أوراق عمل جميع دروس الوحدة السادسة تطبيقات التكامل المحدود

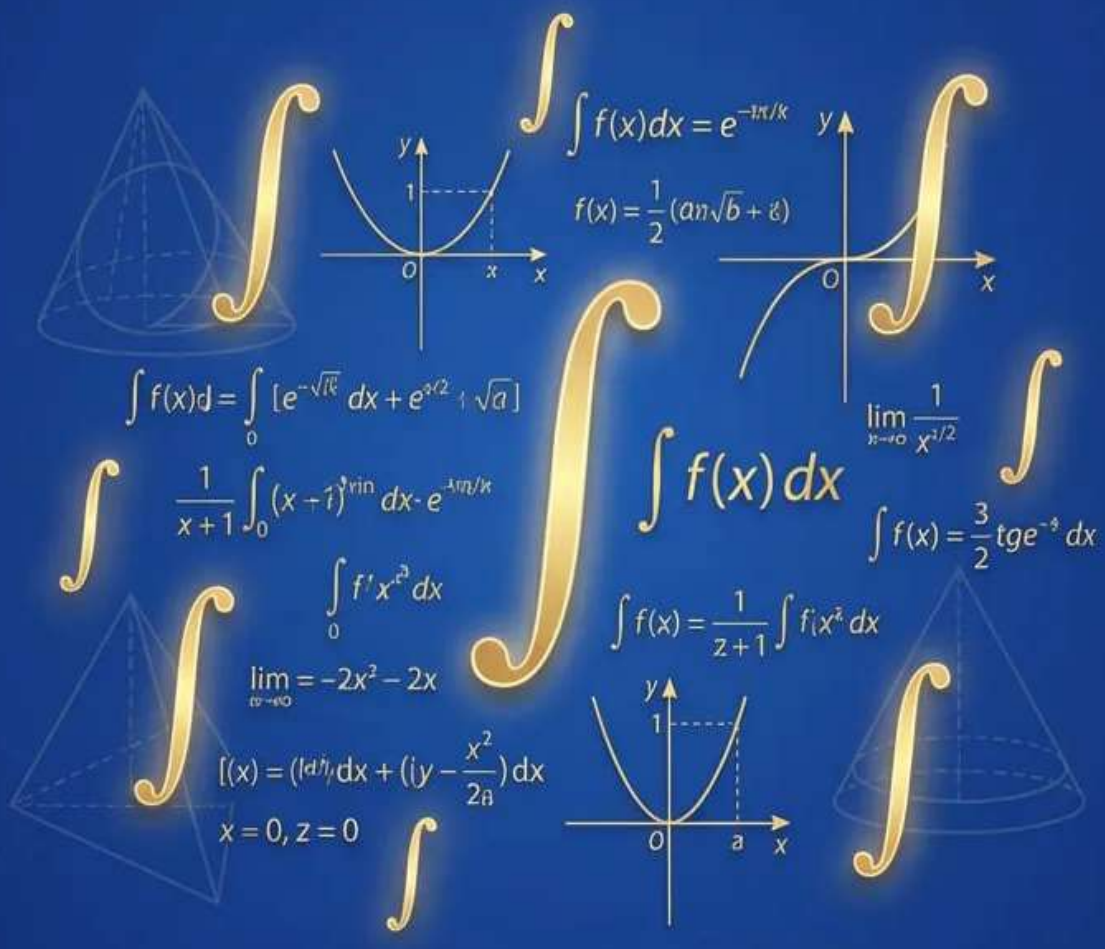
تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج الإماراتية	
موقع المناهج ⇦ المناهج الإماراتية ⇦ الصف الثاني عشر المتقدم ⇦ رياضيات ⇦ الفصل الثالث ⇦ ملفات متنوعة ⇦ الملف	
تاريخ إضافة الملف على موقع المناهج: 2026-03-17 13:11:54	
المزيد من مادة رياضيات:	ملفات ا كتب للمعلم ا كتب للطالب ا اختبارات الكترونية ا اختبارات ا حلول ا عروض بوربوينت ا أوراق عمل منهج انجليزي ا ملخصات وتقارير ا مذكرات وبنوك ا الامتحان النهائي ا للمدرس
	إعداد: عمرو البيومي

التواصل الاجتماعي بحسب الصف الثاني عشر المتقدم					
صفحة المناهج الإماراتية على فيسبوك					
المواد على تلغرام	التربية الاسلامية	اللغة العربية	اللغة الانجليزية	الرياضيات	

المزيد من الملفات بحسب الصف الثاني عشر المتقدم والمادة رياضيات في الفصل الثالث	
1	حل أوراق عمل جميع دروس الوحدة الخامسة التكامل
2	أوراق عمل جميع دروس الوحدة الخامسة التكامل
3	ملزمة أوراق عمل الوحدة الخامسة Integration التكامل مع أسئلة امتحانات سابقة
4	أوراق عمل كامل الوحدة السابعة طرائق التكامل والمعادلات التفاضلية
5	أوراق عمل كامل الوحدة السادسة تطبيقات على التكامل المحدود

ملزمة التكامل

Integration Workbook



معلم: عمرو البيومي

Phone: 0544560575

الوحدة السادسة

تطبيقات التكامل المحدود

الصف 12 متقدم

الفصل الثالث 2026

أعداد

أ /عمرو البيومي

0544560575

الوحدة السادسة

تطبيقات التكامل المحدود

1. المساحة بين منحنيين
2. الحجم : شرائح وحلقات واقراص
3. الأحجام بالاصداف الاسطوانية (اثرئي)
4. طول القوس ومساحة السطح
5. حركة المقزوفات
6. تطبيقات التكامل علي الفيزياء والهندسة (اثرئي)
7. الإحتمال (اثرئي)

الوحدة السابعة

طرائق التكامل والمعادلات التفاضلية

1. مراجعة الصيغ وطرائق التكامل
2. التكامل بالاجزاء
3. طرائق تكامل الدوال المثلثية
4. تكامل الدوال النسبية بالكسور الجزيئية
5. جداول التكامل وأنظمة الحاسوب الجبرية (اثرئي)
6. نمذجة المعادلات التفاضلية
7. المعادلات التفاضلية القابلة للفصل

AMR EL BAYOUMY MATH الدحيح اكاديمي T-0544560575

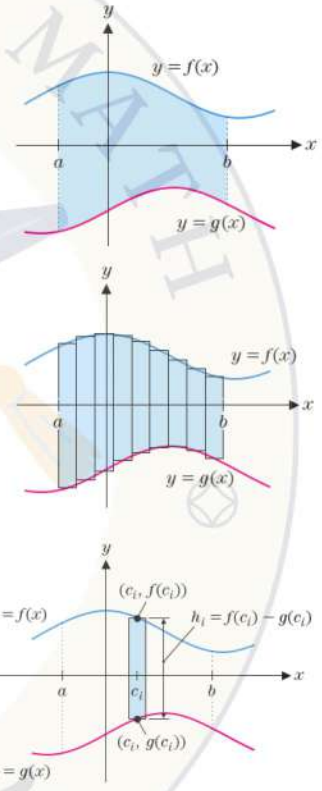
الوحدة السادسة

تطبيقات التكامل المحدود

المساحة المحصورة بين منحنين

المساحة بين منحنيين

فوق ـ تحت



$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(c_i) - g(c_i)]\,\Delta x = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

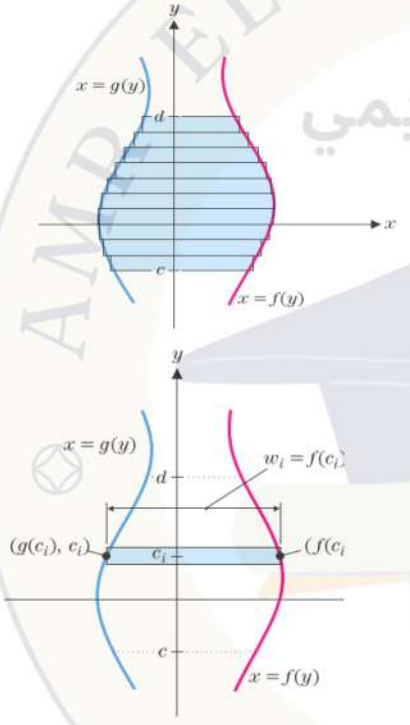
فوق ـ تحت

الدوال: $y = f(x)$, $y = g(x)$

حدود التكامل: رأسية من محور x: من اليسار إلى اليمين

$x = a$, $x = b$

يمين ـ يسار



$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(c_i) - g(c_i)]\,\Delta y = \int_c^d [f(y) - g(y)]\,dy.$$

يمين ـ يسار

الدوال: $x = f(y)$, $x = g(y)$

حدود التكامل: أفقية من محور y: من أسفل إلى أعلى

$y = c$, $y = d$

جد المساحة المحصورة بين المنحنيين علي الفترة المعطاه

1. $y = x^3, y = x^2 - 1, 1 \le x \le 3$

2. $y = \cos x, y = x^2 + 2, 0 \le x \le 2$

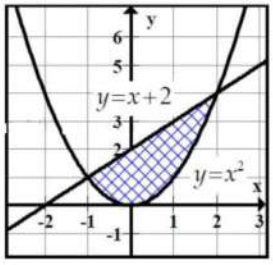
3. $y = e^x, y = x - 1, -2 \le x \le 0$

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
0544560575

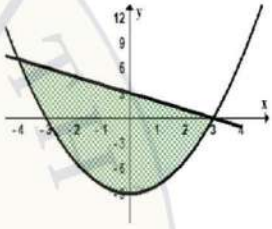
النوع الأول التكامل بالنسبة ل x أي فوق – تحت

جد المساحة المحصورة بين المنحنيين

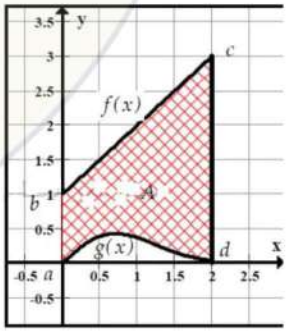
$y = x^2$ ، $y = x + 2$



$y = x^2 - 9$ ، $y = 3 - x$



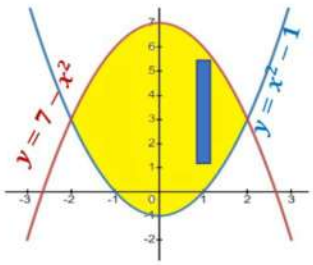
$g(x) = xe^{-x^2}$ ، $f(x) = x + 1$



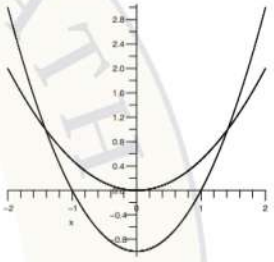
AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

ارسم وجـد مساحة المنطقة التي تحددها تقاطعات المنحنيات

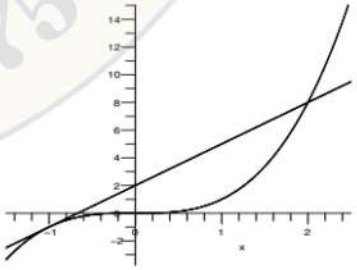
$$y = x^2 - 1, y = 7 - x^2$$



$$y = x^2 - 1, y = \frac{1}{2}x^2$$



$$y = x^3, y = 3x + 2$$

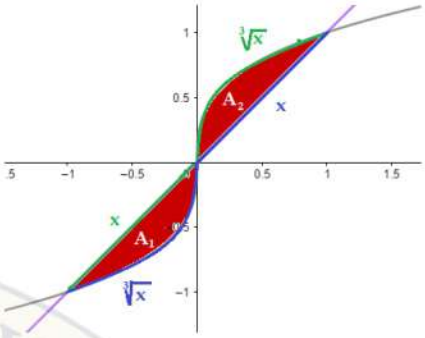


AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

اوجـد مساحة المنطقة التي تحددها تقاطعات المنحنيات

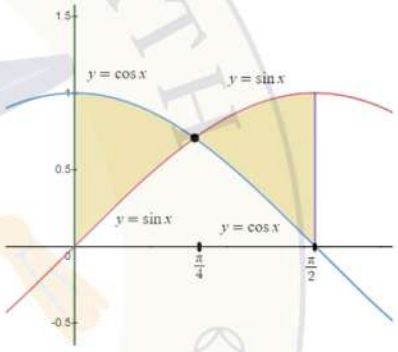
$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$g(x) = x$$



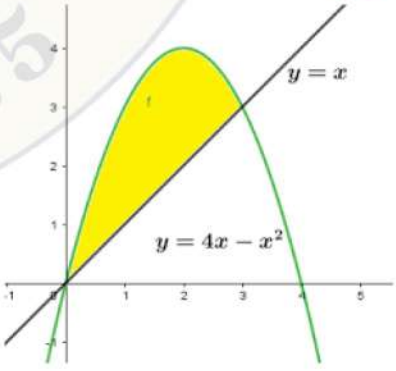
اوجـد مساحة المنطقة المحاطه بالرسم

y = cos(x) and y = sin(x)



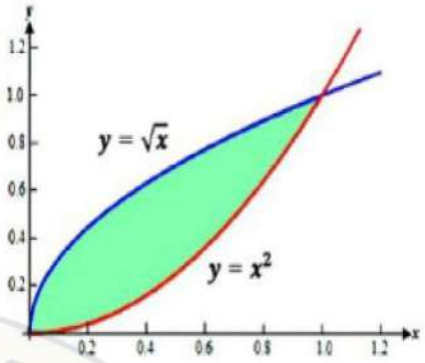
اوجـد مساحة المنطقة المحاطه بالرسم

$y = 4x - x^2$ and $y = x$

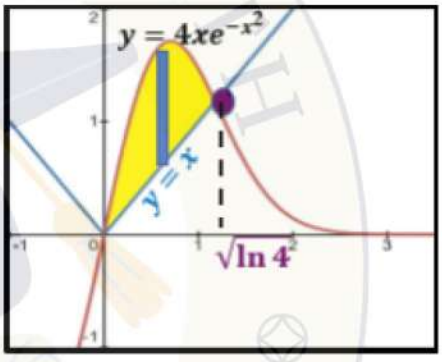


AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
0544560575

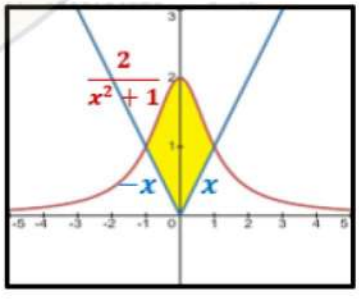
$$y = \sqrt{x}, y = x^2$$



$$y = 4xe^{-x^2}, y = |x|$$

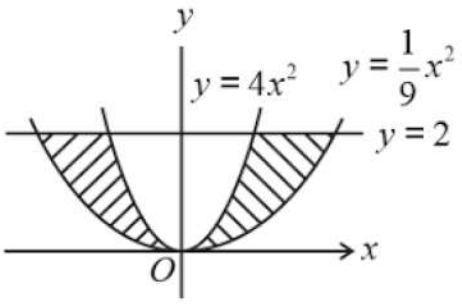


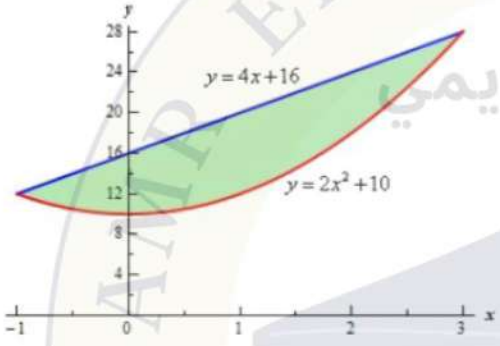
$$y = \frac{2}{x^2+1}, y = |x|$$



AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح الكلاسيكي
2025
T-0544560575

