

الوحدة السادسة: تطبيقات التكامل



تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج الإماراتية

موقع المناهج ← المناهج الإماراتية ← الصف الثاني عشر المتقدم ← رياضيات ← الفصل الثالث ← ملفات متنوعة ← الملف

تاريخ إضافة الملف على موقع المناهج: 14:23:28 2026-06-07

ملفات اكتب للمعلم اكتب للطالب | اختبارات الكترونية | اختبارات | حلول | عروض بوربوينت | أوراق عمل
منهج انجليزي | ملخصات وتقارير | مذكرات وبنوك | الامتحان النهائي | للمدرس

المزيد من مادة
رياضيات:

إعداد: محمد عمر الخطيب

التواصل الاجتماعي بحسب الصف الثاني عشر المتقدم



صفحة المناهج
الإماراتية على
فيسبوك

الرياضيات

اللغة الانجليزية

اللغة العربية

التربية الاسلامية

المواد على تلغرام

المزيد من الملفات بحسب الصف الثاني عشر المتقدم والمادة رياضيات في الفصل الثالث

1 : أسئلة موضوعية في الرياضيات - إيجاد المساحة المحصورة بين المنحنيات وفق هيكل الوزارة 2026

1

2 : أسئلة موضوعية في التكامل وفق هيكل الوزارة العام الحالي 2026

2

3 : الأسئلة الموضوعية في الرياضيات للعام الحالي 2026

3

4 : أسئلة موضوعية في الرياضيات وفق هيكل الوزارة للعام 2026

4

5 : أسئلة موضوعية في التكامل المحدود وفق هيكل الوزارة 2026

5

الحل

الصف الثاني عشر متقدم

2026/2025

الوحدة السادسة تطبيقات التكامل

1-6 المساحة المحصورة بين منحنين

2-6 الحجم : شرائح / أقراص وحلقات

4-6 طول القوس ومساحة السطح

5-6 حركة المقذوفات

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتفوق

إعداد : محمد عمر الخطيب

الحل

الحل

الوحدة السادسة : تطبيقات التكامل /// الدرس الأول : المساحة بين منحنين

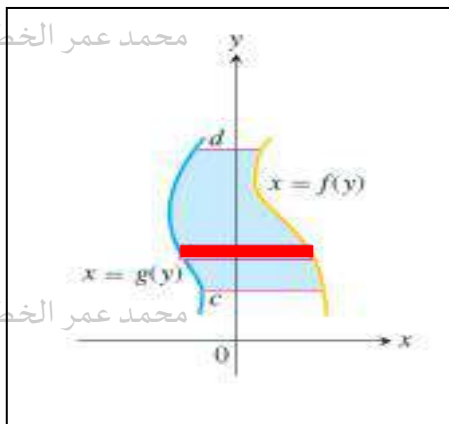
المساحة بين منحنين

المساحة

الحالة الثانية : المكامل (dy)

الشريحة عمودية على محور y

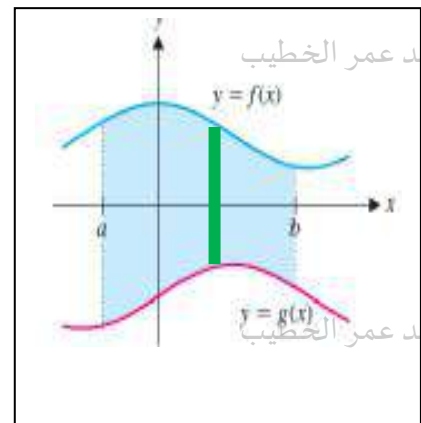
عرض الشريحة dy



الحالة الأولى : المكامل (dx)

الشريحة عمودية على محور x

عرض الشريحة dx



الحد الأعلى للشريحة $y = f(x)$

طول الشريحة
 $f(x) - g(x)$

عرض الشريحة dx

الحد الأدنى للشريحة $y = g(x)$

حدود الشريحة

من محور x

وهي من a الى b

الحد الايسر للشريحة

$x = g(y)$

طول الشريحة
 $f(y) - g(y)$

عرض الشريحة dy

حدود الشريحة

من محور y

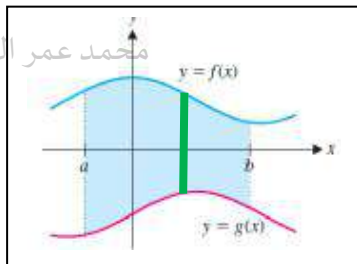
وهي من c الى d

الشريحة عمودية على محور X

(عرض المستطيل) هو dx

(طول المستطيل) هو $f(x) - g(x)$ إذا كانت كل من $f(x)$ و $g(x)$ دوال متصلة على الفترة $[a, b]$ حيث $f(x) \geq g(x)$ فإن

المساحة المحصورة بين المنحنيين تعطى بالتكامل



$$A = \int_a^b [\text{الدالة الأعلى} - \text{الدالة الأدنى}] dx$$

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

خطوات إيجاد المساحة

له الأولوية

ارسم الدوال $\iff$ ظلل المنطقة المطلوبة $\iff$ ارسم الشريحة وحدد المكامل (أم dy) $\iff$ أوجد حدود التكامل (نقاط التقاطع) $\iff$ كامل $\iff$ عوض الحدود لإيجاد المساحة

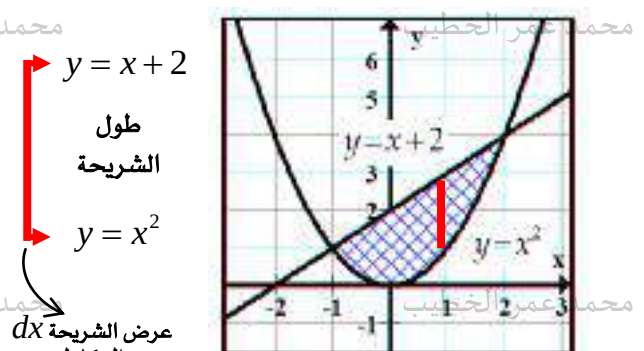
أوجد المساحة المحصورة بين الدالتين $y = x^2$ ، $y = x + 2$

$$A = \int_{-1}^2 (x+2) - x^2 dx$$

$$= \int_{-1}^2 2 + x - x^2 dx$$

$$= \left[2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2$$

$$= \frac{9}{2}$$



حدود الشريحة وهي

حدود التكامل من محور X

(1) أوجد المساحة المحصورة بين الدالتين $y = x^2 - 9$ ، $y = 3 - x$

$$A = \int_{-4}^3 (3-x) - (x^2-9) dx$$

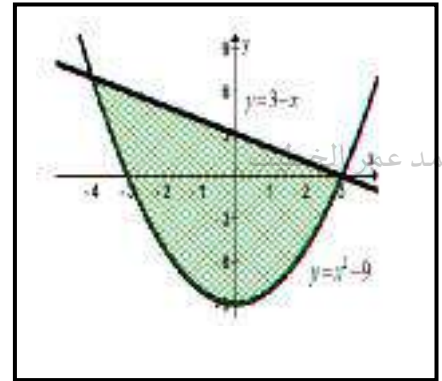
$$= \int_{-4}^3 (12 - x - x^2) dx$$

$$= 12x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_{-4}^3$$

$$= \frac{343}{6}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب



نظام التقاطع من الرسم

هي 3 ، -4

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(2) أوجد المساحة المحصورة بين الدالتين $y = x^3 - 4x$ ، $y = \sin \pi x$

$$A = \int_0^2 (\sin \pi x - (x^3 - 4x)) dx$$

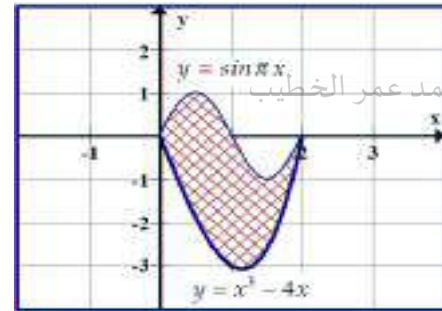
$$= \int_0^2 (\sin \pi x - x^3 + 4x) dx$$

$$= \left[-\frac{\cos \pi x}{\pi} - \frac{x^4}{4} + 2x^2 \right]_0^2$$

$$= 4$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب



نظام التقاطع من الرسم

هي 0 ، 2

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(3) أوجد المساحة المحصورة بين الدالتين $y = 1$ ، $y = \cos^2 x$

$$A = \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 x) dx$$

$$= \int_0^{\pi} \sin^2 x dx$$

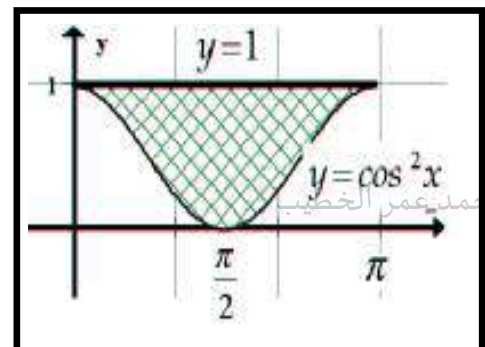
$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right) \Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب



نظام التقاطع من الرسم

هي 0 ، pi

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(1) أوجد المساحة المحصورة بين الدالتين $f(x) = \frac{2}{x+1}$ و $g(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ والمستقيم $x=0$

حيث نقطة التقاطع $x=1$

$$A = \int_0^1 \frac{2}{x+1} - \frac{2x}{x^2+1} dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

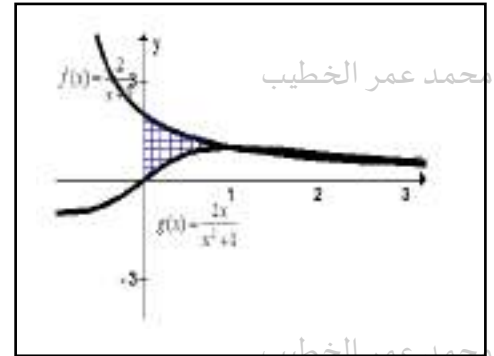
$$= 2 \ln|x+1| - \ln|x^2+1| \Big|_0^1$$

$$= 2 \ln 2 - \ln 2$$

$$= \ln 2 = 0.69$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب



محمد عمر الخطيب

ملاحظة (استفد من التماثل)

(2) أوجد المساحة المحصورة بين الدالتين $f(x) = \frac{6}{x^2+1}$ و $g(x) = 3$

$$A = 2 \int_0^1 \frac{6}{x^2+1} - 3 dx$$

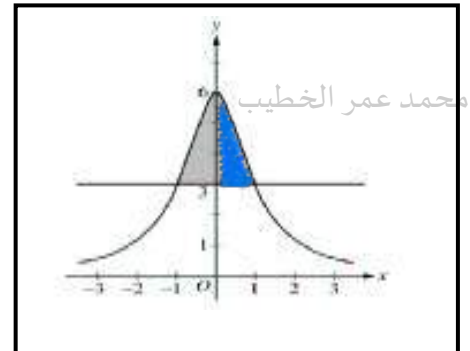
محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= 2 [6 \tan^{-1} x - 3x]_0^1$$

$$= 3\pi - 6$$

$$= 3.42$$



محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(3) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = |x|$ و $y = 4xe^{-x^2}$ حيث نقطة التقاطع $\sqrt{\ln 4}$

$$A = \int_0^{\sqrt{\ln 4}} 4xe^{-x^2} - |x| dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= \int_0^{\sqrt{\ln 4}} 4xe^{-x^2} - x dx$$

$$= -2 \int_0^{\sqrt{\ln 4}} -2xe^{-x^2} dx - \int_0^{\sqrt{\ln 4}} x dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= -2e^{-x^2} - \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{\ln 4}}$$

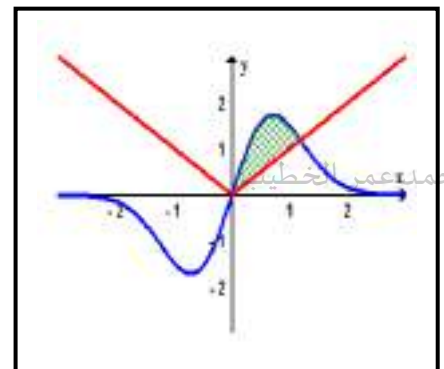
$$= \frac{3}{2} - \ln 2$$

$$= 0.8$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب



$$|x| = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$

ملاحظة: جزء المساحة عندما يتغير ارتفاع الشريحة

(عندما تتغير احدى الدوال)

(1) أوجد المساحة المحصورة بين الدالتين ومحور x

$$A_1 = \int_0^1 x^2 dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$A_2 = \int_1^2 2-x dx$$

$$= 2x - \frac{x^2}{2} \Big|_1^2$$

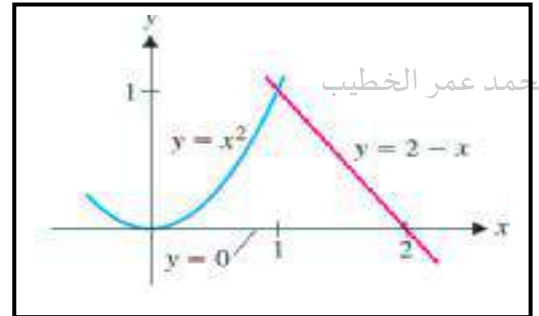
$$= \frac{1}{2}$$

$$A = A_1 + A_2$$

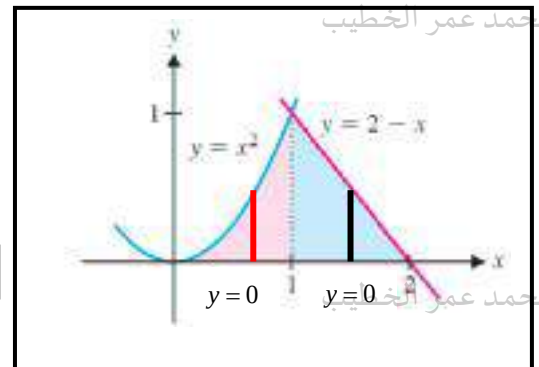
$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{5}{6}$$

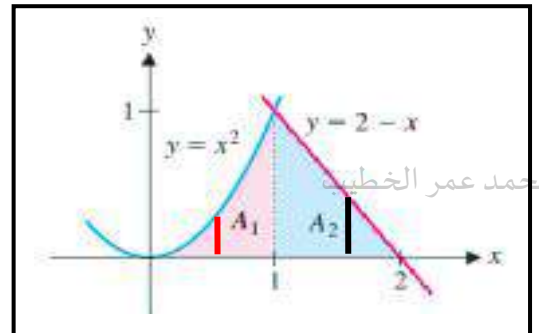
محمد عمر الخطيب



محمد عمر الخطيب



محمد عمر الخطيب



محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(2) أوجد المساحة المحصورة في الشكل المجاور

$$A_1 = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$A_2 = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \int_1^2 x^{-2} dx$$

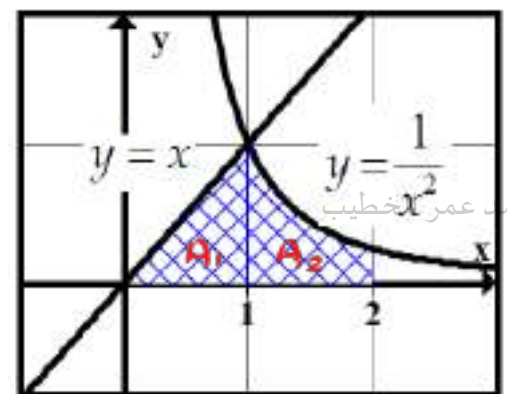
$$= \frac{x^{-1}}{-1} \Big|_1^2 = -\frac{1}{x} \Big|_1^2 = \frac{1}{2}$$

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب



(1) اوجد المساحة المحصورة في الشكل

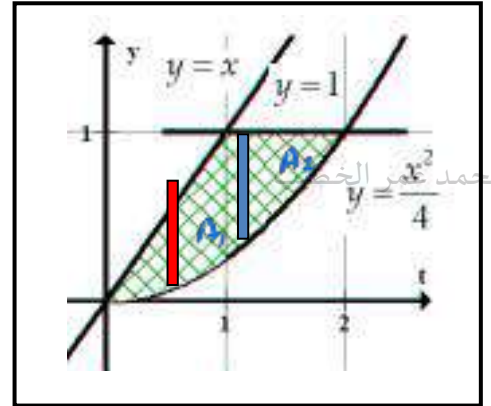
$$A_1 = \int_0^1 x - \frac{x^2}{4} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12} \Big|_0^1 = \frac{5}{12}$$

$$A_2 = \int_1^2 1 - \frac{x^2}{4} dx$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{12} \right]_1^2 = \frac{5}{12}$$

$$A = \frac{5}{12} + \frac{5}{12} = \frac{5}{6}$$

(2) اوجد المساحة المحصورة بين الدالة $f(x) = 3x - x^2$ ومحور x والمستقيمين $x=0, x=4$

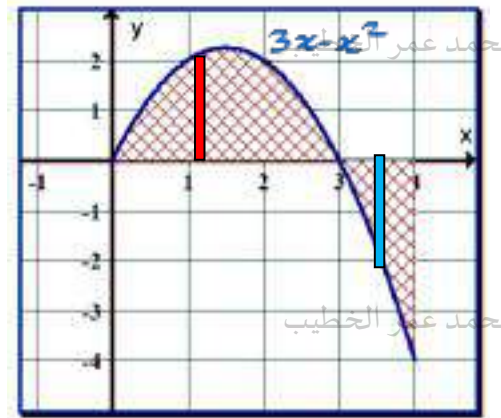
$$A_1 = \int_0^3 (3x - x^2 - 0) dx$$

$$= \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{9}{2}$$

$$A_2 = \int_3^4 0 - (3x - x^2) dx$$

$$= \left[-\frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_3^4 = -\frac{11}{6}$$

$$A = \frac{9}{2} + \frac{11}{6} = \frac{19}{3}$$



(3) اوجد المساحة المحصورة في الشكل المجاور

$$A_1 = \int_0^1 (2 - x^2 - x^2) dx$$

$$= \int_0^1 2 - 2x^2 dx$$

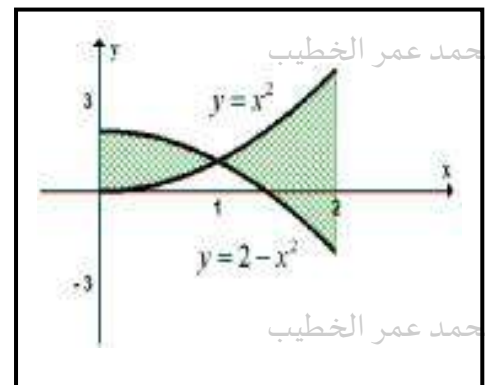
$$= \left[2x - \frac{2x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

$$A_2 = \int_1^2 (x^2 - (2 - x^2)) dx$$

$$= \int_1^2 2x^2 - 2 dx$$

$$= \left[\frac{2x^3}{3} - 2x \right]_1^2 = \frac{8}{3}$$

$$A = \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = 4$$



الحالة الثانية: المكامل (dy)

الشريحة (عرض المستطيل) هو dy

(ارتفاع المستطيل) هو $f(y) - g(y)$

عمودي على محور الصادات y

$$g(y) \quad f(y)$$

$$A = \int_c^d [\text{الدالة (العلاقة) اليسرى} - \text{الدالة (العلاقة) اليمنى}] dy$$

يجب أن تكون العلاقات بدلالة y

وحدود التكامل من محور y

$$A = \int_c^d f(y) - g(y) dy$$

حالات استخدام المكامل dy

- (1) يفضل إذا كانت المساحة مع dx تحتاج إلى تجزئة
- (2) يفضل إذا كانت الدوال (العلاقات) بدلالة y
- (3) يفضل إذا كان الارتفاع بين نفس العلاقة
- (4) إجباري إذا كانت الخيارات كلها في dy
- (5) إجباري إذا كان التكامل dx صعب ايجاده

أوجد المساحة المحصورة بين الدوال $y = x^2$, $y = 2 - x$, $y = 0$

أولاً: المكامل dx

$$A_1 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$A_2 = \int_1^2 (2 - x) dx = 2x - \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 = \frac{1}{2}$$

$$A = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

ثانياً: المكامل dy

* هذا التكامل منفرد

* حدود التكامل

من محور y

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (R - L) dy \\ &= \int_0^1 (2 - y - \sqrt{y}) dy \\ &= 2y - \frac{y^2}{2} - \frac{2}{3} y^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

(1) عبر عن المساحة المحصورة بين الدوال $y = 0, y = 2, y = x, y = 6 - x$, بتكامل منفرد

لاحظ مع التحاليل dx نحتاج إلى تجزئته .

