر التجزئة هو $n+1$

ملاحظات مهمة

(1) طول الفترة الكلية للتجزئة هي $b-a$

(2) طول الفترة الجزئية للتجزئة المنتظمة هي $\Delta x = x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$

(3) العنصر x_i في التجزئة هو العنصر الذي ترتيبه $i+1$ (مثلا x_6 هو العنصر السابع)

(4) الفترة الجزئية التي ترتيبها i هي الفترة $[x_{i-1}, x_i]$ (مثلا $[x_5, x_6]$ هي الفترة الجزئية السادسة)

(5) نقاط القيم هي $c_1, c_2, c_3, ... c_n$ حيث c_i تقع في الفترة الجزئية $[x_{i-1}, x_i]$

(6) يمكن ايجاد اي عنصر في التجزئة بالعلاقة $x_i = a + \Delta x(i) = a + \dfrac{b-a}{n} i$ لكل قيم i

يسمى المقدار $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$ مجموع ريمان للدالة $f(x)$ على الفترة $[a,b]$ حيث x_i هي عناصر التجزئة و c_i هي نقاط القيم

(1) اكتب التجزئة المنتظمة التي عدد فتراتها الجزئية 10 للفترة $[0,2]$

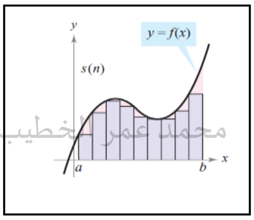
(2) اكتب التجزئة المنتظمة التي عدد عناصرها 25 للفترة $[1,13]$

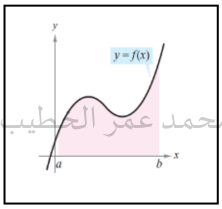
(3) اكتب التجزئة المنتظمة التي عدد فتراتها الجزئية n للفترة $[0,3]$

(4) اكتب العنصر السابع في التجزئة المنتظمة التي عدد عناصرها 31 للفترة $[2,5]$

(5) اكتب الفترة الجزئية العاشرة في التجزئة المنتظمة التي عدد فتراتها الجزئية 40 للفترة $[1,3]$

تقريب المساحات





- المساحة
  - بدقة
    - قواعد التكامل
    - نهاية مجموع ريمان
  - بالتقريب
    - المستطيلات
      - التقريب من اليسار
      - من المنتصف
      - من اليمين

يسمى المقدار $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$ مجموع ريمان للدالة $f(x)$ على الفترة $[a,b]$ حيث x_i هي عناصر التجزئة و c_i هي نقاط القيم

لتقريب المساحة نستخدم قانون مجموع ريمان

$$A \approx A_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)$$

من اليمين	من المنتصف	من اليسار
$c_i = x_i$	$c_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2} = x_{i-\frac{1}{2}}$	$c_i = x_{i-1}$

طريقة التقريب باستخدام المستطيلات

هناك ثلاث طرق شائعة لتقريب المساحة تحت المنحنى باستخدام طريقة التقريب بالمستطيلات :

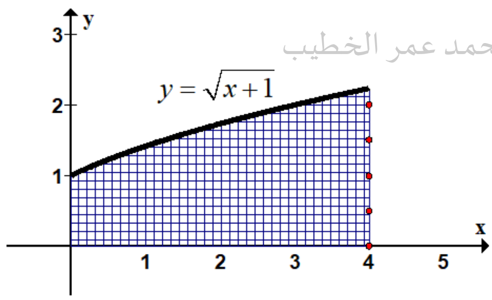
(1) التقريب اليساري L (قاعدة النقطة اليسرى)

$$\boxed{c_i = x_{i-1}}$$

نستطيع أن نحسب المساحة تحت المنحنى عن طريق رسم مستطيلات تمس أركانها اليسرى المنحنى

وتسمى هذه الطريقة طريقة تقريب المستطيلات من الجهة اليسرى

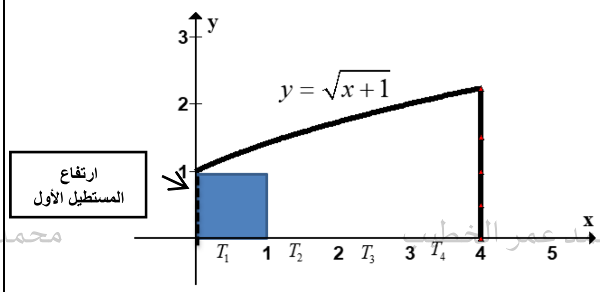
اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)=\sqrt{x+1}$ ومحور السينات على الفترة $[0,4]$ باستخدام اربع مستطيلات حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليسرى



عدد الفترات الجزئية = عدد المستطيلات = 4

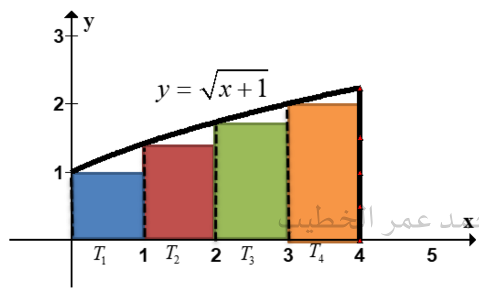
طول الفترة الجزئية = عرض المستطيل

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{4} = 1$$



عناصر التجزئة $p: 0 , 1 , 2 , 3 , 4$

نقاط القيم (من جهة اليسار) $c_i = 0, 1, 2, 3$



$$A \approx A_4 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$$

$$= 1\times f(c_1) + 1\times f(c_2) + 1\times f(c_3) + 1\times f(c_4)$$
$$= 1\times f(0) + 1\times f(1) + 1\times f(2) + 1\times f(3)$$

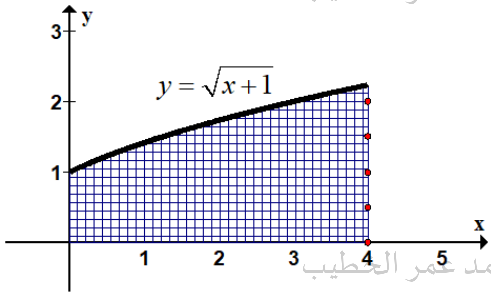
2) التقريب اليميني R (قاعدة النقطة اليمنى)

$\boxed{c_i = x_i}$

نستطيع أن نحسب المساحة تحت المنحنى عن طريق رسم مستطيلات تمس أركانها اليمنى المنحنى

وتسمى طريقة تقريب المستطيلات من الجهة اليمنى.

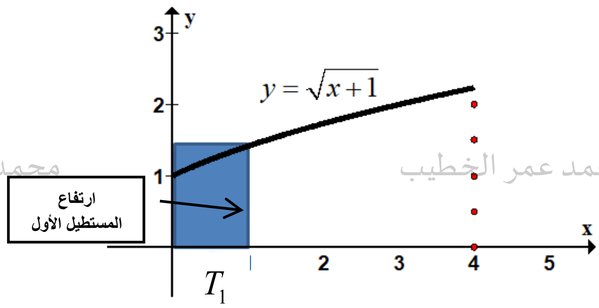
اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)=\sqrt{x+1}$ ومحور السينات على الفترة $[0,4]$ باستخدام اربع مستطيلات حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى



عدد الفترات الجزئية = عدد المستطيلات = 4

طول الفترة الجزئية = عرض المستطيل

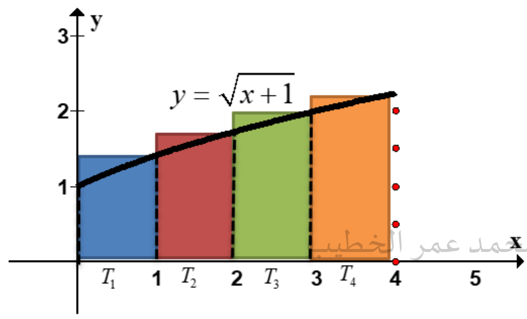
$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{4} = 1$$



عناصر التجزئة $p: 0, 1, 2, 3, 4$

نقاط القيم (من جهة اليمين) $c_i = 1, 2, 3, 4$

$$A \approx A_4 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$$
$$= 1\times f(1) + 1\times f(2) + 1\times f(3) + 1\times f(4)$$



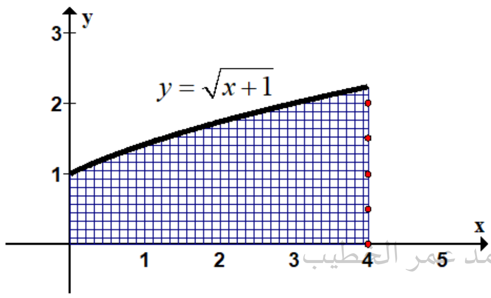
(3) التقريب المنتصفي M (قاعدة نقطة المنتصف)

$$c_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} = x_{i-\frac{1}{2}}$$

نستطيع أن نحسب المساحة تحت المنحنى عن طريق رسم مستطيلات تقطع المنحنى في نقطة المنتصف

وتسمى هذه الطريقة طريقة تقريب المستطيلات باستخدام نقطة المنتصف

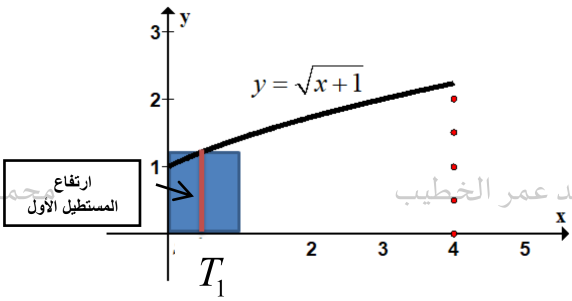
اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x) = \sqrt{x+1}$ ومحور السينات على الفترة $[0,4]$ باستخدام اربع مستطيلات حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية المنتصف



عدد الفترات الجزئية = عدد المستطيلات = 4

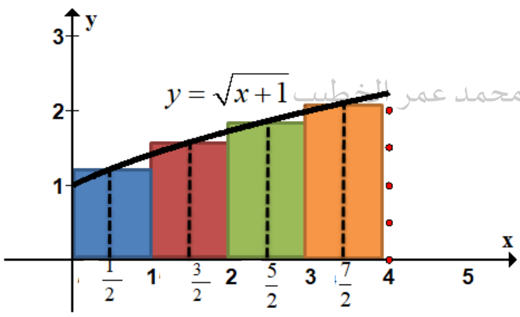
طول الفترة الجزئية = عرض المستطيل

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{4} = 1$$



عناصر التجزئة $p: 0\,,1\,,2\,,3\,,4$

نقاط القيم (من جهة اليمين) $c_i : \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$



$$A \approx A_4 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$$

$$= 1 \times f(\frac{1}{2}) + 1 \times f(\frac{3}{2}) + 1 \times f(\frac{5}{2}) + 1 \times f(\frac{7}{2})$$

اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)=2x-x^2$ ومحور السينات على الفترة $[0,2]$ باستخدام اربع مستطيلات حيث

(1) قواعد القيم هي نقطة النهاية اليسرى

ملاحظة: اولاً اكتب التجزئة

---

(2) قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى

---

(3) قواعد القيم هي نقطة المنتصف

اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)=\cos x$ ومحور السينات على الفترة $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ باستخدام اربع مستطيلات حيث

(1) قواعد القيم هي نقطة النهاية اليسرى

ملاحظة: اولاً اكتب التجزئة

---

(2) قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى

(1) اعتمد على الجدول المجاور في تقدير قيمة مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)$ ومحور السينات على الفترة $[0,1]$ حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$f(x)$	2.0	2.2	1.6	1.4	1.6	2.0

(2) اعتمد على الجدول المجاور في تقدير قيمة مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)$ ومحور السينات على الفترة $[0,0.5]$ حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليسرى

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$f(x)$	2.0	2.4	2.6	2.7	2.6	2.4

(3) اعتمد على الجدول المجاور في تقدير قيمة مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)$ ومحور x على الفترة $[1,2.6]$ حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى

x	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6
$f(x)$	0.0	0.4	0.6	0.8	1.2	1.4	1.2	1.4	1.0

اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)=2x$ ومحور السينات على الفترة $[0,4]$

1) باستخدام 16 مستطيل حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى

$$\boxed{c_i = x_i}$$

ملاحظة: عندما يكون عدد المستطيلات
قليل نستخدم طريقة التجزئة
وغيرذلك نستخدم قانون مجموع ريمان

---

2) باستخدام 24 مستطيل حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليسرى

$$\boxed{c_i = x_{i-1}}$$

---

3) باستخدام 8 مستطيلات حيث قواعد القيم هي نقطة المنتصف

$$\boxed{c_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2} = x_{i-\frac{1}{2}}}$$

تعريف المساحة

المساحة (بدقة) هي نهاية مجموع ريمان

اذا كانت الدالة $f(x)$ **متصلة على الفترة** $[a,b]$ **حيث** $f(x)\geq 0$ **فان المساحة** A **تحتى منحنى الدالة وفوق محور السينات تعطى بالصيغة**

ملاحظة : عندما تكون n كبيرة فان $c_i = x_i$

$$A=\lim_{n\to\infty} A_n$$

$$A_n=\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

واذا كانت $f(x)\leq 0$ **فان المساحة** A **فوق منحنى الدالة وتحت محور السينات تعطى بالصيغة**

$$A=\lim_{n\to\infty} A_n$$

$$A_n=\sum_{i=1}^{n} -f(c_i)\Delta x=\sum_{i=1}^{n} -f(x_i)\Delta x$$

اوجد المساحة تحت المستقيم $f(x)=2x$ **وفوق محور السينات على الفترة** $[1,4]$

باستخدام تعريف المساحة (نهاية مجموع ريمان)

1) اوجد المساحة تحت المنحنى $f(x)=3x^2$ وفوق محور السينات (x) على الفترة $[0,4]$

باستخدام تعريف المساحة (نهاية مجموع ريمان)

---

2) اوجد المساحة فوق الدالة $f(x)=-2x$ وتحت محور السينات (x) على الفترة $[0,4]$

باستخدام تعريف المساحة (نهاية مجموع ريمان)