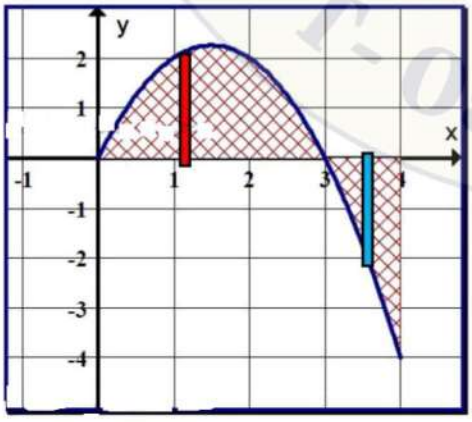
اوجـد مساحة المنطقة المظلله في الشكل





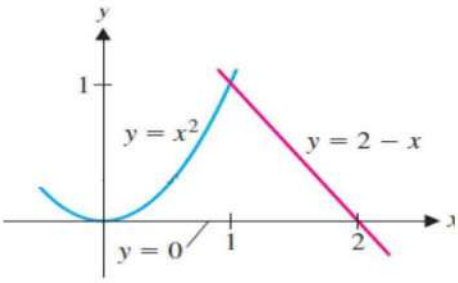
(2) اكتب التكامل الذي يمثل المساحة المحصورة بين

الدالة $f(x)=3x-x^2$ **ومحور** x **والمستقيمين** $x=0, x=4$

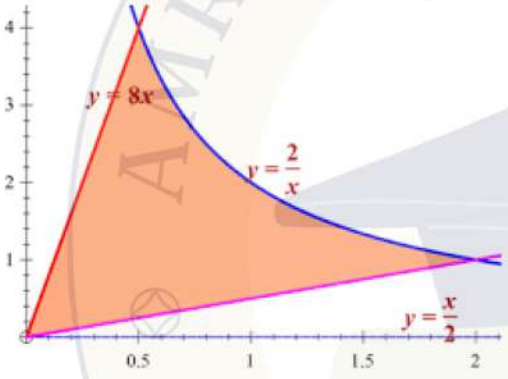


ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2023
T: 0544560575

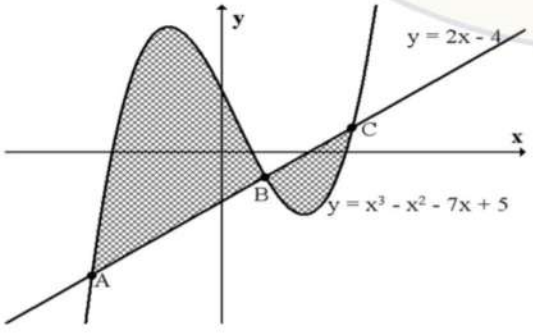
اوجد المساحة المحصورة بين الدالتين ومحور x



اوجـد مساحة المنطقة المظلله في الشكل

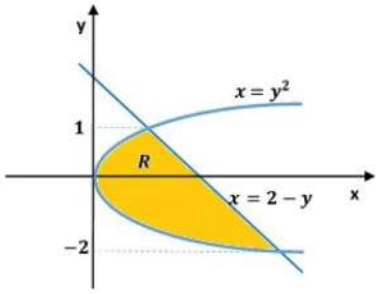


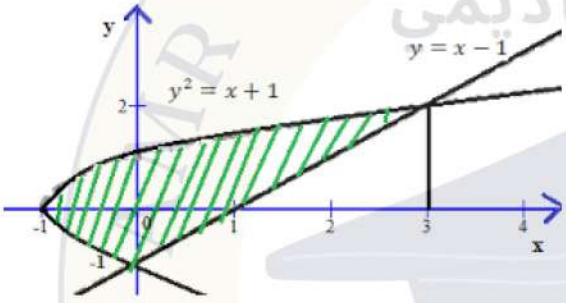
اوجـد مساحة المنطقة المظلله في الشكل

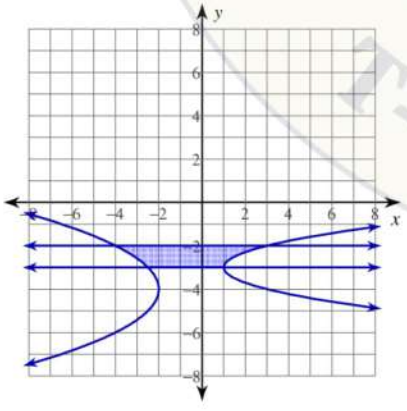


AMR ELBAYOUMY MATH
الرجيح اكاديمي
2025
T-0544560575

النوع الثاني التكامل بالنسبة ل y أي يمين – يسار







$$x = 2y^2 + 12y + 19$$

$$x = -\frac{y^2}{2} - 4y - 10$$

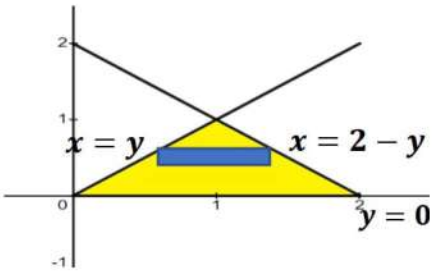
$$y = -3$$

$$y = -2$$

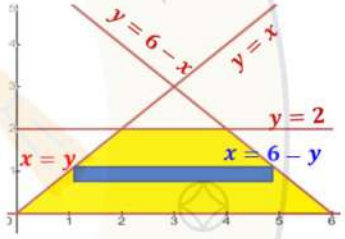
MR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

ارسم وجـد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات بحيث تتم كتابة المساحة كتكامل واحد.

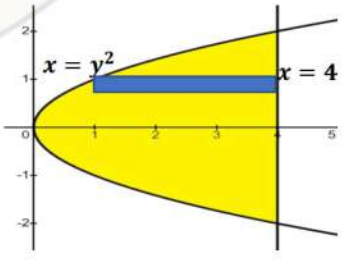
$$y = x, y = 2 - x, y = 0$$



$$y = x, y = 2, y = 6 - x, y = 0$$

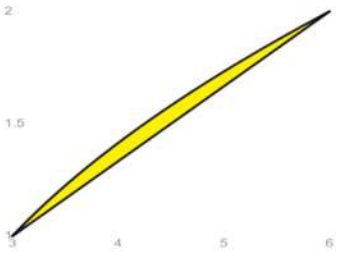


$$x = y^2, x = 4$$

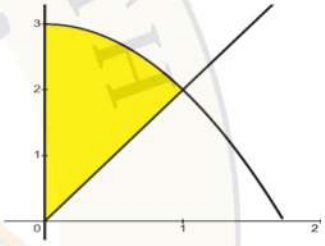


AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T.0544560575

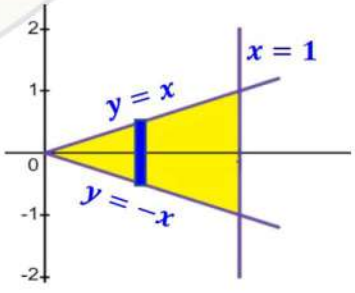
$$x = 3y, x = 2 + y^2$$



$$y = 2x\,(x > 0), y = 3 - x^2, x = 0$$

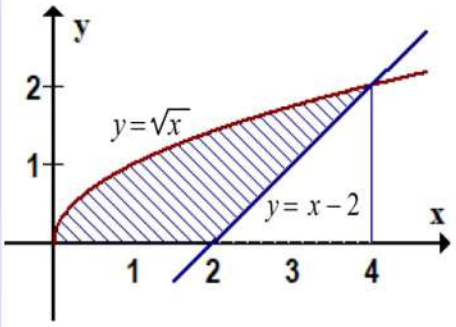


$$x = y, x = -y, x = 1$$

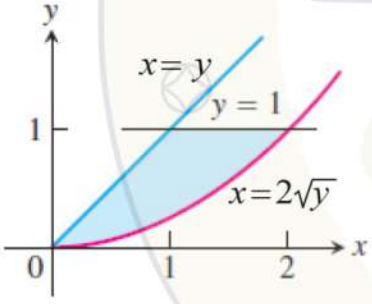


AMR ELBAYOUMY MATH
2025
01544560575

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات: $y=\sqrt{x}$, $y=x-2$, $y=0$



أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات: $x=2\sqrt{y}$, $x=y$, $y=1$



AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

اوجد مساحة المنطقة المحصورة تحت المنحى $y = 4 - x^2$ وفوق محور x

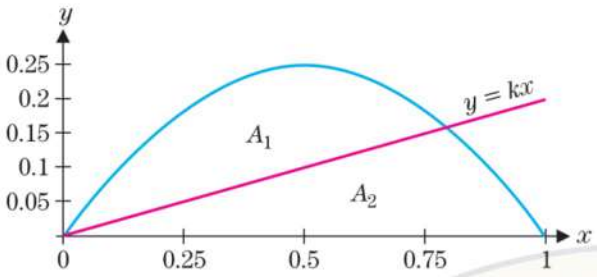
اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x$ و $y = x^3$

(1) اذا كانت المساحة المحصور بين الدالة $y = x^2$ والمستقيم $y = mx$ هي $\frac{4}{3}$ وحدة مساحة

فاوجد قيمة الثابت m حيث $0 < m$

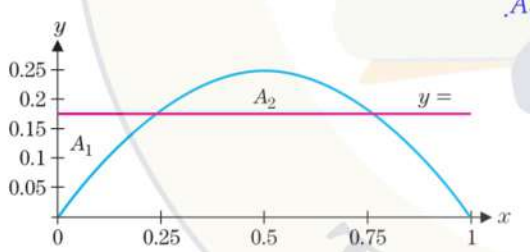
AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

لأجل $y = x - x^2$ و $y = kx$ كما هو مبين، جـــــد k بحيث تكون $A_1 = A_2$.



AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

لأجل $y = x - x^2$ و $y = kx$ كما هو مبين، جـــــد L بحيث تكون $A_1 = A_2$.



قاعدة سيمبسون

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx S_n(f) = \frac{b-a}{3n}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

x (cm)	0	0.25	0.50	0.75	1
$f_c(x)$ (N)	0	1100	2600	5200	7700
$f_e(x)$ (N)	0	44	440	1200	7700

استخدم قاعدة سمبسون لتقدير نسبة الطاقة التي احتفظت بها كرة البيسبول.

عند حدوث اصطدام بين كرة وجسم مصمّم للضرب (مثل مضرب بيسبول أو مضرب تنس)، يتغيّر شكل الكرة، تنكمش أولًا ومن ثم تتمدّد. إذا كانت x تمثّل التغيير في قطر الكرة (على سبيل المثال، بالسنتيمتر) لكل $0 \le x \le m$ و $f(x)$ القوة بين الكرة والجسم المصمم للضرب (على سبيل المثال، بالنيوتن)، إذًا تتناسب المساحة تحت المنحنى $y = f(x)$ مع الطاقة المنقولة. على فرض $f_c(x)$ هي القوة أثناء الإنكماش و $f_e(x)$ هي القوة أثناء التمدّد. اشرح سبب تناسب $\int_0^m [f_c(x) - f_e(x)]\,dx$ مع الطاقة المفقودة من الكرة (بسبب الاحتكاك) وبذلك تكون $\int_0^m [f_c(x) - f_e(x)]\,dx / \int_0^m f_c(x)\,d$ هي نسبة الطاقة المفقودة أثناء الاصطدام. بالنسبة لكرة ومضرب بيسبول

AMR ELBAYOUMY
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

x (cm)	0	1.125	2.250	3.375	4.5
$f_c(x)$ (N)	0	880	2200	4400	7900
$f_e(x)$ (N)	0	550	1540	3000	7900

باستخدام المفهوم نفسه تُعطى القيم للقوة $f_c(x)$ أثناء إنكماش كرة الجولف والقوة $f_e(x)$ أثناء تمدّدها من العلاقة

استخدم قاعدة سمبسون لتقدير نسبة الطاقة التي احتفظت بها كرة الجولف.

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

جـد المساحة المحصورة بين المنحنيين

1. $y = x^3, y = x^2 - 1, 1 \le x \le 3$

A)	B)	C)	D)
$\frac{20}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{40}{3}$	$\frac{80}{3}$

2. $y = \cos x, y = x^2 + 2, 0 \le x \le 2$

A)	B)	C)	D)
$\frac{20}{3} - \sin 2$	$\frac{10}{3} - \sin 4$	$\frac{40}{3} - \sin 6$	$\frac{80}{3} - \sin 10$

اوجـد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات بحيث تتم كتابة المساحة كتكامل واحد.

3. $y = e^x, y = x - 1, -2 \leq x \leq 0$

A)	B)	C)	D)
$5 - e^2$	$5 - e^{-2}$	$5 - e^4$	$5 - e^6$

4. $y = e^{-x}, y = x^2, 1 \leq x \leq 4$

A)	B)	C)	D)
$\frac{340}{3}$	$\frac{68}{3}$	$\frac{64}{3}$	$\frac{80}{3}$

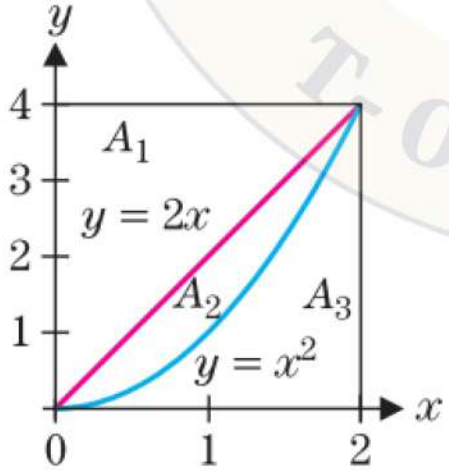
AMR ELBAYOUMY MATH الدحيح اكاديمي 2025 T-0544560575

25. $y = e^x, y = 4e^{-x}, x = 0$

39. بدلالة A_1، A_2 و A_3، حدّد المساحة المُعطاة بكل تكامل.

(a) $\int_0^2 (2x - x^2)\, dx$

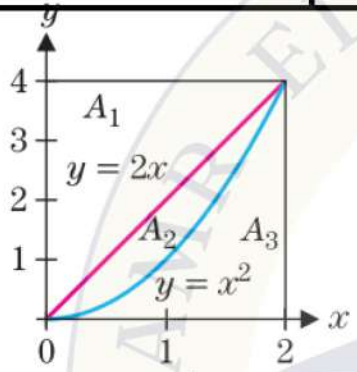
A)	B)	C)	D)
A1	A2	A3	A3-A2



AMR ELBAYOUMY MATH
2025
T 0544560575

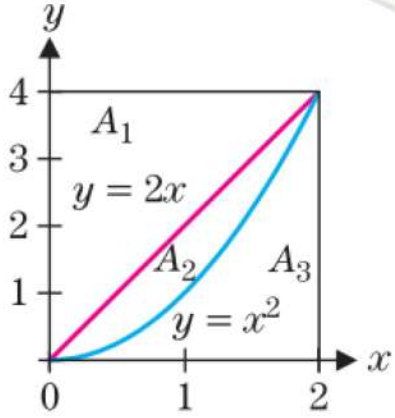
(b) $\int_0^2 (4 - x^2)\, dx$

A)	B)	C)	D)
A1	A2	A3	A3-A2



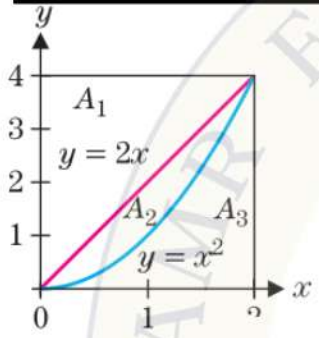
(c) $\int_0^4 (2 - \sqrt{y})\, dy$

A)	B)	C)	D)
A1	A2	A3	A3-A2



(d) $\int_0^4 (\sqrt{y} - \frac{y}{2})\, dy$

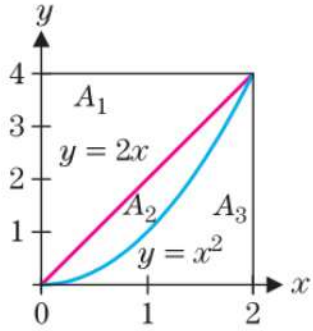
A)	B)	C)	D)
A1	A2	A3	A3-A2



أعط تكاملاً مساويًا لكل مساحة.