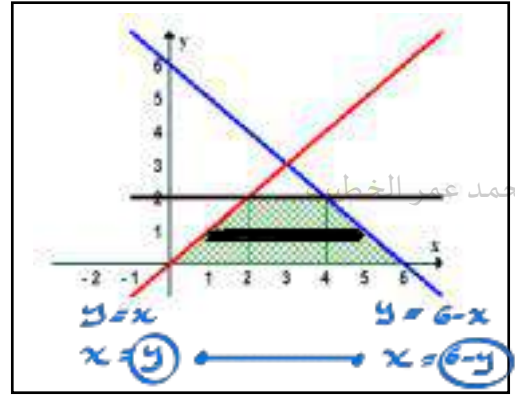
المساحة لذلك هذين تكامل منفرد .

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

التكامل يجب ان يكون dy .

$$A = \int_0^2 6 - y - y \, dy = \int_0^2 6 - 2y \, dy.$$



محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(2) عبر عن المساحة المحصورة بين المعادلتين بتكامل منفرد ثم اوجد المساحة

$$A = \int_{-1}^1 2 - y^2 - y^2 \, dy$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= \int_{-1}^1 2 - 2y^2 \, dy.$$

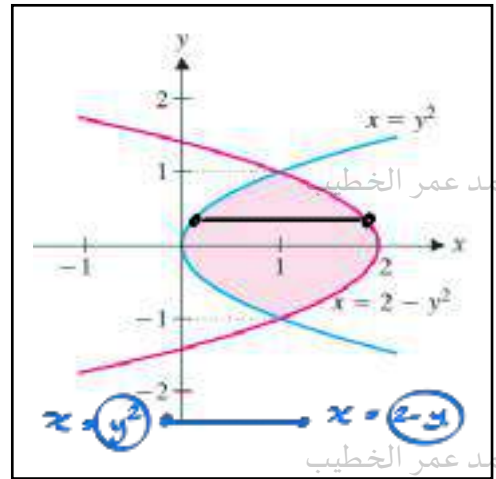
ويمكن استخدام التفاضل

$$A = 2 \int_0^1 2 - 2y^2 \, dy.$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب



(3) عبر عن المساحة المحصورة داخل الدائرة التي معادلتها $x^2 + y^2 = 2y$ بتكامل منفرد

$$A = \int_0^2 \sqrt{2y - y^2} - (-\sqrt{2y - y^2}) \, dy$$

$$= \int_0^2 2\sqrt{2y - y^2} \, dy.$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

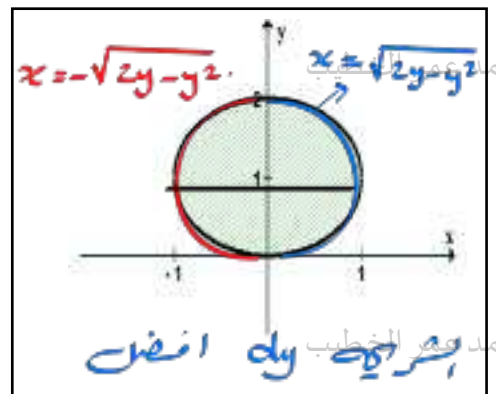
ويمكن استخدام التفاضل

$$A = 2 \int_0^2 \sqrt{2y - y^2} - 0 \, dy.$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب



بشرط dy افضل

$$x^2 + y^2 = 2y$$

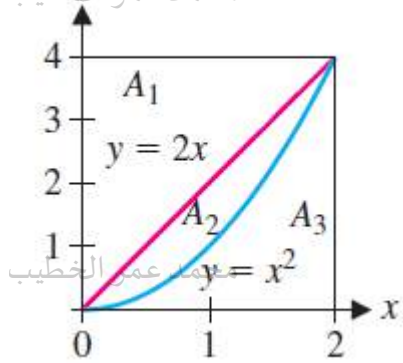
$$x^2 = 2y - y^2$$

$$x = \pm \sqrt{2y - y^2}$$

اعتمد على الشكل المجاور للتعبير عن المساحات التالية

بدلالة التكامل الذي يناسبه في كل مما يلي

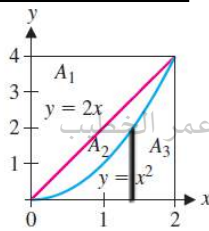
ملاحظة: اكتب التكامل بدلالة dx وبدلالة dy



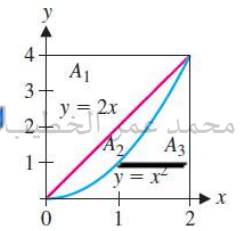
بدلالة dx

بدلالة dy

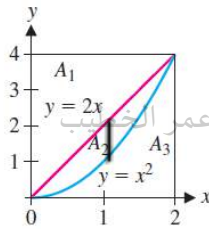
(1) $A_3 = \int_0^2 x^2 dx$



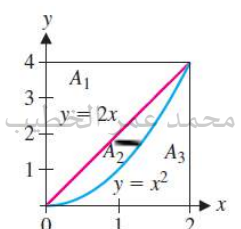
$A_3 = \int_0^4 2 - \sqrt{y} dy$



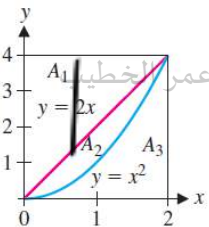
(2) $A_2 = \int_0^2 2x - x^2 dx$



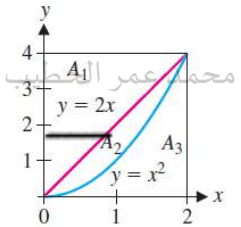
$A_2 = \int_0^4 \sqrt{y} - \frac{y}{2} dy$



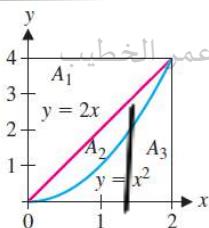
(3) $A_1 = \int_0^2 4 - 2x dx$



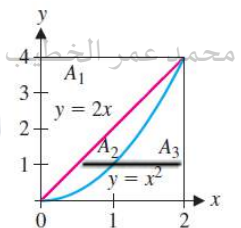
$A_1 = \int_0^4 \frac{y}{2} dy$



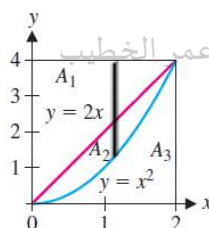
(4) $A_2 + A_3 = \int_0^2 2x dx$



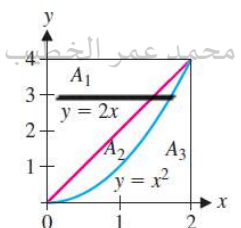
$A_2 + A_3 = \int_0^4 2 - \frac{y}{2} dy$



(5) $A_1 + A_2 = \int_0^2 4 - x^2 dx$

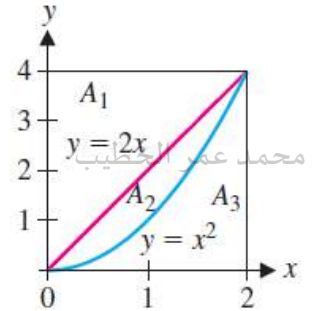
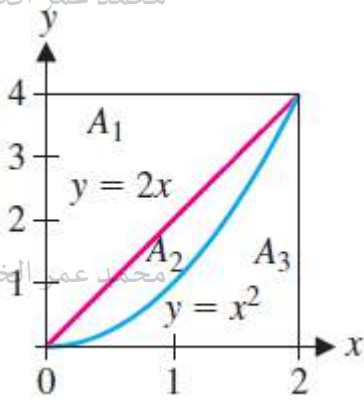


$A_1 + A_2 = \int_0^4 \sqrt{y} dy$



بدلالة A_1, A_2, A_3 في كل مما يلي:

ثم اكتب التكامل بدلالة المكامل الآخر

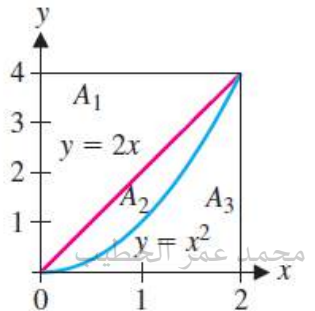


$$(1) \int_0^2 (2x - x^2) dx = A_2$$

$$= \int_0^4 \sqrt{y} - \frac{y}{2} dy$$

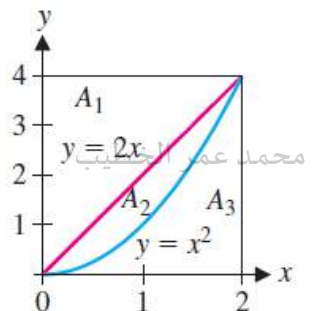
$$(2) \int_0^2 (4 - x^2) dx = A_1 + A_2$$

$$= \int_0^4 \sqrt{y} dy$$



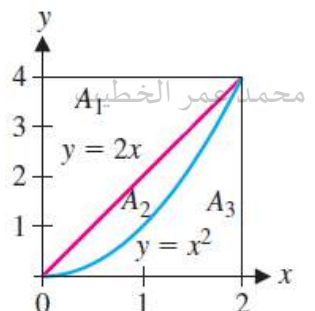
$$(3) \int_0^4 (2 - \sqrt{y}) dy = A_3$$

$$= \int_0^2 x^2 dx$$



$$(4) \int_0^4 (\sqrt{y} - \frac{y}{2}) dy = A_2$$

$$= \int_0^2 2x - x^2 dx$$

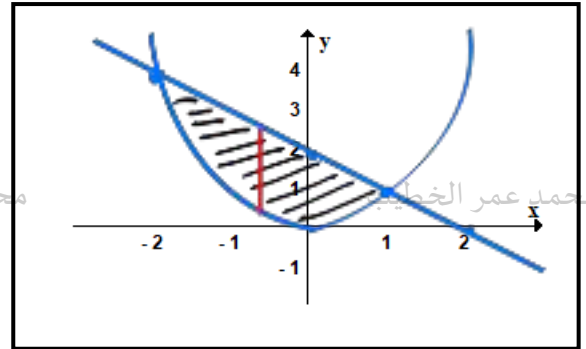


الرسم... أولاً

(1) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى $y = x^2$ والمستقيم $y = 2 - x$

ملاحظة: يفضل إيجاد نقاط التقاطع قبل الرسم

رسم يدوي على الرسم



نجد نقاط التقاطع من الآلة الحاسبة بالخطوات التالية

ادخل المعادلة على الآلة الحاسبة

(1) اعمل shift solve للحصول على الحل الاول

(2) للحصول على الحل الثاني اعمل shift solve

واضبط على الرقم 1 او الرقم 1 - او الرقم 2

وهكذا

محمد عمر الخطيب

$$A = \int_{-2}^1 (2 - x - x^2) dx$$

$$= 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^1$$

محمد عمر الخطيب

$$x^2 = 2 - x$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x = -2, 1$$

محمد عمر الخطيب

$$= \frac{9}{2}$$

محمد عمر الخطيب

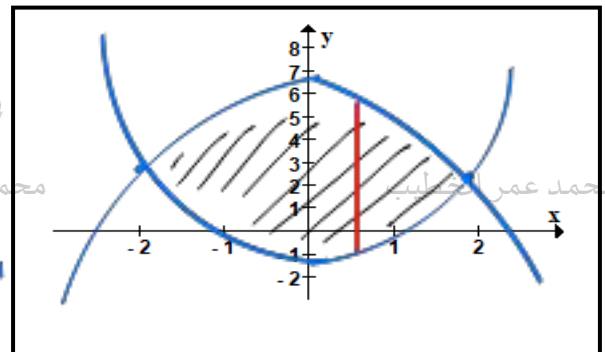
$$y = 2 - x$$

$$y = x^2$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(2) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x^2 - 1$ و $y = 7 - x^2$ 

$$A = \int_{-2}^2 (7 - x^2 - (x^2 - 1)) dx$$

محمد عمر الخطيب

$$= \int_{-2}^2 (8 - 2x^2) dx$$

$$= 8x - \frac{2x^3}{3} \Big|_{-2}^2 = \frac{64}{3}$$

محمد عمر الخطيب

$$y = 7 - x^2$$

$$y = x^2 - 1$$

محمد عمر الخطيب

$$A = 2 \int_0^2 (8 - 2x^2) dx$$

محمد عمر الخطيب

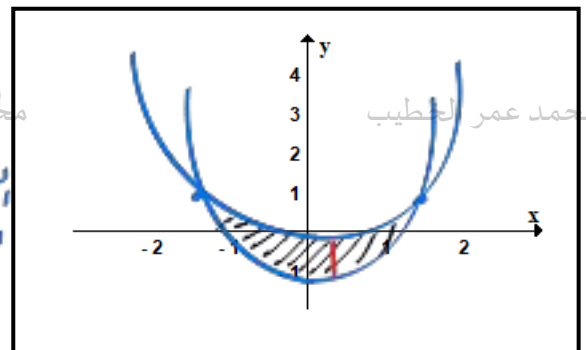
$$x^2 - 1 = 7 - x^2$$

$$x^2 = 4$$

$$2x^2 = 8$$

$$x = -2, 2$$

محمد عمر الخطيب

(3) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x^2 - 1$ و $y = \frac{1}{2}x^2$ 

محمد عمر الخطيب

$$A = 2 \int_0^{\sqrt{2}} (\frac{1}{2}x^2 - (x^2 - 1)) dx$$

محمد عمر الخطيب

$$= 2 \int_0^{\sqrt{2}} (-\frac{1}{2}x^2 + 1) dx$$

$$= 2 \left[-\frac{1}{6}x^3 + x \right]_0^{\sqrt{2}}$$

محمد عمر الخطيب

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

محمد عمر الخطيب

$$x^2 - 1 = \frac{1}{2}x^2$$

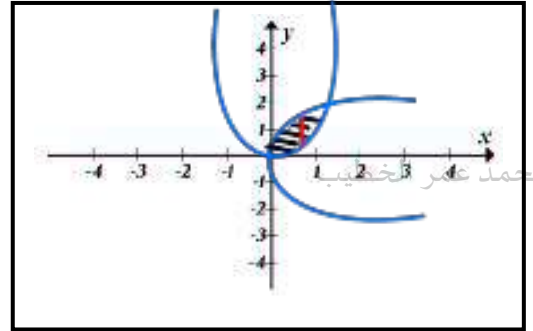
$$x^2 - 2 = 0$$

$$\frac{1}{2}x^2 - 1 = 0$$

$$x = -\sqrt{2}, \sqrt{2}$$

(1) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $x = y^2$ و $y = x^2$

يمكن طرح مع الحاصل dx أو الحاصل dy



$$A = \int_0^1 \sqrt{x} - x^2 dx$$

محمد عمر الخطيب

$$= \int_0^1 x^{1/2} - x^2 dx$$

$$= \left[\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$x = y^2$$

$$y^2 = x$$

$$y = \pm \sqrt{x}$$

نسا لم يتقاطع

$$x^2 = \sqrt{x}$$

$$x^4 = x$$

$$x = 0, 1$$

(2) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين الدوال $y = x^3$ و $y = 3x + 2$