1) اذا كان $f(x)=2x-2x^2$ دالة معرفة على الفترة $[0,1]$ حيث $A_n=\dfrac{2(n+1)(n-1)}{3n^2}$

فأوجد المساحة المحصورة بين الدالة ومحور x

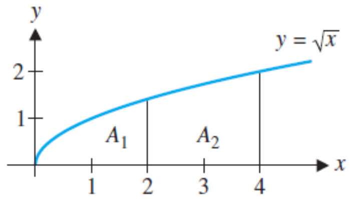
---

2) اذا كان $f(x)$ دالة متصلة و $f(x)\geq 0$ على الفترة $[0,1]$ حيث $A_n=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\dfrac{i}{n})^2$

فاوجد المساحة المحصورة بين الدالة $f(x)$ ومحور x على الفترة $[0,1]$

---

3) اعتمد على الشكل المجاور في تحديد قيمة $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{2}\sqrt{1+\dfrac{i}{n}}\;\dfrac{2}{n}$ بدلالة A_1 او A_2



الوحدة الخامسة : التكـامل /// الدرس الرابع: التكامل المحدود

التكـامل المحدود

ملاحظة: تم تقديم جزء من الدرس الخامس في هذا الدرس

اذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة على الفترة $[a,b]$ فان التكامل المحدود للدالة f من a الى b هو

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} R_n$$

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \frac{b-a}{n}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

بشرط وجود النهاية، ونقول ان الدالة قابلة للتكامل

ملاحظة : اذا كانت الدالة متصلة على الفترة $[a,b]$ فان الدالة قابلة للتكامل على نفس الفترة

عبر عن التكامل في كل مما يلي بصورة نهاية مجموع ريمان

ملاحظة:

$$\int_a^b \to \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}$$

$$x \to x_i = c_i$$

$$dx \to \Delta x$$

(1) $\int_0^2 (3x^2-1)\,dx$

---

(2) $\int_0^1 \sin(\pi x)\,dx$

1) اذا كان $f(x)$ دالة متصلة على الفترة $[0,3]$ حيث $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \frac{5}{2} + \frac{3-n}{2n}$

فأوجد $\int_0^3 f(x)\,dx$

---

2) إذا كان $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \frac{(n+1)(2n+1)}{4n^2}$ على الفترة $[0,2]$ فاوجد $\int_0^2 f(x)\,dx$

---

3) إذا كان $R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 2(1+\frac{i}{n})$ على الفترة $[1,2]$ فاوجد $\int_1^2 f(x)\,dx$

عبر عن النهاية في كل مما يلي بصورة تكامل محدود

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}(\sin^2 c_i + c_i)\Delta x \qquad , \quad [0,\pi]$ والتجزئة على الفترة

ملاحظة:

$\int\limits_a^b \rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}$

$x \rightarrow x_i = c_i$

$dx \rightarrow \Delta x$

---

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^2$

1. نجرب $a=0$ ونجد b من خلال

$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n} \rightarrow$

$b-a=1 \rightarrow b=1$

2. اوجد $x_i = a + \Delta x\, i$

$x_i = 0 + \frac{1}{n} i = \frac{i}{n}$

3. استبدل $\frac{1}{n}$ بـ Δx

و استبدل $\frac{1}{n}i$ بـ x_i

---

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+f(\frac{3}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n})}{n}$

عبر عن النهاية في بصورة تكامل محدود ثم اوجد قيمة النهاية

(1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{2i}{n}}\ \frac{2}{n}$

---

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right]$

اوجد قيمة التكامل بحساب نهاية مجموع ريمان (تعريف التكامل المحدود)

(1) $\int_{0}^{1} 2x\,dx$

---

(2) $\int_{0}^{3} (4x+1)\,dx$

اوجد قمية التكامل بحساب نهاية مجموع ريمان (تعريف التكامل المحدود)

(1) $\int_{0}^{2} x^2 \, dx$

(2) $\int_{-2}^{2} (x^2 - 1) \, dx$

خواص التكاملات المحدودة

(1) خاصية التوزيع على الجمع والطرح

$$\int_a^b (m\ f(x) \pm k\ g(x))dx = m\int_a^b f(x)\ dx \pm k\int_a^b g(x)\ dx$$

(2) خاصية التكامل على نقطة

$$\int_a^a f(x)\ dx = 0$$

(3) خاصية الثابت

$$\int_a^b c\ dx = c(b-a)$$

(4) خاصية الترتيب

$$\int_b^a f(x)\ dx = -\int_a^b f(x)\ dx$$

(5) خاصية الاضافة (تكامل الدوال المتفرعة)

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$$

(6) خاصية السيادة اذا كانت $f(x) \ge g(x)$ لكل x على الفترة $[a,b]$

فان $$\int_a^b f(x)\ dx \ge \int_a^b g(x)\ dx$$

(7) خاصية الاحاطة اذا كانت

القيمة العظمى المطلقة للدالة $f(x)$ على الفترة $[a,b]$ هي $M = Max(f)$

والقيمة الصغرى المطلقة للدالة $f(x)$ على الفترة $[a,b]$ هي $m = Min(f)$

فان $$(b-a)m \le \int_a^b f(x)\ dx \le (b-a)M$$

ايجادالتكامل المحدود

اوجد قيمة كل مما يلي

(1) $\int_{1}^{3} (4x+1)\, dx =$

---

(2) $\int_{2}^{5} 3x(x+2)\, dx =$

---

(3) $\int_{0}^{\ln 2} e^{2x}\, dx =$

---

(4) $\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2+1}\, dx =$

---

(5) $\int_{0}^{1} \frac{x}{x^2+1}\, dx =$

---

(6) $\int_{0}^{1} (x^5 + x^{\frac{1}{5}})\, dx =$

اوجد قيمة كل مما يلي

(1) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sec^2 x \, dx =$

(2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx =$

(3) $\int_{0}^{1} x e^{x^2} \, dx =$

(4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x - \cos 3x \, dx =$

(5) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx =$

تكامل الدوال المتفرعة

(1) اذا كانت $f(x)=\begin{cases}3x^2-2 & x\geq 0\\ 2x-2 & x<0\end{cases}$ فأوجد $\int_{-2}^{4} f(x)\,dx$

---

(2) اذا كانت $f(x)=3x|x-2|$ فاوجد $\int_{0}^{4} f(x)\,dx$

---

(3) اذا كانت $f(x)=2[x+3]$ فاوجد $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$

(1) اكتب $\int_{0}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{3} f(x)\,dx$ بصورة تكامل منفرد

---

(2) اكتب $\int_{0}^{3} f(x)\,dx - \int_{2}^{3} f(x)\,dx$ بصورة تكامل منفرد

---

(3) اكتب $\int_{0}^{3} f(x)\,dx + \int_{3}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{5} f(x)\,dx$ بصورة تكامل منفرد

---

(4) اذا كان $\int_{1}^{3} f(x)\,dx = 3$ و $\int_{1}^{3} g(x)\,dx = -2$ فاوجد

$(a)\ \int_{1}^{3} [f(x)+g(x)]\,dx =$

$(b)\ \int_{1}^{3} [f(x)-g(x)]\,dx =$

$(c)\ \int_{1}^{3} [2f(x)-g(x)]\,dx =$

$(d)\ \int_{1}^{3} [4g(x)-3f(x)]\,dx =$

1) اذا كان $\int_{2}^{4} f(x)\,dx = -6$ ، $\int_{-1}^{2} 3f(x)\,dx = 15$ فاوجد $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$

2) اذا كانت $\int_{2}^{5} f(x)\,dx = 7$ ، $\int_{2}^{7} f(x)\,dx = -3$ ، $\int_{1}^{7} f(x)\,dx = 10$ فأوجد

$(a)\ \int_{2}^{2} f(x)\,dx$

$(b)\ \int_{5}^{7} f(x)\,dx$

$(c)\ \int_{1}^{2} f(x)\,dx$

3) اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة حيث $\int_{2}^{2x} f(t)\,dt = 4x^2 + bx - 1$ فاوجد قيمة b

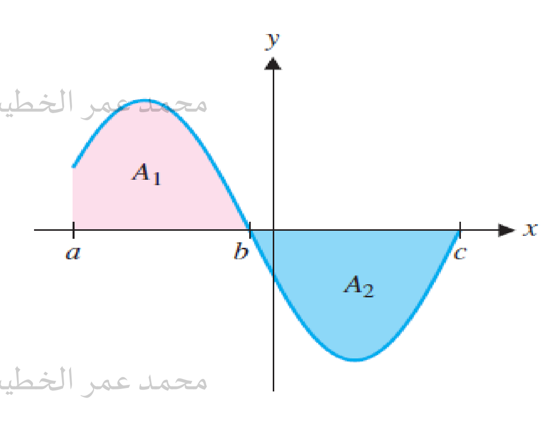
العلاقة بين المساحة والتكامل

(1) اذا كانت الدالة فوق محور السينات $f(x) \geq 0$

فان قيمة المساحة المحصور بالدالة ومحور السينات

تساوي قيمة التكامل المحدود على الفترة

$$A_1 = \int_a^b f(x)\,dx$$



(2) اذا كانت الدالة تحت محور السينات $f(x) \leq 0$

فان قيمة المساحة المحصور بالدالة ومحور السينات

تساوي سالب قيمة التكامل المحدود على الفترة

$$A_2 = -\int_b^c f(x)\,dx$$

A_1, A_2 هذه اعداد تمثل المساحة فتكون دائماً موجبة

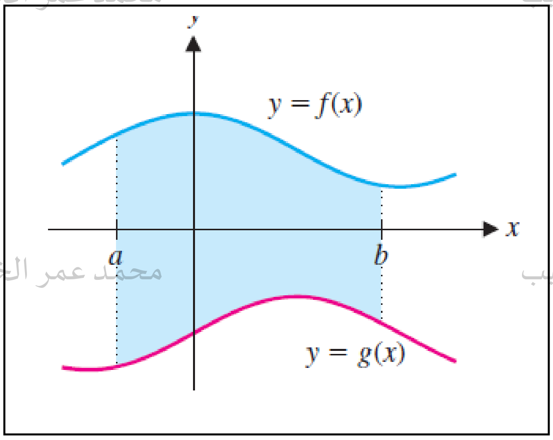
(3) المساحة المحصورة بين الدالة ومحور x هي $A = A_1 + A_2$

بشكل عام

اذا كانت كل من $f(x)$ و $g(x)$ دوال متصلة على الفترة $[a,b]$ حيث $f(x) \geq g(x)$ فان المساحة المحصورة بين المنحنين تعطى بالتكامل

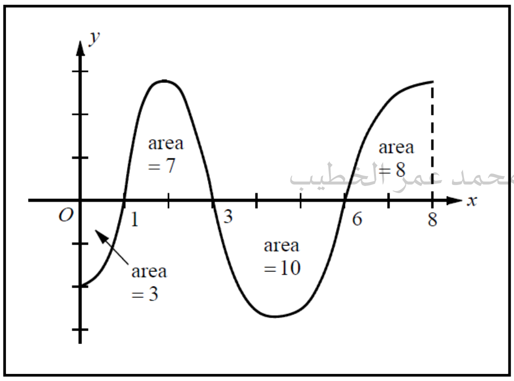
$$A = \int_a^b \left[\text{الدالة الأعلى} - \text{الدالة الأدنى} \right] dx$$

$$\int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx$$



ملاحظة : يعتبر محور x (السينات) دالة معادلتها $y = 0$

1) استخدم التمثيل البياني المجاور للدالة $f(x)$ والمساحات المحددة في ايجاد قيمة التكاملات التالية



$(a)\quad \int_{0}^{1} f(x)\,dx$

$(b)\quad \int_{1}^{3} f(x)\,dx$

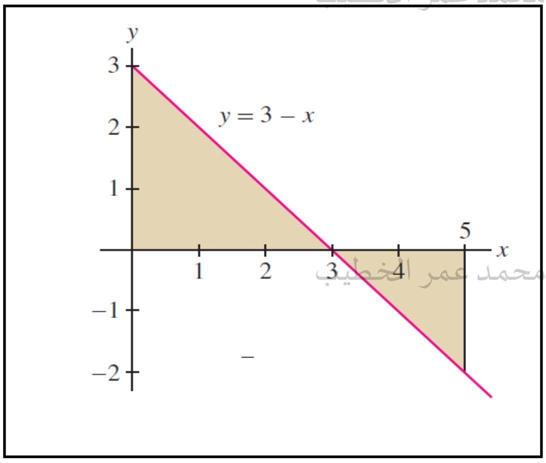
$(c)\quad \int_{0}^{3} f(x)\,dx$

$(d)\quad \int_{0}^{8} f(x)\,dx$

(e) المساحة المحصورة بالدالة ومحور x

---

2) استخدم قوانين (المساحات) في ايجاد



$(a)\quad \int_{0}^{3} (3-x)\,dx$

$(b)\quad \int_{3}^{5} (3-x)\,dx$

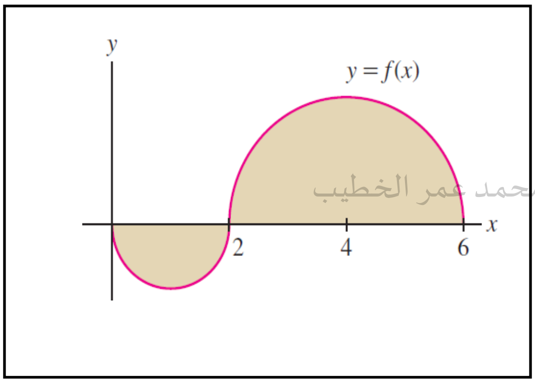
$(c)\quad \int_{0}^{5} (3-x)\,dx$

---

3) استخدم قوانين (المساحات) في ايجاد

$$\int_{-1}^{3} |x|\,dx$$

1) استخدم قوانين (المساحات) في ايجاد



$$(a)\quad \int_0^2 f(x)\,dx$$

$$(b)\quad \int_2^6 f(x)\,dx$$

$$(c)\quad \int_0^6 f(x)\,dx$$

$$(d)\quad \int_0^1 f(x)\,dx$$

$$(e)\quad \int_4^6 f(x)\,dx$$

$$(f)\quad \int_1^4 f(x)\,dx$$

$$(g)\quad \int_0^2 |f(x)|\,dx$$

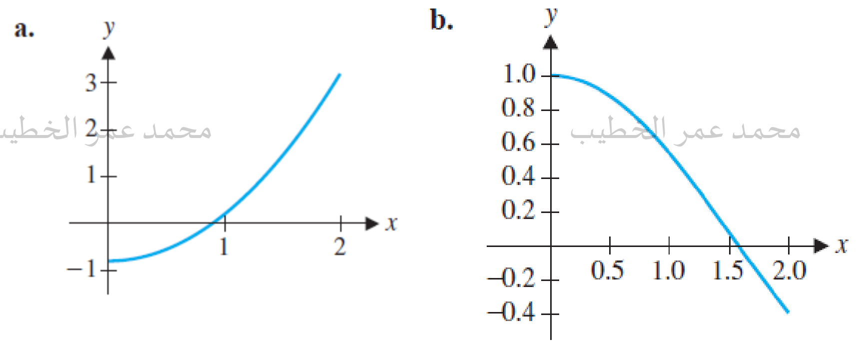
---

2) استخدم قوانين (المساحات) في ايجاد

$$(a)\quad \int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\,dx$$

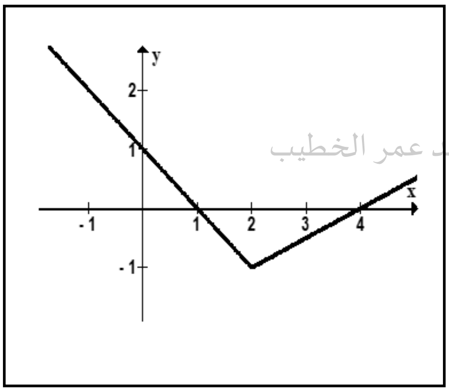
$$(b)\quad \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