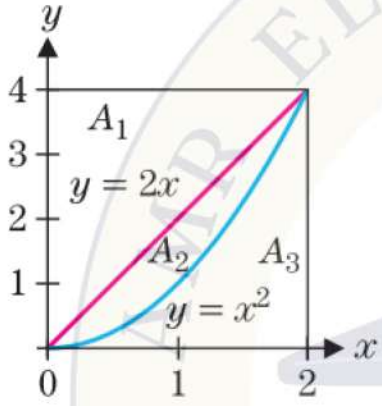
(a) $A_2 + A_3$

A)	B)	C)	D)
$\int_0^4 \left(2 - \frac{y}{2}\right) dy.$	$\int_0^2 (4 - 2x)\, dx$	$\int_0^4 \left(2 - \sqrt{y}\right) dy$	$\int_0^2 (4 - x^2)\, dx$



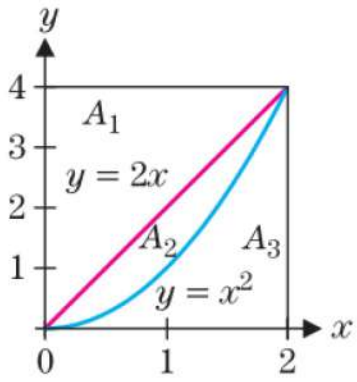
(b) $A_1 + A_2$

A)	B)	C)	D)
$\int_0^4 \left(2 - \frac{y}{2}\right) dy.$	$\int_0^2 (4 - 2x)\, dx$	$\int_0^4 \left(2 - \sqrt{y}\right) dy$	$\int_0^2 (4 - x^2)\, dx$



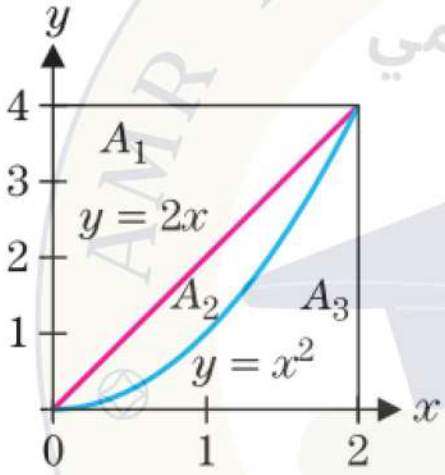
(c) A_1

A)	B)	C)	D)
$\int_0^4 \left(2 - \frac{y}{2}\right) dy.$	$\int_0^2 (4 - 2x)\, dx$	$\int_0^4 \left(2 - \sqrt{y}\right) dy$	$\int_0^2 (4 - x^2)\, dx$



(d) A_3

A)	B)	C)	D)
$\int_0^4 \left(2 - \frac{y}{2}\right) dy.$	$\int_0^2 (4 - 2x)\, dx$	$\int_0^4 \left(2 - \sqrt{y}\right) dy$	$\int_0^2 (4 - x^2)\, dx$



AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

Find the area bounded by the graphs $y = -x$, $y = \sqrt{x}$ and $y = 2$ .Choose the variable of integration to write the area as a single integral .

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات $y = -x$, $y = \sqrt{x}$ و $y = 2$.
اختر متغير التكامل لكتابة المساحة على صورة تكامل واحد

a) $\int_0^2 (y^2 + y)dy$

b) $\int_0^2 (y^2 - y)dy$

c) $\int_{-2}^4 (\sqrt{x} + x)dy$

d) $\int_{-2}^4 (\sqrt{x} - x)dy$

Find the area bounded by the graphs of

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات

$$y = cosx \quad , \quad y = x^2 + 1 \quad , \quad 0 \le x \le 2$$

a) $\frac{20}{3} - sin2$

b) $\frac{14}{3} - cos2$

c) $\frac{20}{3} - cos2$

d) $\frac{14}{3} - sin2$

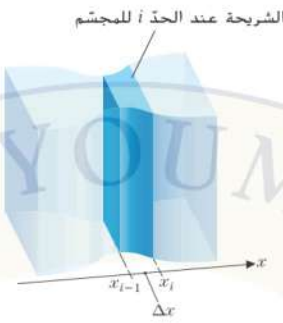
Find The Area between $y^2 = x$; x= 36

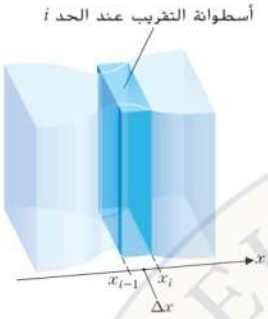
أوجد المساحه المحصورة بين

$A = \int_{-6}^{6} (y^2 - 36)\,dy$	$A = \int_{0}^{36} (36 - \sqrt{x})\,dx$	$A = \int_{-6}^{6} (36 - y^2)\,dy$	$A = \int_{0}^{36} (\sqrt{x} - 36)\,dx$

الحجم: شرائح وأقراص وحلقات

المقاطع العرضية





$$V_i \approx \underbrace{A(c_i)}_{\text{مساحة مقطع عرضي}} \underbrace{\Delta x}_{\text{العرض}}$$

$$V = \int_a^b A(x)\,dx.$$

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

1) جـد حجم المجس مع المقطع العرضي $A(X)$.

1. $A(x) = x + 2, -1 \leq x \leq 3$

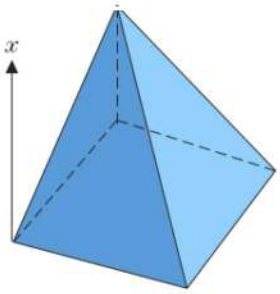
2. $A(x) = 10e^{0.01x}, 0 \leq x \leq 10$

3. $A(x) = \pi(4 - x)^2, 0 \leq x \leq 2$

4. $A(x) = 2(x + 1)^2, 1 \leq x \leq 4$

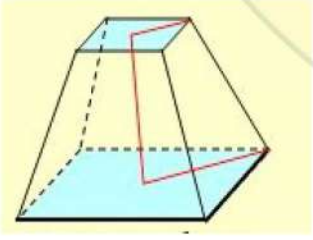
AMR ELBAYOUMY MATH
2025
T-0544560575

1) للهرم في ممفيس قاعدة مربعة يبلغ طول ضلعها 180 وارتفاعها 100 تقريب الهرم باستخدام هذه القياسات



هرم

يبلغ ارتفاع الهرم الأكبر في الجيزة 152 m. و يرتفع من قاعدة مربعة طول ضلعها 230 m. احسب حجمه باستخدام التكامل.



على فرض أنّه بدلًا من إكمال الهرم، توقف عمال البناء في الجيزة عند ارتفاع 250 ft (بهضبة علوية مربعة طول ضلعها 375 ft). احسب حجم هذا البناء. اشرح سبب كون

OMAR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

اوجد حجم المجسم الذي قاعدتة المنطقة المحدودة بالدالتين

$y = x^2$ و $y = 2 - x^2$ ، $-1 \le x \le 1$

(أ) المقاطع عرضية دائرية متعامدة على محور x

$$r = \frac{[f(x) - g(x)]}{2}$$

$$A(x) = \pi r^2$$

(ب) المقاطع عرضية مربعة متعامدة على محور x

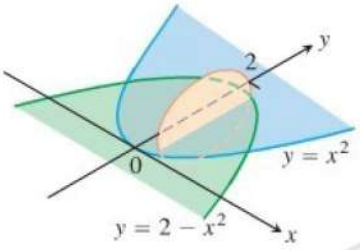
$$s = f(x) - g(x) \Rightarrow A(x) = s^2$$

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

أوجد حجم المجسم الذي قاعدته المنطقة المحدودة بالدالتين:

$$-1 \le x \le 1, \quad y = 2 - x^2 \quad \text{and} \quad y = x^2$$

المقاطع العرضية نصف دائره متعامدة علي محور x



$$r = \frac{[f(x) - g(x)]}{2}$$

$$A(x) = \frac{1}{2}\pi r^2$$

المقاطع العرضية مثلثات متساوية الاضلاع متعامدة علي محور x

$$l = f(x) - g(x) \Rightarrow A(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) l^2$$

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

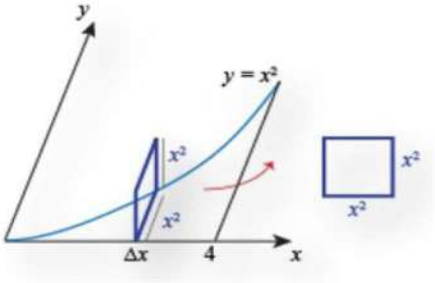
. قاعدة المجسّم V هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = e^{-2x}, y = 0, x = 0$ و $x = \ln 5$. جـــــد الحجم إذا كان لدى V

(a) مقاطع عرضية مربّعة متعامدة على المحور x.

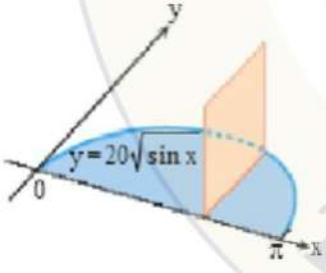
(b) مقاطع عرضية نصف دائرة متعامدة على المحور x.

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

أوجد حجم المجسم الذي مقاطعه العرضية العمودية على المحور x في $[0,4]$ هي مربعات واقعة بين منحنى $y=x^2$ و محور x .



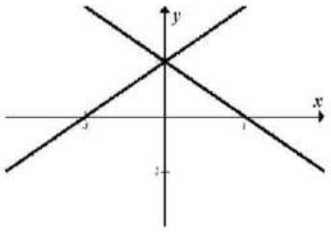
) أوجد حجم المجسم الذي مقاطعه العرضية العمودية على المحور x في $[0,\pi]$ هي مثلثات متطابقة الاضلاع واقعة بين منحنى $y=20\sqrt{\sin x}$ و محور x .



AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

(2) اوجد حجم المجسم الذي قاعدتة المنطقة المحدودة بالدالتين $y=x+1$ و $y=-x+1$ ومحور x

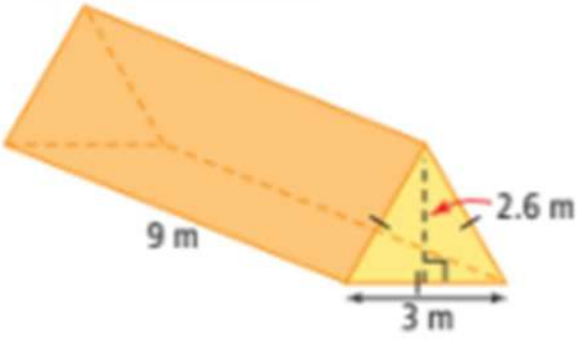
والمقاطع العرضية هي مربعات متعامدة على محور x



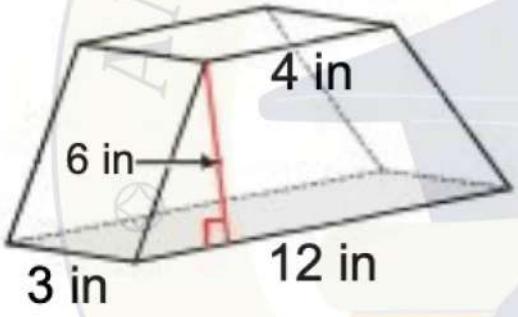
مربعات متعامدة على محور y

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

أكتب التكامل الذي يمثل الحجم واوجد الحجم

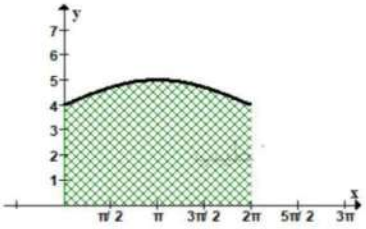


أكتب التكامل الذي يمثل الحجم واوجد الحجم



AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

. لإناء فخاري مقاطع عرضية دائرية بنصف قطر $4+\sin\frac{x}{2}$ سنتيمتر لكل $0 \le x \le 2\pi$. ارسم صورة للإناء و احسب حجمه.



AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx S_n(f) = \frac{b-a}{3n}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

مثال 2.2 تقدير الحجم من بيانات المقطع العرضي

في التصوير الطبي، مثل التصوير المقطعي بالحاسوب (CT) والتصوير بالرنين المغناطيسي (MRI)، يؤخذ العديد من القياسات وتتم معالجتها بواسطة حاسوب لإنشاء صورة ثلاثية الأبعاد للأنسجة التي يرغب الطبيب في دراستها. تشبه هذه العملية عملية التجزئة إلى شرائح التي استخدمناها لإيجاد حجم مجسّم. ولكن، في هذه الحالة، يتم دمج التمثيلات في الرياضيات للشرائح المختلفة من الأنسجة لإنتاج صورة ثلاثية الأبعاد يقوم الأطباء باستعراضها لتحديد مدى صحة الأنسجة. على فرض أنّ التصوير بالرنين المغناطيسي أظهر أنّ مساحات المقطع العرضي لشرائح متجاورة لورم ما مُعطاة بالقيم المذكورة في الجدول.

x (cm)	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$A(x)$ (cm^2)	0.0	0.1	0.4	0.3	0.6	0.9	1.2	0.8	0.6	0.2	0.1

قدّر حجم الورم.

على فرض أنّ فحص تصوير MRI يبيّن أنّ مساحات المقطع العرضي لشرائح متجاورة لورم كما هو مذكور في الجدول.

x (cm)	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
$A(x)$ (cm^2)	0.0	0.2	0.3	0.2	0.4	0.2	0.0

استخدم قاعدة سمبسون لتقدير الحجم.