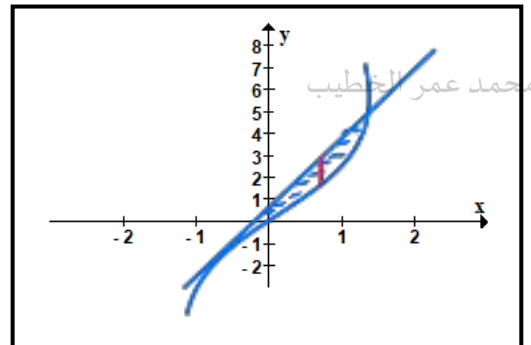
$$A = \int_{-1}^2 (3x + 2 - x^3) dx$$

محمد عمر الخطيب

$$= \int_{-1}^2 (2 + 3x - x^3) dx$$

$$= \frac{27}{4}$$

محمد عمر الخطيب



محمد عمر الخطيب

$$x^3 = 3x + 2$$

$$x^3 - 3x - 2 = 0$$

$$x = -1, x = 2$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(3) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى $y = \frac{3}{x}$ والمستقيمين $x = 1$ ، $y = x - 2$

$$A = \int_1^3 \left(\frac{3}{x} - (x - 2) \right) dx$$

محمد عمر الخطيب

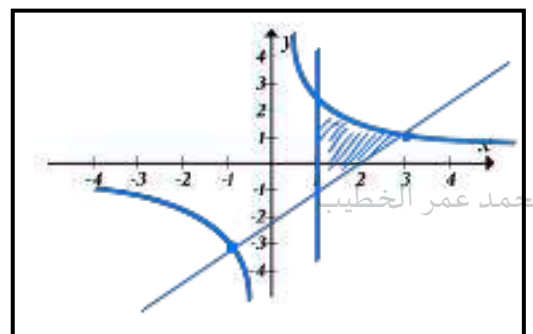
محمد عمر الخطيب

$$= \int_1^3 \left(\frac{3}{x} - x + 2 \right) dx$$

$$= \left[3 \ln|x| - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_1^3$$

$$= 3 \ln 3$$

محمد عمر الخطيب



محمد عمر الخطيب

$$x - 2 = \frac{3}{x}$$

$$x(x - 2) = 3$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = -1, x = 3$$

محمد عمر الخطيب

(1) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = e^{-x}$ و $y = x^2$ على الفترة $[-1, 0]$

$$A = \int_{-1}^0 e^{-x} - x^2 dx$$

$$= -e^{-x} - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^0$$

$$= e - \frac{4}{3}$$

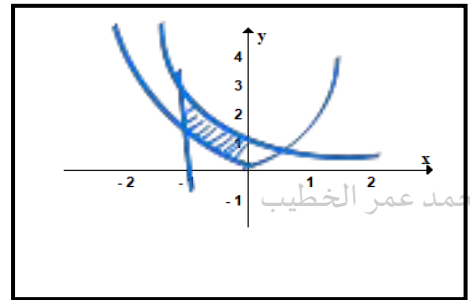
نقاط التقاطع

$$e^{-x} = x^2$$

من محمد عمر الخطيب Shift solve

$$x = 0.7$$

خارج الفترة



أوجد نقاط التقاطع بين الدالتين

(2) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = 2 - x^2$ و $y = x^2$ على $[0, 2]$

$$A_1 = \int_0^1 2 - x - x^2 dx$$

$$= \int_0^1 2 - 2x^2 dx =$$

$$= 2x - \frac{2x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{4}{3}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$A_2 = \int_1^2 x^2 - (2 - x^2) dx$$

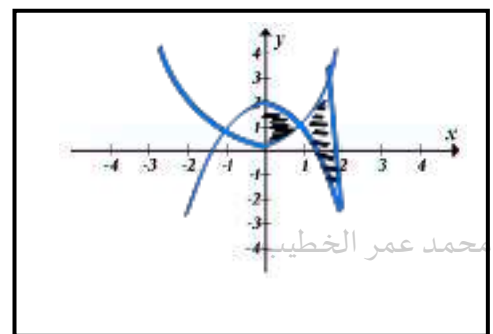
$$= \int_1^2 2x^2 - 2 dx$$

$$= \frac{2x^3}{3} - 2x \Big|_1^2 = \frac{8}{3}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$A = \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = 4$$



نقاط التقاطع

$$2 - x^2 = x^2$$

$$2 = 2x^2$$

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

دائري الفترة

(3) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = \cos x$ و $y = \sin x$ على الفترة $[0, \pi]$

$$A_1 = \int_0^{\pi/4} \cos x - \sin x dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= \sin x + \cos x \Big|_0^{\pi/4} = \sqrt{2} - 1$$

$$A_2 = \int_{\pi/4}^{\pi} \sin x - \cos x dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

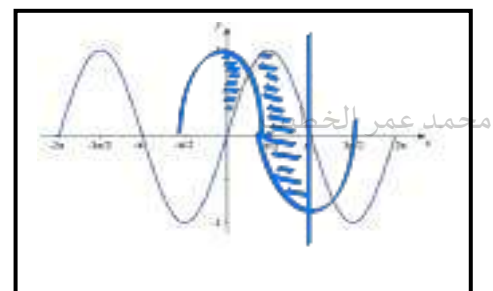
$$= -\cos x - \sin x \Big|_{\pi/4}^{\pi} = \sqrt{2} + 1$$

$$A = \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2} + 1$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= 2\sqrt{2}$$



نقاط التقاطع

$$\sin x = \cos x \quad [0, \pi]$$

$$\tan x = 1$$

$$x < \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \checkmark$$

$$x > \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{5\pi}{4} \checkmark$$

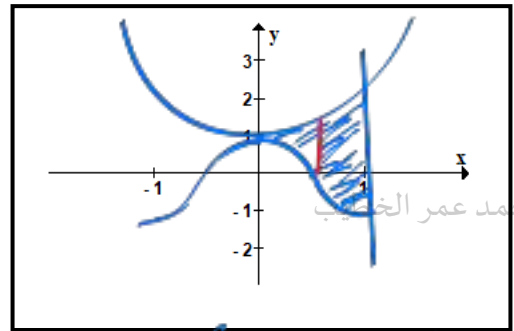
محمد عمر الخطيب

(1) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = \cos \pi x$ و $y = x^2 + 1$ حيث $0 \leq x \leq 1$

$$A = \int_0^1 x^2 + 1 - \cos \pi x \, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + x - \frac{\sin \pi x}{\pi} \Big|_0^1$$

$$= \frac{4}{3}$$



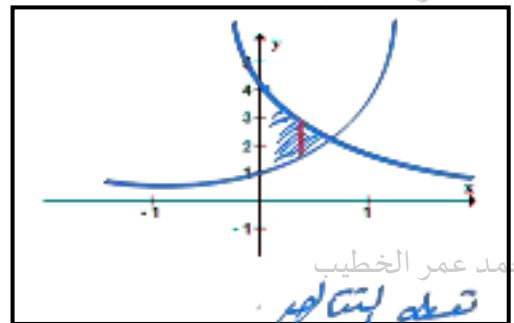
نقاط التقاطع
 $\cos \pi x = x^2 + 1$
 $x = 0$

(2) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = e^x$ و $y = 4e^{-x}$ و $x = 0$

$$A = \int_0^{\ln 2} 4e^{-x} - e^x \, dx$$

$$= \left[\frac{4e^{-x}}{-1} - e^x \right]_0^{\ln 2}$$

$$= 1$$



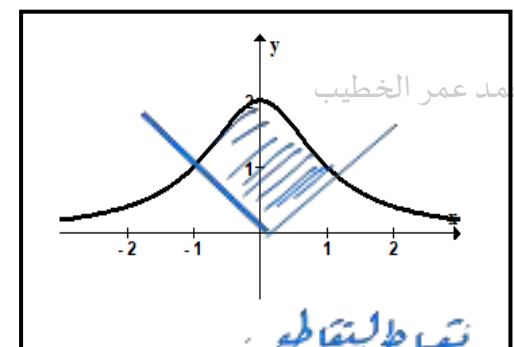
نقاط التقاطع
 $e^x = 4e^{-x}$
 $\frac{e^x}{e^{-x}} = 4$
 $e^{2x} = 4$
 $\ln e^{2x} = \ln 4$
 $2x = \ln 4$
 $x = \frac{\ln 4}{2}$
 $= \ln 2$

(3) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين الدوال $y = |x|$ و $y = \frac{2}{x^2 + 1}$

$$A = 2 \int_0^1 \frac{2}{x^2 + 1} - |x| \, dx$$

$$= 2 \int_0^1 \frac{2}{x^2 + 1} - x \, dx$$

$$= 2 \left[2 \tan^{-1} x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \pi - 1$$



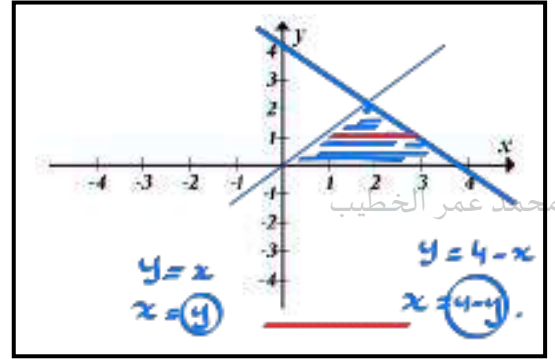
$$A = \int_{-1}^1 \frac{2}{x^2 + 1} - |x| \, dx$$

$$= \int_{-1}^0 \frac{2}{x^2 + 1} - (-x) \, dx + \int_0^1 \frac{2}{x^2 + 1} - x \, dx$$

نقاط التقاطع
 $\frac{2}{x^2 + 1} = |x|$
عند $x < 0$
 $\frac{2}{x^2 + 1} = -x$
 $2 = -x^3 - x$
 $x^3 + x + 2 = 0$
 $x = -1$
عند $x > 0$
 $\frac{2}{x^2 + 1} = x$
 $2 = x^3 + x$
 $x^3 + x - 2 = 0$
 $x = 1$

(1) ارسم المستقيمات $y = 0$ و $y = x$ و $y = 4 - x$ ثم اكتب تكامل منفرد يعبر عن المساحة المحصورة

تكاملي منفرد
المحامل dy وليس dx



محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$A = \int_0^2 (4 - y - y) dy$$

$$= \int_0^2 (4 - 2y) dy$$

$$= 4$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

نقاط التقاطع

$$y = x$$

$$y = 4 - x$$

$$2x = 4$$

$$x = 2 \rightarrow y = 2$$

(2) ارسم المستقيمات $y = 0$ و $y = 2$ ، $y = 6 - x$ ، $y = x$ ثم اكتب تكامل منفرد يعبر عن المساحة

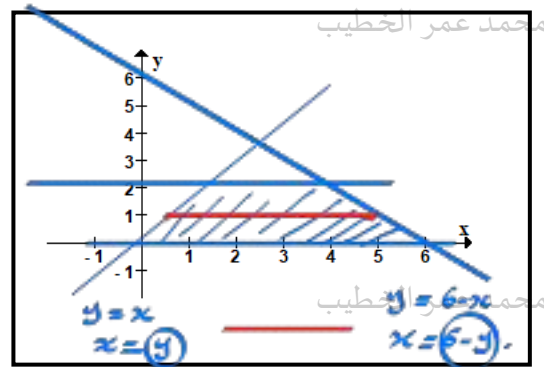
المحصورة بين الدوال

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

تكاملي منفرد
المحامل dy وليس dx



محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$A = \int_0^2 (6 - y - y) dy$$

$$= \int_0^2 (6 - 2y) dy$$

$$= 8$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$x = 6 - x$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

$$\downarrow$$

$$y = 3$$

(3) ارسم الدوال $y = \sqrt{x}$ و $y = -x$ و $y = 2$ ثم اكتب تكامل منفرد يعبر عن المساحة المحصورة

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$A = \int_0^2 (y^2 - (-y)) dy$$

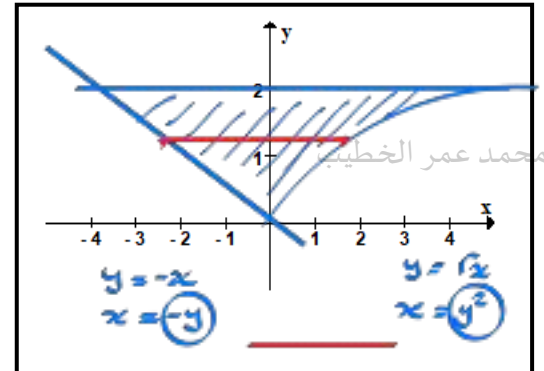
$$= \int_0^2 (y^2 + y) dy$$

$$= \frac{14}{3}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب



$$\sqrt{x} = 2$$

$$x = 4$$

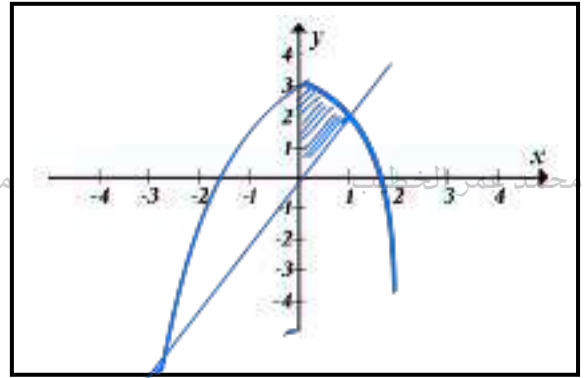
$$-x = 2$$

$$x = -2$$

$$\sqrt{x} = -x$$

$$x = 0$$

(1) اكتب تكامل منفرد يعبر عن المساحة المحصورة بين $x > 0, x = 0, y = 3 - x^2, y = 2x$

الحاصل dx 

$$2x = 3 - x^2$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x = -3, x = 1$$

نقاط التقاطع

محمد عمر الخطيب

$$A = \int_0^1 (3 - x^2 - 2x) dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= \int_0^1 (3 - 2x - x^2) dx$$

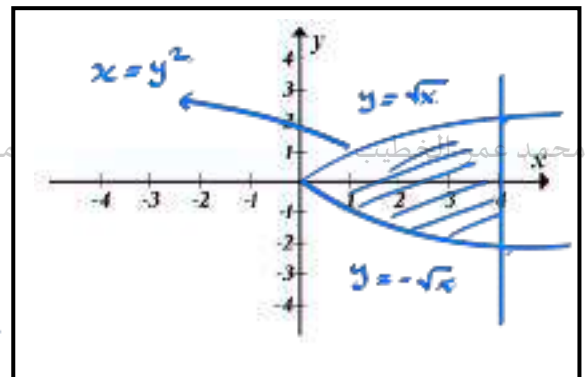
$$= 5/3$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(2) ارسم المعادلات $x = 4, x = y^2$ ثم أوجد المساحة المحصورة

الحل الأول

الحاصل dy 

$$A = \int_{-2}^2 (4 - y^2) dy$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= \left[4y - \frac{y^3}{3} \right]_{-2}^2 = \frac{32}{3}$$

$$A = \int_0^4 (\sqrt{x} - (-\sqrt{x})) dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= \int_0^4 2\sqrt{x} dx = \frac{32}{3}$$

الحل الثاني

الحاصل dx

نقاط التقاطع

$$y^2 = 4$$

$$y = -2, y = 2$$

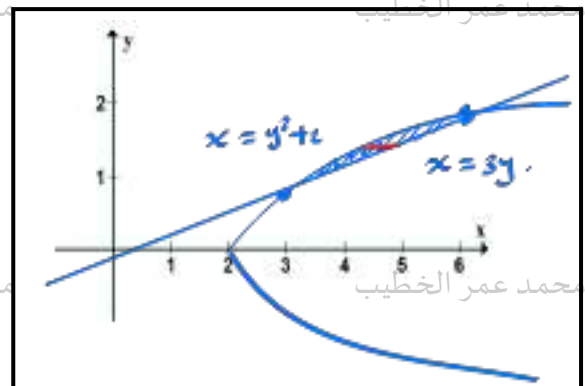
$$x = 4, x = 4$$

(3) ارسم المعادلات $x = y^2 + 2, x = 3y$ ثم أوجد المساحة المحصورة

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب



$$A = \int_{-2}^2 (3y - (y^2 + 2)) dy$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= \int_{-2}^2 (-y^2 + 3y - 2) dy$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= \left[-\frac{y^3}{3} + \frac{3y^2}{2} - 2y \right]_{-2}^2$$

$$= 1/6$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$y^2 + 2 = 3y$$

$$y^2 - 3y + 2 = 0$$

$$y = 1, 2$$

$$x = 3, x = 6$$

محمد عمر الخطيب

(1) ارسم المعادلات $x = 2y$ ، $x = 3 - y^2$ ثم اوجد المساحة المحصورة

$$A = \int_{-3}^1 3 - y^2 - 2y \, dy$$

محمد عمر الخطيب

$$= \int_{-3}^1 3 - 2y - y^2 \, dy$$

$$= 3y - y^2 - \frac{y^3}{3} \Big|_{-3}^1$$

محمد عمر الخطيب

$$= \frac{32}{3}$$

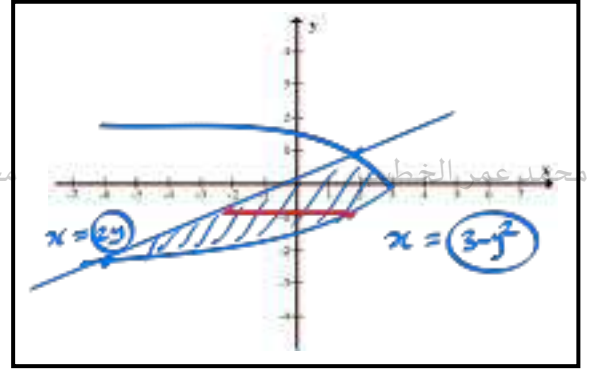
محمد عمر الخطيب

$$2y = 3 - y^2$$

محمد عمر الخطيب

$$y^2 + 2y - 3 = 0$$

$$\left(\begin{array}{cc} y = -3, & y = 1 \\ \downarrow & \downarrow \\ x = -6 & x = 2 \end{array} \right)$$



محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(2) ارسم الدالة $y = \ln x$ ثم اوجد المساحة المحصورة بين الدالة و المحور $y = 0$ والمستقيم $x = e$

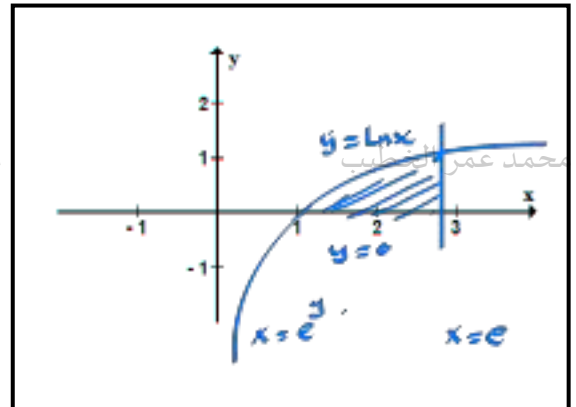
مع التكامل dx

$$A = \int_1^e \ln x \, dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

وهذا التكامل لا نستطيع ايجاد في هذه الوحدة .