(1) استخدم التمثيل البياني المجاور لتحديد اذا كان قيمة التكامل $\int_0^2 f(x)\,dx$ موجبة ام سالبة



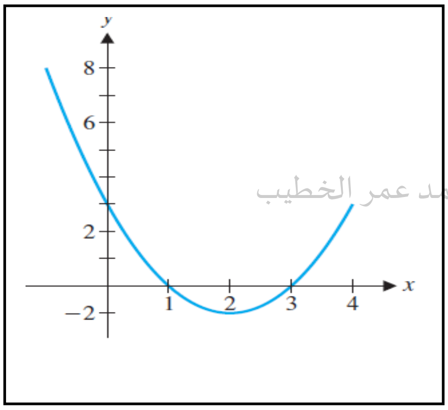
(2) استخدم التمثيل البياني لترتيب القيم التالية تصاعدياً

$$\int_0^1 f(x)\,dx\,,\quad \int_0^2 f(x)\,dx\,,\quad \int_0^4 f(x)\,dx$$



(3) استخدم التمثيل البياني لترتيب القيم التالية تصاعدياً

$$\int_0^1 f(x)\,dx\,,\quad \int_0^2 f(x)\,dx\,,\quad \int_0^3 f(x)\,dx$$



(1) اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة فوق محور x وتحت المنحنى $f(x)=4-x^2$

---

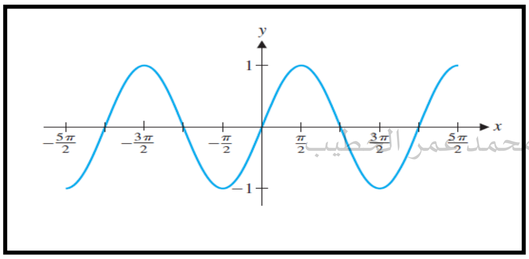
(2) اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة فوف محور x وتحت المنحنى $f(x)=4x-x^2$

---

(3) اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة تحت محور x وفوق المنحنى $f(x)=x^2-4$

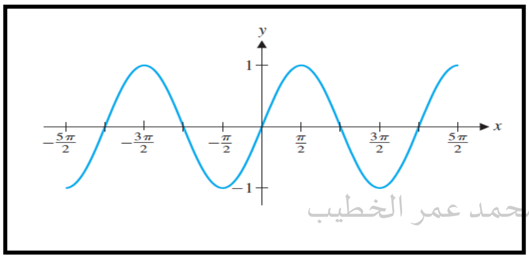
---

(4) اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة بين الدالة $f(x)=\sin x$ ومحور x على الفترة $[0,\pi]$



---

(5) اكتب التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة بين الدالة $f(x)=\sin x$ محور x على الفترة $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right]$



نظرية القيمة المتوسطة في التكامل

اذا كانت الدالة f قابلة للتكامل على الفترة $[a,b]$ فان القيمة المتوسطة للدالة f تساوي

$$f_{ave}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

نظريةالقيمة المتوسطة في التكامل

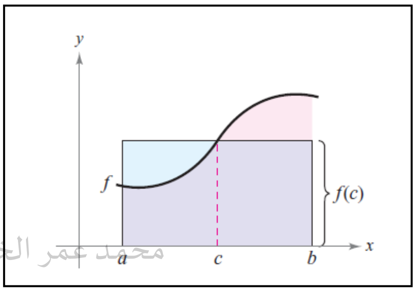
اذا كانت الدالة متصلة على الفترة $[a,b]$ فانة يوجد عدد مثل c ينتمي الى الفترة (a,b) بحيث

$$f(c)=f_{ave}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

اي ان المساحة تحت المنحنى $f(x)$ وفوق محور السينات على

الفترة $[a,b]$ تساوي مساحة مستطيل احد ابعادة $b-a$

والبعد الثاني هو $f(c)$ حيث c تنتمي الى الفترة (a,b)



ويمكن استخدام هذه المتباينة لتقدير التكامل $(b-a)m \le \int_a^b f(x)\,dx \le (b-a)M$

حيث $m=Min(f)$, $M=Max(f)$

اوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=2x-x^2$ على الفترة $[0,3]$

(1) اوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=2x+1$ على الفترة $[0,4]$ ثم اوجد قيمة c التي تحقق النظرية

(2) اذا كانت $f(x)=3x^2$ فأوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل على الفترة $[0,2]$

(3) اذا كانت $f(x)=\sin x$ فأوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل على الفترة $[0,2\pi]$

1) اوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ على الفترة $[0,2]$

ثم اوجد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل على الفترة $[0,2]$

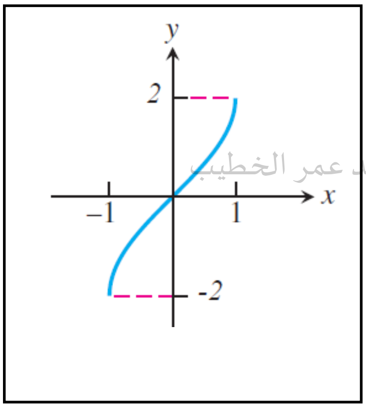
---

2) اذا كان $\int_9^6 f(x)\,dx=3$ ، $\int_2^6 2f(x)\,dx=16$ ، $\int_0^2 f(x)\,dx=4$

فاوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[0,9]$

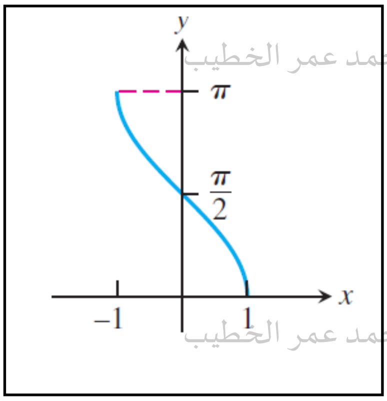
(1) بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f ، بين ان

$$-4 \leq \int_{-1}^{1} f(x)\, dx \leq 4$$



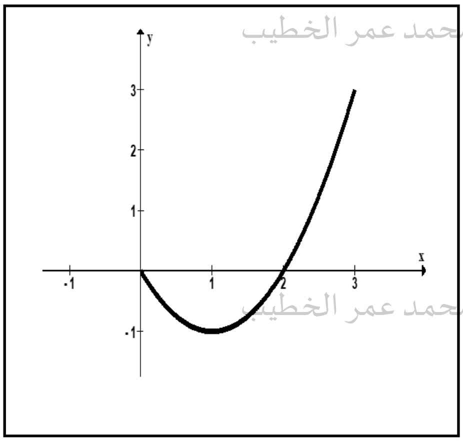
(2) بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f ، بين ان

$$0 \leq \int_{-1}^{1} f(x)\, dx \leq 2\pi$$



(3) بالاعتماد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f ، بين ان

$$-3 \leq \int_{0}^{3} f(x)\, dx \leq 9$$



اوجد حدود مناسبة للتكامل $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ باستخدام نظرية القيمة المتوسطة في التكامل (استخدم نظرية القيمة المتوسطة في التكامل لتقدر قيمة التكامل)

الطريقة الأولى

الطريقة الثانية

(1) اوجد حدود مناسبة للتكامل $\int_{-1}^{1} \frac{3}{x^3+2}\, dx$ باستخدام نظرية القيمة المتوسطة في التكامل

(استخدم نظرية القيمة المتوسطة في التكامل لتقدر قيمة التكامل)

---

(2) بين ان $\int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\, dx$ يقع بين 2 و $2\sqrt{2}$ باستخدام نظرية القيمة المتوسطة في التكامل

(1) بين ان $\sqrt{2}\pi \geq \int_0^{\pi} \sqrt{1+\sin x}\,dx \geq \pi$ باستخدام نظرية القيمة المتوسطة في التكامل

---

(2) اوجد حدود مناسبة للتكامل $\int_0^1 x^2 e^{-\sqrt{x}}\,dx$ باستخدام نظرية القيمة المتوسطة في التكامل

(استخدم نظرية القيمة المتوسطة في التكامل لتقدر قيمة التكامل)

(1) تمثل الدالة $T(t)=30-2\pi\cos(\frac{\pi}{8}t)$ **درجة حرارة احدى المدن خلال السنة بالسيلسيوس حيث**

تمثل t **الشهور على مدار العام، احسب متوسط درجة حرارة المدينة خلال العام**

---

(2) تمثل الدالة $B(t)=400-0.3t$ **معدل مواليد احدى المدن بالالاف**

والدالة $D(t)=396+0.2t$ **معدل الوفيات لنفس المدينة بالالاف**

حيث تمثل t **الشهور**

عدد السكان $p(t)$
معدل التغير في عدد السكان $p'(t)$
$p'(t)=B(t)-D(t)$
صافي التغير في عدد السكان
$\Delta p=\int_0^{12} p'(t)\,dt$

(أ) حدد الفترات التي يتزايد ويتناقص فيها عدد السكان خلال السنة

(ب) حدد الشهر الذي يصل فيه عدد السكان الى ذروته

(ج) اوجد صافي التغير في عدد السكان خلال سنة

(د) احسب متوسط صافي التغير في عدد السكان الشهري

النظرية الاساسية لحساب التفاضل والتكامل (الجزء الاول)

التكامل المحدود

اذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$ و $F(x)$ هي الدالة الاصلية لـ f فان

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

(1) إذا كانت $F(x) = x\ln x - x + c$ الدالة الاصلية للدالة $f(x)$ فاوجد

$$\int_1^e f(x)\,dx$$

---

(2) إذا كانت $F(x)$ الدالة الاصلية للدالة $f(x) = 3x^2 + 5$ حيث $F(2) = 5$ فأوجد $F(1)$

اوجد قيمة كل مما يلي

(1) $\int_{1}^{3} (3x^2+1)\,dx =$

(2) $\int_{1}^{4} x\sqrt{x}+\frac{3}{x})\,dx =$

(3) $\int_{0}^{1} (6e^{-2x}+4)\,dx =$

(4) $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$

(5) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,dx =$

(6) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx =$

(7) $\int_{0}^{t} (e^{x/2})^2\,dx =$

(8) $\int_{0}^{t} (\sin^2 x+\cos^2 x)\,dx =$

مشتقة الدالة التكاملية

النظرية الاساسية لحساب التفاضل والتكامل (الجزء الثاني)

الحالة الأولى: الحد الأعلى x

إذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$ و كانت $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ فان

$$F'(x)=f(x)$$

(1) اوجد $F'(x)$ في كل مما يلي

(a) $F(x)=\int_1^x (t^2+2t+1)\,dt$

(b) $F(x)=\int_2^x \sin^2 t\,dt$

(c) $F(x)=\int_x^1 te^{2t}\,dt$

(d) $F(x)=\int_0^{\pi/4} \tan t\,dt$

---

(2) اذا كان $\int_0^x f(t)\,dt = x\ln x - x$ ، فاوجد $f(e)$

---

(3) اذا كان $F(x)=\int_1^x \sqrt{4t^2-1}\,dt$ ، فاوجد $F(1)$ ، $F'(1)$

الحالة الثانية: الحد الأعلى $g(x)$ (استخدام قاعدة السلسلة والنظرية الاساسية)

اذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$ و كانت $F(x)=\int_a^{g(x)} f(t)\,dt$ فان

$$F'(x)=f(g(x))\times g'(x)$$

اوجد $F'(x)$ في كل مما يلي

(1) $F(x)=\int_1^{x^2}(t^3+2)\,dt$

(2) $F(x)=\int_0^{\sin x}\tan t\,dt$

(3) $F(x)=\int_{\sqrt{x}}^{1}e^{t^2}\,dt$

(4) $F(x)=\int_1^{xe^x}\sin t\,dt$

الحالة الثالثة : الحد الادنى و الحد الاعلى متغيرات (الحالة العامة)

اذا كانت الدالة f متصلة على الفترة $[a,b]$ و كانت $F(x)=\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt$

فان $F'(x)=f(g(x))\times g'(x)-f(h(x))\times h'(x)$

او ممكن كتابة الدالة التكاملية

$$F(x)=\int_{h(x)}^{c} f(t)\,dt+\int_{c}^{g(x)} f(t)\,dt=\int_{c}^{g(x)} f(t)\,dt-\int_{c}^{h(x)} f(t)\,dt$$