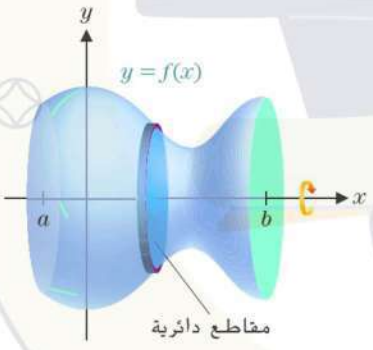
AMR ELBAYOUMI MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

الحجوم الدورانية (الحلقات والاصداف)

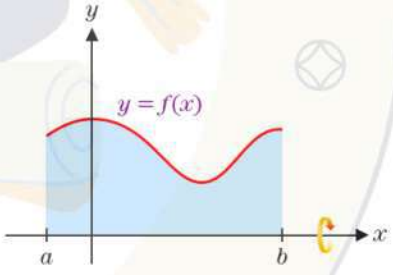
الحلقات (الأقراص): عندما تكون الشريحة عمودية علي محور الدوران وتستخدم عندما يكون حجم المجسم ناتج من دوران المنطقة المحصورة بداله مع محور الدوران

الاصداف : عندما تكون الشريحة موازية لمحور الدوران وتستخدم عندما يكون حجم المجسم ليس ناتج من دوران المنطقه المحصورة مع محور الدوران

الحاله الاولي الدوران حول محور x في الحلقات يكون التكامل بالنسبة ل x إذا كانت الشريحه توازي محور y



المجسّم الناتج عن الدوران



$y = f(x) \geq 0$

طريقة الأقراص

$$V = \int_a^b \underbrace{\pi[f(x)]^2}_{\text{مساحة مقطع عرضي} = \pi r^2}\, dx.$$

حجم مجسّم ناتج عن التدوير (طريقة الأقراص)

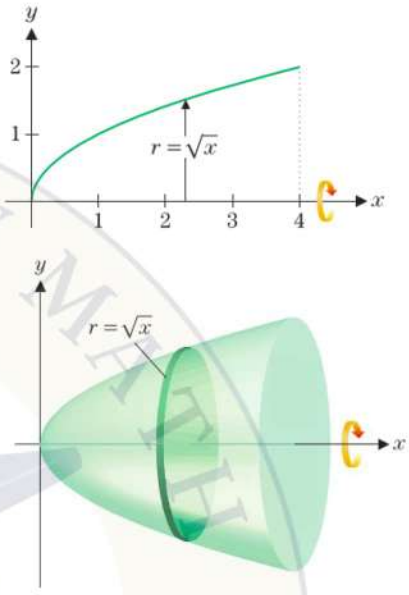
$$A = \pi r^2 = \pi y^2 = \pi[f(x)]^2$$

$$V = \int_a^b A\,dx = \int_a^b \pi r^2\,dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx$$

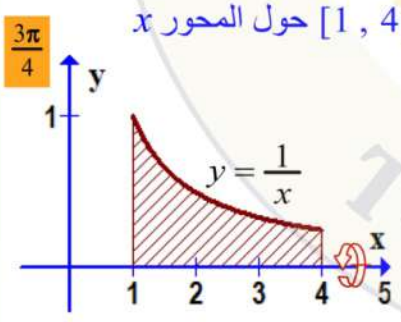
AMR EL BAYOUMY MATH الدحيح اكاديمي 2025 T-0544560575

مثال 2.4 استخدام طريقة الأقراص لحساب الحجم

قم بدوران المنطقة تحت المنحنى $y = \sqrt{x}$ على الفترة $[0, 4]$ حول المحور x وجـــد حجم المجسّم الناتج عن الدوران.



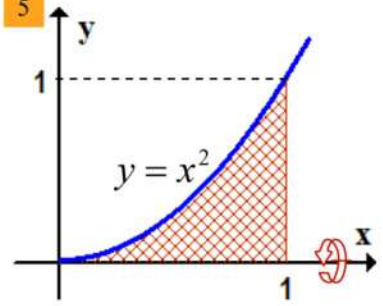
أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة تحت المنحنى $y = \frac{1}{x}$ في الفترة $[1\ ,\ 4]$ حول المحور x



AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

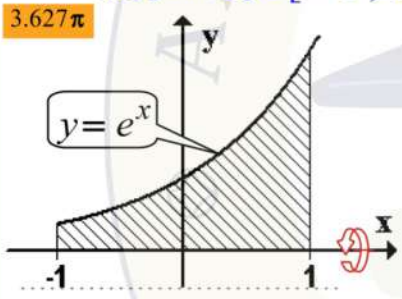
أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة تحت المنحنى $y = x^2$ في الفترة $[0\ ,\ 1]$ حول المحور x

$\frac{\pi}{5}$



أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة تحت المنحنى $y = e^x$ في الفترة $[-1\ ,\ 1]$ حول المحور x

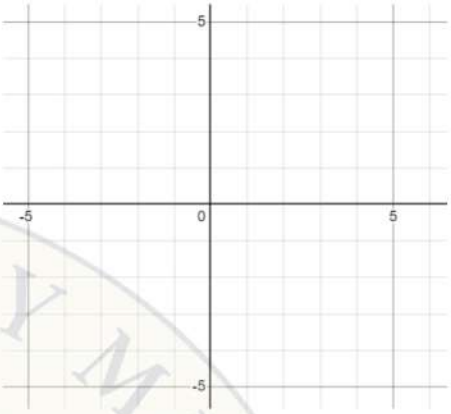
3.627π



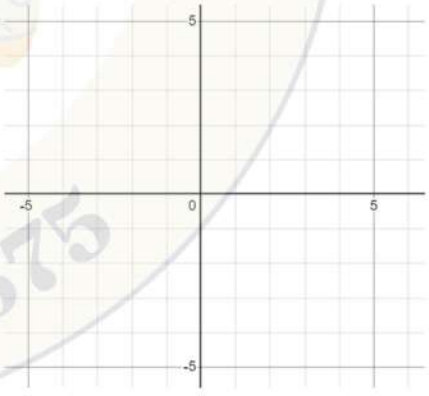
OMAR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

احسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران

المنطقة المحدودة بواسطة $y=0, y=2-x$ و $x=0$ حول المحور x

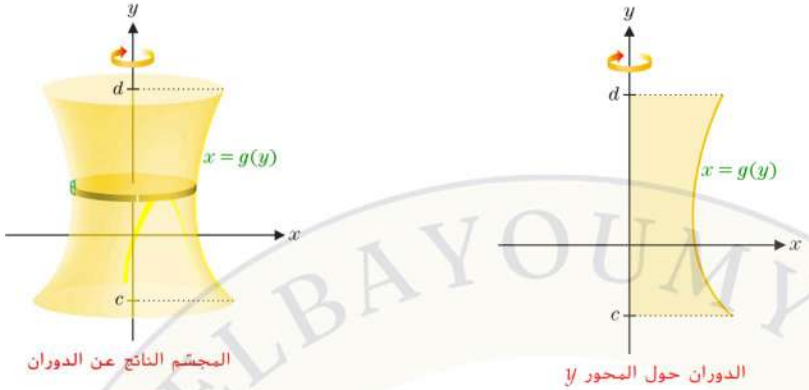


المنطقة المحدودة بواسطة $y=x^2, y=4-x^2$ حول المحور x



AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

الحاله الثانية الدوران حول محور y في الحلقات يكون التكامل بالنسبة ل y إذا كانت الشريحه توازي محور x



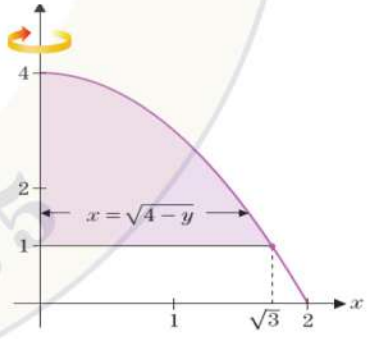
المجسّم الناتج عن الدوران — الدوران حول المحور y

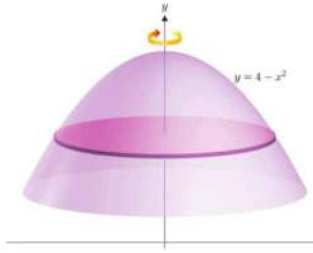
$$V = \int_c^d \underbrace{\pi[g(y)]^2}_{\text{مساحة مقطع عرضي} = \pi r^2}\, dy.$$

حجم مجسّم ناتج عن الدوران (طريقة الأقراص)

مثال 2.5 استخدام طريقة الأقراص مع y كمتغيّر مستقل

جـــد حجم المجسّم الناتج عن دوران المنطقة المحدودة بين المنحنيين $y = 4 - x^2$ و $y = 1$ من $x = 0$ إلى $x = \sqrt{3}$ حول المحور y.

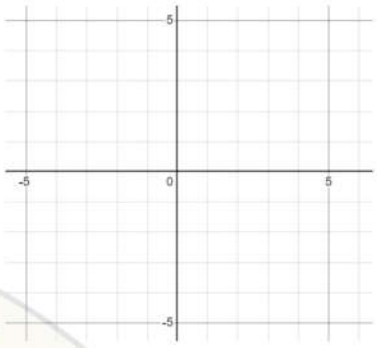


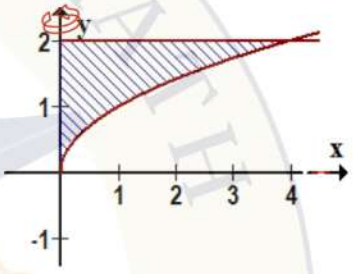


AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

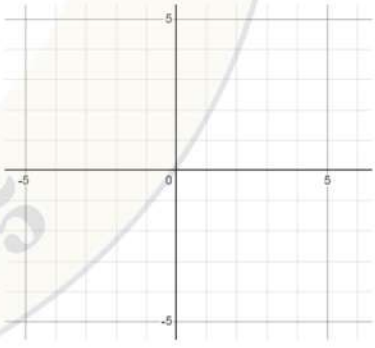
احسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران

المنطقة المحدودة بواسطة $y=\sqrt{x}, y=2$ و $x=0$ حول المحور y



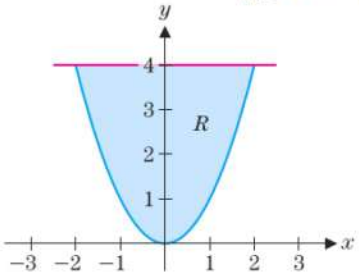


المنطقة المحدودة بواسطة $y=x^2$ و $x=y^2$ حول المحور y



AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

لتكن R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$ و $y = 4$.
أحسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران R حول المستقيم المذكور. **$y = 4$**



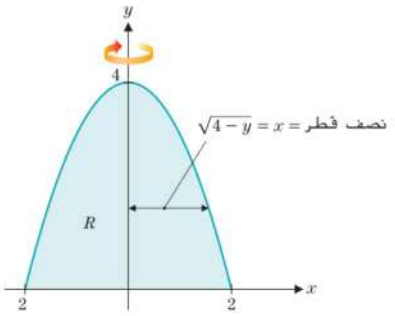
. لتكنّ R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = 4 - 2x$ والمحور x والمحور y. احسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران R حول المستقيم المذكور.

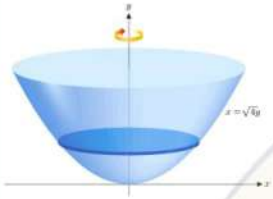
(b) المحور x

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

لتكن R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = 4 - x^2$ و $y = 0$. جـــد أحجام المجسّمات التي تم الحصول عليها من دوران R

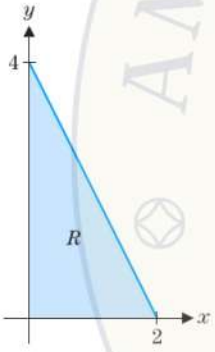
حول المحور y





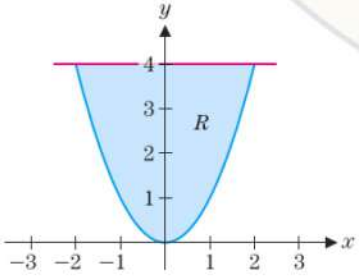
، لتكنّ R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = 4 - 2x$ والمحور x والمحور y. احسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران R حول المستقيم المذكور.

(a) المحور y



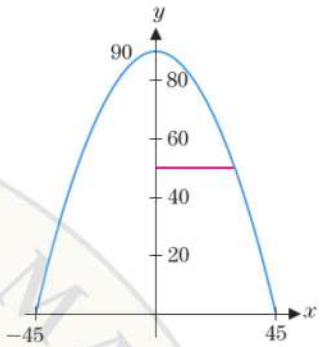
لتكن R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$ و $y = 4$.
أحسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران R حول المستقيم المذكور.

المحور y

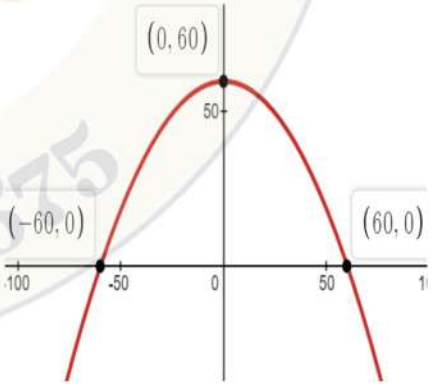


مثال 2.3 حساب حجم قبة

على فرض أنّ للقبّة مقاطع عرضية دائرية، لها رسم تخطيطي يُعطى بالعلاقة $y = -\frac{2}{45}x^2 + 90$ لكل $-45 \le x \le 45$ (بالسنتيمترات). يعطي هذا الأمر أبعادًا مشابهة لقبة المبنى في الشكل 6.13b) يوضّح الشكل 6.15 تمثيلًا بيانيًا. جـــــد حجم القبة.



يتم إعطاء الرسم التخطيطي لقبة $y = 60 - \frac{x^2}{60}$ لكل $-60 \le x \le 60$ (بالأمتار)، بمقاطع عرضية دائرية متعامدة على المحور y. جـــــد حجمه.



AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

الشريحة عمودية علي محور الدوران

التكامل بالنسبة ل x

الدوران حول محور x أو y=0

عندما

نصف قطر خارجي $r_o = f(x)$

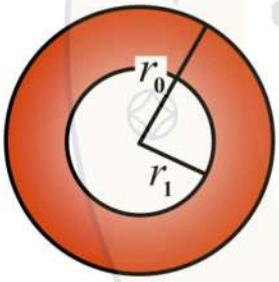
نصف قطر داخلي $r_i = g(x)$

فان حجم الجسم v يعطي بالقانون

$$V = \pi \int_a^b [r_o^2 - r_i^2]\, dx$$

الدوران حول المحور y = k

عندما:



نصف قطر خارجي $r_o = f(x) - k$

نصف قطر داخلي $r_i = g(x) - k$

فان حجم الجسم v يعطي بالقانون

$$V = \pi \int_a^b [r_o^2 - r_i^2]\, dx$$

مساحة الحلقة $A = \pi r_0^2 - \pi r_1^2 = \pi (r_0^2 - r_1^2)$

r_o نصف قطر الدوران الخارجي (بعد الدالة الخارجية عن محور الدوران)

r_I نصف قطر الدوران الداخلي (بعد الدالة الداخلية عن محور الدوران)

الشريحة عمودية علي محور الدوران

التكامل بالنسبة ل y

الدوران حول محور y أو x=0

عندما

نصف قطر خارجي $r_o = f(y)$

نصف قطر داخلي $r_i = g(y)$

فان حجم الجسم v يعطي بالقانون

$$V = \pi \int_a^b [r_o^2 - r_i^2]\, dy$$

الدوران حول المحور x = k

عندما:

نصف قطر خارجي $r_o = k - f(y)$

صف قطر داخلي $r_i = k - g(y)$

فان حجم الجسم v يعطي بالقانون

$$V = \pi \int_a^b [r_o^2 - r_i^2]\, dy$$

AMR ELBAYOUMY MATH
اكاديمي
2025
T-0544560575

الحجم: هو التكامل المحدود لمساحة المقطع العرضي (مساحة الحلقة)