محمد عمر الخطيب

مع التكامل dy

محمد عمر الخطيب

$$A = \int_0^1 e - e^y \, dy$$

محمد عمر الخطيب

$$= ey - e^y \Big|_0^1$$

محمد عمر الخطيب

$$= 1$$

$$y = \ln x$$

عندما

$$\ln x = y$$

$$x = e$$

$$x = e^y$$

$$y = 1$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

هذه خطوات مقترحة لإيجاد المساحة بدون رسم... مع العلم ان الرسم هو افضل

يمكن إيجاد المساحة بين دالتين متصلتين $f(x)$ و $g(x)$ بدون خطوة الرسم

(1) نجد نقاط التقاطع بين المنحنيين وذلك بجعل $f(x) = g(x)$

عدد نقاط التقاطع 3

ولتكن x_1, x_2, x_3

يوجد تجزئة مساحة

نجد نقاط التقاطع من الآلة الحاسبة بالخطوات

التالية

ادخل المعادلة على الآلة الحاسبة

(1) اعمل shift solve للحصول على الحل الاول

(2) للحصول على الحل الثاني اعمل shift solve

واضغط على الرقم 1 او الرقم 1 - او الرقم 2

عدد نقاط التقاطع 2

ولتكن x_1, x_2

لا يوجد تجزئة مساحة

(2) تحديد الدالة الأعلى

نختار عدد بين x_1, x_2

ونجد صورته في كل دالة .. فالدالة الأعلى تقابل

القيمة الأكبر

ونختار عدد بين x_2, x_3 ونكرر العملية السابقة

نختار عدد بين x_1, x_2

ونجد صورته في كل دالة .. فالدالة

الأعلى تقابل القيمة الأكبر

(3) المساحة

$$A = \int_{x_1}^{x_2} [] dx + \int_{x_2}^{x_3} [] dx$$

$$A = \int_{x_1}^{x_2} [\text{الدالة الأسفل} - \text{الدالة الأعلى}] dx$$

ملاحظة: يمكن تجاوز الخطوة الثانية وتجاهل الدالة الأعلى والأسفل فتكون المساحة

$$A = \int_{x_1}^{x_2} | f(x) - g(x) | dx$$

(1) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين الدوال $y = x^2$ و $y = x + 2$

$$A = \int_{-1}^2 (x+2 - x^2) dx$$

$$= \int_{-1}^2 (2+x-x^2) dx$$

محمد عمر الخطيب

$$= 2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^2 = \frac{9}{2}$$

محمد عمر الخطيب

نجد نقاط التقاطع

$$x^2 = x + 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = -1, x = 2$$



(2) أوجد مساحة المنطقة المحصورة تحت المنحنى $y = 4 - x^2$ وفوق محور x

$$A = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx$$

$$= 4x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^2$$

$$= \frac{32}{3}$$

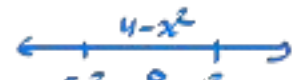
محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

نجد نقاط التقاطع

$$4 - x^2 = 0$$

$$x = -2, x = 2$$



محمد عمر الخطيب

(3) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = \sin x$, $y = x^2$

$$A = \int_0^{0.87} (\sin x - x^2) dx$$

$$= -\cos x - \frac{x^3}{3} \Big|_0^{0.87}$$

$$= 0.135$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

نجد نقاط التقاطع

$$x^2 = \sin x$$

من shift solve

$$x = 0$$

ومن shift solve

$$x = 0.87$$

محمد عمر الخطيب



(4) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = e^x$, $y = 1 - x^2$

$$A = \int_{-0.71}^0 (1 - x^2 - e^x) dx$$

$$= x - \frac{x^2}{2} - e^x \Big|_{-0.71}^0$$

$$= 0.08$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

نجد نقاط التقاطع

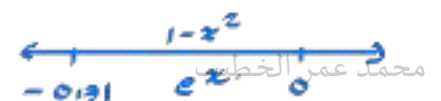
$$e^x = 1 - x^2$$

من shift solve

$$x = 0$$

ومن shift solve

$$x = -0.71$$



(1) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين الدوال $y = x^4$, $y = 2 + x$

$$A = \int_{-1}^{1.35} 2 + x - x^4 dx$$

$$\begin{array}{c} 2+x \\ \leftarrow \quad \quad \quad \rightarrow \\ -1 \quad x^4 \quad 1.35 \end{array}$$

نقاط التقاطع

$$x^4 = 2 + x$$

من Shift solve

$$x = -1.35$$

من Shift solve

$$x = -1$$

$$= 4.01$$

(2) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المستقيم $y = x$ و المنحنى $y = x^3$

$$A_1 = \int_{-1}^0 x^3 - x dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 = -\frac{1}{4}$$

نقاط التقاطع

$$x^3 = x$$

$$x^3 - x = 0$$

$$\text{mode } 5 \quad 4$$

$$x = -1, x = 0, x = 1$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{2}$$

$$A_2 = \int_0^1 x - x^3 dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$\begin{array}{c} x^3 \\ \leftarrow \quad \quad \quad \rightarrow \\ -1 \quad x \quad 0 \quad x^3 \quad 1 \end{array}$$

(3) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين الدوال $y = \frac{5x}{x^2+1}$, $y = x$

$$A_1 = \int_{-2}^0 x - \frac{5x}{x^2+1} dx = \int_{-2}^0 x dx - 5 \int_{-2}^0 \frac{x}{x^2+1} dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{5}{2} \ln |x^2+1| \right]_{-2}^0 = \frac{5}{2} \ln 5 - 2$$

نقاط التقاطع

$$x = \frac{5x}{x^2+1}$$

$$x^3 + x = 5x$$

$$x^3 - 4x = 0$$

$$x = -2, 0, 2$$

$$A_2 = \int_0^2 \frac{5x}{x^2+1} - x dx = \frac{5}{2} \ln 5 - 2$$

$$A = 5 \ln 5 - 4$$

$$\begin{array}{c} x \\ \leftarrow \quad \quad \quad \rightarrow \\ -2 \quad \frac{5x}{x^2+1} \quad 0 \quad x \quad 2 \end{array}$$

(4) أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين $x = 2 - y^2$, $x = y$

$$A = \int_{-2}^1 2 - y^2 - y dy$$

نقاط التقاطع

$$y = 2 - y^2$$

$$y^2 + y - 2 = 0$$

$$y = -2, y = 1$$

$$= \int_{-2}^1 2 - y - y^2 dy$$

$$= \left[2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_{-2}^1 = \frac{9}{2}$$

(1) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x^3$, $y = x^2 - 1$ على الفترة $1 \leq x \leq 3$

$$A = \int_1^3 x^3 - (x^2 - 1) dx$$

$$= \int_1^3 x^3 - x^2 + 1 dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x \right]_1^3 = \frac{40}{3}$$

نقاط التقاطع

$$x^3 = x^2 - 1$$

$$x^3 - x^2 + 1 = 0$$

$$x = -0.74$$



(2) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = \cos x$, $y = x^2 + 2$ على الفترة $0 \leq x \leq 2$

$$A = \int_0^2 x^2 + 2 - \cos x dx$$

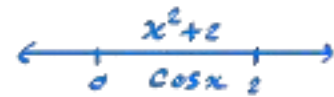
$$= \left[\frac{x^3}{3} + 2x - \sin x \right]_0^2$$

$$= \frac{20}{3} - \sin 2$$

نقاط التقاطع

$$\cos x = x^2 + 2$$

لا يوجد



(3) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين $y = 3 - x^2$, $y = 2x$ على الفترة $0 \leq x \leq 2$

يجب تجزئته، المساحة عند $x = 1$

$$A_1 = \int_0^1 3 - x^2 - 2x dx = \left[3x - \frac{x^2}{2} - x^2 \right]_0^1 = \frac{5}{6}$$

$$A_2 = \int_1^2 2x - (3 - x^2) dx = \left[x^2 - 3x + \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{7}{6}$$

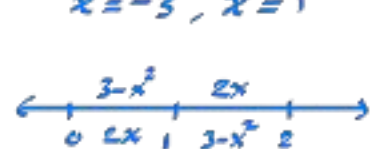
$$A = \frac{5}{6} + \frac{7}{6} = 2$$

نقاط التقاطع

$$2x = 3 - x^2$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x = -3, x = 1$$



(4) اوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = \sin x$, $y = \cos x$ حيث $0 \leq x \leq 2\pi$

$$A_1 = \int_0^{\pi/4} \cos x - \sin x dx = \sqrt{2} - 1$$

$$A_2 = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin x - \cos x dx = 2\sqrt{2}$$

$$A_3 = \int_{\pi/2}^{3\pi/4} \cos x - \sin x dx = \sqrt{2} + 1$$

$$A = 4\sqrt{2}$$

نقاط التقاطع

$$\sin x = \cos x$$

$$\tan x = 1$$

$$x < \pi/4 \quad Q_1 \rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$Q_3 \rightarrow x = \frac{5\pi}{4}$$



(1) إذا كانت المساحة المحصورة بين الدالة $y = x^2$ والمستقيم $y = mx$ هي $\frac{4}{3}$ وحدة مساحة،

فأوجد قيمة الثابت m حيث $0 < m$

$$A = \int_0^m mx - x^2 dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$\frac{4}{3} = m \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^m$$

$$\frac{4}{3} = \frac{m^3}{2} - \frac{m^3}{3}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$8 = 3m^3 - 2m^3$$

$$8 = m^3$$

$$m^3 = 8 \Rightarrow \boxed{m = 2}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب



محمد عمر الخطيب

$$x^2 = mx$$

$$x^2 - mx = 0$$

$$x(x - m) = 0$$

$$x = 0, x = m$$

محمد عمر الخطيب

(2) إذا كانت المساحة المحصورة بين الدالة $y = x^2$ والمستقيم $y = a^2$ هي 36 وحدة مساحة،

فأوجد قيمة الثابت a حيث $0 < a$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$A = 2 \int_0^a a^2 - x^2 dx$$

$$36 = 2 \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$18 = a^3 - \frac{a^3}{3}$$

$$54 = 3a^3 - a^3$$

$$54 = 2a^3$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

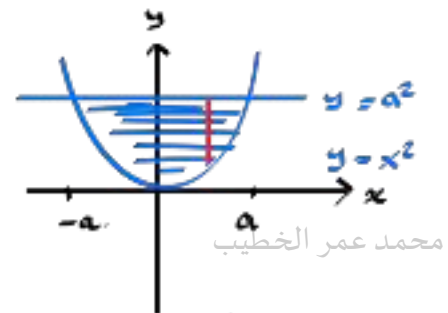
$$a^3 = 27$$

$$\boxed{a = 3}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب



محمد عمر الخطيب

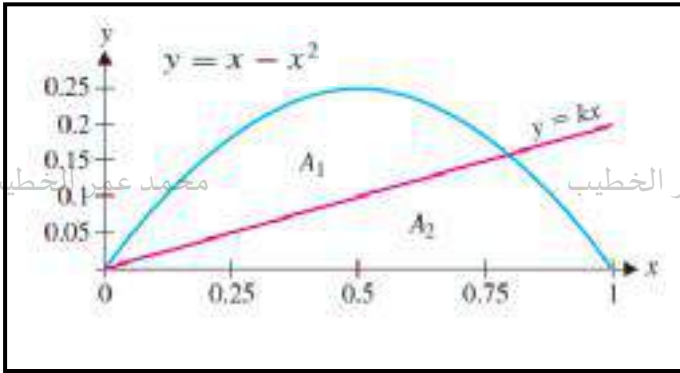
محمد عمر الخطيب

$$x^2 = a^2$$

$$x = -a, x = a$$

محمد عمر الخطيب

في الشكل المجاور اذا كانت المساحة A_1 تساوي المساحة A_2 حيث $y = x - x^2$ و $y = kx$



(أ) اوجد قيمة A_1

$$A_1 + A_2 = \int_0^1 x - x^2 dx$$

$$2A_1 = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1$$

$$2A_1 = \frac{1}{6}$$

$$A_1 = \frac{1}{12}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(ب) اوجد قيمة k

نقاط التقاطع

$$kx = x - x^2$$

$$x^2 + kx - x = 0$$

$$x(x + k - 1) = 0$$

$$x = 0 \quad x + k - 1 = 0$$

$$x = 1 - k$$

$$A_1 = \int_0^{1-k} x - x^2 - kx dx$$

$$\frac{1}{12} = \int_0^{1-k} x(1-k) - x^2 dx$$

$$\frac{1}{12} = \left[\frac{x^2}{2}(1-k) - \frac{x^3}{3} \right]_0^{1-k}$$

$$\frac{1}{12} = \frac{(1-k)^2(1-k)}{2} - \frac{(1-k)^3}{3}$$

$$1 = 6(1-k)^3 - 4(1-k)^3$$

$$1 = 2(1-k)^3$$

$$(1-k)^3 = \frac{1}{2}$$

$$1-k = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

$$-k = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} - 1$$

$$k = 1 - \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

إذا كان معدل تغير عدد المواليد في مدينة ما هو $B(t) = 2e^{0.04t}$ مليون شخص ومعدل عدد الوفيات

في نفس المدينة هو $D(t) = 3e^{0.02t}$ مليون شخص حيث t بالسنوات

(أ) أوجد متى يتزايد و متى يتناقص عدد سكان المدينة في الفترة الزمنية $[0, 30]$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$P'(t) = B(t) - D(t)$$

$$= 2e^{0.04t} - 3e^{0.02t}$$

عدد السكان $P(t)$

معدل التغير في عدد السكان

$$P'(t) = B(t) - D(t)$$

$$P'(0) = 0$$

$$2e^{0.04 \cdot 0} = 3e^{0.02 \cdot 0}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$\frac{e^{0.04t}}{e^{0.02t}} = \frac{3}{2}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$e^{0.02t} = \frac{3}{2}$$

$$\ln e^{0.02t} = \ln \frac{3}{2}$$

$$0.02t = \ln \frac{3}{2}$$

$$t = \frac{\ln \frac{3}{2}}{0.02} = 20.3$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

فترة تناقص عدد السكان $(0, 20.3)$ فترة تزايد عدد السكان $(20.3, 30)$

(ب) أوجد تكامل $P'(t)$ على الفترة $[0, 30]$ وفسر ماذا يعني هذا التكامل

$$\Delta P = \int_0^{30} P'(t) dt$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

يمثل التكامل صافي التغير

(الزيادة أو النقصان) في عدد

السكان خلال 30 سنة

$$\Delta P = \int_0^{30} P'(t) dt$$

محمد عمر الخطيب

$$= \int_0^{30} 2e^{0.04t} - 3e^{0.02t} dt$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$\left. \frac{2e^{0.04t}}{0.04} - \frac{3e^{0.02t}}{0.02} \right|_0^{30}$$

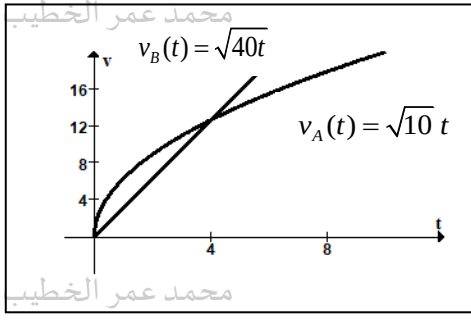
$$= -7.3$$

أي أن عدد السكان سينخفض 7.3 مليون نسمة خلال 30 عام

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب



محمد عمر الخطيب

(1) تمثل الدالة $v_A(t) = \sqrt{10}t$ سرعة السيارة A

وتمثل الدالة $v_B(t) = \sqrt{40}t$ سرعة السيارة B بالمتزلزل الثانية

(أ) أوجد المسافة التي تقطعها كل سيارة خلال أول 4 ثواني

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

المسافة التي تقطعها سيارة A هي

$$D_A = \int_0^4 \sqrt{10}t \, dt = \int_0^4 \sqrt{10}t \, dt = \sqrt{10} \frac{t^2}{2} \Big|_0^4 = 25.3 \, \text{m}.$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$D_B = \int_0^4 \sqrt{40}t \, dt = \int_0^4 \sqrt{40}t^{1/2} \, dt = \sqrt{40} \cdot \frac{2}{3}t^{3/2} \Big|_0^4 = 33.3 \, \text{m}.$$

سرعة سيارة B أكثر لأنها تقطع مسافة أكثر في نفس الزمن.

(ب) اكتب التكامل الذي يمثل الفرق بين المسافتين التي قطعتهما السيارتين خلال أول 4 ثواني

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$D = \int_0^4 \sqrt{40}t - \sqrt{10}t \, dt.$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

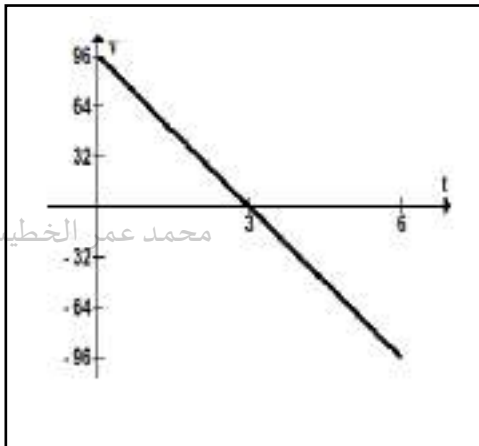
محمد عمر الخطيب

(2) يمثل الشكل المجاور العلاقة بين الزمن والسرعة المتجهة لجسم يتحرك على خط مستقيم

الإزاحة تساوي التكامل

المسافة تساوي المساحة

محمد عمر الخطيب



(أ) أوجد الإزاحة التي يقطعها الجسم خلال أول 6 ثواني

$$\Delta s = \int_0^6 v(t) \, dt = 0$$

لأن المساحة
تحت محور x
تساوي المساحة فوق محور x.