ثم تطبيق الحالة الثانية وتجد المشتقة

اوجد $F'(x)$ في كل مما يلي

$$(1)\quad F(x)=\int_{x}^{\sin x}(t^3+2)\,dt$$

$$(2)\quad F(x)=\int_{\sqrt{x}}^{x^2}\cos t\,dt$$

$$(3)\quad F(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}\frac{1}{t^2+1}\,dt$$

اوجد $F'(x)$ في كل مما يلي

(1) $F(x)=\int_{2x}^{\sqrt{x}} \tan 3t \, dt$

---

(2) $F(x)=\int_{x}^{\sin^{-1}x} \sin t \, dt$

---

(3) $F(x)=\int_{e^{4\sqrt{x}}}^{e^{2x}} \ln t \, dt$

---

(4) $F(x)=\int_{2-x}^{xe^{x}} 3t \, dt$

(1) اذا كان $F(x) = x + \int_{\tan x}^{0} \frac{1}{t^2+1}\, dt$ ، فاثبت ان $F'(x) = 0$

---

(2) اذا كان $g(x) = \int_{0}^{3x} \left(\int_{0}^{u} \sin t \; dt \right) du$ ، فأوجد $g''(x)$

مساعدة: افرض

$$f(u) = \int_{0}^{u} \sin t \; dt$$

1) اعتمد على الجدول التالي في ايجاد $h'(3)$ حيث

$$h(x)=\int_{1}^{g(x)} f(t)\,dt$$

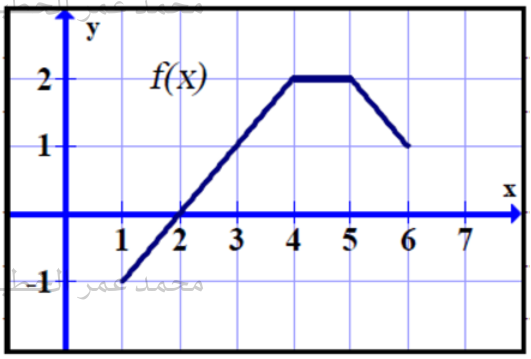
x	$f(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
1	6	2	5
3	16	4	2
4	−1	6	7

---

2) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$

المتصلة على الفترة $[1,6]$ حيث $\mathrm{H}(x)=\int_{1}^{x} f(t)\,dt$

في الاجابة عن الاسئلة التالية



(a) $\mathrm{H}(3)$

(b) $\mathrm{H}(6)$

(c) $\mathrm{H}'(3)$

(d) اوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[1,6]$

(e) اوجد قيمة c التي تحقق القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[1,6]$

(f) اوجد فترة التزايد للدالة $\mathrm{H}(x)$ على الفترة $[1,6]$

(g) اوجد قيمة x التي عندها للدالة $\mathrm{H}(x)$ قيمة صغرى محلية على الفترة $[1,6]$

(1) اوجد معادلة المماس للدالة y عند $x=2$ حيث $y=\int_{2}^{x}\cos(\pi t^3)\,dt$

(2) اوجد معادلة المماس للدالة $f(x)$ عند $x=0$ حيث $f(x)=\cos x+\int_{2x}^{x^2}e^{-t}\,dt$

(3) اوجد قيمة النهاية التالية باستخدام قاعدة لوبتال

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{0}^{x}(e^t-1)\,dt}{x^2}$$

(4) اذا كان $f(t)=\begin{cases}2 & 0\le t<1\\ 2t & 1\le t\end{cases}$ دالة متصلة على الفترة $[0,\infty)$ فأوجد الدالة $\mathrm{H}(x)$

حيث $\mathrm{H}(x)=\int_{0}^{x}f(t)\,dt$

(1) اوجد المساحة المحصورة فوق محور x وتحت المنحنى $f(x)=9-x^2$

---

(2) اوجد المساحة المحصورة تحت محور x وفوق المنحنى $f(x)=x^2-2x$

---

(3) اوجد المساحة المحصورة بين الدالة $f(x)=\sin x$ ومحور x حيث $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{4}$

---

(4) اوجد المساحة المحصورة بين الدالة $f(x)=\begin{cases} x & x<2 \\ 2 & 2\le x \end{cases}$ ومحور x على الفترة $[0,5]$

يستخدم التكامل بالتعويض عندما نريد ايجاد تكامل حاصل ضرب او قسمة دالتين ، احدى الدالتين او جزء منها يساوي ثابت في مشتقة الدالة الاخرى

ويكون التعويض عادة (1) ما بداخل القوس (2) ما تحت الجذر (3) الزاوية (4) الأس

ويعتبر هو الخيار الاقوى في التكامل

يعتبر التكامل بالتعويض العملية العكسية للاشتقاق باستخدام قاعدة السلسلة

ويمكن استخدام هذه القاعدة

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = f(g(x)) + c$$

قبل البدأ بالتكامل ...اسئل نفسك

1) هل الدالة التي نريد ايجاد تكاملها هي ناتج جمع وطرح حدود وكل حد قابل للتكامل

2) هل الدالة التي نريد ايجاد تكاملها هي ناتج ضرب او قسمة ويمكن تحويلها ال جمع او طرح حدود وكل حد قابل للتكامل

3) هل الدالة التي نريد ايجاد تكاملها هي حاصل ضرب او قسمة دالتين، احدى الدالتين او جزء منها يساوي ثابت في مشتقة الدالة الاخرى

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int x^2 (x^3 + 1)^5 \; dx$

(2) $\int (2x+1)^5 \; dx$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int e^x \sqrt{e^x + 1}\, dx$

---

(2) $\int \frac{x^3}{\sqrt{4 - x^4}}\, dx$

---

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}\, dx$

---

(4) $\int x e^{-x^2/2}\, dx$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

(2) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\, dx$

(3) $\int \frac{1}{x \ln \sqrt{x}}\, dx$

(4) $\int (x-1)\sqrt{x^2 - 2x + 2}\, dx$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{4}{x(\ln x+1)^2}\ dx$

---

(2) $\int \tan 2x\ \ dx$

---

(3) $\int \frac{(\sin^{-1} x)^3}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{\cot x}{\ln(\sin x)}\, dx$

---

(2) $\int \sec x \, dx$

---

(3) $\int \csc x \, dx$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int x\cos x^2 \, dx$

---

(2) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} \, dx$

---

(3) $\int x^2 \sec^2 x^3 \, dx$

---

(4) $\int e^x \cos(e^{x+1}) \, dx$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \sin x \cos x \, dx$

---

(2) $\int \cos x \sin^3 x \, dx$

---

(3) $\int \sec^2 x \sqrt{\tan x} \; dx$

---

(4) $\int \sqrt{\tan x} (\sec x \tan x)^2 \; dx$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{(\sin x+1)^3}{\sec x}\, dx$

---

(2) $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$

---

(3) $\int \sin 3x \ \cos^5 3x\, dx$

---

(4) $\int x \sec^2 x^2 \ \tan x^2\, dx$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$

(2) $\int \frac{(\tan^{-1} x)^2}{x^2+1}\,dx$

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\,\sin^{-1} x}\,dx$

(4) $\int \frac{\sec^{-1} 2x}{|x|\sqrt{4x^2-1}}\,dx$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int e^{\ln x}(x^2-1)^3\, dx$

---

(2) $\int e^{\tan x + 2\ln\sec x}\, dx$

---

(3) $\int \frac{e^{\cot x}}{1-\cos^2 x}\, dx$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \sin 2x \cos x \, dx$

---

(2) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} \, dx$

---

(3) $\int \frac{1}{x^2+4} \, dx$

اوجد التكاملات التالية (باكمال المربع)

عند اكمال المربع يجب إضافة

[نصف معامل x تربيع]

بشرط ان يكون معامل x تربيع

(1) $\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx$

---

(2) $\int \frac{1}{x^2-8x+25}\,dx$

---

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{6x-x^2}}\,dx$

اوجد التكاملات التالية

اختزال الرتبة

(1) $\int \frac{x^2}{x^6+1}\,dx$

---

(2) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

---

(3) $\int \sqrt[3]{x^5-x^3}\,dx$

الخطوة الرابعة

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^4-1}}\,dx$

(2) $\int x(x-2)^5\,dx$

(3) $\int \frac{t}{\sqrt{2t-1}}\,dt$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int x^3 \sqrt{x^2 - 1}\, dx$

---

(2) $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 25}}\, dx$

---

(3) $\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\, dx$

اوجد التكاملات التالية

(1) $\int \cos^3 x \sin^5 x \, dx$

(2) $\int \tan x \sec^4 x \, dx$

(3) $\int \frac{3\sqrt{x}}{1+x^3} \, dx$

أوجد قيمة التكاملات المحدودة التالية

الخطوة الخامسه (تغير الحدود)

(1) $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{1}{x + x\ln x}\, dx$

---

(2) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^{3}}{x^{8} + 1}\, dx$

---

(3) $\displaystyle\int_{0}^{3} x\sqrt{x+1}\, dx$

(1) اذا كان $\int_0^1 f(x)\,dx = -6$ ، اوجد $\int_0^3 f(\frac{x}{3})\,dx$

---

(2) اذا كان $f(4) = -5 , f(1) = 3$ ، فأوجد $\int_1^2 x\, f'(x^2)\,dx$

---

(3) اذا كان $f(0) = 1 , f(1) = 9$ ، فأوجد $\int_0^1 3\sqrt{f(x)}\, f'(x)\,dx$

(1) اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على الفترة $[0,1]$ فاثبت ان

$$\int_0^1 f(1-x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$$

(2) رصدت محطة الارصاد الجوية درجة الحرارة C° في احدى المدن بعد منتصف الليل فتبين انه يمكن

نمذجتها بالعلاقة C° $T(t) = 3 - \frac{1}{3}(t-5)^2$

حيث t هو الوقت بعد منتصف الليل

اوجد متوسط درجة الحرارة في المدينة في الفترة من الساعة 8 صباحاً الى 5 مساءً (الساعة 17)

اجابات التمارين العامة موجودة في آخر صفحة بالوحدة

تمارين عامة على الوحدة الخامسة

الوحدة الخامسة ///// اسئلة الدرس الأول

اختر الاجابة الصحيحة لكل فقرة من الفقرات التالية

(1) الدالة الاصلية للدالة $f(x)=\sin 2x$ هي

(a) $F(x)=-\cos 2x+c$ (b) $F(x)=2\cos 2x+c$

(c) $F(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x+c$ (d) $F(x)=\frac{1}{2}\cos 2x+c$

---

(2) $\int t^2(4t-\frac{1}{t^2})\quad dt=$

(a) t^4-1 (b) t^4-t+c

(c) t^3-t+c (d) $4t^4-t+c$

---

(3) $\int \cos^2 x-\sin^2 x\quad dx=$

(a) $\sin 2x+c$ (b) $\cos 2x+c$

(c) $\frac{1}{2}\sin 2x+c$ (d) $\frac{1}{2}\cos 2x+c$

---

(4) $\int (2x^{-1}+\frac{1}{\sqrt{e^{2x}}})\quad dx=$

(a) $2\ln|x|-e^x+c$ (b) $2\ln|x|+e^x+c$

(c) $2\ln|x|-e^{-x}+c$ (d) $2\ln|x|+e^{-x}+c$

(5) $\displaystyle\int \frac{x^{1/3}-3}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx =$

(a) $\frac{3}{2}x^{2/3}-9x^{1/3}+c$ (b) $\frac{3}{2}x^{2/3}-3x^{1/3}+c$

(c) $\frac{3}{2}x^{2/3}-x^{1/3}+c$ (d) $\frac{2}{3}x^{2/3}-9x^{1/3}+c$

---

(6) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,dx =$

(a) $2\ln(x^2+1)+c$ (b) $\ln(x^2+1)+\mathrm{c}$

(c) $\frac{1}{2}x\ln(x^2+1)+c$ (d) $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c$

---

(7) $\displaystyle\int \sec x\,(\tan x-\sec x)\,dx =$

(a) $\sec x-\tan x+c$ (b) $-\sec x-\tan x+c$

(c) $\sec x+\tan x+c$ (d) $-\sec x+\tan x+c$

---

(8) $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx =$

(a) $\frac{1}{2}(2x-\sin 2x)+c$ (b) $\frac{1}{2}(2x-\cos 2x)+c$

(c) $\frac{1}{4}(2x-\cos 2x)+c$ (d) $\frac{1}{4}(2x-\sin 2x)+c$

---

(9) $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{1-\sin x}\,dx =$

(a) $x-\cos x+c$ (b) $x+\cos x+c$

(c) $x+\sin x+c$ (d) $x-\sin x+c$

(10) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}-1}{e^{x}} \quad dx =$

(a) $e^{x}-e^{-x}+c$ **(b)** $e^{x}+e^{-x}+c$

(c) $\frac{1}{2}e^{2x}-e^{-x}+c$ **(d)** $\frac{1}{2}e^{2x}+e^{-x}+c$

---

(11) $\displaystyle\int \cot x \quad dx =$

(a) $-\csc^{2}x+c$ **(b)** $\csc x\cot x+c$

(c) $\ln|\cos x|+c$ **(d)** $\ln|\sin x|+c$

---

(12) $\displaystyle\int \frac{3}{x^{2}+1} \quad dx =$

(a) $3\ln(x^{2}+1)+c$ **(b)** $3x\ln|x|+c$

(c) $3\tan^{-1}x+c$ **(d)** $3\tan^{-1}(x^{2}+1)+c$

---

(13) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^{4}-x^{2}}} \quad dx =$

(a) $\sec^{-1}x+c$ **(b)** $\csc^{-1}x+c$

(c) $\sin^{-1}x+c$ **(d)** $\cos^{-1}x+c$

---

(14) $\displaystyle\int \frac{x^{2}+e^{3x}}{x^{3}+e^{3x}} \quad dx =$

(a) $3\ln|x^{3}+e^{3x}|+c$ **(b)** $\ln|x^{3}+e^{3x}|+c$

(c) $\frac{1}{3}\ln|x^{3}+e^{3x}|+c$ **(d)** $\frac{1}{9}\ln|x^{3}+e^{3x}|+c$

(15) $\int e^{x^2+\ln 2x} \quad dx =$

(a) $e^{x^2}+c$ (b) $2xe^{x^2}+c$

(c) $2e^{x^2}+c$ (d) $xe^{x^2}+c$

---

(16) $\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$

(a) $\tan^{-1}x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c$ (b) $\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c$