الحاله الثالثة الدوران حول محورأفقي أو راسي

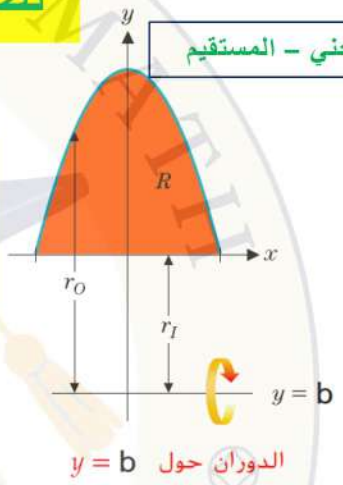
إذا كانت الشريحه توازي محور x تكامل بالنسبة لy

$$V = \pi \int_{c}^{d} [R^2(y) - r^2(y)]\, dy$$

حيث: $R(x)$ نصف القطر الخارجي
$r(x)$ نصف القطر الداخلي

نصف القطر الخارجي = أعلي – أسفل
نصف القطر الداخلي = أعلي – أسفل

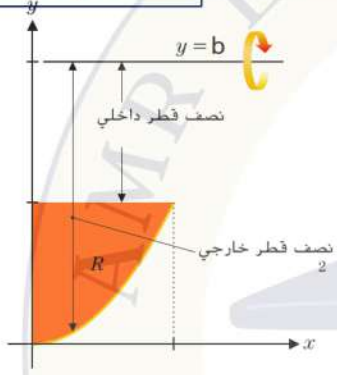
المنحني – المستقيم



الدوران حول $y = b$

سواء كان المنحني هو أعلي أو المستقيم هو الاعلي

المستقيم - المنحني



الدوران حول $y = b$

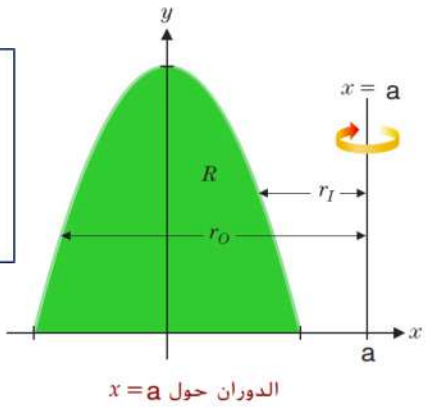
إذا كانت الشريحه توازي محور غ تكامل بالنسبة ل x

$$V = \pi \int_{a}^{b} [R^2(x) - r^2(x)]\, dx$$

حيث: $R(y)$ نصف القطر الخارجي
$r(y)$ نصف القطر الداخلي

نصف القطر الخارجي = يمين – يسار
نصف القطر الداخلي = يمين – يسار

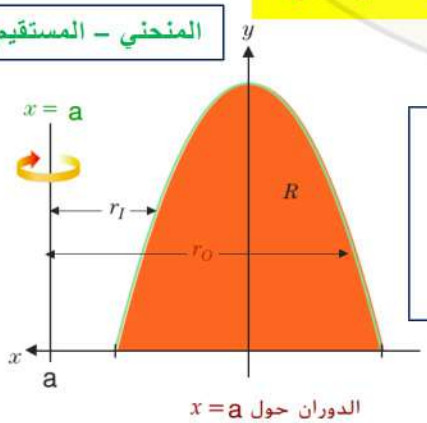
المستقيم - المنحني



الدوران حول $x = a$

سواء كان المنحني هو اليمين أو المستقيم هو اليمين

المنحني – المستقيم

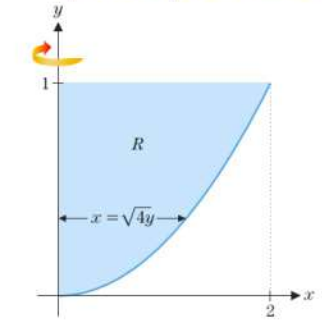


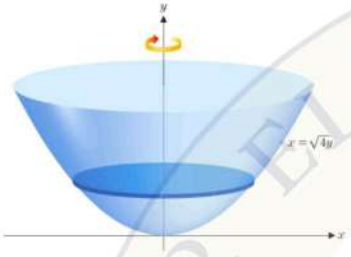
الدوران حول $x = a$

مثال 2.6 حساب أحجام المجسّمات المجوفة وغير المجوفة

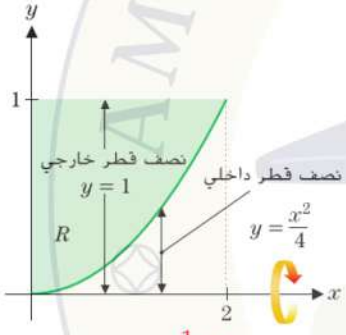
لتكن R هي المنطقة المحدودة بالتمثيلين البيانيين $y = \frac{1}{4}x^2, x = 0$ و $y = 1$. احسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران R حول

(a) المحور y

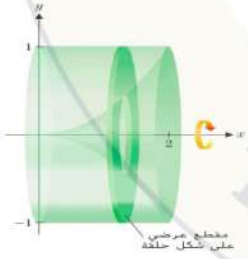




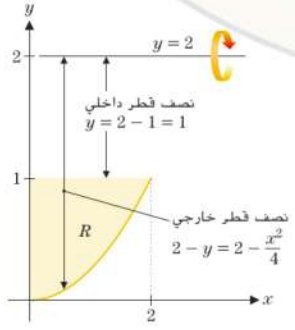
(b) المحور x



$y = \frac{1}{4}x^2$



(c) المستقيم $y = 2$.

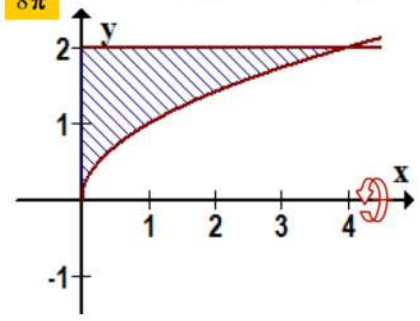


الدوران حول $y = 2$

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المحددة بواسطة $y=\sqrt{x}$ ، $y=2$ ، $x=0$ حول المحور x

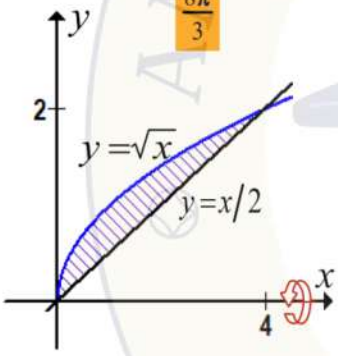
8π



أوجد حجم المجسم الناتج من دوران للمنطقة المحدودة بالمنحنيين $y=\sqrt{x}$ و $y=x/2$

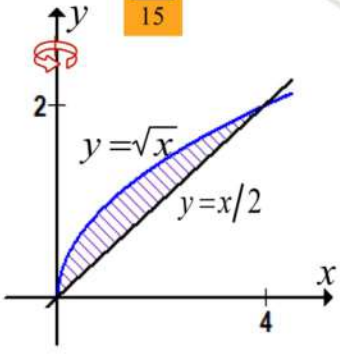
a) حول المحور x

$\frac{8\pi}{3}$



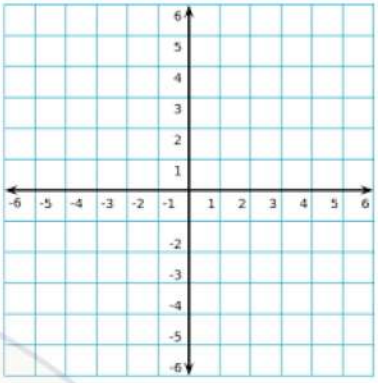
b) حول المحور y

$\frac{64\pi}{15}$

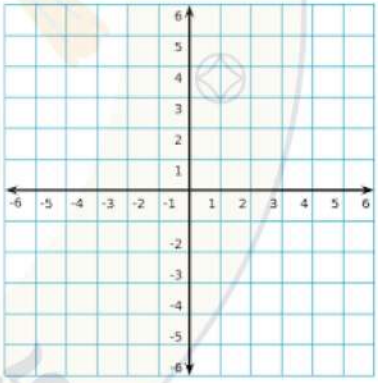


AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

المنطقة المحدودة بواسطة $y=x^2$ و $x=y^2$ حول المحور $x=1$

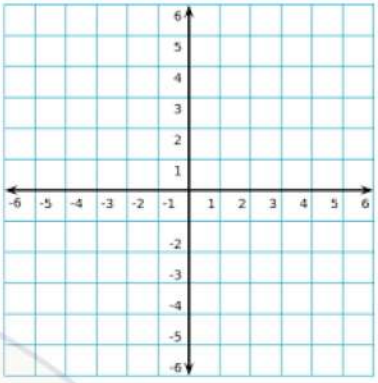


المنطقة المحدودة بواسطة $y=0, y=2-x$ و $x=0$ حول المحور $y=3$

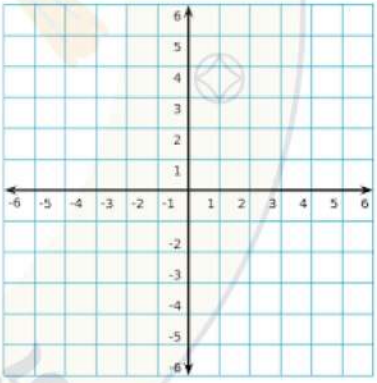


AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

المنطقة المحدودة بواسطة $y=\sqrt{x}, y=2$ و $x=0$ حول المحور $x=4$



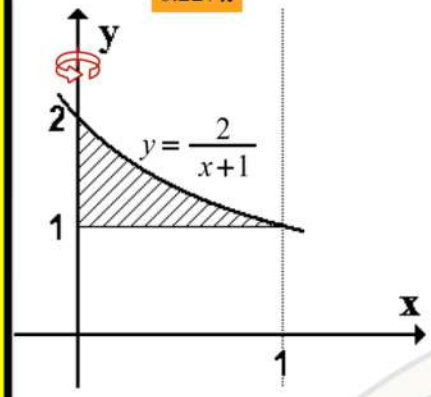
المنطقة المحدودة بواسطة $y=x^2, y=4-x^2$ حول المحور $y=4$



AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المحدودة بواسطة $y=\frac{2}{x+1}$, $y=1$, $x=0$ حول المحور y

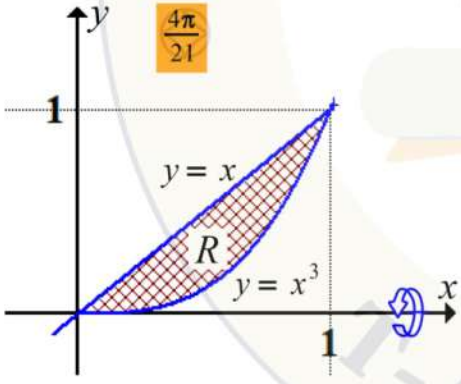
0.227π



لتكن R المنطقة المحددة بواسطة $y=4-2x$, $y=0$, $x=0$

a) أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة R حول المحور x

$\frac{4\pi}{21}$

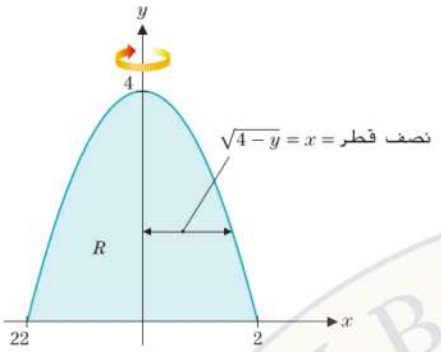


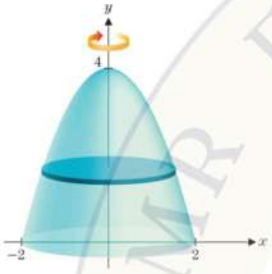
AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

مثال 2.7 دوران منطقة حول مستقيمات مختلفة

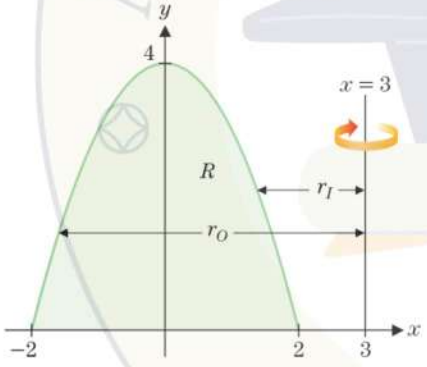
لتكن R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = 4 - x^2$ و $y = 0$. جـــد أحجام المجسّمات التي تم الحصول عليها من دوران R حول كل من التالي:

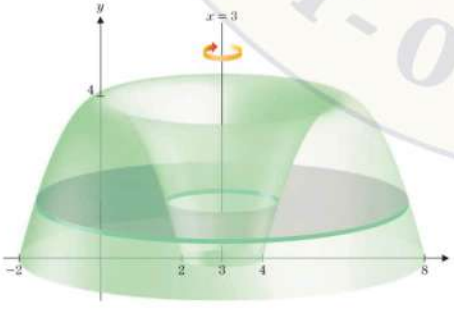
الدوران حول المحور y





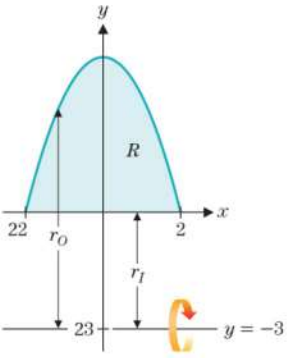
الدوران حول $x = 3$

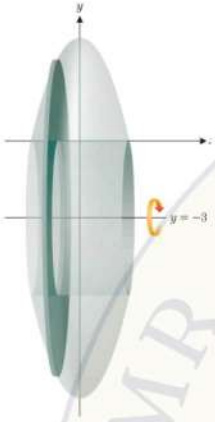




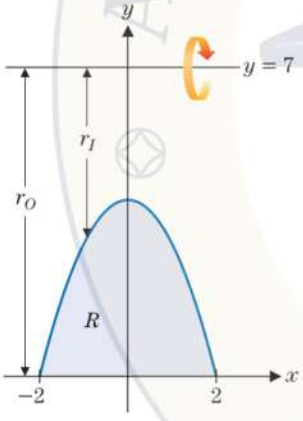
AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

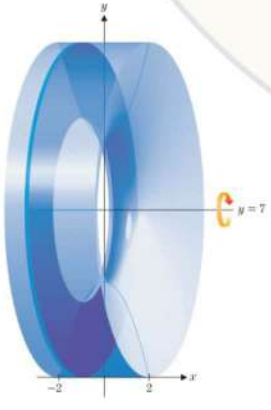
الدوران حول $y = -3$





الدوران حول $y = 7$

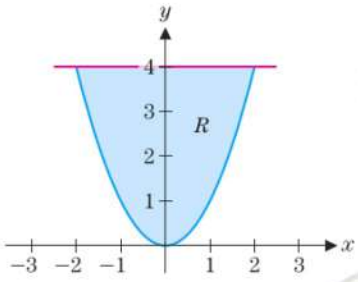




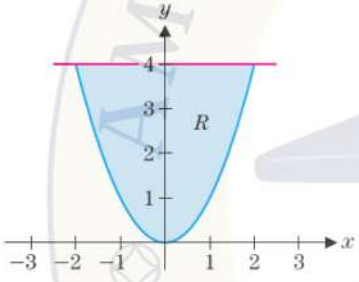
AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

لتكن R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$ و $y = 4$.
أحسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران R حول المستقيم المذكور.