(ب) أوجد المسافة التي يقطعها الجسم خلال أول 3 ثواني

مساحة مثلث قاعدته 3 وارتفاعه 96.

$$D = \int_0^3 v(t) \, dt = \frac{1}{2}(3)(96) = 144 \, \text{m}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(ج) أوجد المسافة التي يقطعها الجسم خلال أول 6 ثواني

$$D = \int_0^3 v(t) \, dt + \int_3^6 -v(t) \, dt$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= 144 + 144 = 288 \, \text{m}$$

هذا السؤال غير مهم في امتحان الوزارة لأنه يعتمد على معلومات كانت محذوفة في الفصل الثاني

الطاقة المفقودة [يعرف تكامل القوة بأنه الطاقة (الشغل)]

عند حدوث تصادم بين مضرب التنس والكرة يتغير شكل الكرة ، بحيث تتكمش مسافة x سنتيمتر

اولا ، ثم تتمدد ، مما يسبب حركة للكرة ، اذا كانت القوة التي بذلت على الكرة هي $f(x)$

فان القوة اثناء الانكماش تسمى $f_c(x)$ وعند التمدد تسمى $f_e(x)$ ويتم نقل الطاقة الى الكرة اثناء

الانكماش وتحركها بعيداً اثناء التمدد وتخسر جزء من طاقتها تسمى الطاقة المفقودة وتساوي

$$\int_0^m [f_c(x) - f_e(x)] dx$$

حيث m مسافة الانكماش

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

وتعرف نسبة الطاقة المفقودة للكرة اثناء الاصطدام بـ

$$\frac{\int_0^m [f_c(x) - f_e(x)] dx}{\int_0^m [f_c(x)] dx} \times 100\% = 1 - \frac{\int_0^m [f_e(x)] dx}{\int_0^m [f_c(x)] dx} \times 100\%$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

يمثل الجدول التالي بعض البيانات اثناء اصطدام كرة التنس بالمضرب

$x \text{ cm}$	0	0.25	0.50	0.75	1
$f_c(x) \text{ N}$	0	110	220	400	700
$f_e(x) \text{ N}$	0	100	200	300	700

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$n = 4$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

اوجد نسبة الطاقة المفقودة باستخدام طريقة سمبسون

$$S_n f(x) = \frac{b-a}{3n} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f_c(x_2) + 4f(x_3) + \dots + f(x_n)]$$

$$S_4 f_c(x) = \frac{1-0}{3(4)} [f_c(0) + 4f_c(1) + 2f_c(0.5) + 4f_c(0.75) + f_c(1)] = 265$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$S_4 f_e(x) = \frac{1-0}{3(4)} [f_e(0) + 4f_e(1) + 2f_e(0.5) + 4f_e(0.75) + f_e(1)] = 225$$

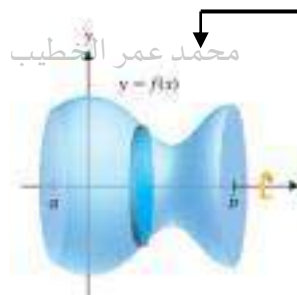
نسبة الطاقة المفقودة تساوي $15\% = (1 - \frac{225}{265}) \times 100\%$ و نسبة الطاقة المحتفظ بها تساوي 85%

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

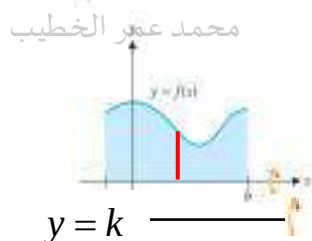
الحجوم



الدورانية



المقطعية (التقطيع)



الحالة الأولى

المكامل dx

(1) الدوران حول محور x أو $y=0$

$$V = \pi \int_a^b (r_o^2 - r_i^2) dx$$

حيث $r_o = f(x)$ و $r_i = g(x)$

(2) الدوران حول المحور $y = k$

$$V = \pi \int_a^b (r_o^2 - r_i^2) dx$$

حيث $r_o = f(x) - k$ و $r_i = g(x) - k$



الحالة الثانية

المكامل dy

(1) الدوران حول محور y أو $x=0$

$$V = \pi \int_a^b (r_o^2 - r_i^2) dy$$

حيث $r_o = f(y)$ و $r_i = g(y)$

(2) الدوران حول المحور $x = l$

$$V = \pi \int_a^b (r_o^2 - r_i^2) dy$$

حيث $r_o = l - f(y)$ و $r_i = l - g(y)$

(1) مساحة المقطع $A(x)$ معلوم

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

(2) مساحة المقطع $A(x)$ غير معلوم

لكن المقطع معلوم (مربع، دائرة، ...) ومحدود بدالتين

(أ) مربع ، طول ضلعه

$$s = f(x) - g(x) \Rightarrow A(x) = s^2$$

(ب) دائرة ، نصف قطرها

$$r = \frac{f(x) - g(x)}{2} \Rightarrow A(x) = \pi r^2$$

(ج) مثلث متساوي الاضلاع ، طول ضلعه

$$l = f(x) - g(x) \Rightarrow A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$$

(ج) مربعات ، طول قطرها

$$d = f(x) - g(x) \Rightarrow A(x) = \frac{1}{2} d^2$$

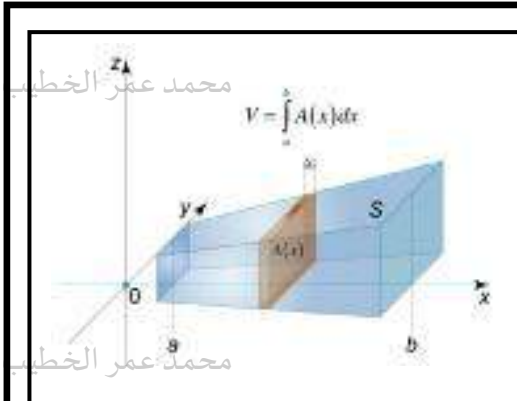
(3) مساحة المقطع غير معلوم والمقطع غير معلوم (الهرم)

ملاحظة: عندما يكون المقطع العرضي هو دائرة

محفاين الحجم المقطعي هو نفسه حجم دوراني

أولاً: الحجوم باستخدام المقاطع العرضية (التقطيع أو الشرائح)

الحالة الأولى: مساحة المقطع معلوم



إذا كانت مساحة المقطع العرضي لمجسم هي $A(x)$ حيث $a \leq x \leq b$ فان حجم المجسم يعطى بالتكامل

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

(1) أوجد حجم المجسم الذي مقطعه العرضي $A(x) = 4x$ حيث $0 \leq x \leq 1$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(x) dx \\ &= \int_0^1 4x dx = 2x^2 \Big|_0^1 = 2. \end{aligned}$$

بمقطة المقطع معلوم

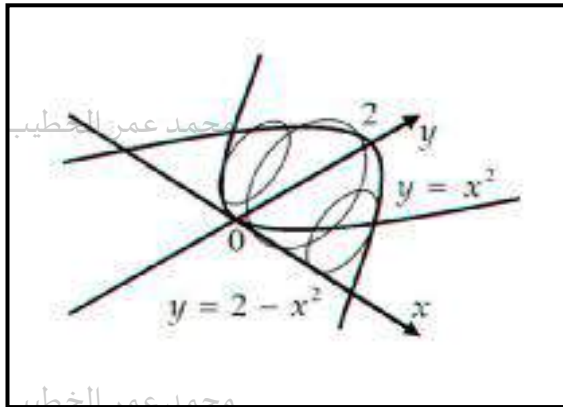
(2) أوجد حجم المجسم الذي مقطعه العرضي $A(x) = 10e^{0.01x}$ حيث $0 \leq x \leq 10$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{10} A(x) dx \\ &= \int_0^{10} 10e^{0.01x} dx \\ &= \frac{10e^{0.01x}}{0.01} \Big|_0^{10} = 100e^{0.01x} \Big|_0^{10} = 105 \end{aligned}$$

(3) أوجد حجم الهرم الذي مقطعه العرضي مربع مساحته $A(x) = \frac{4}{25}(10-x)^2$ وارتفاعه 10 متر

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{10} \frac{4}{25}(10-x)^2 dx \\ &= \frac{4}{25} \frac{(10-x)^3}{3(-1)} \Big|_0^{10} = \frac{160}{3}. \end{aligned}$$

الحالة الثانية : مساحة المقطع غير معلومة (لكن المقطع معلوم و محدد بدالتين)



أوجد حجم الجسم الذي قاعدته المنطقة المحدودة بالدالتين

$$y = x^2 \text{ و } y = 2 - x^2, -1 \leq x \leq 1$$

في الحالات التالية:

(أ) المقاطع عرضية دائرية متعامدة على محور X

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

ارسم شكل توضيحي وليس دقيق



$$r = \frac{f(x) - g(x)}{2}$$

$$= \frac{2 - x^2 - x^2}{2}$$

$$= \frac{2 - 2x^2}{2}$$

$$= 1 - x^2$$

$$V = \int_{-1}^1 A(x) dx$$

$$= \int_{-1}^1 \pi r^2 dx$$

$$= \int_{-1}^1 \pi (1 - x^2)^2 dx$$

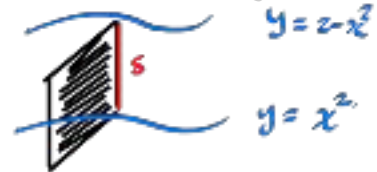
$$= \pi \int_{-1}^1 1 - 2x^2 + x^4 dx$$

$$= \pi \left[x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 = \frac{16\pi}{15}$$

(ب) المقاطع عرضية مربعة متعامدة على محور X

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب



$$S = 2 - x^2 - x^2$$

$$= 2 - 2x^2$$

$$V = \int_{-1}^1 A(x) dx$$

$$= \int_{-1}^1 S^2 dx$$

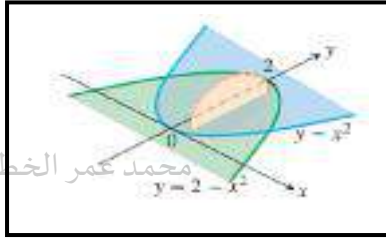
$$= \int_{-1}^1 (2 - 2x^2)^2 dx$$

$$= \int_{-1}^1 4(1 - x^2)^2 dx$$

$$= 4 \int_{-1}^1 1 - 2x^2 + x^4 dx$$

$$= 4 \left[x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 = \frac{64}{15}$$

أوجد حجم الجسم الذي قاعدته المنطقة المحدودة بالدالتين $y = x^2$ و $y = 2 - x^2$ ، $-1 \leq x \leq 1$



في الحالات التالية:

(أ) المقاطع عرضية نصف دائرة متعامدة على محور X

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$V = \int_{-1}^1 A(x) dx$$

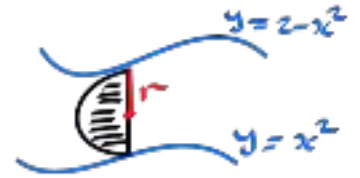
$$= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \pi r^2 dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \pi (1 - x^2)^2 dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^2 dx = \frac{8\pi}{15}$$



$$r = \frac{2 - x^2 - x^2}{2}$$

$$= 1 - x^2$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(ب) المقاطع عرضية مثلثة متساوية الأضلاع متعامدة على محور X

$$V = \int_{-1}^1 A(x) dx$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{3}}{4} L^2 dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{3}}{4} (2 - 2x^2)^2 dx$$

$$= \int_{-1}^1 \sqrt{3} (1 - x^2)^2 dx$$

$$= \frac{16\sqrt{3}}{15}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب



$$L = 2 - x^2 - x^2$$

$$= 2 - 2x^2$$

(ج) المقاطع عرضية مربعات اقطارها متعامدة على محور X

$$V = \int_{-1}^1 A(x) dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} d^2 dx$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (2 - 2x^2)^2 dx$$

$$= 2 \int_{-1}^1 (1 - x^2)^2 dx = \frac{32}{15}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب



$$d = 2 - x^2 - x^2$$

$$= 2 - 2x^2$$

(1) أوجد حجم الجسم الذي قاعدته المنطقة المحدودة بالدالتين

$$0 \leq x \leq \pi, \quad y = 0, \quad y = 2\sqrt{\sin x}$$

والمقاطع العرضية هي مثلثات متساوية الأضلاع متعامدة على محور x

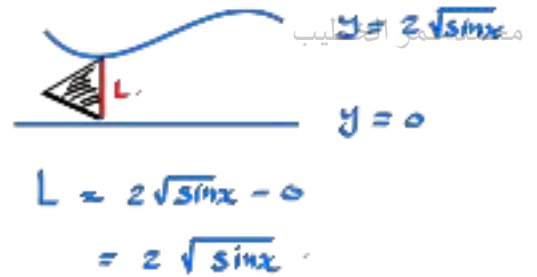
$$V = \int_0^{\pi} A(x) dx$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{3}}{4} L^2 dx$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{3}}{4} (2\sqrt{\sin x})^2 dx$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{3} \sin x dx = -\sqrt{3} \cos x \Big|_0^{\pi} = 2\sqrt{3}$$

محمد عمر الخطيب



محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(2) أوجد حجم الجسم الذي قاعدته المنطقة المحدودة بالدالتين

$$-1 \leq x \leq 1, \quad y = \sqrt{1-x^2}, \quad \text{و} \quad y = -\sqrt{1-x^2}$$

والمقاطع العرضية هي مثلثات متساوية الأضلاع متعامدة على محور x

$$V = \int_{-1}^1 A(x) dx$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{3}}{4} L^2 dx$$

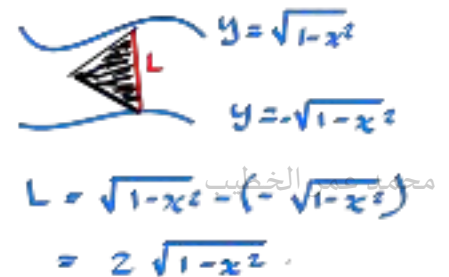
$$= \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{3}}{4} (2\sqrt{1-x^2})^2 dx$$

محمد عمر الخطيب

$$= \int_{-1}^1 \sqrt{3} (1-x^2) dx$$

محمد عمر الخطيب

$$= \sqrt{3} \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$



محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(3) أوجد حجم الجسم الذي قاعدته المنطقة المحدودة بالدالتين

$$0 \leq x \leq \ln 5, \quad y = 0, \quad y = e^{-2x}$$

والمقاطع العرضية هي مربعات متعامدة على محور x

$$V = \int_0^{\ln 5} A(x) dx$$

$$= \int_0^{\ln 5} s^2 dx$$

محمد عمر الخطيب

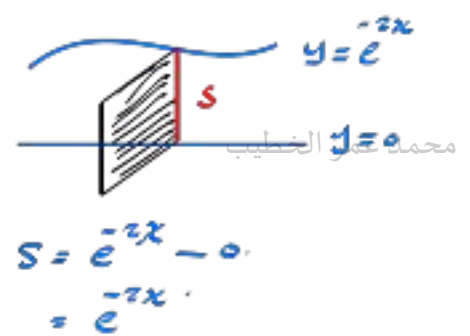
$$= \int_0^{\ln 5} (e^{-2x})^2 dx$$

محمد عمر الخطيب

$$= \int_0^{\ln 5} e^{-4x} dx = \frac{e^{-4x}}{-4} \Big|_0^{\ln 5} = \frac{156}{625}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب



محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(1) أوجد حجم الجسم الذي قاعدته المنطقة المحدودة بالدالتين

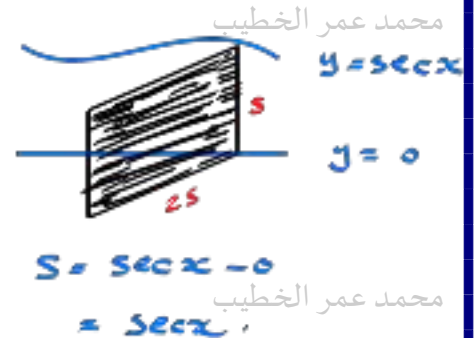
$$0 \leq x \leq \pi/4, \quad y=0, \quad \text{و} \quad y = \sec x$$

والمقاطع العرضية هي مستطيلات عرضها بين الدالتين وطولها ضعف عرضها متعامدة على محور x

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\pi/4} A(x) dx \\ &= \int_0^{\pi/4} s \cdot 2s dx \\ &= \int_0^{\pi/4} 2s^2 dx \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\pi/4} 2 \sec^2 x dx = 2 \tan x \Big|_0^{\pi/4} = 2$$

محمد عمر الخطيب



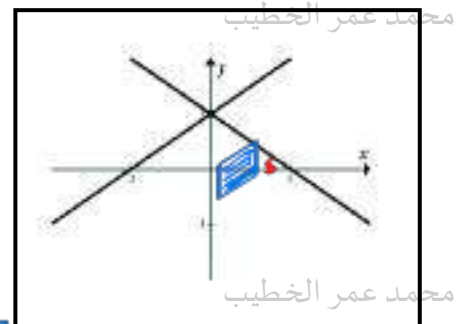
(2) أوجد حجم الجسم الذي قاعدته المنطقة المحدودة بالدالتين $y = -x+1$ و $y = x+1$

يفضل استخدام التماثل

ومحور x والمقاطع العرضية هي مربعات متعامدة على محور x

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_0^1 A(x) dx \\ &= 2 \int_0^1 s^2 dx \end{aligned}$$

$$= 2 \int_0^1 (-x+1)^2 dx = 2 \left(\frac{-x+1)^3}{3(-1)} \right) \Big|_0^1 = 2/3$$



أخذنا النصف لأن

$$s = -x+1 - 0$$

$$V = \int_{-1}^0 (x+1)^2 dx + \int_0^1 (-x+1)^2 dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