(c) $\tan^{-1}x+\ln(x^2+1)+c$ (d) $x+2\ln(x^2+1)+c$

---

(17) $\int \frac{\sec^3 x+e^{\sin x}}{\sec x} \quad dx =$

(a) $\tan x+e^{\sin x}+c$ (b) $\tan x-e^{\sin x}+c$

(c) $\sec x+e^{\sin x}+c$ (d) $\sec x-e^{\sin x}+c$

---

(18) $\int 3x\,e^{x^2+1}\,dx =$

(a) $6e^{x^2+1}+c$ (b) $3e^{x^2+1}+c$

(c) $\frac{2}{3}e^{x^2+1}+c$ (d) $\frac{3}{2}e^{x^2+1}+c$

---

(19) $\int \csc^2 x \ \cos x\,dx =$

(a) $\csc x+c$ (b) $-\csc x+c$

(c) $\cot x+c$ (d) $-\cot x+c$

(20) $\int \frac{t+1}{t+2} \quad dt =$

(a) $\ln|t+2|+c$

(b) $1-\ln|t+2|+c$

(c) $t-\ln|t+2|+c$

(d) $t+\ln|t+2|+c$

---

(21) $\int (e^x-2)^2 \quad dx =$

(a) $\frac{(e^x-2)^3}{3}+c$

(b) $\frac{(e^x-2)^3}{3e^x}+c$

(c) $\frac{1}{2}e^{2x}-4e^x+4x+c$

(d) $\frac{1}{2}e^{2x}-2e^x+4x+c$

---

(22) $\int \frac{1}{2x}+\frac{\sin x}{\cos^2 x} \quad dx =$

(a) $\frac{1}{2}\ln|x|+\sec x+c$

(b) $\frac{1}{2}\ln|x|-\csc x+c$

(c) $\frac{1}{2}\ln|x|+\sec x\tan x+c$

(d) $\frac{1}{2}\ln|x|+\tan x+c$

---

(23) $\int \frac{\cos x-1}{\sin^2 x} \quad dx =$

(a) $-\csc x+\csc^2 x+c$

(b) $-\csc x-\cot x+c$

(c) $-\csc x+\cot x+c$

(d) $-\cot x+c$

(24) $\int \sec x \, dx$

(a) $\ln|\sec x + \tan x| + c$ (b) $\ln|\sec x - \tan x| + c$

(c) $\ln|\sec x \tan x| + c$ (d) $\ln|\sec x| + c$

---

(25) $\int (\sin x + x\cos x) \quad dx =$

(a) $x\sin x + c$ (b) $x\cos x + c$

(c) $\sin x \cos x + c$ (d) $\cos x - x\sin x + c$

---

(26) $\int \frac{1}{e^x + 1} dx =$

(a) $\ln|e^x + 1| + c$ (b) $-\ln|e^{-x} + 1| + c$

(c) $x + \ln|e^x + 1| + c$ (d) $-e^x + x + c$

---

(27) اذا كان $F(x)$ هي الدالة الاصلية للدالة $f(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ حيث $F(1) = 3$ فان $F(4)$ تساوي

(a) 16 **(b)** 19 **(c)** 2.5 **(d)** 13

---

(28) اذا كان $\int \frac{bx^2 + 10}{x^3 + 5x + 1} dx = 2\ln|x^3 + 5x + 1| + c$ فان قيمة b تساوي

(a) 3 **(b)** -3 **(c)** 6 **(d)** -6

(29) اذا كان $\int \frac{bx}{x^4+1}\,dx = \tan^{-1} x^2 + c$ فان قيمة الثابت b تساوي

(a) 4 (b) 2

(c) 1 (d) 8

---

(30) اذا كان $\int (3x^2 + f(x))\ dx = x^3 + \sin x + c$ فان $f(x)$

(a) $\sin x$ (b) $-\sin x$

(c) $\cos x$ (d) $-\cos x$

---

(31) اذا كان $\int \tan x \sec^n x = \frac{1}{3}\sec^3 x + c$ فان قيمة n تساوي

(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) 4

---

(32) اعتمد على الجدول المجاور الذي يمثل السرعة المتجهة لجسم في ازمنة مختلفة استخدم هذه البيانات لتقدير المسافة المقطوعة خلال اول 4 ثواني

t	0	1	2	3	4
$v(t)$	40	42	40	44	48

(a) 170 **(b)** 214 **(c)** 200 **(d)** 40

---

(33) اذا كانت $f'(x) = 3e^x + 2x$, $f(0) = 4$ فان $f(x)$ تساوي

(a) $f(x) = 3e^{3x} + x^2 + 4$ (b) $f(x) = 3e^x + x^2 + 4$

(c) $f(x) = e^{3x} + x^2 + 1$ (d) $f(x) = 3e^x + x^2 + 1$

34) الدالة المكانية $s(t)$ لدالة السرعة المتجهة $v(t)=10\,t+2$ حيث $s(0)=10$ هي

(a) $s(t)=t^2+2t+10$ (b) $s(t)=5t^2+2t$

(c) $s(t)=5t^2+2t+10$ (d) $s(t)=5t^2+t+10$

---

35) اذا كانت دالة التسارع هي $a(t)=12t^2+4$ حيث $s(0)=1, v(0)=4$ فان $s(2)$ تساوي

(a) 37 (b) 33 (c) 25 (d) 32

---

36) يتدفق الماء الى خزان ويتسرب منه حيث ان صافي معدل تغير الماء بالخزان في اي لحظة يعطى بالعلاقة $f(t)=20(t^2-1)$ متر مكعب بالساعة علما بان حجم الماء بالخزان هو 200 لتر عند الزمن صفر فان كمية الماء بالخزان بعد ثلاث ساعات سوف تكون

(a) 120 **(b)** 320 **(c)** 160 **(d)** 240

---

37) اذا كانت $f''(x)=6x$ حيث $f(x)$ تمر بالنقطة $(0,1)$ ولها مماس افقي عند نفس النقطة فان الدالة $f(x)$ تساوي

(a) $f(x)=x^3+1$ (b) $f(x)=3x^2+1$

(c) $f(x)=x^3+x$ (d) $f(x)=x^3$

---

38) على فرض ان كثافة مجتمع لمجموعة من الحيوانات يتم وصفها بالدالة $f(x)=xe^{-x^2}$ الف حيوان لكل كيلو متر حيث x تمثل المسافة من البركة التي يشرب منها الحيوانات بالكيلو متر ، اذا كانت $0\le x\le 2$ فان العدد الكلي للحيوانات $\int_0^2 xe^{-x^2}\,dx$ هو

(a) 491 **(b)** 982 **(c)** 245 **(d)** 621

1) يمكن كتابة الصيغة $\sum_{i=2}^{7}(4i-3)$ بدون رمز سيجما بالشكل

(a) $5,9,13,17,21,25,29$ (b) $5,9,13,17,21,25$

(c) $5+9+13+17+21+25$ (d) $5+9+13+17+21+25+29$

---

2) يمكن كتابة التعبير $2+5+8+11+\ldots+65$ باستخدام الرمز سيجما

(a) $\sum_{i=1}^{32}2i+1$ (b) $\sum_{i=1}^{22}3i-1$

(c) $\sum_{i=1}^{65}3i-1$ (d) $\sum_{i=1}^{20}3i-1$

---

3) يمكن كتابة التعبير $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}-\ldots-\frac{1}{900}$ باستخدام الرمز سيجما

(a) $\sum_{i=1}^{30}\frac{-1}{i^2}$ (b) $\sum_{i=1}^{30}\frac{1}{i^2}$

(c) $\sum_{i=1}^{30}\frac{(-1)^i}{i^2}$ (d) $\sum_{i=1}^{30}\frac{(-1)^{i+1}}{i^2}$

---

4) ان ناتج $\sum_{i=1}^{20}(2i+1)$ يساوي

(a) 440 **(b)** 401 **(c)** 230 **(d)** 411

(5) $\sum_{i=1}^{20}(i-1)(i+1)$

(a) $\frac{20\times21\times41}{6}-1$ (b) $\frac{20\times21\times41-1}{6}$

(c) $\frac{20\times21\times41}{6}-20$ (d) $\frac{20\times21\times41}{2}-20$

---

(6) $\sum_{i=1}^{20}i^2-\sum_{i=1}^{4}i^2=$

(a) $\sum_{i=1}^{20}i^2$ (b) $\sum_{i=5}^{20}i^2$

(c) $\sum_{i=4}^{20}i^2$ (d) $\sum_{i=1}^{16}i^2$

---

(7) $\sum_{i=1}^{n}\frac{i+1}{n^2}$

(a) $\frac{n+1}{3n}$ (b) $\frac{n+3}{2n}$

(c) $\frac{n+1}{2n}$ (d) $\frac{2n}{n+3}$

---

(8) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^3}$

(a) 1 (b) ∞

(c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{2}{3}$

(9) ان ناتج مجموع مربعات اول 20 عدد طبيعي هو

(a) $\sum_{i=1}^{20} i^2 = 2870$ (b) $\sum_{i=0}^{19} i^2 = 2470$

(c) $(\sum_{i=1}^{20} i)^2 = 44100$ (d) $\sum_{i=1}^{21} i^2 = 3311$

---

(10) اذا كان $\sum_{i=1}^{10}(2i+c)=140$ فان قيمة c تساوي

(a) 30 (b) 3

(c) 2 (d) 1

---

(11) ان ناتج $\sum_{i=1}^{\infty} e^{-i}$ يساوي

(a) $\frac{1}{e-1}$ (b) $\frac{e}{e-1}$ (c) $\frac{1}{e^2-e}$ (d) $\frac{e}{e^2-1}$

---

(12) ان مجموع قيم الدالة $f(x)=3x+1$ عند $x=0.1\ ,0.2\ ,\ 0.3\ ,...,10$ يساوي

(a) 26.5 (b) 1516

(c) 1615 (d) 1545

---

(13) احسب المجموع بالصيغة $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ حيث $f(x)=x^2$ ولقيم x_i المعطاة $x=2\ ,4\ ,6\ ,8\ ,10\ ,...,100$

(a) 171700 (b) 343400

(c) 10200 (d) 5100

1) طول الفترة الجزئية المنتظمة للفترة $[-1,2]$ التي عدد عناصرها 15 هي

(a) $\frac{3}{14}$ (b) $\frac{3}{15}$ (c) $\frac{1}{15}$ (d) $\frac{1}{14}$

---

2) التجزئة المنتظمة التي عدد عناصرها 11 للفترة $[0,2]$ هي

(a) $P=\left\{0,\frac{2}{11},\frac{4}{11},\ldots,2\right\}$ (b) $P=\left\{0,\frac{1}{11},\frac{2}{11},\ldots,2\right\}$

(c) $P=\left\{0,\frac{2}{10},\frac{4}{10},\ldots,2\right\}$ (d) $P=\left\{0,\frac{1}{10},\frac{2}{10},\ldots,2\right\}$

---

3) العنصر السابع في التجزئة المنتظمة التي عدد فتراتها الجزئية 30 للفترة $[2,5]$ هو

(a) $2+\frac{3}{31}\times 6$ (b) $2+\frac{3}{30}\times 6$

(c) $2+\frac{3}{29}\times 6$ (d) $2+\frac{3}{30}\times 7$

---

4) ان القيمة التقريبية لمساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)=3x^2$ ومحور السينات على الفترة $[0,4]$ باستخدام اربع مستطيلات حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى

(a) 14 (b) 22.5 (c) 90 (d) 64

(5) اعتمد على الجدول المجاور في تقدير قيمة مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)$ ومحور x على الفترة $[0,1]$ حيث قواعد القيم نقطة النهاية اليسرى

x	0.0	0.25	0.50	0.75	1
$f(x)$	2.0	2.2	1.6	1.4	1.8

(a) 1.8 **(b)** 1.325 **(c)** 5.8 **(d)** 7.2

---

(6) اعتمد على الجدول المجاور في تقدير قيمة مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)$ ومحور السينات حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$f(x)$	2.0	2.4	2.6	2.7	2.6	2.4	2.0	1.4	0.6

(a) 1.81 **(b)** 1.74 **(c)** 1.67 **(d)** 16.7

---

(7) احسب المجموع بالصيغة $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$ حيث $f(x) = 3x+5$ لقيم x_i المعطاة

$x = 0.4\,,0.8\,,1.2\,,1.6\,,2 \qquad \Delta x = 0.4, \quad n = 5$

(a) 48 **(b)** 43 **(c)** 17 **(d)** 11

---

(8) ان القيمة التقريبية لمساحة المنطقة المحصورة بالمستقيم $f(x) = 2x$ ومحور السينات على الفترة $[0,4]$ باستخدام 16 مستطيل حيث قواعد القيم هي نقطة النهاية اليمنى يساوي

(a) 16 (b) 15

(c) 17 (d) 15.5

9) المساحة تحت المنحنى $f(x)=x^2$ وفوق محور السينات على الفترة $[0,4]$

باستخدام تعريف المساحة (نهاية مجموع ريمان) تعطى بالعلاقة

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{64}{n^3}\sum\limits_{i=1}^{n}i^2$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{16}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}i^2$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{64}{n^3}\sum\limits_{i=1}^{n}i^3$ (d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{16}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}i^3$

---

10) اذا كان $f(x)$ دالة متصلة و $f(x)\geq 0$ على الفترة $[0,1]$ حيث $A_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^2$

فان المساحة المحصورة بين الدالة $f(x)$ ومحور x على الفترة $[0,1]$ تساوي

(a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{1}{3}$

(c) 1 (d) 2

---

11) اذا كان مجموع ريمان للدالة $f(x)=x^2$ على الفترة $[0,1]$ هو $\frac{2}{3}$ حيث نقاط القيم هي

c,d فاي من العلاقات التالية صحيحة

(a) $c^2+d^2=\frac{4}{3}$ (b) $c^2+d^2=\frac{2}{3}$

(c) $c^2+d^2=\frac{1}{3}$ (d) $c^2+d^2=\frac{4}{9}$

---

12) ان القيمة التقريبية لمساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $f(x)=x^3-1$ ومحور السينات على الفترة $[-1,1]$ باستخدام 100 مستطيلات حيث قواعد القيم نقطة النهاية اليمنى