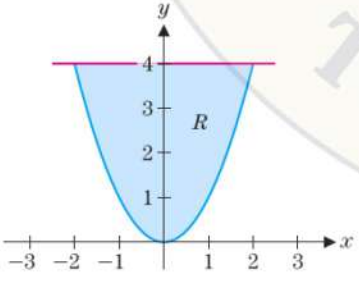
$y = 4$



المحور y



$y = 6$

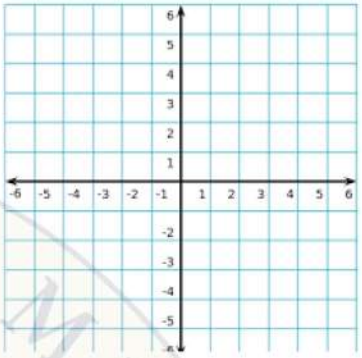


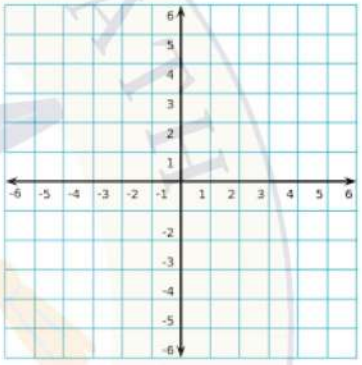
AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575
عمرو البيومي

يتكو ن مجسم من دوران المنطقة المذكورة حول المستقيم المذكور. احسب الحجم بالضبط

المساحة المحدودة بواسطة $y = e^x, x = 0, x = 2$ و $y = 0$ حول

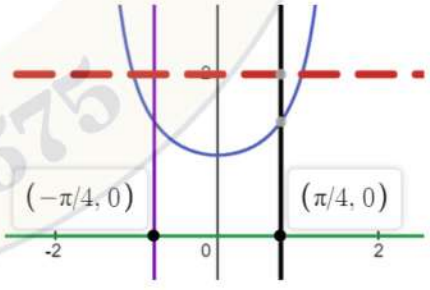
(a) المحور y؛ (b) $y = -2$

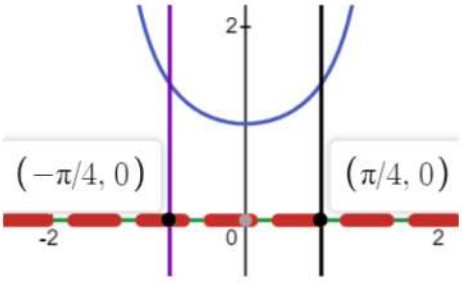




المنطقة المحدودة بواسطة $y = \sec x, y = 0, x = -\pi/4$

و $x = \pi/4$ حول (a) $y = 2$؛ (b) المحور x

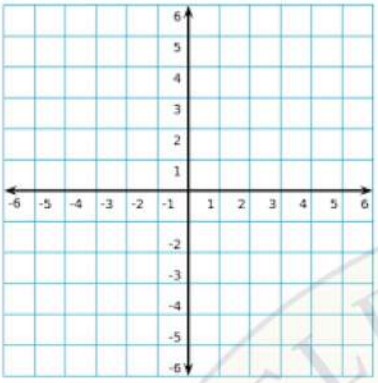




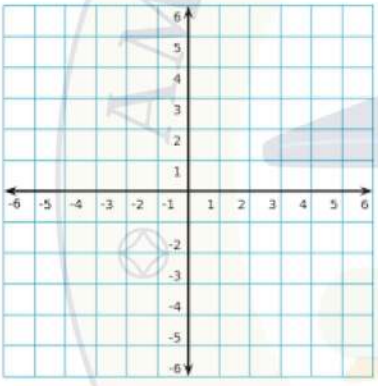
AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

لتكنّ R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2, y = 0$ و $x = 1$. احسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران R حول المستقيم المذكور.

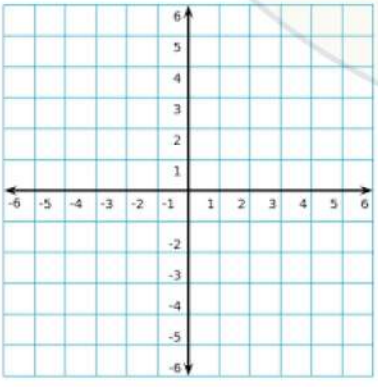
(a) المحور y



(b) المحور x



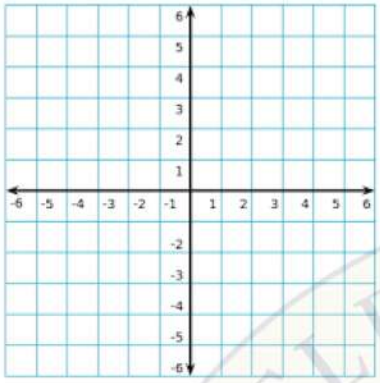
(c) $x = 1$



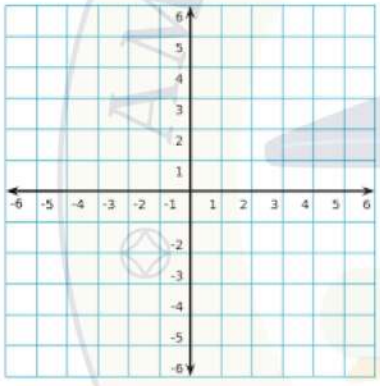
AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

لتكنّ R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2, y = 0$ و $x = 1$. احسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران R حول المستقيم المذكور.

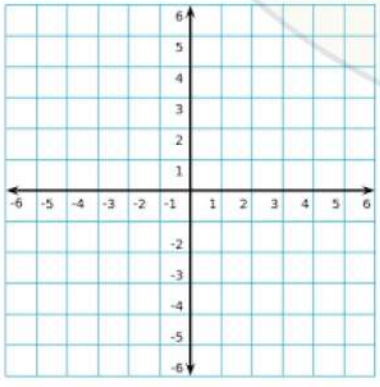
$y = 1$ (d)



$x = -1$ (e)



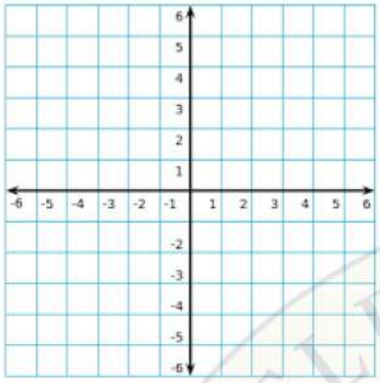
$y = -1$ (f)



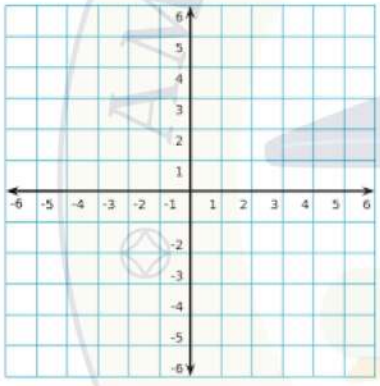
AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

. لتكنّ R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = x, y = -x$ و $x = 1$. احسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران R حول المستقيم المذكور.

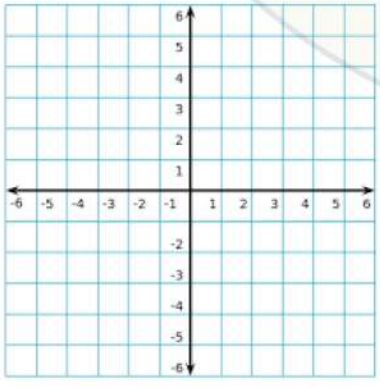
(a) المحور y



(b) المحور x



(d) $y = 1$



AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

، لتكنّ R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = 4 - 2x$ والمحور x والمحور y. احسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران R حول المستقيم المذكور.

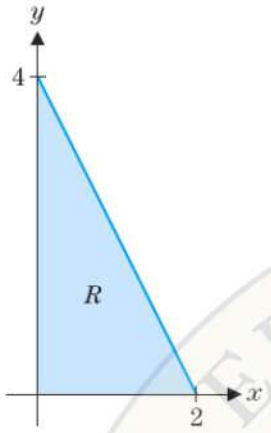
$y = 4$ (c)

$y = -4$ (d)

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

لتكنّ R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = 4 - 2x$ والمحور x والمحور y. احسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران R حول المستقيم المذكور.

(e) $x = 2$

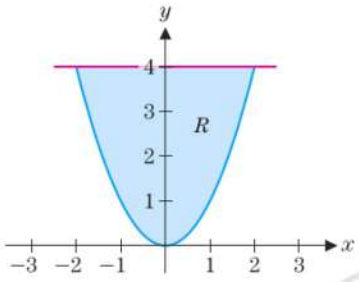


(f) $x = -2$

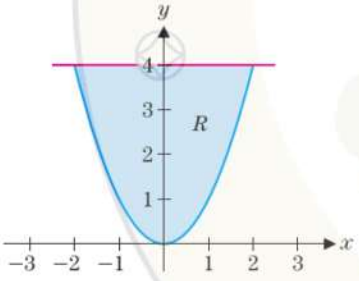
AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

لتكن R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$ و $y = 4$.
أحسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران R حول المستقيم المذكور.

$y = -2$



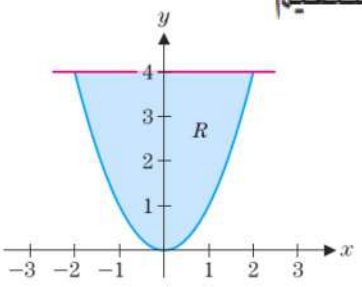
$y = 6$



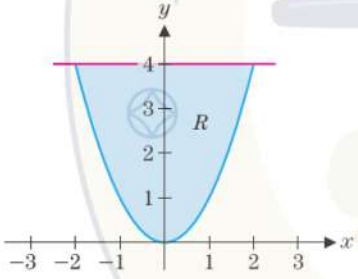
AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

لتكن R هي المنطقة المحدودة بواسطة $y = x^2$ و $y = 4$.
أحسب حجم المجسّم الذي تكوّن من دوران R حول المستقيم

$y = -4$



$x = -4$

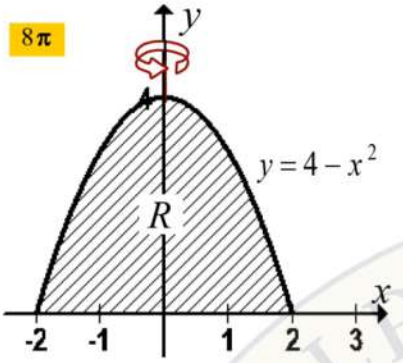


AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

لتكن R المنطقة المحدودة بالمنحنى $y = 4 - x^2$ والمحور x

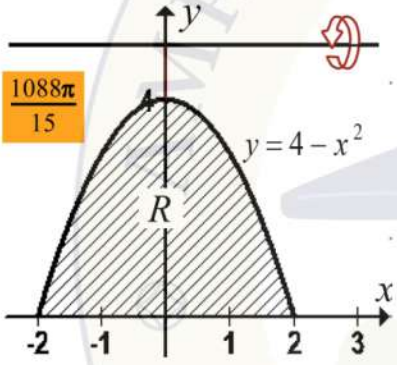
a) أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة R حول المحور y

8π



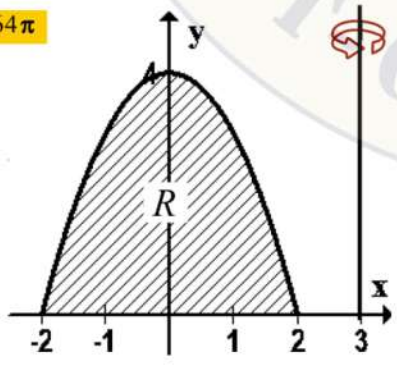
b) أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة R حول المستقيم $y = 5$

$\frac{1088\pi}{15}$



c) أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة R حول المستقيم $x = 3$

64π



MR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T 0544560575

سنوات سابقة

Compute the volume of the solid formed by revolving the region between

$y = x^2 , 2 - x = y^2$ about the $y - axis$

أوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بين منحنيي $y = x^2 , 2 - x = y^2$ حول المحور y .

Let R be the region bounded by

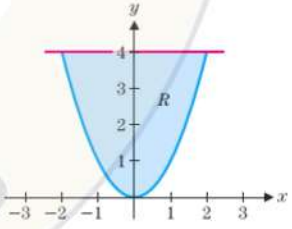
$y = x^2 , y = 4$.

Compute the volume of the solid formed by revolving R about the line $x = -4$.

لتكن R هي المنطقة المحدودة بواسطة

$y = x^2 , y = 4$

جد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة المحدودة حول المستقيم $x = -4$.



$$a)\ v = \int_0^4 \pi(\sqrt{y})^2\ dy$$

$$a)\ v = \int_{-2}^2 \pi[4 - x^2]^2\ dx$$

$$a)\ v = \int_0^4 \pi\left[\left(4 + \sqrt{y}\right)^2 - \left(4 - \sqrt{y}\right)^2\right] dy$$

$$a)\ v = \int_0^4 \pi\left[\left(2 + \sqrt{y}\right)^2 - \left(2 - \sqrt{y}\right)^2\right] dy$$

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
ت-0544560575

احسب حجم المجسم الذي يتكون من دوران

المنطقة المحدودة بواسطة $y=x^2$ و $x=y^2$ حول المحور x=1

A)	B)	C)	D)
$\frac{11\pi}{30}$	$\frac{1\pi}{3}$	$\frac{15\pi}{7}$	$\frac{11\pi}{3}$

احسب حجم المجسم الذي يتكون من دوران

المنطقة المحدودة بواسطة $y=x^2$ و $x=y^2$ حول المحور y

A)	B)	C)	D)
$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{1\pi}{3}$	$\frac{15\pi}{7}$	$\frac{11\pi}{3}$

احسب حجم المجسم الذي يتكون من دوران

المنطقة المحدودة بواسطة $y=\sqrt{x}, y=2$ و $x=0$ حول المحور y=4

A)	B)	C)	D)
$\frac{224\pi}{15}$	$\frac{171\pi}{3}$	$\frac{15\pi}{7}$	$\frac{11\pi}{3}$

احسب حجم المجسم الذي يتكون من دوران

المنطقة المحدودة بواسطة $y=\sqrt{x}, y=2$ و $x=0$ حول المحور x

A)	B)	C)	D)
$\frac{32\pi}{5}$	$\frac{71\pi}{3}$	$\frac{15\pi}{7}$	$\frac{11\pi}{3}$

احسب حجم المجسم الذي يتكون من دوران

المنطقة المحدودة بواسطة $y=x^2, y=4-x^2$ حول المحور y= 4

A)	B)	C)	D)
$\pi(\frac{64\sqrt{2}}{4})$	$\pi(\frac{64\sqrt{2}}{3})$	$\pi(\frac{64\sqrt{2}}{5})$	$2\pi(\frac{64\sqrt{2}}{4})$

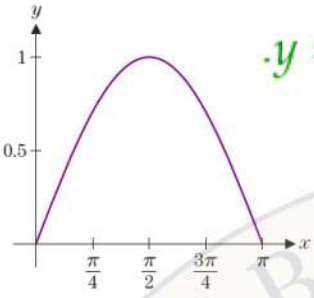
احسب حجم المجسم الذي يتكون من دوران

المنطقة المحدودة بواسطة $y=x^2, y=4-x^2$ حول المحور x

A)	B)	C)	D)
$\pi(\frac{64\sqrt{2}}{4})$	$\pi(\frac{64\sqrt{2}}{3})$	$\pi(\frac{64\sqrt{2}}{5})$	$2\pi(\frac{64\sqrt{2}}{4})$

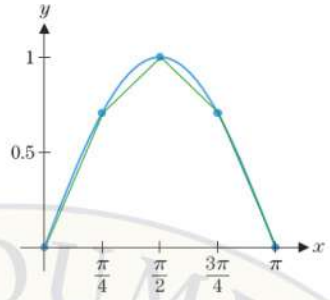
AMR ELBAYOUMY MATH الرحيق اكاديمي 2025 T-0544560575

طول القوس ومساحة السطح



$y = \sin x$.