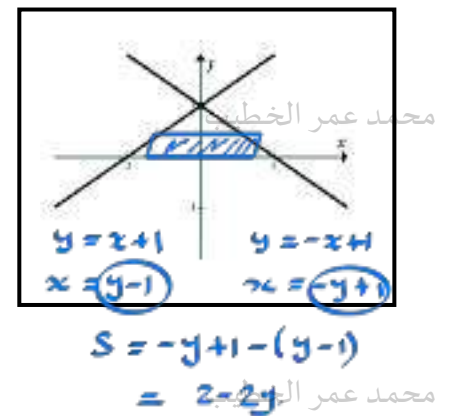
(3) أوجد حجم الجسم الذي قاعدته المنطقة المحدودة بالدالتين $y = -x+1$ و $y = x+1$

لا يجوز استخدام التماثل لأن
الجزء الأيمن يصبح مستطيل

ومحور x والمقاطع العرضية هي مربعات متعامدة على محور y

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(y) dy \\ &= \int_0^1 s^2 dy \\ &= \int_0^1 (2-2y)^2 dy \\ &= \left(\frac{2-2y)^3}{3(-2)} \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

الحاصل يك لأن المقاطع
تعامد على محور y



(1) إنشاء فخاري مقاطعه عرضية دائرية نصف قطرها $4 + \sin \frac{x}{2}$ ، $0 \leq x \leq 2\pi$ أوجد حجم الإناء

$$V = \int A(x) dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \pi r^2 dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \pi (4 + \sin \frac{x}{2})^2 dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \pi (16 + 8 \sin \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}) dx$$

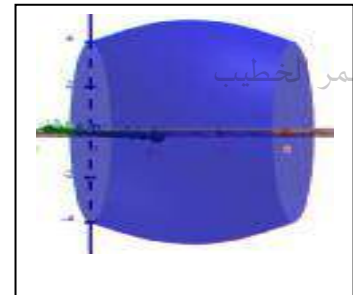
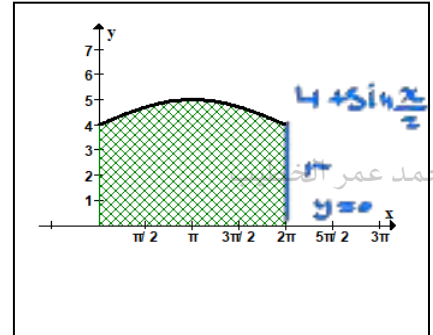
$$= \pi \int_0^{2\pi} 16 + 8 \sin \frac{x}{2} + \frac{1}{2} (1 - \cos x) dx$$

$$= \pi \left[16x - 8 \frac{\cos x/2}{1/2} + \frac{1}{2} (x - \sin x) \right]_0^{2\pi}$$

$$= 33\pi^2 + 32\pi$$

محمد عمر الخطيب

$$r = 4 + \sin \frac{x}{2}$$



(2) اوجد حجم بركة للسباحة تم مشاهدتها من مكان مرتفع، فكانت على شكل إطار محدود بالمعادلتين

محمد عمر الخطيب

$y = \pm(x+5)$ حيث $0 \leq x \leq 2$ وعمقها معطى بالدالة $x+4$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$V = \int A(x) dx$$

محمد عمر الخطيب

$$= \int_0^2 2(x+5)(x+4) dx$$

$$= \int_0^2 2(x^2 + 9x + 20) dx$$

محمد عمر الخطيب

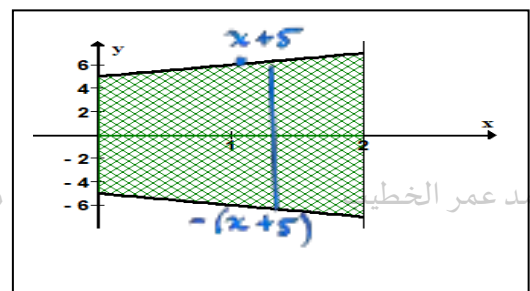
$$= 2 \left(\frac{x^3}{3} + 9 \frac{x^2}{2} + 20x \right) \Big|_0^2$$

$$= \frac{364}{3}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب



محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

شعاع المقطع

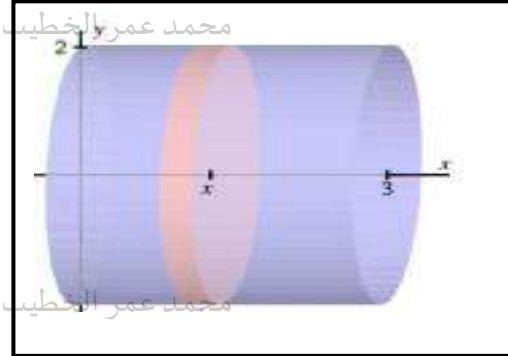


مساحة المقطع = مساحة مستطيل
= العرض x الطول

$$A(x) = [(x+5) - (-(x+5))](x+4)$$

$$= 2(x+5)(x+4)$$

ملاحظة مهمة : يجب أن تكون المقاطع $A(x)$ متشابهة (وممكن أن تكون متطابقة ولكن ليس شرطاً) في اتجاه واحد (ويكون هو المكامل)



مساحة المقطع ثابت... وهو دائرة

(1) الشكل المجاور يمثل اسطوانة نصف قطرها 2 وارتفاعها 3

اكتب التكامل الذي يمثل حجمها ثم جد قيمة الحجم

$$V = \int A(x) dx$$

$$= \int_0^3 \pi (2)^2 dx$$

$$= 12\pi$$

المقطع دائري
ساكنه ثابتة
دساسة بما قدر x
محمد عمر الخطيب
ر = 2 ثابت



مساحة المقطع ثابت... وهو مثلث

(2) الشكل المجاور يمثل خيمة على شكل منشور،

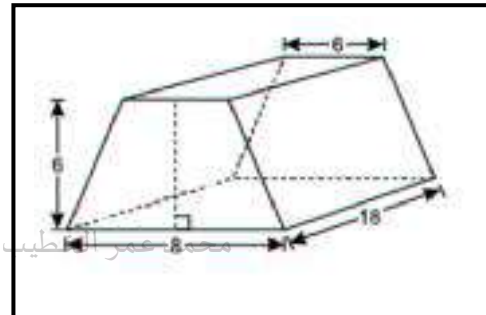
اكتب التكامل الذي يمثل حجمها ثم جد قيمة الحجم

$$V = \int A(x) dx$$

$$= \int_0^{80} \frac{1}{2} (50)(40) dx$$

$$= 8000$$

المقطع مثلث
ساكنه ثابتة
دساسة بما قدر x
محمد عمر الخطيب



مساحة المقطع ثابت... وهو شبه منحرف

(3) الشكل المجاور يمثل بيت على شكل منشور ،

اكتب التكامل الذي يمثل حجمه ثم جد قيمة الحجم

$$V = \int A(x) dx$$

$$= \int_0^{18} \left(\frac{6+8}{2} \right) \cdot 6 dx$$

$$= 756$$

المقطع شبه منحرف
ساكنه ثابتة
دساسة بما قدر x
محمد عمر الخطيب

أوجد حجم الهرم الذي قاعدته مربعة الشكل، وطول ضلع قاعدته 180 متر وارتفاعه 100 متر

باستخدام التكامل

ملاحظة: إذا كان السؤال اختيار من متعدد نستخدم قانون حجم الهرم: وهو ثلث مساحة القاعدة ضرب الارتفاع

$$V = \frac{1}{3} (180)^2 \cdot 100 = 1,080,000$$

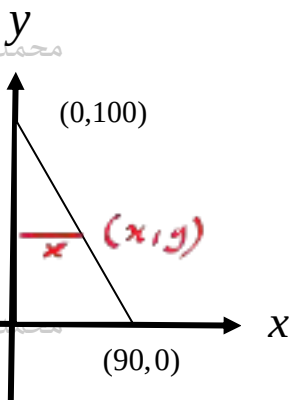
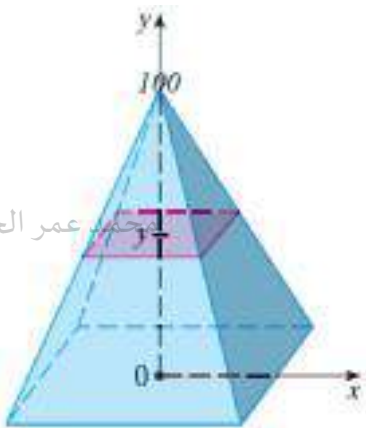
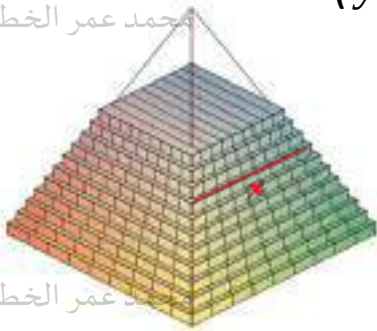
يمكن استخدام القانون $V = \int_0^H (B - \frac{B}{H}x)^2 dx$ حيث $H = 100$ ارتفاع الهرم و $B = 180$ طول قاعدة الهرم

$$V = \int_0^{100} (180 - \frac{180}{100}x)^2 dx = \int_0^{100} (180 - \frac{9}{5}x)^2 dx$$

ملاحظة: يتشكل الهرم من جميع مقاطع عرضية وهي مربعات (متعامدة على محور y)

في اتجاه المحور y لذلك يجب أن يكون المكامل dy

ومساحة المقطع بدلالة y ونجد مساحة المربع عند أي ارتفاع بدلالة y



المقطع العرضي متعامد على محور y

محمد عمر الخطيب

$$V = \int A(y) dy$$

$$= \int s^2 dy$$

$$= \int (2x)^2 dy$$

$$= \int_0^{100} [2 \cdot \frac{9}{10}(100-y)]^2 dy$$

$$= \int_0^{100} [\frac{9}{5}(100-y)]^2 dy$$

$$= \int_0^{100} (180 - \frac{9}{5}y)^2 dy$$

$$= \frac{(180 - \frac{9}{5}y)^3}{3(-\frac{9}{5})} \Big|_0^{100}$$

$$= 1,080,000$$

جدد لملامح بين

الخط من معادلة

المقطع المستقيم



$$m = \frac{100-0}{0-90} = -\frac{10}{9}$$

$$y - 100 = -\frac{10}{9}(x - 0)$$

$$x = \frac{9}{10}(100 - y)$$

يمكن إيجاد لملامح من

ثلاثة النقط



$$\frac{x}{90} = \frac{100-y}{100}$$

$$x = \frac{90}{100}(100-y)$$

(1) اكتب التكامل الذي يمثل حجم الهرم الذي قاعدته مربعة الشكل، وطول ضلع قاعدته 30 متر

وارتفاعه 10 متر

$$V = \int_0^H \left(B - \frac{B}{H} x \right)^2 dx$$

$$B = 30$$

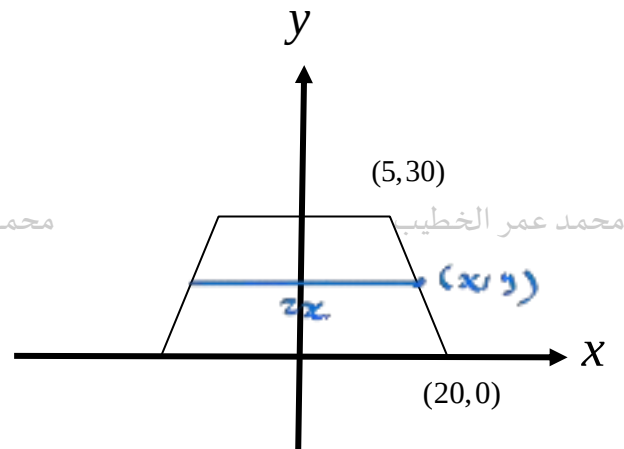
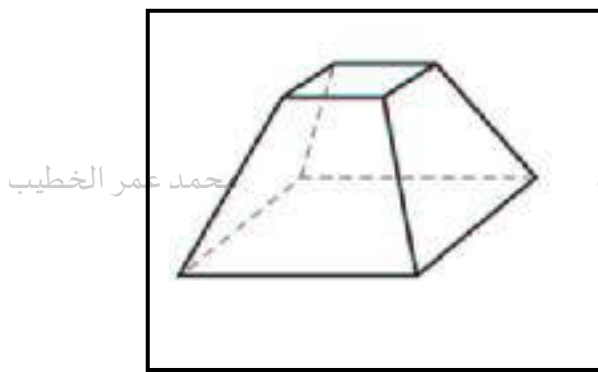
$$H = 10$$

$$V = \int_0^{10} \left(30 - \frac{30}{10} x \right)^2 dx = \int_0^{10} (30 - 3x)^2 dx$$

محمد عمر الخطيب

(2) أوجد حجم الهرم الناقص الذي قاعدته مربعة الشكل، وطول ضلع قاعدته السفلية 40 متر، وقاعدته

من الأعلى مربعة الشكل وطول ضلعها 10 متر وارتفاعه 30 متر



محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

* لتابع مربعات معادلة على محور y

$$V = \int A(y) dy$$

$$= \int s^2 dy$$

$$= \int (2x)^2 dy$$

$$= \int_0^{30} (40 - y)^2 dy$$

$$= \frac{(40 - y)^3}{3(-1)} \Big|_0^{30}$$

$$= 2100$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

خذ معادلة الخط المستقيم

الذي يمر بالنقطتين

$$(20, 0), (5, 30)$$

$$m = \frac{30 - 0}{5 - 20} = -2$$

$$y - 30 = -2(x - 5)$$

$$y - 30 = -2x + 10$$

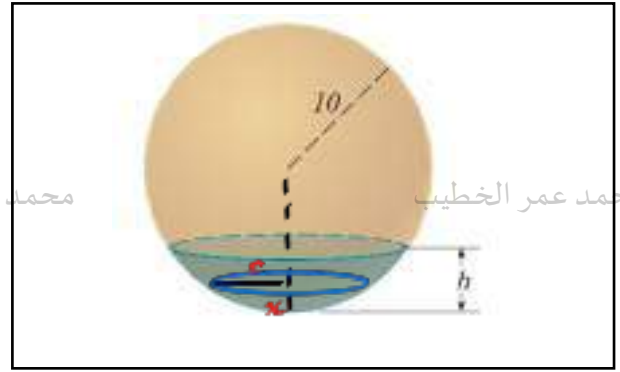
$$2x = 10 + 30 - y$$

$$2x = 40 - y$$

محمد عمر الخطيب

(1) أثبت أن حجم الماء في الخزان الكروي الذي نصف قطره 10m وارتفاعه الماء h يعطى بالعلاقة

$$v(h) = 10\pi h^2 - \frac{1}{3}\pi h^3$$



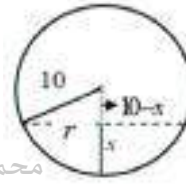
حجم الماء عند الارتفاع h هو

$$V = \int_0^h A(x) dx$$

المقطع دائرة

عمق الماء في أي

لحظه هو x



من فيثاغورس

نجد العلاقة بين r و x

$$r^2 + (10 - x)^2 = 100$$

$$r^2 + 100 - 20x + x^2 = 100$$

$$r^2 = 20x - x^2$$

هذه العلاقة صحيحة في الدائرة التي نصف قطرها R

$$r^2 = 2Rx - x^2$$

يفضل حفظها

(2) اكتب التكامل الذي يمثل حجم الماء في الخزان الاسطواني القائم كما في الشكل المجاور الذي

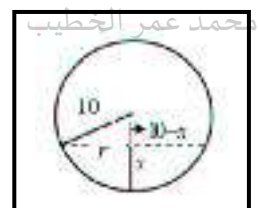
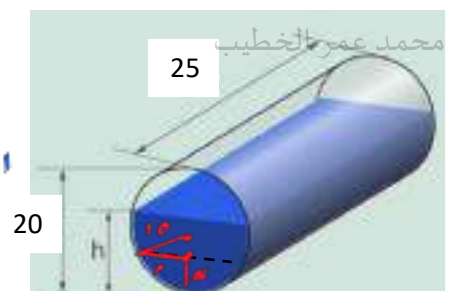
نصف قطرها 10m وارتفاعها 25m وارتفاع الماء h

$$V = \int A(x) dx$$

$$= \int_0^h 25 \cdot 2r$$

$$= \int_0^h 50r$$

$$= \int_0^h 50 \sqrt{20x - x^2} dx$$



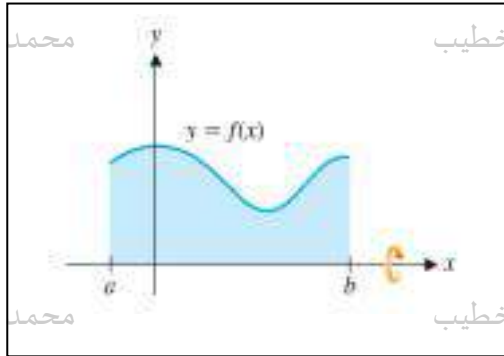
$$r^2 = 2Rx - x^2$$

$$r^2 = 20x - x^2$$

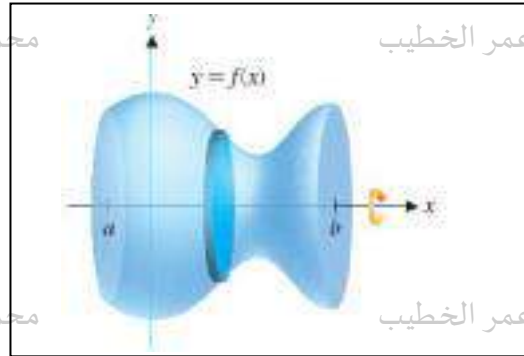
ثانياً: الحجوم الدورانية : الأقراص و الحلقات

الحجوم الدورانية (الأقراص و الحلقات)

محمد عمر الخطيب



محمد عمر الخطيب



محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

ملاحظات:

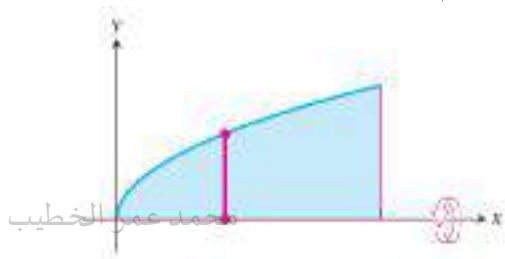
الشريحة عمودية على محور الدوران

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(1) طريقة إيجاد الحجم باستخدام الأقراص هي نفس طريقة إيجاد الحجم بطريقة الحلقات



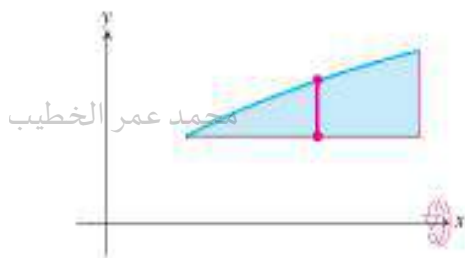
محمد عمر الخطيب

(2) عندما يكون حجم الجسم ناتج عن دوران مساحة المنطقة R

المحصورة بدالة مع أحد المحاور

(لا يوجد فراغ بين المساحة ومحور الدوران)

فإننا نستخدم الأقراص



محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(3) عندما يكون حجم الجسم ناتج عن دوران مساحة المنطقة R

المحصورة بدالة او دالتين وليست مع محور الدوران

(يوجد فراغ بين المساحة ومحور الدوران)

فإننا نستخدم الحلقات .