(a) -1.98 (b) 1.98 (c) 2 (d) -2

(1) اذا كان $\int_{1}^{3} f(x)\,dx = 3$ و $\int_{1}^{3} g(x)\,dx = -2$ فان $\int_{3}^{1} [2f(x) - g(x)]\,dx$ يساوي

(a) 8 (b) -8 (c) 4 (d) -5

---

(2) $\int_{0}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{1} f(x)\,dx =$

(a) $-\int_{0}^{1} f(x)\,dx$

(b) $\int_{0}^{1} f(x)\,dx$

(c) 0

(d) $2\int_{0}^{1} f(x)\,dx$

---

(3) اذا كانت $\int_{1}^{7} (g(x)+1)\,dx = 10$ فان $\int_{7}^{1} 3g(x)\,dx$

(a) 12 (b) -12

(c) 27 (d) -27

---

(4) اذا كان $\int_{1}^{5} f(x)\,dx = -7$ ، $\int_{1}^{3} 2f(x)\,dx = 10$ فان $\int_{3}^{5} f(x)\,dx$ يساوي

(a) 17 (b) 12

(c) -17 (d) -12

5) اذا كانت $\int_{-2}^{3k+10} f(x)\,dx = 0$ فان قيمة k تساوي

(a) 4 (b) -4 (c) 0 (d) -2

---

6) اذا كانت $\int_{6}^{2x} f(t)\,dt = \cos(x-3)+k$ فان قيمة k تساوي

(a) 3 (b) 1 (c) -1 (d) 6

---

7) اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة حيث $\int_{2}^{2x} f(t)\,dt = 4x^2+bx-1$ فان قيمة b تساوي

(a) 3 (b) -3 (c) 1 (d) 5

---

8) اذا كانت $\int_{0}^{3}(3x^2+k)\,dx = 3$ فان قيمة k تساوي

(a) 24 (b) -24 (c) 8 (d) -8

---

9) التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة تحت محور x وفوق المنحنى $f(x)=x^2-4$

(a) $-\int_{0}^{2}(x^2-4)\,dx$ (b) $\int_{0}^{2}(x^2-4)\,dx$

(c) $-\int_{-2}^{2}(x^2-4)\,dx$ (d) $\int_{-2}^{2}(x^2-4)\,dx$

(10) اذا كان $\int_{5}^{c}(2x-1)\,dx = \int_{1}^{c}(2x-1)\,dx + k$ فان قيمة k تساوي

(a) 20
(b) -20
(c) 8
(d) -8

---

(11) $\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2+1}\,dx =$

(a) π
(b) 2π
(c) $\frac{\pi}{2}$
(d) $\frac{\pi}{4}$

---

(12) $\int_{0}^{1}\sqrt{x}(x+1)\,dx =$

(a) $\frac{7}{5}$
(b) $\frac{16}{15}$
(c) 1
(d) 2

---

(13) $\int_{0}^{1}\frac{x}{x^2+1}\,dx =$

(a) 1
(b) $\ln\sqrt{2}$
(c) $\frac{\pi}{4}$
(d) $\tan^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}$

استعن بمساحة الدائرة

(14) $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx =$

(a) π (b) 2π

(c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{\pi}{4}$

استعن بمساحة الدائرة

(15) $\int_{0}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx =$

(a) πa^2 (b) $2\pi a^2$

(c) $\frac{1}{2}\pi a^2$ (d) $\frac{1}{4}\pi a^2$

---

(16) اذا كانت $f(x) = \begin{cases} 4 & x \geq 2 \\ 2x & x < 2 \end{cases}$ فان $\int_{0}^{4} f(x)\,dx$ يساوي

(a) 4 (b) 8

(c) 12 (d) 16

---

(17) $\int_{-2}^{2} |x|\,dx =$

(a) 0 (b) 2

(c) 4 (d) 8

(18) اذا كانت $f(x)=|2x-2|$ فان $\int_0^3 f(x)\,dx$ يساوي

(a) 6 (b) 4

(c) 3 (d) 5

---

(19) اذا كان $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ ، فان $\int_{-5}^{3} f(x)\,dx$ يساوي

(a) -2 (b) 2

(c) 8 (d) 0

---

(20) ان قيمة c التي تحقق نتيجة نظرية القيمة المتوسطة في التكامل حيث $\int_0^2 3x^2\,dx (=8)$ هي

(a) $\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(c) $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ (d) $\sqrt{\frac{8}{3}}$

---

(21) اذا كانت القيمة المتوسطة في التكامل للدالة $f(x)=3x^2+1$ على الفترة $[0,4]$ تساوي 17

فان قيمة (قيم) c التي تحقق النظرية هي

(a) $-\frac{4}{\sqrt{3}},\frac{4}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{4}{\sqrt{3}}$

(c) $\frac{16}{\sqrt{3}}$ (d) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(22) اذا كانت $f(x) = 4x^3$ فان قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل على الفترة $[0,2]$ هي

(a) $\pm\sqrt{2}$ (b) $\pm\sqrt[3]{2}$ (c) $\sqrt{2}$ (d) $\sqrt[3]{2}$

---

(23) اذا كانت $f(x) = \sin x$ فان قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل على الفترة $[0,2\pi]$ هي

(a) $0, \pi, 2\pi$ (b) 0 (c) 2π (d) π

---

(24) اذا كانت القيمة المتوسط في التكامل للدالة $f(x) = \sqrt{x}$ على الفترة $[0,\mathrm{k}]$ تساوي 2 فان قيمة k تساوي

(a) 3 (b) 4 (c) 6 (d) 9

---

(25) مساحة المنطقة المحصورة بين الدالة $f(x) = 4 - x^2$ ومحور السينات تساوي مساحة مستطيل طوله 4 وحدات وعرضه

(a) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{8}{3}$ (c) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (d) $\frac{10}{3}$

---

(26) اذا كان $\int_9^6 f(x)\,dx = 3$ ، $\int_2^6 f(x)\,dx = 5$ فان القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[2,9]$ تساوي

(a) $\frac{2}{9}$ (b) $\frac{2}{7}$ (c) $\frac{8}{7}$ (d) $\frac{4}{7}$

(27) اذا كان $|f(x)| \le 0.1$ على الفترة $[-1,2]$ فان اقل قيمة للتكامل $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$ هي

(a) -0.1 (b) 0.3

(c) -0.3 (d) 0

---

(28) ان حدود التكامل $\int_{0}^{1} e^{-x^2}\,dx$ المناسبة باستخدام نظرية القيمة المتوسطة بالتكامل هما

(a) $1, e$ (b) $0, 1$

(c) $\frac{1}{e}, 1$ (d) $\frac{1}{e^2}, 1$

---

(29) للحصول على افضل تقريب للتكامل $\int_{0}^{\pi} \sqrt{1+\sin x}\,dx$ فانه يقع بين

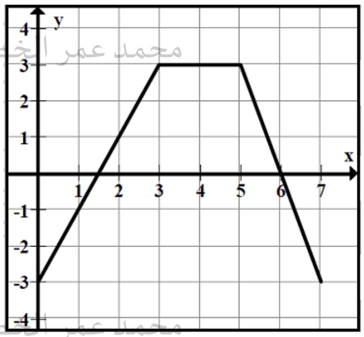
(a) $\pi, \sqrt{2}\pi$ (b) $1, \sqrt{2}\pi$

(c) $0, \pi$ (d) $\sqrt{2}\pi, 2\pi$

---

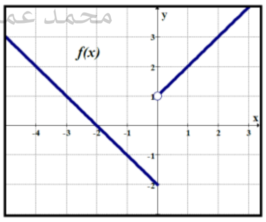
(30) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f

ان قيمة $\int_{0}^{7} f(x)\,dx$ تساوي



(a) 13.5 **(b)** 11.5 **(c)** 6 **(d)** 12

31) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة f



ان قيمة $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$ تساوي

(a) 6 **(b)** 4 **(c)** 2 **(d)** 0

---

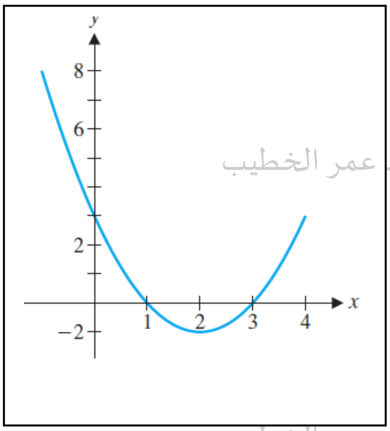
32) بالاعتماد على التمثيل البياني الذي يمثل $f(x)$ اي من العبارات التالية صحيحة

(a) $\int_0^1 f(x)\,dx < \int_0^2 f(x)\,dx < \int_0^3 f(x)\,dx$

(b) $\int_0^2 f(x)\,dx < \int_0^1 f(x)\,dx < \int_0^3 f(x)\,dx$

(c) $\int_0^3 f(x)\,dx < \int_0^2 f(x)\,dx < \int_0^1 f(x)\,dx$

(d) $\int_0^3 f(x)\,dx < \int_0^1 f(x)\,dx < \int_0^2 f(x)\,dx$



---

(33) $\int_1^8 \sqrt{x^{-\frac{2}{3}}}\;dx =$

(a) 3 **(b)** 9

(c) $\frac{3}{2}$ **(d)** $\frac{9}{2}$

34) التكامل المحدود الذي يعبر عن نهاية مجموع ريمان $\lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin c_i^2 \Delta x$ على الفترة $[0,2]$ هو

(a) $\int_0^2 \sin^2 x\,dx$ (b) $\int_0^2 \sin x\,dx$

(c) $\int_0^2 x\sin x^2\,dx$ (d) $\int_0^2 \sin x^2\,dx$

---

35) اذا كان مجموع ريمان للدالة $f(x)$ على الفترة $[0,2]$ هو $2+\dfrac{3(n+1)(2n+1)}{6n^2}$

فان $\int_0^2 f(x)\,dx$ يساوي

(a) 2 (b) 3

(c) 6 (d) 2.5

---

36) ان $\int_2^5 x^2\,dx$ باستخدام نهاية مجموعة ريمان يساوي

(a) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(2+\frac{i}{n})^2\frac{1}{n}$ (b) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(2+\frac{i}{n})^2\frac{3}{n}$

(c) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(2+\frac{3i}{n})^2\frac{1}{n}$ (d) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(2+\frac{3i}{n})^2\frac{3}{n}$

---

37) اذا كانت $f(x)=3x^2$ على الفترة $[0,2]$ فان $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x)\,\Delta x$ يساوي

(a) 4 (b) 8

(c) 12 (d) 2

(38) اذا كان مجموع ريمان للدالة $f(x)$ على الفترة $[0,4]$ هو $\sum_{i=1}^{n}(\frac{6}{n}i+1)\frac{1}{n}$ فان $\int_{0}^{4} f(x)\,dx$ يساوي

(a) 6 (b) 7

(c) 3 (d) 4

---

(39) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{2i}{n}}\frac{2}{n}$

(a) e^2-1 (b) e^2+1

(c) $e^{-2}-1$ (d) $e^{-2}+1$

---

(1) $\int_{-1}^{1} \frac{4}{1+x^2}\, dx =$

(a) π

(b) 2π

(c) 0

(d) 4π

---

(2) $\int_{0}^{t} \sin^2 x + \cos^2 x \, dx =$

(a) 1

(b) t

(c) $t+1$

(d) $t-1$

---

(3) $\int_{1}^{e} \frac{t-3}{t}\, dt =$

(a) $e-4$

(b) $e+2$

(c) $e-2$

(d) e

---

(4) $\int_{0}^{1/2} \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\, dx =$

(a) $\frac{\pi}{6}$

(b) $\frac{\pi}{2}$

(c) $\frac{\pi}{3}$

(d) $\frac{\pi}{4}$

(5) $\int_{1}^{4}(x\sqrt{x}+\frac{3}{x})\,dx=$

(a) $\frac{62}{5}+3\ln 4$ (b) $\frac{62}{5}-3\ln 4$

(c) $\frac{19}{3}$ (d) $\frac{19}{3}+3\ln 4$

---

(6) $\int_{0}^{2}\frac{e^{2x}-2e^{3x}}{e^{3x}}\,dx=$

(a) $-\frac{1}{e}-3$ (b) $-\frac{1}{e^{2}}+3$

(c) $-\frac{1}{e}+3$ (d) $-\frac{1}{e^{2}}-3$

---

(7) $\int_{0}^{\pi/4}\frac{\sin x}{\cos^{2}x}\,dx=$

(a) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}-1$

(c) $\sqrt{2}-1$ (d) $\sqrt{2}+1$

---

(8) اذا كانت الدالة $f(x)=\int_{x}^{2}\sec t\,dt$ فان $f'(x)$ تساوي

(a) $\sec x$ (b) $\sec x-2$

(c) $-\sec x$ (d) $-\sec x\tan x$

(9) اذا كانت الدالة $f(x)=\int_1^2 (t^3-5t)\,dt$ فان $f'(x)$ تساوي

(a) 0 (b) 1

(c) $3t^3-5$ (d) t^3-5t

---

(10) اذا كانت الدالة $f(x)=\int_{x^2}^{x^3} \sin 3t\,dt$ فان $f'(x)$ تساوي

(a) $3x^2\cos 3x^3-2x\cos 3x^2$ (b) $\sin 3x^3-\sin 3x^2$

(c) $x^3\sin 3x^3-x^2\sin 3x^2$ (d) $3x^2\sin 3x^3-2x\sin 3x^2$

---

(11) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{t^2+1}\,dt=$

(a) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}(x^2+1)}$ (b) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}(x+1)}$

(c) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$ (d) $\dfrac{1}{(x+1)}$

---

(12) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{\sin x}^{\cos x} \sqrt{1-t^2}\,dt=$ $\quad x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