$y = \sin x$



تقريب أربع قطع مستقيمة
$y = \sin x$

طول القوس سابقا

القطع المستقيمة النقاط $(0,0)$، $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$، $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$، $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ و $(\pi, 0)$ على المنحنى $y = \sin x$. يعطى تقريب لطول القوس s للمنحنى من ناتج جمع أطوال هذه القطع المستقيمة:

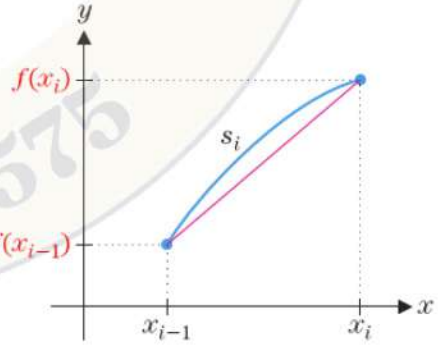
$$s \approx \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$+ \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \approx 3.79$$

n	الطول
8	3.8125
16	3.8183
32	3.8197
64	3.8201
128	3.8202

طول قوس $y = f(x)$ على الفترة $[a, b]$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$



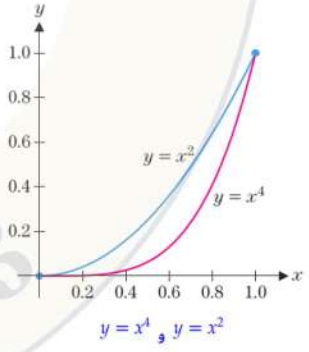
تقريب المستقيم لطول القوس

2025
TOUATI 0544560575

جـــــد طول القوس الخاص بجزء من منحنى $y = \sin x$ مع $0 \le x \le \pi$.

جـــــد طول قوس لجزء من منحنى $y = x^2$ مع $0 \le x \le 1$.

جـــــد طول القوس لجزء من المنحنى $y = x^4$ مع $0 \le x \le 1$ وقارنه بطول قوس جزء من المنحنى $y = x^2$ على الفترة نفسها.



$y = x^4$ و $y = x^2$

جـــــد طول قوس لجزء من منحنى $y = 2x + 1, 0 \le x \le 2$

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

جـــــد طول قوس لجزء من منحنى $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x, 1 \le x \le 2$

جـــــد طول قوس لجزء من منحنى $x = \frac{1}{8}y^4 + \frac{1}{4y^2}, -2 \le y \le -1$

جـــــد طول قوس لجزء من منحنى $x = e^{y/2} + e^{-y/2}, -1 \le y \le 1$

جـــــد طول قوس لجزء من منحنى $y = 2\ln(4 - x^2), 0 \le x \le 1$

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T: 0544560575

أوجد طول قوس لجزء من منحنى الدالة $y=\frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}$ مع $0\le x\le 3$

جـــــد طول قوس لجزء من منحنى $y=\frac{1}{3}x^{3/2}-x^{1/2}, 1\le x\le 4$

جـــــد طول قوس لجزء من منحنى $y=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2x}, 1\le x\le 3$

أوجد طول قوس لجزء من منحنى الدالة $y=\sqrt{1-x^2}$ **مع** $-1\le x\le 1$

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

جـــــد طول قوس لجزء من منحنى $f'(x)=\sqrt{x^2-2x}$ على الفترة $[3,2]$

جـــــد طول قوس لجزء من منحنى $f(x)=\int_{-2}^{x}\sqrt{4t^2-1}\,dt$ علي الفترة $[-2,0]$

AMR ELBAYOUMY MATH
2025
T-0544560575

ضع تكامل طول المنحنى ثم قرّب التكامل باستخدام طريقة عددية.

$y = x^3, -1 \le x \le 1$

$y = x^3, -2 \le x \le 2$

$y = \tan x, 0 \le x \le \pi/4$

$y = \ln x, 1 \le x \le 3$

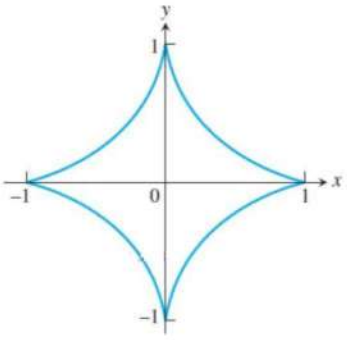
AMR ELDAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

$$y = \int_0^x u \sin u \, du, 0 \le x \le \pi$$

$$y = \int_0^x e^{-u} \sin u \, du, 0 \le x \le \pi$$

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

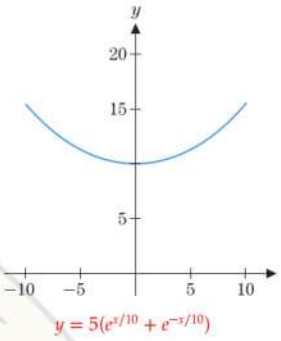
ارسم واحسب طول شكل **نجمي** معرف بالمعادلة
$x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.



AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

7.2117 أوجد مساحة السطح المتولد من تدوير منحنى الدالة $y = \cos x$; $0 \le x \le \pi/2$ حول المحور x

لربط كابل بين عمودين متساويين في الارتفاع والبعد بينهما 20 m. يمكن توضيح أنّ مثل هذا الكابل المعلق معادلته سلسلة، وعموماً معادلته $y = a\cosh x/a = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$. في هذه الحالة، على فرض أنّ الكابل يتخذ شكل $y = 5(e^{x/10} + e^{-x/10})$، لأجل $-10 \le x \le 10$، كما هو ظاهر في الشكل . كم يبلغ طول هذا الكابل؟



عند تعليق حبل بين عمودين البعد بينهما 40 ft.
إذا كان الحبل يبدو أنّه يتخذ شكل سلسلة معادلته $y = 10(e^{x/20} + e^{-x/20})$، $-20 \le x \le 20$ فاحسب طول الحبل.

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

عند تعليق حبل بين عمودين البعد بينهما 60 ft.
إذا كان الحبل يبدو أنّه يتخذ شكل سلسلة معادلته
$y = 15(e^{x/30} + e^{-x/30})$، $-30 \le x \le 30$ فاحسب طول الحبل.

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

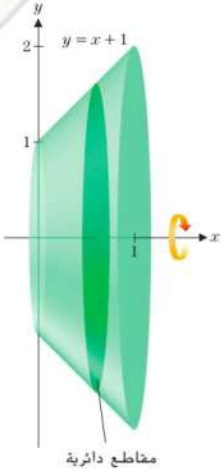
مساحة السطح

مساحة سطح مجسّم ناتج عن الدوران

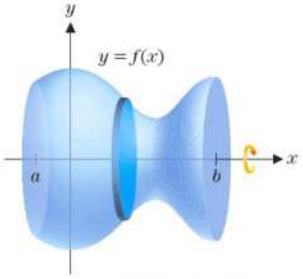
$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

مخروط مسطح

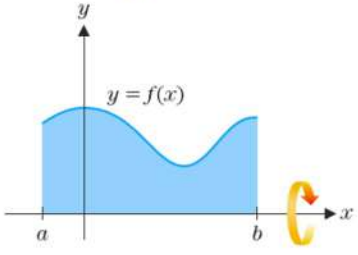
مخروط دائري قائم



مقاطع دائرية



الدوران حول المحور x



مساحة سطح مجسّم ناتج عن الدوران

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx,$$

جـــــد مساحة سطح متولّد من تدوير منحنى $y = x^4$، لكل $0 \le x \le 1$، حول المحور x.

ضع التكامل لمساحة السطح الناتج من الدوران وقرّب التكامل باستخدام طريقة عددية.

$y = x^2$، $0 \le x \le 1$، تم دورانها حول المحور x

$y = \sin x$، $0 \le x \le \pi$، تم دورانها حول المحور x

$y = 2x - x^2$، $0 \le x \le 2$، تم دورانها حول المحور x

AMR ELBAYOUMY MATH
2025
T-0544560575

$$S = \int_a^b 2\pi\ f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\ dx$$

$y = e^x$، $0 \le x \le 1$، تم دورانها حول المحور x

$y = \ln x$، $1 \le x \le 2$، تم دورانها حول المحور x

$y = \cos x$، $0 \le x \le \pi/2$، تم دورانها حول المحور x

$y = \sqrt{x}$، $1 \le x \le 2$، تم دورانها حول المحور x

AMR ELDAYOUMI MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

أوجد طول المنحنى في $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right]$ حيث $f'(x) = \sqrt{(\tan x)^2 - 1}$

a) 0.34

b) 68

c) 46

d) غير ذلك

أوجد طول القوس $y = -x + 3$ من $x = 0$ إلى $x = 2$

a) 2.828

b) غير ذلك

c) 1.43

d) 1.02

أوجد طول القوس $y = x^4$ لكل $-1 \leq x \leq 1$

a) 5.6

c) 1.23

b) غير ذلك

d) 3.2

أوجد طول القوس $y = \sin 2x$ لكل $0 \le x \le \pi$

a)7.01

b) 6.23

c)غير ذلك

d) 5.2

أوجد طول المنحنى في $[0, 3]$ حيث $f'(x) = x\sqrt{x^2+2}$

a) 12

b) 21

c) 13

d) غير ذلك

أوجد مساحة السطح الناتج من دوران المنطقة المحدودة حول محور x حيث $y = 1 - x^2$ لكل $0 \le x \le 1$

a)5.48

b) 5.84

c)غير ذلك

d) 5.2

أوجد مساحة السطح الناتج من دوران المنطقة المحدودة حول محور x حيث $y = cos^2 x$ لكل $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

a)7 b) 6

c)غير ذلك d) 5

أوجد مساحة السطح الناتج من دوران المنطقة المحدودة حول محور x حيث $y = cos^2 x$ لكل $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

a)7 b) 6

c)غير ذلك d) 5

أوجد طول القوس لمنحنى الدالة $f(x)$ حيث $f'(x) = \sqrt{4x^2 - 1}$ $[-2, -1]$

A) $\int_{-2}^{-1} \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$

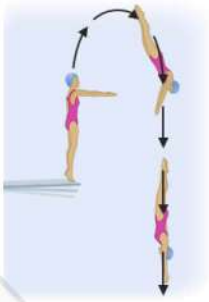
B) $\int_{-2}^{-1} 2x\, dx$

C) $\int_{-2}^{-1} 4x\, dx$

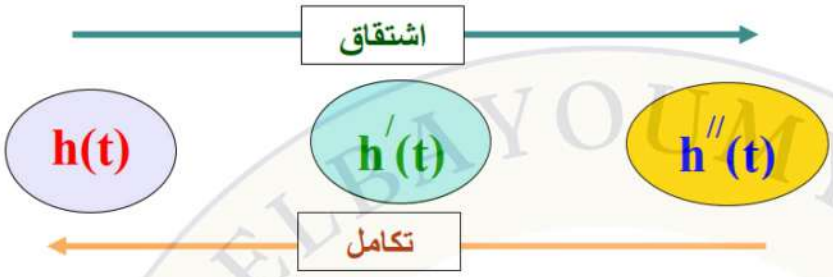
D) $\int_{-2}^{-1} -2x dx$

حركة المقذوفات

الحركه في بعدين



المقذوفات الرأسية



$$h''(t) = -32 \ ft/s^2 \quad \underline{\text{أو}} \quad h''(t) = -9.8 \ m/s^2$$

	لأعلى	لأسفل
التسارع (العجلة)	$-9.8 \ m/s^2$ $-32 \ ft/s^2$	$-9.8 \ m/s^2$ $-32 \ ft/s^2$
السرعة المتجهة	+	-
الإزاحة	+	-

زمن الحركة الرأسية كاملة: (الزمن الذي قطعه الجسم في الهواء ـ زمن الاصطدام ـ زمن العودة إلى نقطة القذف .....)

عندما تنعدم المسافة أي نضع $h(t) = 0$

زمن أقصى ارتفاع: (زمن القيمة العظمى للارتفاع)

عندما تنعدم السرعة أي نضع $h'(t) = 0$

أقصى ارتفاع: (القيمة العظمى للارتفاع)

نعوض بزمن أقصى ارتفاع في المسافة $h(t)$

حدد الشروط الابتدائية $y(0)$ و $y'(0)$

أُسقِط جسم من ارتفاع 80 ft.

أُسقِط جسم من ارتفاع 100 ft.

أطلق جسم من ارتفاع 60 ft مع سرعة متجهة صعوداً 10 ft/s.

أطلق جسم من ارتفاع 20 ft مع سرعة متجهة نزولاً 4 ft/s.

يسقط غطاس من ارتفاع 30 ft فوق الماء (ارتفاع منصة الغطس الأولمبية نفسه تقريبًا). ما السرعة المتجهة للغطاس لحظة الاصطدام؟

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

اكتب معادلة السرعة ومعادلة الارتفاع بحل المعادلة التفاضلية بالشروط الابتدائية التالية:

$$h''(t) = y''(t) = -16\,\mathrm{m/s^2}$$

$$y'(0) = 10 \quad , \quad y(0) = 120$$

MR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

على فرض أن قطرات المطر تسقط من غيمة على أرتفاع 900 مترا فوق سطح الأرض. بتجاهل مقاومة الهواء. ما هي سرعة سقوط قطرة المطر عند ارتطامها بالأرض ؟

تم قذف كره للأعلى بشكل مستقيم من الأرض بسرعه متجهه ابتدائية $19.6\,m/s$. بتجاهل مقاومة الهواء.

أوجد معادلة لارتفاع الكره عند أي زمن

حدد القيمة العظمى للارتفاع

مقدار الزمن الذي قطعته الكره في الهواء.

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

(3) سقطت كرة رأسيًا من ارتفاع 80 قدم، وفي نفس الوقت تم قذف كرة أخرى من الأرض إلى الأعلى بسرعة 40 قدم/ثانية.

حدد الارتفاع الذي تلتقي عنده الكرتان.

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

(1) إذا كان أقصى ارتفاع تصل إليه كرة سلة لتسديد الكرة هو 1.35 m،

أوجد السرعة المتجهة الابتدائية التي قُذفت بها الكرة ليصل اللاعب إلى هذا الارتفاع.

إذا كان ارتفاع لوح الغطس 4.5 m فوق مستوى سطح المياه وبدأ الغواص بسرعة متجهة ابتدائية 2.4 m/s (في اتجاه لأعلى). كم بلغت السرعة المتجهة للغواص عند الاصطدام (بافتراض عدم وجود مقاومة هواء)؟

يسقط غطاس من ارتفاع 120 ft فوق الماء (ارتفاع منصة الغطس في مسابقة Acapulco Cliff Diving نفسه تقريبًا). ما السرعة المتجهة للغطاس لحظة الاصطدام؟

ارتفاع نصب واشنطن 555 ft, 5 1/8 in. في تجربة شهيرة، أُسقطت كرة بيسبول من أعلى النصب التذكاري لمعرفة إذا ما كان اللاعب يمكنه الإمساك بها. ما مدى سرعة انطلاق الكرة؟

يتضمّن المخطط التالي للذئب البري إطلاق نفسه في الهواء باستخدام منجنيق. إذا تم دفع الذئب البري رأسيًا من الأرض بسرعة متجهة ابتدائية $19.6\ m/s$ جـــــد معادلة لارتفاع الذئب في أي زمن t. جـــــد أقصى ارتفاع له ومقدار الزمن الذي يمضيه في الهواء وسرعته المتجهة عندما يرتد بقوة مرة أخرى إلى داخل المنجنيق.

تم قذف كرة للأعلى بشكل مستقيم من الأرض بسرعة متجهة ابتدائية $19.6\ m/s$. بتجاهل مقاومة الهواء، جـــــد معادلة لارتفاع الكرة عند أي زمن t. وأيضًا حدّد القيمة العظمى للإرتفاع ومقدار الزمن الذي قطعته الكرة في الهواء.