(4) إذا كان الدوران حول محور السينات او مستقيم يوازيه فإن المكامل (dx)

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(5) إذا كان الدوران حول محور الصادات او مستقيم يوازيه فإن المكامل (dy)

(6) إذا كانت الطريقة محددة وهي (أقراص / حلقات) ومحور الدوران محدد فان الشريحة (الارتفاع)

يجب أن يتم اختيارها بحيث تعامد محور الدوران

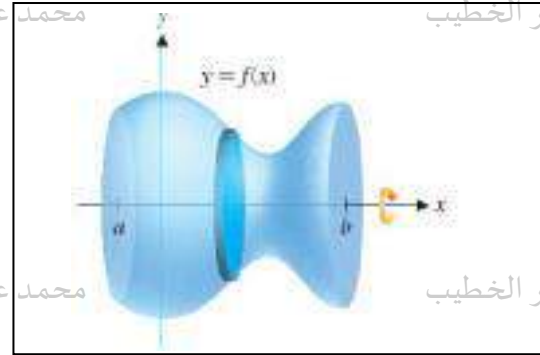
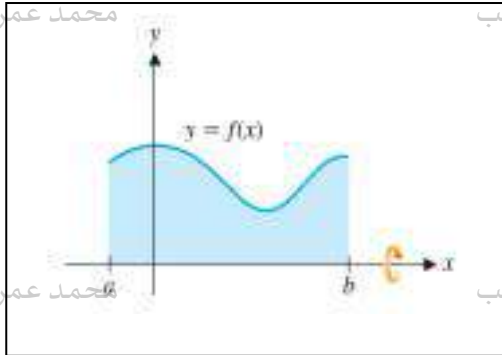
محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

الحالة الأولى: الدوران حول محور السينات (x)

إن حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى $f(x) \geq 0$ ومحور السينات والمستقيمين $x = a, x = b$ حول محور السينات (x) يعطى بالتكامل

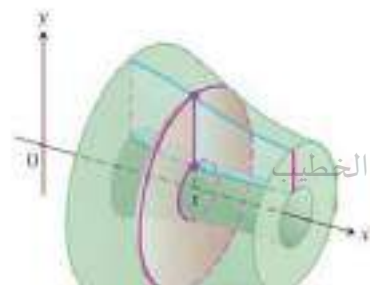
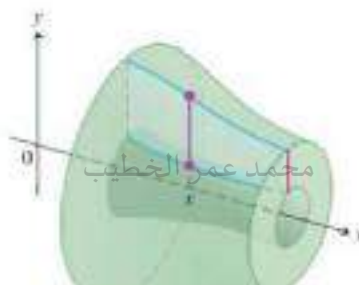
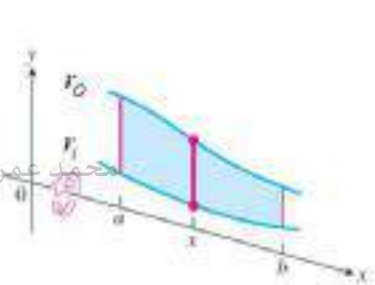


$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

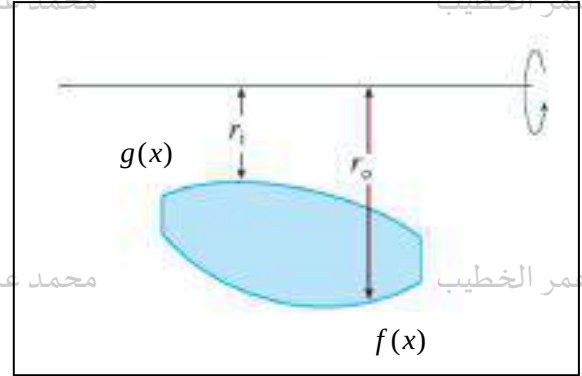
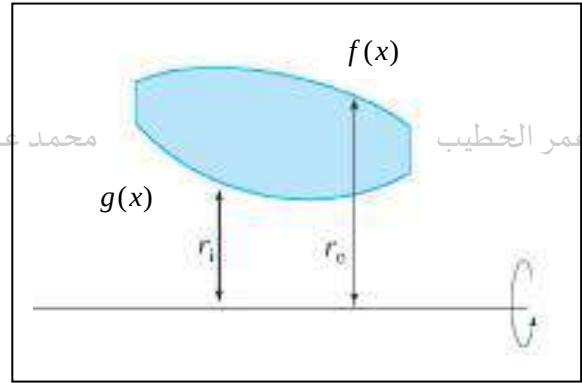
الحجم بطريقة الحلقات (المجوفات)

إن حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنيين $f(x), g(x)$ حيث $f(x) \geq g(x)$ والمستقيمين $x = a, x = b$ حول محور x يعطى بالتكامل

$$V = \pi \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx$$



$$V = \pi \int_a^b (r_o^2 - r_i^2) dx$$



حيث

r_o نصف قطر الدوران الخارجي (بعد الدالة الخارجية عن محور الدوران)

و

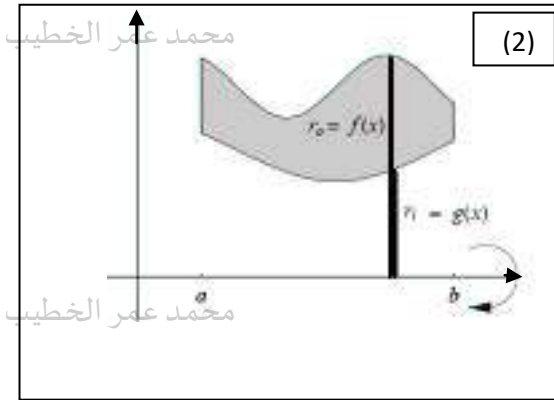
r_i نصف قطر الدوران الداخلي (بعد الدالة الداخلية عن محور الدوران)

ملاحظة مهمة: إذا كان محور الدوران هو نفسه محور التماثل للشكل، فإنه يكفي تدوير نصف المنحنى وليس المنحنى كامل

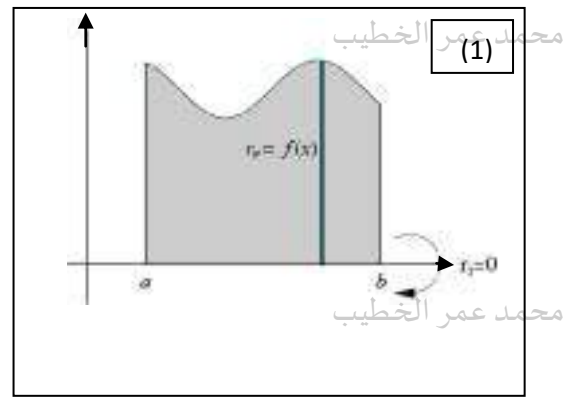
حالات نصف القطر الداخلي والخارجي مع محاور الدوران والمكامل dx

$$v = \pi \int_a^b r_o^2 - r_i^2 dx$$

هذه الحالات ليست حفظ



$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r_o = f(x) - 0 \\ r_i = g(x) - 0 \end{cases}$$

 $y=0$ 

الدالة الأعلى

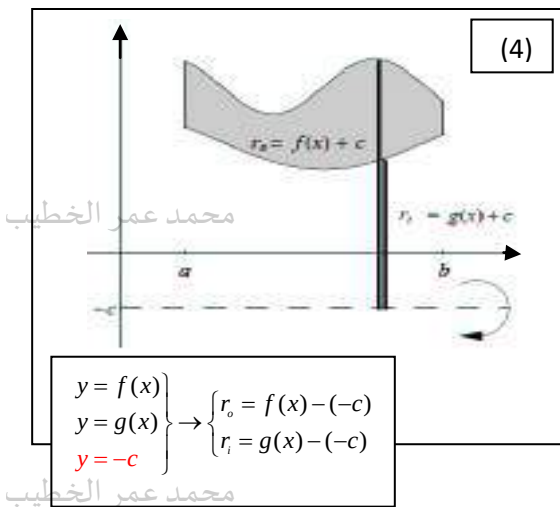
الدالة الأدنى

محور الدوران

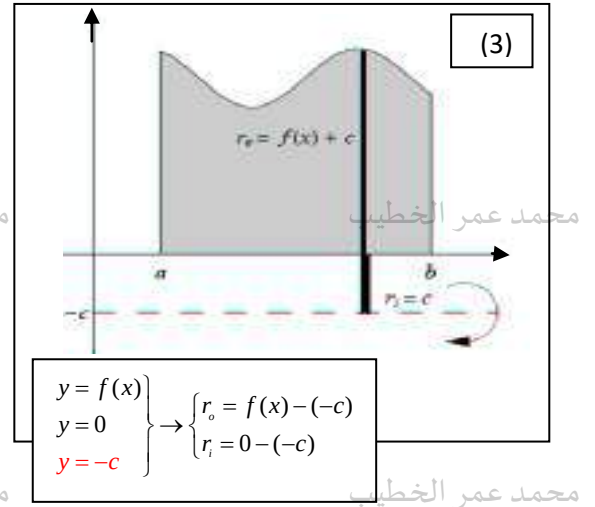
$$y = f(x)$$

$$y = 0$$

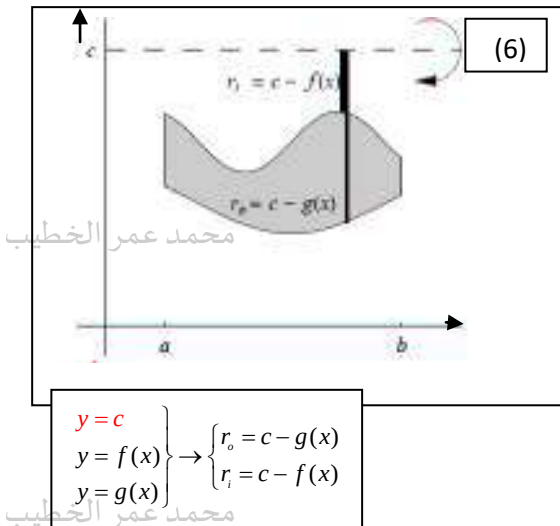
$$\rightarrow \begin{cases} r_o = f(x) - 0 \\ r_i = 0 - 0 \end{cases}$$

 $y=0$ 

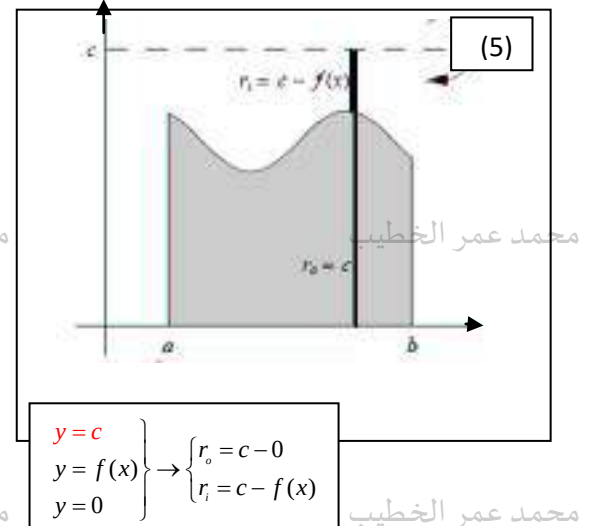
$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r_o = f(x) - (-c) \\ r_i = g(x) - (-c) \end{cases}$$

 $y=-c$ 

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r_o = f(x) - (-c) \\ r_i = 0 - (-c) \end{cases}$$

 $y=-c$ 

$$\begin{cases} y = c \\ y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r_o = c - g(x) \\ r_i = c - f(x) \end{cases}$$

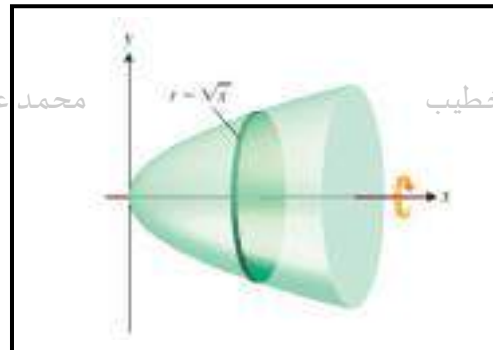
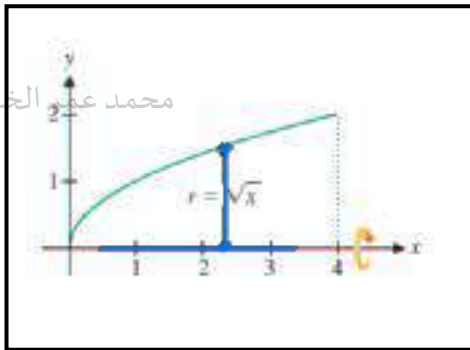
 $y=c$ 

$$\begin{cases} y = c \\ y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r_o = c - 0 \\ r_i = c - f(x) \end{cases}$$

 $y=c$

(1) أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى $y = \sqrt{x}$ والمستقيم $y = 0$ على

الفترة $[0, 4]$ حول محور X بطريقة الأقراص



ملاحظة مهمة... قبل البدء بالحل: لاحظ أن الطريقة محددة وهي اقراص / حلقات، ومحور الدوران محدد وهو (x) فإن الشريحة يجب أن يتم اختيارها بحيث تعاود محور الدوران فيكون (dx) وهو المكامل

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^4 r_o^2 - r_i^2 dx \\
 &= \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 - (0)^2 dx \\
 &= \pi \int_0^4 x dx \\
 &= \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = 8\pi
 \end{aligned}$$

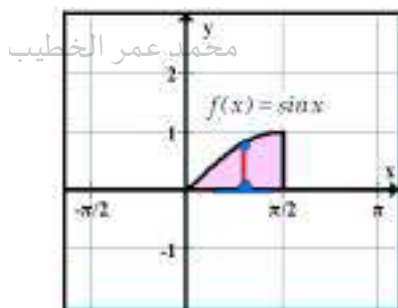
الطريقة المحددة اقراص

اسم شريحة $\perp$ محور دوران

الشريحة (الكاس) dx

$y = \sqrt{x}$
 $y = 0$
 $y = 0$

$r_o = \sqrt{x} - 0 = \sqrt{x}$
 $r_i = 0 - 0 = 0$



بالدالة $f(x) = \sin x$ والمستقيم $y = 0$

على الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ حول محور X بطريقة الأقراص

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^{\pi/2} r_o^2 - r_i^2 dx \\
 &= \pi \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx \\
 &= \pi \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) dx = \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4}
 \end{aligned}$$

الاسم شريحة $\perp$ محور دوران

الشريحة (الكاس) dx

$y = \sin x$
 $y = 0$
 $y = 0$

$r_o = \sin x - 0$
 $r_i = 0 - 0 = 0$

(1) أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة

بالدالتين $y = \sin x$ و $y = \cos x$ والمستقيم $x = 0$

على الفترة $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ حول محور x

بطريقة الحلقات

الطريقة الحديثة
اسم شريحة $\perp$ محور دوران
الشريحة (الكاس) dx

$$\begin{aligned} y &= \cos x \\ y &= \sin x \\ y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_o &= \cos x - 0 \\ r_i &= \sin x - 0 \end{aligned}$$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi/4} \cos^2 x - \sin^2 x dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi/4} \cos 2x dx$$

$$= \pi \left[\frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{2}$$

(2) أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة R

المحصورة بالدالتين $y = \sqrt{x}$ و $y = 2$ والمستقيم $x = 0$

والمستقيم $x = 0$

حول محور x بطريقة الحلقات

محمد عمر الخطيب

الطريقة الحديثة
اسم شريحة $\perp$ محور دوران
الشريحة (الكاس) dx

$$\begin{aligned} y &= 2 \\ y &= \sqrt{x} \\ y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_o &= 2 - 0 \\ r_i &= \sqrt{x} - 0 \end{aligned}$$

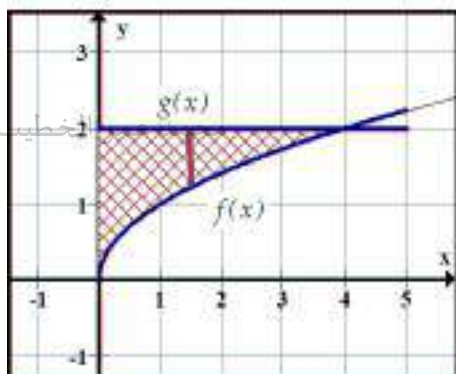
$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dx$$

$$= \pi \int_0^4 2^2 - (\sqrt{x})^2 dx$$

$$= \pi \int_0^4 4 - x dx$$

$$= \pi \left[4x - \frac{x^2}{2} \right]_0^4$$

$$= 8\pi$$

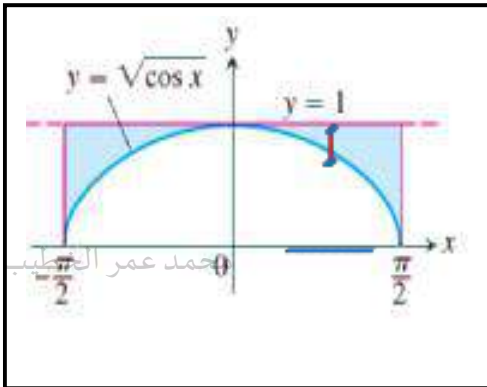


محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R



المحصورة بالدالة $y = \sqrt{\cos x}$ والمستقيم $y = 1$

على الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ حول محور x بطريقة الحلقات