(a) 1 (b) -1

(c) $\sin x$ (d) $\cos x$

(13) اذا كانت الدالة $f(x)=5+\int_{2}^{2x} e^{-t^2}\,dt$ فان

(a) $f'(x)=e^{-x^2}\ ,f(0)=5$

(b) $f'(x)=e^{-x^2}\ ,f(1)=5$

(c) $f'(x)=2e^{-4x^2}\ ,f(0)=5$

(d) $f'(x)=2e^{-4x^2}\ ,f(1)=5$

---

(14) اذا كانت الدالة $F(x)$ هي الدالة الاصلية للدالة $f(x)=2x$ حيث

$F(1)=5$ فان $F(3)$ تساوي

(a) 13

(b) 7

(c) 6

(d) 9

---

(15) اعتمد على الجدول التالي حيث $h(x)=\int_{1}^{g(x)} f(t)\,dt$

x	$f(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
1	6	2	5
3	16	4	2
4	−1	6	7

ان $h'(3)$ تساوي

(a) -2 **(b)** 1 **(c)** -1 **(d)** 2

---

(16) اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة حيث $\int_{1}^{x} f(t)\,dt=e^{\sin 2x}-\ln\cos x-1$ فان $f(0)$ تكون

(a) 1

(b) 2

(c) e

(d) $2e$

---

(17) اذا كانت $\int f'(x)\,dx=x^3+9x$ حيث $f(2)=7$ فان قيمة $f(-1)$ تساوي

(a) -29 **(b)** -19 **(c)** -9 **(d)** 26

(18) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\int_1^x e^{t^2}\,dt}{x^2-1}=$

(**a**) 0 (**b**) 1

(**c**) $\dfrac{1}{2}$ (**d**) $\dfrac{1}{2}e$

(**19**) اذا كان $\int_0^{2x} f(t)\,dt = 3x^3 - x + 5$ فان $f(2)$

(**a**) 8 (**b**) 27

(**c**) 7 (**d**) 4

(**20**) اذا كان $\int_0^{k} 2kx - x^2\,dx = 18$ فان قيمة k تساوي

(**a**) -3 (**b**) 3

(**c**) -9 (**d**) 9

(**21**) اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة حيث $\int_1^{2x} f(t)\,dt = 2x^2 - 2x + 1$ فان $f(x)$ تكون

(**a**) $2x-1$ (**b**) $x-2$

(**c**) $x-1$ (**d**) $8x-2$

(22) ان التكامل الذي يعبر عن المساحة المحصورة بين الدالة $f(x)=x^2-4$ ومحور السينات هو

(a) $\int_{-2}^{2}(x^2-4)\,dx$ (b) $-\int_{-2}^{2}(x^2-4)\,dx$

(c) $\int_{0}^{4}(x^2-4)\,dx$ (d) $-\int_{0}^{4}(x^2-4)\,dx$

---

(23) ان المساحة المحصورة بين الدالة $f(x)=\sin x$ ومحور السينات على الفترة $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ تساوي

(a) $\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{3}$

(c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

---

(24) ان المساحة المحصورة بين الدالة $f(x)=4x-x^2$ ومحور السينات تساوي

(a) $\frac{64}{3}$ (b) $\frac{32}{3}$

(c) $\frac{16}{3}$ (d) $\frac{8}{3}$

---

(25) ان معادلة المماس للدالة $\mathrm{H}(x)$ عند $x=1$ حيث $\mathrm{H}(x)=\int_{1}^{x^2}2t-1\,dt$ هي

(a) $y=2x-1$ (b) $y=2x-2$

(c) $y=2x-3$ (d) $y=2x$

(26) $\int_{0}^{\pi/2} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\, dx =$

(a) 1 (b) -1

(c) $\frac{1}{2}$ (d) $-\frac{1}{2}$

---

(27) اذا كانت دالة السرعة المتجهة لأحد لاعبي القفز الحر هي $v(x) = 9(1-e^{-t})$ متر / ثانية

فان المسافة التي يقطعها اللاعب خلال اول 5 ثواني هي

(a) 36 (b) 18

(c) 27 (d) 45

---

(28) ان معادلة المماس للدالة y عند $x = 2$ حيث $y = \int_{2}^{x} \cos(\pi t^3)\, dt$

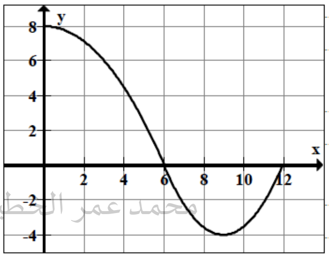
هي

(a) $y = 2x - 1$ (b) $y = 2x$

(c) $y = 2x - 3$ (d) $y = x - 2$

---

(29) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ المتصلة على الفترة $[0,12]$ حيث



$$H(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

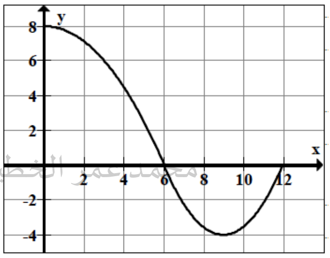
ان فترة التزايد للدالة $H(x)$ هي

(**a**) $(0,6)$ (**b**) $(0,9)$

(**c**) $(6,12)$ (**d**) $(0,12)$

---

(30) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ المتصلة على الفترة $[0,12]$ حيث



$$H(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

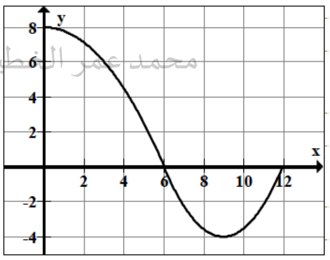
ان القيمة العظمى المطلقة للدالة $H(x)$ تكون عند

(**a**) 0 (**b**) 6

(**c**) 9 (**d**) 12

---

(31) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ المتصلة على الفترة $[0,12]$ حيث



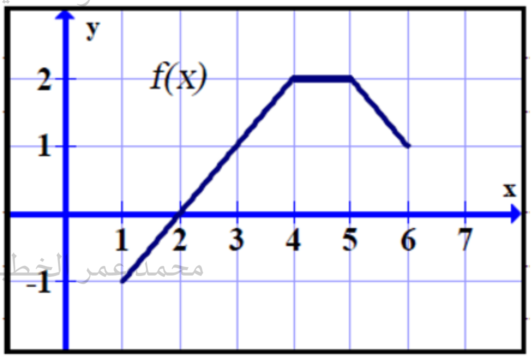
$$H(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

ان فترة التقعر للاعلى للدالة $H(x)$ هي

(**a**) $(6,12)$ (**b**) $(0,9)$

(**c**) $(9,12)$ (**d**) $(0,12)$

(32) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$



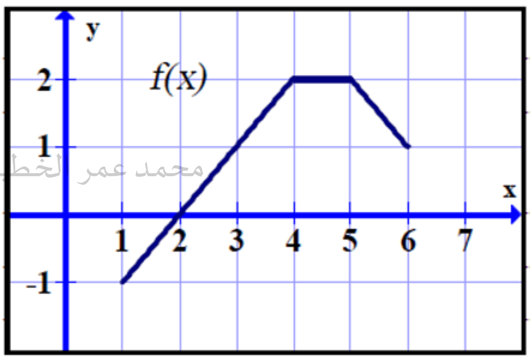
المتصلة على الفترة $[1,6]$ حيث $H(x)=\int_{1}^{x} f(t)\,dt$

ان $H(3)$ تساوي

(a) 1 **(b)** 0 **(c)** 2 **(d)** 3

---

(33) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$



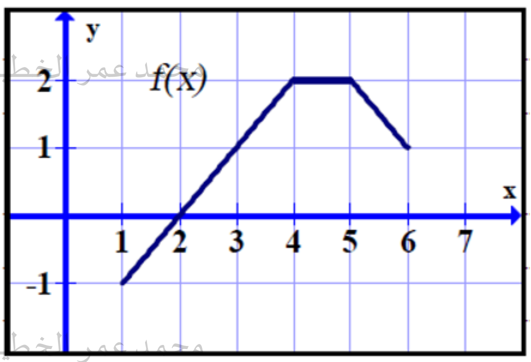
المتصلة على الفترة $[1,6]$ حيث $H(x)=\int_{1}^{x} f(t)\,dt$

ان $H'(4)$ تساوي

(a) 0 **(b)** 1 **(c)** 2 **(d)** 2.5

---

(34) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$



المتصلة على الفترة $[1,6]$ حيث $H(x)=\int_{1}^{x} f(t)\,dt$

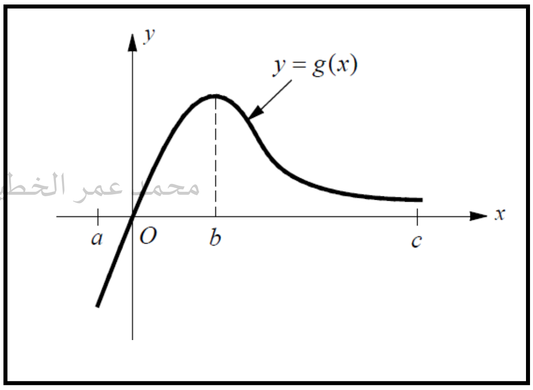
ان القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[1,6]$

تساوي

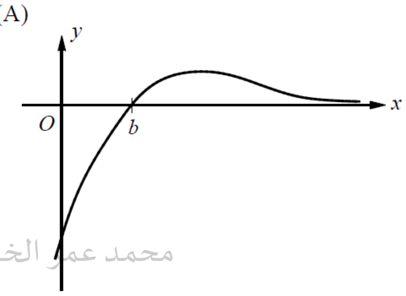
(a) 0 **(b)** 1 **(c)** 5 **(d)** 1.2

(35) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة المتصلة $g(x)$ على الفترة $[a,c]$ حيث

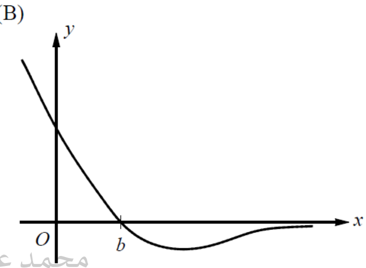
$g(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ لتحديد التمثيل البياني للدالة $f(x)$



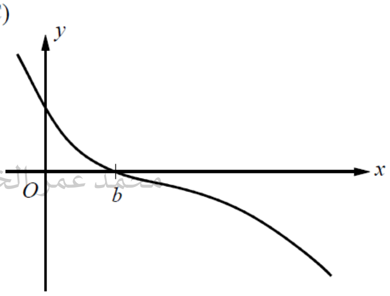
(A)



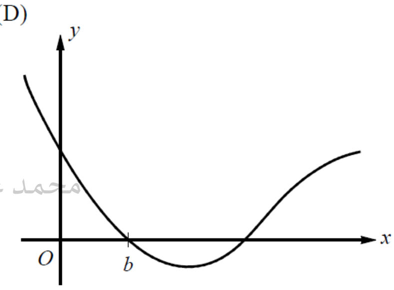
(B)



(C)



(D)



---

(36) اذا كان كل من $F(x)$ و $G(x)$ دوال اصلية للدالة $h(x)$ المتصلة على $[0,4]$ وكان

$\int_0^4 (F(x)-G(x))\,dx=12$ فان $\int_0^4 (F(x)-G(x))x^2\,dx$ يساوي

(a) 16 **(b)** 64

(c) 32 **(d)** 48

(37) اذا كان $f(x)=\int_0^x (t^2-3t+2)\,dt$ فان للدالة $f(x)$ قيمة عظمى محلية عند

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) -1

---

(38) اذا كان $f(x)=\int_{-2}^{x^2-6x} e^t\,dt$ فان للدالة $f(x)$ قيمة صغرى محلية عند

(a) -3 (b) 3

(c) $0,6$ (d) 6

---

(39) اذا كان $\int (f(x)+2x)\,dx = x^3+a\,x+1$ حيث $f(1)=5$

فان قيمة الثابت a هو

(a) 12 (b) 4

(c) 2 (d) -3

---

(40) اذا كان $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sec^2 x\,dx = k$ و $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \tan^2 x\,dx = l$ فان $k+l$ يساوي

(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{2}$

(c) 0 (d) 1

(41) اذا كان $f(x)=\begin{cases}2 & 0\le x<1\\ 2x & 1\le x\end{cases}$ دالة متصلة على الفترة $[0,\infty)$ حيث

$$\mathrm{H}(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

فان $\mathrm{H}(x)$ تساوي

(a) $f(x)=\begin{cases}2x & 0\le x<1\\ x^2 & 1\le x\end{cases}$

(b) $f(x)=\begin{cases}2x & 0\le x<1\\ x^2+1 & 1\le x\end{cases}$

(c) $f(x)=\begin{cases}2x+1 & 0\le x<1\\ x^2 & 1\le x\end{cases}$

(d) $f(x)=\begin{cases}2x & 0\le x<1\\ x^2+2 & 1\le x\end{cases}$

---

(42) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{n+1}{n}+\frac{n+2}{n}+\frac{n+3}{n}+\ldots+\frac{2n}{n}\right]=$