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

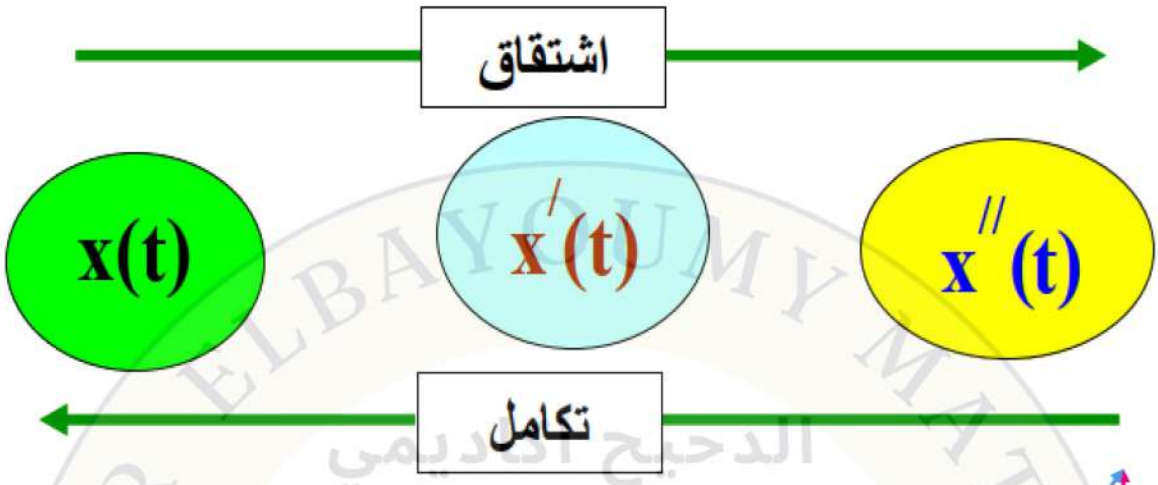
لقد أفادت التقارير أنّ نجم كرة السلة السابق مايكل جوردان كانت له قفزة عمودية بلغت 135 cm. بتجاهل مقاومة الهواء، ما هي السرعة المتجهة الابتدائية المطلوبة للقفز بهذا الارتفاع؟

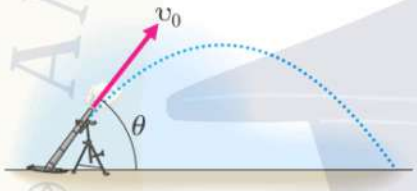
أحد اللاعبين له "قفزة" رأسية تبلغ 20 in. ما السرعة المتجهة الابتدائية الضرورية للقفز بهذا الارتفاع؟

AMR ELBAYOUMY MATH
الرجيح اكاديمي
2025
T-0544560575

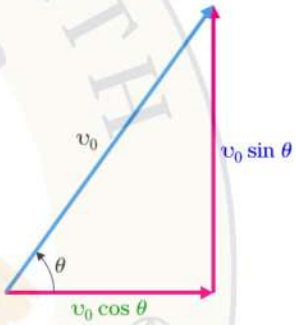
الحركه في بعدبن

المركبة الأفقية





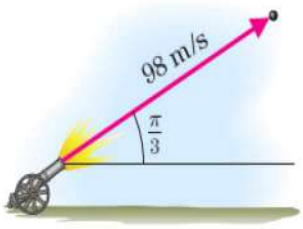
مسار المقذوفات



المركّبات الرأسية والأفقية للسرعة المتجهة

	الشروط الابتدائية	استراتيجية الحل
1) زمن الانطلاق: من المركبة الرأسية	$y'(0) = v_o \sin\theta$ $y(0) = 0$	نبدأ بـ $y''(t) = -9.8 \ m/s^2$ أو $y''(t) = -32 \ ft/s^2$ ونجري عمليات التكامل ثم نضع $y(t) = 0$ فينتج زمن الانطلاق
2) مدى المقذوف: من المركبة الأفقية	$x'(0) = v_o \cos\theta$ $x(0) = 0$	نبدأ بـ $x''(t) = 0$ ونجري عمليات التكامل ثم نعوض بزمن الانطلاق في $x(t)$ فينتج مدى المقذوف

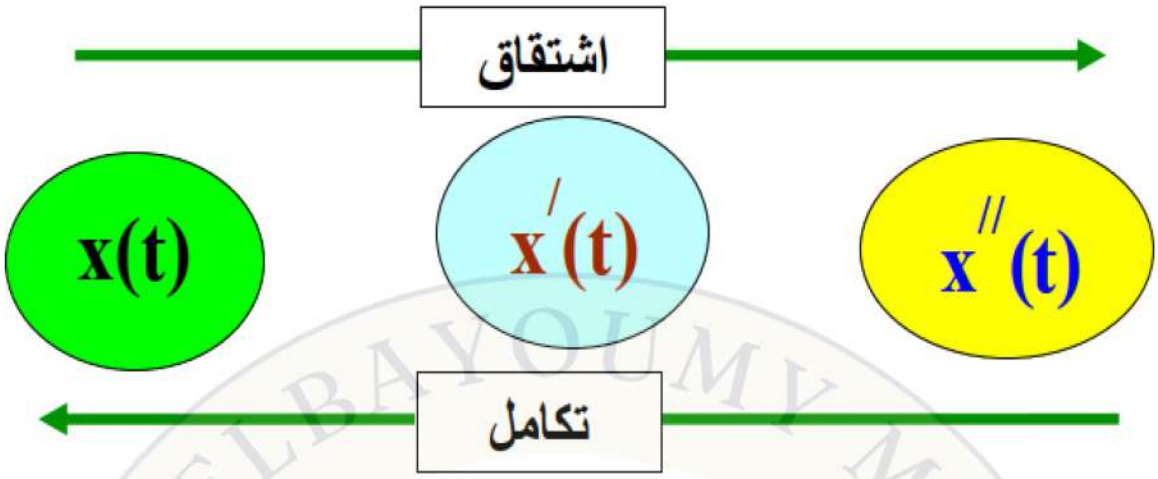
يطلق جسم ما بزاوية $\theta = \pi/3$ راديان من الأفق مع سرعة ابتدائية $98\ \text{m/s}$. حدّد زمن التحليق والمدى الأفقي.

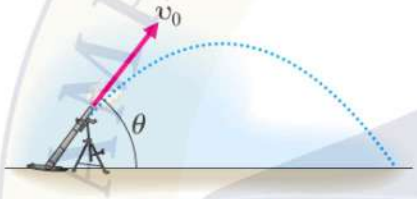


جـــــد زمن التحليق والمدى الأفقي لجسم أطلق بزاوية $30°$ مع سرعة ابتدائية $40\ \text{m/s}$. كرر العملية مع زاوية $60°$.

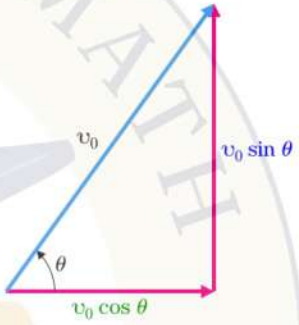
AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

المركبة الرأسية





مسار المقذوفات



المركّبات الرأسية والأفقية للسرعة المتجهة

الإطلاق من ارتفاع $y = k$ فوق سطح الأرض

	الشروط الابتدائية	استراتيجية الحل
1) زمن التحليق: من المركبة الأفقية	$x'(0) = v_o \cos\theta$ $x(0) = 0$	نبدأ بـ $x''(t) = 0$ ونجري عمليات التكامل ثم نضع المسافة الأفقية $= x(t)$ فينتج زمن التحليق
2) ارتفاع المقذوف: من المركبة الرأسية	$y'(0) = v_o \sin\theta$ $y(0) = k$	نبدأ بـ $y''(t) = -9.8\ m/s^2$ أو $y''(t) = -32\ ft/s^2$ ونجري عمليات التكامل ثم نعوض بزمن التحليق في $y(t)$ فينتج ارتفاع المقذوف

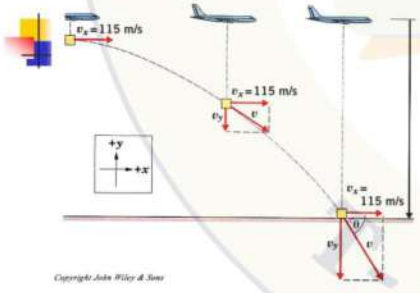
يرمي لاعب بيسبول كرة باتجاه القاعدة الأولى على بعد 120 ft يطلق الكرة من ارتفاع 5 ft مع سرعة ابتدائية 120 ft/s بزاوية 5° أعلى الأفق. جـــــد ارتفاع الكرة عندما تصل إلى القاعدة الأولى.

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
0544560575

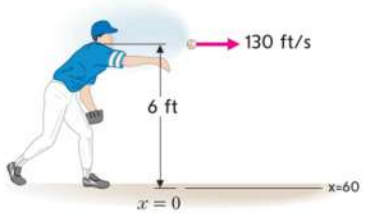
(2) تريد طائرة على ارتفاع 1050 m إسقاط إمدادات إلى موقع معيّن على الأرض،

إذا كانت للطائرة سرعة أفقية مقدارها 115 m/s، فما المسافة التي ينبغي أن تبعدها الطائرة عن الهدف عند إطلاق الإمدادات

من أجل أن تسقط في الموقع المستهدف؟



يُطلق ضارب كرة بيسبول الكرة أفقيًا من ارتفاع 6 ft مع سرعة ابتدائية 130 ft/s



اوجد معادلة الحركة الرأسية في اي زمن t

اوجد معادلة الحركة الافقية في اي زمن t

اوجد ارتفاع الكرة عندما تصل الى المنصة (على بعد $60\,ft$)

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

فينوس وليامز واحدة من أسرع الضربات في تنس السيدات. على فرض أنّها سددت ضربة من ارتفاع 3 أمتار بسرعة ابتدائية 190 km/h وبزاوية 7° تحت المركّبة الأفقية. تكون الضربة موجهة "داخل الحد" إذا مرت الكرة على شبكة ارتفاعها 0.91m وتبعد مسافة 18 m وترتطم بالأرض أمام خط التسديد على بُعد 18 m . حدّد ما إذا كانت الضربة داخل أو خارج الحد.

ارتفاع ضربة تنس

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\theta)t + y(0)$$

(1) اوجد معادلة الحركة الرأسية في أي زمن t

(2) اوجد معادلة الحركة الأفقية في أي زمن t

(3)اوجد زمن وصول الكرة إلى الشبكة

(4) اوجد ارتفاع الكرة عن الأرض عند وصول الكرة إلى الشبكة، هل ستَمرّ الكرة فوق الشبكة؟

(5) اوجد زمن التحليق للكرة

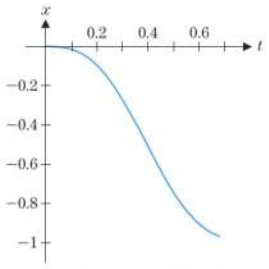
(6) اوجد المدى الأفقي للكرة

(7) هل ستكون الكرة أمام، أم خلف خط التسديد (على بعد 60ft من اللاعب)؟

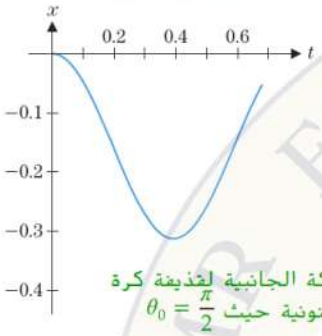
(8) اوجد معادلة الحركة بدلالة x و y

AMR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

لمعدل دوران $\omega = 2$ راديان في الثانية مع $\theta_0 = 0$. جـــد معادلة الحركة الجانبية لقذيفة جنونية ومثّلها بيانيًا لكل $0 \le t \le 0.68$. كرّر ذلك لأجل $\theta_0 = \pi/2$.

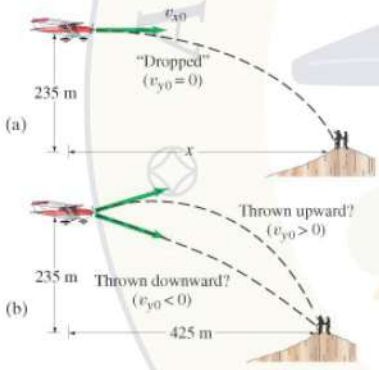


الحركة الجانبية لقذيفة كرة جنونية حيث $\theta_0 = 0$



الحركة الجانبية لقذيفة كرة جنونية حيث $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$

تريد طائرة على ارتفاع 256 ft إسقاط إمدادات إلى موقع معيّن على الأرض. إذا كان للطائرة سرعة أفقية 100 ft/s. فما المسافة التي ينبغي أن تبعدها الطائرة عن الهدف عند إطلاق الإمدادات من أجل أن تسقط في الموقع المستهدف؟ (إرشاد: استخدم المعادلة y- لتحديد زمن التحليق. ثم استخدم المعادلة x- لتحديد إلى المدى الذى ستنجرف إليه الإمدادات).



MR ELBAYOUMY MATH
الدحيح اكاديمي
2025
T-0544560575

إذا كان ارتفاع لوح الغطس ٤.٥ متراً فوق مستوى سطح المياه وبدأ الغواص بسرعة متجهة $2.4\ m/s$ في اتجاه لأعلى (. كم بلغت السرعة المتجهة للغواص عند الاصطدام بافتراض عدم وجود مقاومة هواء (؟

a) $-9.36\,m/s$

b) $14.16\,m/s$

c) $-14.16\,m/s$

d) $-11.76\,m/s$

يسقط غطاس من ارتفاع 9 أمتار فوق الماء .ما السرعة المتجهة للغطاس عند الاصطدام لحظة الاصطدام)بافتراض عدم وجود مقاومة هواء (؟

a) - 4.33 m / s

b) - 9.39 m / s

c) - 13.33m / s

d) -18.39 m /s

أسقط جسم من ارتفاع 24 متراً . حدد الشروط الابتدائية $y(0)$ و $y'(0)$

a) $y(0)=0\,,\ y'(0)=24$

b) $y(0)=-24\,,\ y'(0)=0$

c) $y(0)=24\,,\ y'(0)=-9.8$

d) $y(0)=24\,,\ y'(0)=0$

أسقط جسم من ارتفاع 6 أمتار مع سرعةمتجهة نزولاً $1.2\ m/s$. حدد الشروط الابتدائية $y(0)$ و $y'(0)$

a) $y(0)=-6\ ,\ y'(0)=-1.2$

b) $y(0)=6\ ,\ y'(0)=-1.2$

c) $y(0)=6\ ,\ y'(0)=1.2$

d) $y(0)=-6\ ,\ y'(0)=1.2$

تم قذف كرة للأعلى بشكل مستقيم من الأرض بسرعة ابتدائية 19.6 m/s

A) **19.6 m**

B) **4.9 *m***

C) **9.8 *m***

D) **39.2 *m***

أسقط جسم من السكون من ارتفاع 100 ft

a) $y^{/}=100\ \ ,y=0$

b) $y^{/}=100\ \ ,y=100$

c) $y^{/}=0\ \ \ \ ,y=100$

d) $y^{/}=0\ \ ,y=0$

يسقط غواص من ارتفاع 30m فوق الماء، ما السرعة المتجهة للغواص لحظة الاصطدام بالأرض بوحدة ft/s

a) -29,2 b) -24.2 c) 2.4 d) -2.4

MR ELBAYOUMY MATH الدحيح اكاديمي 2025 T 0544560575