استعن بتعريف التكامل

(a) 1

(b) 2

(c) $\frac{3}{2}$

(d) $\frac{1}{2}$

---

(43) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{n\pi}{n}\right]=$

استعن بتعريف التكامل

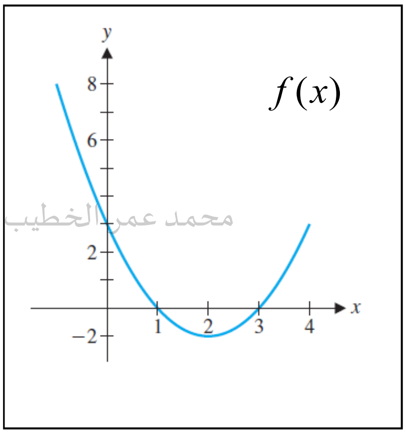
(a) $\frac{4}{\pi}$

(b) $\frac{-2}{\pi}$

(c) $\frac{2}{\pi}$

(d) $\frac{-4}{\pi}$

(44) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ المتصلة على R حيث



$$H(x)=\int_{0}^{x} f(t)\,dt$$

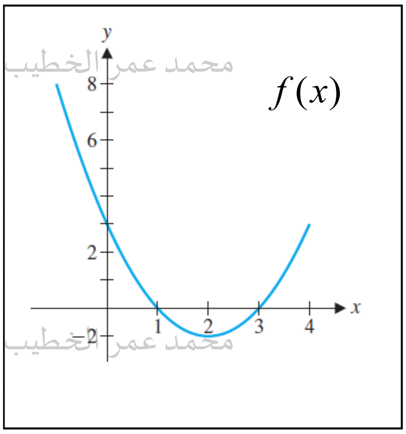
فان الاعداد الحرجة للدالة $H(x)$ هي

(a) 2 (b) $1,3$

(c) $0,1,3$ (d) $1,2,3$

---

(45) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ المتصلة على R حيث



$$H(x)=\int_{0}^{x} f(t)\,dt$$

فان الدالة $H(x)$ متزايدة على الفترة

(a) $(1,3)$ (b) $(-\infty,2)$

(c) $(-\infty,1)$ (d) $(-\infty,1)\cup(3,\infty)$

(1) $\int x^2(x^3+1)^5\,dx =$

(a) $\frac{1}{6}(x^3+1)^6+c$ (b) $\frac{1}{18}(x^3+1)^6+c$

(c) $(x^3+1)^6+c$ (d) $6(x^3+1)^6+c$

---

(2) $\int \sec^2 x\sqrt{\tan x}\,dx =$

(a) $\frac{2}{3}(\tan x)^{\frac{3}{2}}+c$ (b) $\frac{3}{2}(\tan x)^{\frac{3}{2}}+c$

(c) $\frac{1}{3}(\sec x)^3+c$ (d) $\frac{2}{3}(\sec x)^{\frac{3}{2}}+c$

---

(3) $\int \sin x\cos^6 x\,dx =$

(a) $\frac{1}{7}\cos^7 x+c$ (b) $-\frac{1}{7}\cos^7 x+c$

(c) $\frac{1}{2}\sin^2 x+c$ (d) $-\frac{1}{2}\sin^2 x+c$

---

(4) $\int x^2\cos x^3\,dx =$

(a) $\frac{1}{3}\sin x^3+c$ (b) $-\frac{1}{3}\sin x^3+c$

(c) $\frac{x^3}{3}\sin x^3+c$ (d) $-\frac{x^3}{3}\sin x^3+c$

(5) $\int \frac{x^2}{e^{x^3}} \quad dx =$

(a) $-\frac{1}{3}e^{x^3}+c$

(b) $\frac{x^3}{3e^{x^3}}+c$

(c) $-\frac{1}{3}e^{-x^3}+c$

(d) $-\frac{1}{3}\ln e^{x^3}$

---

(6) $\int \tan 2x \, dx =$

(a) $\frac{1}{2}\ln|\cos 2x|+c$

(b) $-\frac{1}{2}\ln|\cos 2x|+c$

(c) $\ln|\cos 2x|+c$

(d) $-\ln|\cos 2x|+c$

---

(7) $\int \frac{1}{x(\ln x+1)^2} \quad dx =$

(a) $\frac{-1}{\ln x+1}+c$

(b) $\frac{1}{\ln x+1}+c$

(c) $\frac{-1}{(\ln x+1)^3}+c$

(d) $\frac{9}{x^3(\ln x+1)^3}+c$

---

(8) $\int \frac{(\tan^{-1}x)^2}{x^2+1} dx =$

(a) $(\tan^{-1}x)^3+c$

(b) $(x^2+1)^3+c$

(c) $\frac{1}{3}(\tan^{-1}x)^3+c$

(d) $\frac{1}{3}(x^2+1)^3+c$

(9) $\int \frac{1}{4x^2+25}\ dx =$

(a) $\frac{5}{2}\tan^{-1}\frac{2x}{5}+c$

(b) $\frac{2}{5}\tan^{-1}\frac{5x}{2}+c$

(c) $\frac{1}{5}\tan^{-1}\frac{x}{5}+c$

(d) $\frac{1}{10}\tan^{-1}\frac{2x}{5}+c$

---

(10) $\int \sqrt[3]{x^5-x^3}\ dx =$

(a) $\frac{3}{4}(x^5-x^3)^{\frac{4}{3}}+c$

(b) $\frac{3}{4}(x^2-1)^{\frac{4}{3}}+c$

(c) $\frac{3}{8}(x^2-1)^{\frac{4}{3}}+c$

(d) $-\frac{3}{8}(x^2-1)^{\frac{4}{3}}+c$

---

(11) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\ dx$

(a) $\ln(e^{2x}+1)+c$

(b) $\tan^{-1}(e^x)+c$

(c) $\tan^{-1}(e^{2x}+1)+c$

(d) $\tan^{-1}(e^x+1)+c$

---

(12) $\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\ dx$

(a) $\sin^{-1}x+c$

(b) $\sin^{-1}(x-1)+c$

(c) $\sin^{-1}(x+1)+c$

(d) $\sin^{-1}(1-x)+c$

(13) $\int \frac{3x\sqrt{x}}{1+x^5}\, dx =$

(a) $\frac{3}{5}\tan^{-1}(x^{5/2})+c$ (b) $\frac{6}{5}\tan^{-1}(x^{5/2})+c$

(c) $\frac{2}{5}\tan^{-1}(x^{5/2})+c$ (d) $\frac{6}{5}\tan^{-1}(\sqrt{x})+c$

---

(14) $\int t\sqrt{t-1}\quad dt =$

(a) $\frac{2}{5}(t-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(t-1)^{\frac{3}{2}}+c$ (b) $\frac{2}{3}(t-1)^{\frac{3}{2}}+2(t-1)^{\frac{1}{2}}+c$

(c) $\frac{2}{3}t^2(t-1)^{\frac{3}{2}}+c$ (d) $\frac{5}{2}(t-1)^{\frac{5}{2}}+\frac{3}{2}(t-1)^{\frac{3}{2}}+c$

---

(15) $\int (1+e^{\tan x})\sec^2 x\quad dx =$

(a) $\tan x+e^{\tan x}+c$ (b) $x+e^{\tan x}+c$

(c) $\tan x+\tan x\, e^{\tan x}+c$ (d) $1+e^{\tan x}+c$

---

(16) $\int \frac{x}{\sqrt{3x^2+5}}\quad dx =$

(a) $\frac{1}{9}(3x^2+5)^{\frac{3}{2}}+c$ (b) $\frac{1}{4}(3x^2+5)^{\frac{3}{2}}+c$

(c) $\frac{1}{3}(3x^2+5)^{\frac{1}{2}}+c$ (d) $\frac{3}{2}(3x^2+5)^{\frac{3}{2}}+c$

(17) $\int \frac{3}{x^{1/4}+x} \, dx =$

(a) $4\ln\left|1+x^{3/4}\right|+c$ (b) $2\ln\left|1+x^{3/4}\right|+c$

(c) $4\ln\left|x^{1/4}+x\right|+c$ (d) $2\ln\left|x^{1/4}+x\right|+c$

---

(18) $\int \frac{1}{x^2-6x+10} \, dx =$

(a) $\tan^{-1}(x+3)+c$ (b) $\sec^{-1}(x+3)+c$

(c) $\tan^{-1}(x-3)+c$ (d) $\sin^{-1}(x-3)+c$

---

(19) $\int \frac{x^3}{x^8+1} \, dx =$

(a) $\frac{1}{2}\tan^{-1}(x^4)+c$ (b) $\frac{1}{2}\tan(x^4)+c$

(c) $\frac{1}{4}\tan^{-1}(x^4)$ (d) $\frac{1}{4}\tan^{-1}(x^4)+c$

---

(20) $\int \frac{x^5}{x^{12}+4} \, dx =$

(a) $\frac{1}{6}\tan^{-1}(x^6)+c$ (b) $\frac{1}{12}\tan(\frac{x^6}{2})+c$

(c) $\frac{1}{12}\tan^{-1}(\frac{x^6}{2})+c$ (d) $\frac{1}{6}\tan^{-1}(\frac{x^6}{2})+c$

(21) $\int 2(\tan x + \tan^3 x)\, dx =$

(a) $\tan^2 x + c$

(b) $2\tan^2 x + c$

(c) $\sec^3 x + c$

(d) $2x + c$

---

(22) $\int 18(3\tan x + 4)^5 \sec^2 x\, dx =$

(a) $(3\tan x + 4)^6 + c$

(b) $3(3\tan x + 4)^6 \tan x + c$

(c) $3(3\tan x + 4)^6 + c$

(d) $6(3\tan x + 4)^6 + c$

---

(23) $\int \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^4}}\, dx =$

(a) $\sin^{-1}(x^2) + c$

(b) $\sin^{-1}(x^4) + c$

(c) $\dfrac{1}{2}\sin^{-1}(x^2) + c$

(d) $\dfrac{1}{4}\sin^{-1}(x^4) + c$

---

(24) $\int \dfrac{1}{x\sqrt{x^4 - 1}}\, dx =$

(a) $\dfrac{1}{2}\sec^{-1} x + c$

(b) $\dfrac{1}{2}\sec^{-1} x^2 + c$

(c) $\dfrac{1}{2}\sin^{-1} x^2 + c$

(d) $\dfrac{1}{2}\sin^{-1} x^4 + c$

(25) $\int_0^1 x\sqrt{8x^2+1}\,dx =$

(a) $\frac{1}{24}$

(b) $\frac{13}{12}$

(c) $\frac{9}{8}$

(d) $\frac{52}{3}$

---

(26) $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx =$

(a) $\frac{1}{2}\int_1^4 e^u\,du$

(b) $\frac{1}{2}\int_1^2 e^u\,du$

(c) $2\int_1^2 e^u\,du$

(d) $2\int_1^4 e^u\,du$

---

(27) $\int_0^3 x\sin(\pi x^2)\,dx =$

(a) $\frac{1}{\pi}$

(b) $-\frac{1}{\pi}$

(c) 0

(d) 1

---

(28) $\int_0^1 \frac{x}{e^{x^2}}\,dx =$

(a) $\frac{1}{2}(e-1)$

(b) $(1-\frac{1}{e})$

(c) $\frac{1}{2}(1-\frac{1}{e})$

(d) $\frac{1}{2}(1-\frac{1}{e^2})$

(29) اذا كان $\int_0^1 f(x)\,dx = -3$ ، فان $\int_1^2 2f(x-1)\,dx$ يساوي

(a) 3 **(b)** -3 **(c)** 6 **(d)** -6

---

(30) اذا كان $\int_{-2}^{6} f(x)\,dx = 10$ ، $\int_2^6 f(x)\,dx = 3$ فان $\int_2^6 f(4-x)\,dx$ يساوي

(a) 3 **(b)** 6

(c) 7 **(d)** 10

---

(31) اذا كان $f(x)$ دالة متصلة على R ، فان $\int_0^{\pi} \cos x\, f'(\sin x)\,dx$ يساوي

(a) 1 **(b)** π **(c)** 0 **(d)** 2π

---

(32) اذا كان $f(0)=0\,,\, f(1)=2$ ، فان $\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)+1}\,dx$ يساوي

(a) 0 **(b)** 4

(c) $\ln 3$ **(d)** $\ln 4$

---

(33) اذا كان $f(2)=5, f(1)=-1$ ، فان $\int_1^4 \frac{f'(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$ يساوي

(a) 3 **(b)** 6

(c) 12 **(d)** 8

34) اذا كانت الدالة $F(x)$ هي الدالة الاصلية للدالة $f(x)$ حيث $F(3)=4, F(0)=1$ فان

$\int_0^3 2f(x)\,F(x)\,dx$ تساوي

(a) 3 (b) 15

(c) 6 (d) 10

---

35) اذا كان $\int_3^5 x\sqrt{2x-1}\,dx = k\int_a^b (u+1)\sqrt{u}\,du$ فان قيمة الثابت k تساوي

(a) 4 (b) 2

(c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{4}$

---

(36) $\int\left(\frac{1}{x}\int_1^x \frac{1}{u}du\right)dx \qquad x>0$

(a) $\frac{1}{x^3}+c$ (b) $\frac{1}{2}\ln(x^2)+c$

(c) $\frac{1}{2}(\ln x)^2+c$ (d) $\frac{1}{2}\ln(\ln x)+c$

---

37) اذا كان $g(x)=\int_0^{2x}\left(\int_0^u \sqrt{t^2+1}\;dt\right)du$ ، فان $g''(x)$ هو

(a) $2\sqrt{4x^2+1}$ (b) $\sqrt{4x^2+1}$

(c) $2\sqrt{x^2+1}$ (d) $4\sqrt{4x^2+1}$

(38) اذا كان $\int_0^1 f(x)\,dx = -6$ ، فان $\int_0^3 f(\frac{x}{3})\,dx$

(a) 18　　(b) -18

(c) 2　　(d) -2

---

(39) اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على الفترة $[0,a]$ فيمكن اثبات ان $\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}\,dx = \frac{a}{2}$

استفد من العلاقة السابقة فان $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,dx$

(a) $\frac{\pi}{2}$　　(b) $\frac{\pi}{4}$

(c) 1　　(d) 2

الإجابات

الدرس الأول	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	C	B	C	C	A	D	A	D	A	B	D	C	A	C	A	A	A	D	B	C
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38		
	C	A	C	A	A	B	B	C	B	C	C	A	D	C	B	B	A	A		

الثاني	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13							
	C	B	D	A	C	B	B	C	A	B	A	C	B							

الثالث	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12								
	A	C	B	C	A	C	B	C	A	B	A	B								

الدرس الرابع	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	B	B	B	D	B	C	B	D	C	B	D	B	B	C	D	C	C	D	A	B
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	
	B	D	D	D	B	B	C	C	A	C	C	C	D	D	B	D	B	D	A	

الدرس الخامس	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	B	B	A	B	A	D	C	C	A	D	B	B	D	A	A	B	A	D	D	B
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
	C	B	C	B	B	A	A	D	A	B	C	B	C	B	B	B	B	B	B	A
	41	42	43	44	45															
	B	C	C	B	D															

السادس	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	B	A	B	A	C	B	A	C	D	C	B	B	B	A	A	C	A	C	D	C
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	
	A	A	C	B	B	C	A	C	D	C	C	C	C	B	D	C	D	B	B	

انتهت الوحدة الخامسة بحمد الله....

وأعتذر للجميع عن أي تقصير او خطأ.