حلقات

اسم شريحة $\perp$ محور دوران
: شريحة (الكاس) dx

محمد عمر الخطيب

$$\begin{aligned} y &= 1 \\ y &= \sqrt{\cos x} \\ y &= 0 \end{aligned}$$

$$r_o = 1 - 0$$

$$r_i = \sqrt{\cos x} - 0$$

محمد عمر الخطيب

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r_o^2 - r_i^2 dx \\ &= \pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1^2 - (\sqrt{\cos x})^2 dx \\ &= \pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 - \cos x dx \\ &= \pi \left[x - \sin x \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi^2 - 2\pi \end{aligned}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(2) اوجد حجم المجسم الناتج عن دوران المنطقة R



المحصورة بالدالة $y = \frac{2}{x+1}$ والمستقيم $y = x$

والمستقيم $x = 0$ حول محور x بطريقة الحلقات

حلقات

اسم شريحة $\perp$ محور دوران
: شريحة (الكاس) dx

محمد عمر الخطيب

$$\begin{aligned} y &= \frac{2}{x+1} \\ y &= x \\ y &= 0 \end{aligned}$$

$$r_o = \frac{2}{x+1} - 0$$

$$r_i = x - 0$$

محمد عمر الخطيب

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 r_o^2 - r_i^2 dx \\ &= \pi \int_0^1 \left(\frac{2}{x+1} \right)^2 - x^2 dx \\ &= \pi \int_0^1 4(x+1)^{-2} - x^2 dx \\ &= \pi \left[4 \left(\frac{x+1}{-1} \right)^{-1} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{5\pi}{3} \end{aligned}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

الحالة الثانية: الدوران حول محور الصادات (y)

أن حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى $g(y) \geq 0$ ومحور y والمستقيمين

$y = c, y = d$ حول محور y يعطى بالتكامل

$$v = \int_c^d A(y) dy =$$

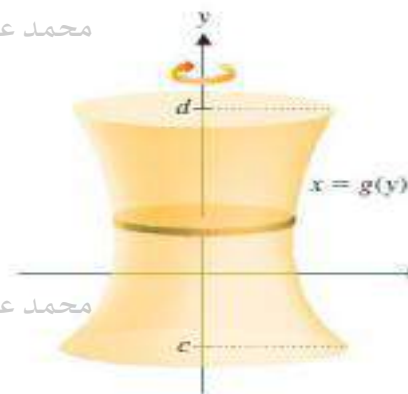
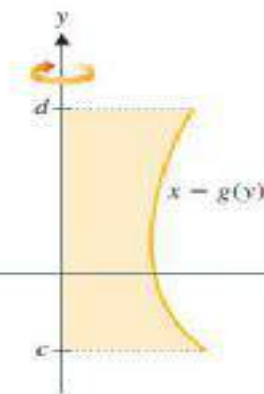
$$= \int_c^d \pi r^2 dy$$

$$= \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy$$

مساحة القرص الدائري

$$A = \pi r^2 = \pi x^2 = \pi [g(y)]^2$$

سمك القرص الدائري dy



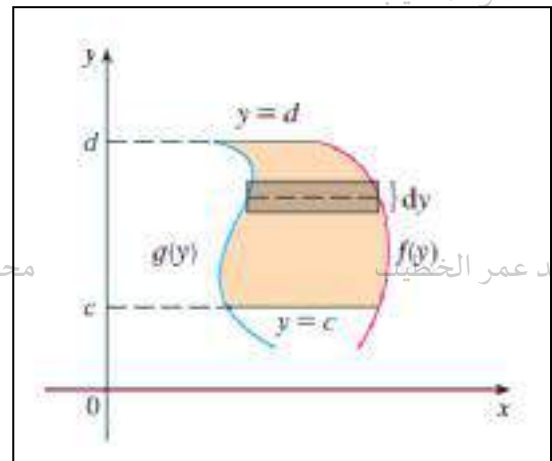
إنّ حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بمنحنى الدالتين $g(y)$ و $f(y)$ حيث

$f(y) \geq g(y)$ والمستقيمين $y = c, y = d$ حول محور y هو

$$v = \int_c^d A(y) dy$$

$$= \pi \int_c^d r_o^2 - r_i^2 dy$$

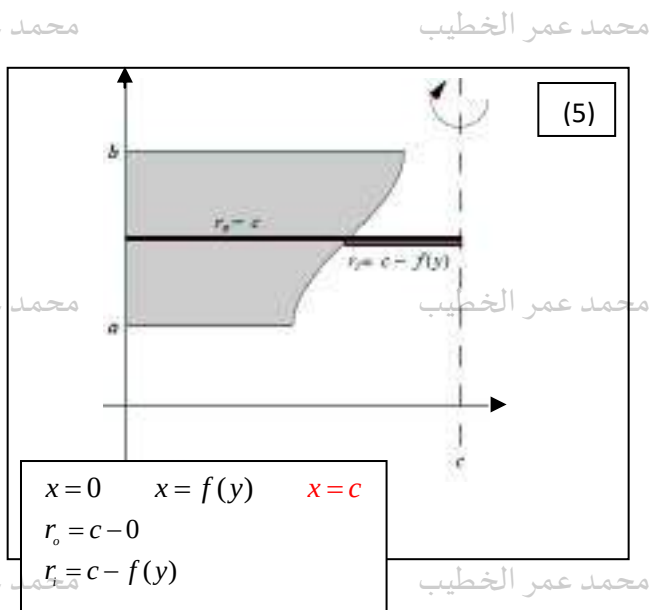
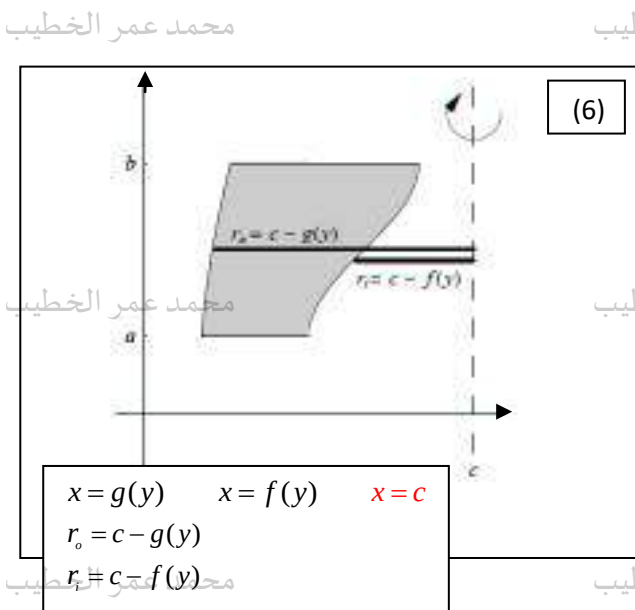
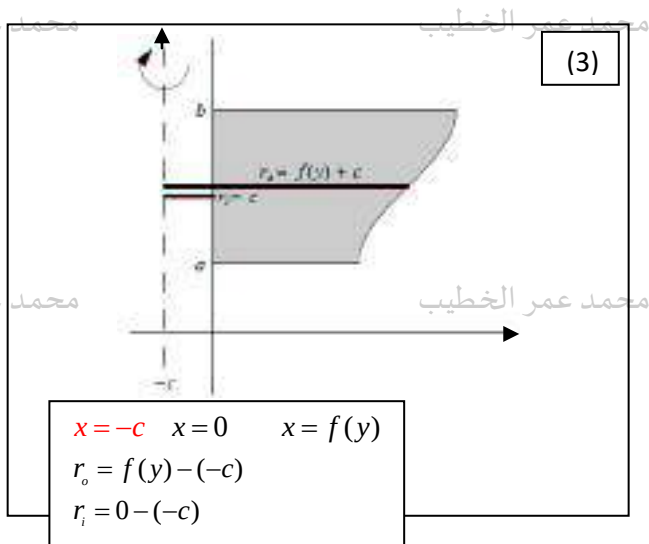
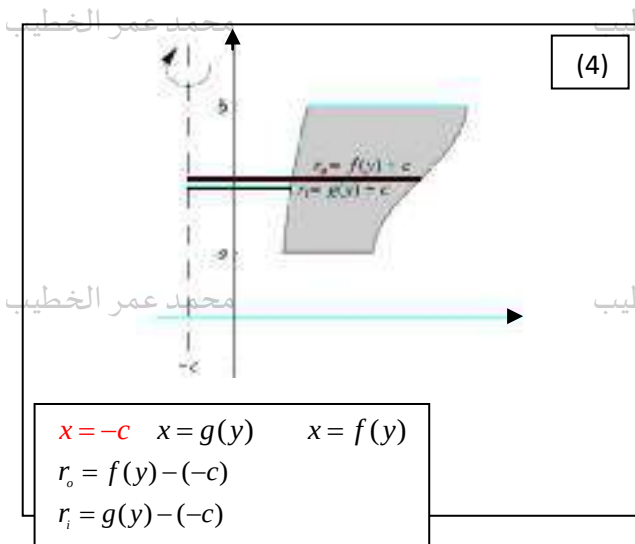
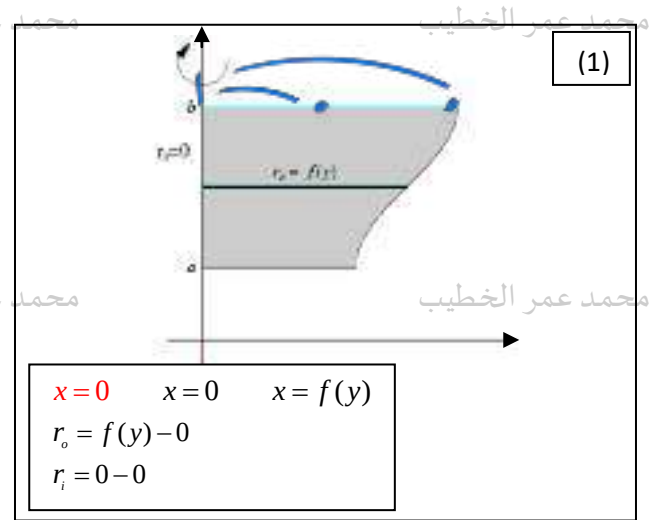
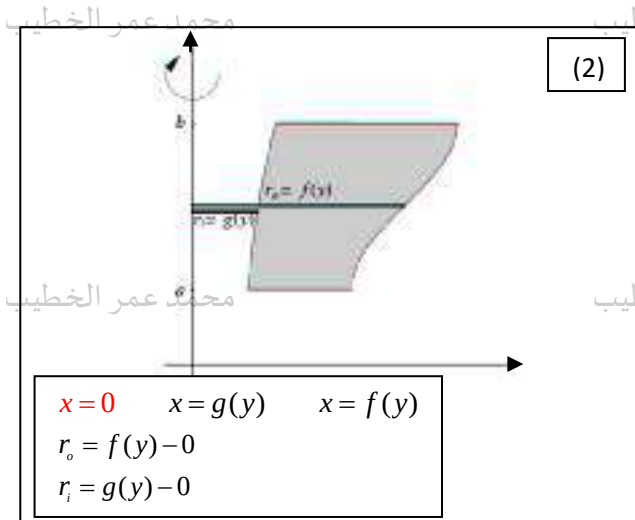
$$= \pi \int_c^d [f(y)]^2 - [g(y)]^2 dy$$



حالات نصف القطر الداخلي والخارجي مع محاور الدوران والمكامل dy

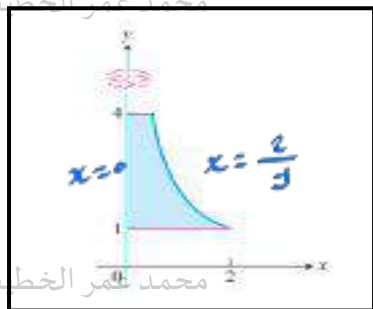
$$v = \pi \int_a^b r_o^2 - r_i^2 dy$$

هذه الحالات ليست حفظ



(1) أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى

$$x = \frac{2}{y} \text{ والمستقيم } y = 1 \text{ والمستقيم } y = 4 \text{ ومحور } y$$



حول محور y بطريقة الأقراص

محمد عمر الخطيب

المنطقة (الكاس) dy

$$r_o = \frac{2}{y} - 0$$

$$r_i = 0 - 0$$

$$V = \pi \int_1^4 (r_o^2 - r_i^2) dy$$

$$= \pi \int_1^4 \left(\frac{2}{y}\right)^2 dy$$

$$= \pi \int_1^4 \frac{4}{y^2} dy = \pi \int_1^4 4y^{-2} dy = 2\pi \left[-\frac{1}{y}\right]_1^4 = 3\pi$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

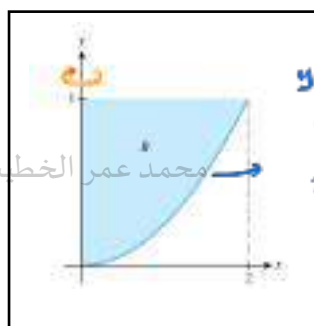
(2) أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى

$$y = \frac{1}{4}x^2 \text{ والمستقيم } y = 1 \text{ والمستقيم } x = 0$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

حول محور y بطريقة الأقراص



$$y = \frac{1}{4}x^2$$

$$4y = x^2$$

$$x^2 = 4y$$

$$x = \pm \sqrt{4y}$$



محمد عمر الخطيب

$$r_o = \sqrt{4y} - 0$$

$$r_i = 0 - 0$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$V = \pi \int_0^1 (r_o^2 - r_i^2) dy$$

$$= \pi \int_0^1 (\sqrt{4y})^2 dy$$

$$= \pi \int_0^1 4y dy = 2\pi$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

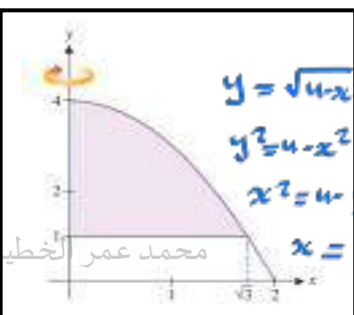
(3) أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة

$$y = 1 \text{ والمستقيم } x = 0 \text{ والمنحنى } y = 4 - x^2$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

حول محور y بطريقة الأقراص



$$y = 4 - x^2$$

$$y^2 = 4 - x^2$$

$$x^2 = 4 - y^2$$

$$x = \pm \sqrt{4 - y^2}$$

المنطقة (الكاس) dy



$$r_o = \sqrt{4 - y^2} - 0$$

$$r_i = 0 - 0$$

$$V = \pi \int_1^4 (r_o^2 - r_i^2) dy$$

$$= \pi \int_1^4 (\sqrt{4 - y^2})^2 dy = \pi \int_1^4 (4 - y^2) dy$$

$$= \pi \left(4y - \frac{y^3}{3}\right) \Big|_1^4 = \frac{9\pi}{2}$$

محمد عمر الخطيب

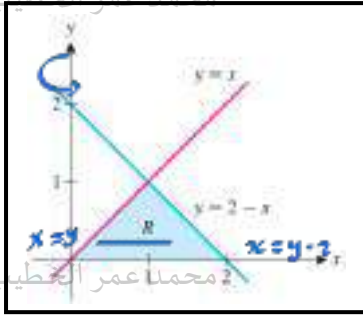
محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(1) أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة

بالمستقيم $y = 2 - x$ والمستقيم $y = x$ و $y = 0$ حول المحور y

بطريقة الحلقات



محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

اسم شريحة ١ عدد الدورات
: الشريحة (الحلقات) dy

$$\begin{array}{c} | \\ \hline x=0 \quad x=y \quad x=2-y \end{array}$$

محمد عمر الخطيب

$$r_o = 2 - y - 0$$

$$r_i = y - 0$$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dy$$

$$= \pi \int_0^2 (2-y)^2 - y^2 dy$$

$$= \pi \left[\frac{(2-y)^3}{3(-1)} - \frac{y^3}{3} \right]_0^2$$

$$= 2\pi$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

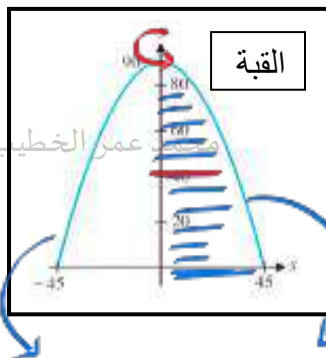
محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(2) إذا كان شكل القبة يتكون من تدوير المساحة المحصورة بالمنحنى $y = -\frac{2}{45}x^2 + 90$

ومحور السينات حول محور y ، أوجد حجم هذه القبة بطريقة الأقراص



ملاحظة مهمة: إذا كان محور الدوران هو نفسه محور التماثل للشكل فإنه يكفي تدوير نصف المنحنى وليس المنحنى كامل

$$x = -\sqrt{\frac{45}{2}(90-y)} \quad x = \sqrt{\frac{45}{2}(90-y)}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dy$$

$$= \pi \int_0^{90} \left(\sqrt{\frac{45}{2}(90-y)} \right)^2 dy$$

$$= \pi \int_0^{90} \frac{45}{2} (90-y) dy$$

$$= \frac{45\pi}{2} \left(90y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{90} = 91125\pi$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

اسم شريحة ٢ عدد الدورات
: الشريحة (الحلقات) dy

$$y = -\frac{2}{45}x^2 + 90$$

$$\frac{2}{45}x^2 = 90 - y$$

$$x^2 = \frac{45}{2}(90-y)$$

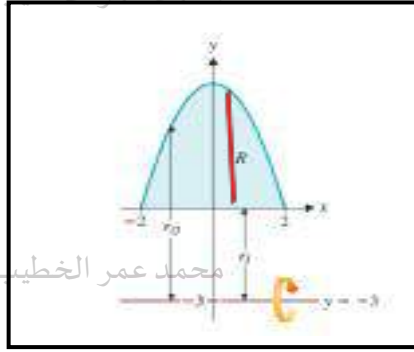
$$x = \pm \sqrt{\frac{45}{2}(90-y)}$$

$$\begin{array}{c} | \\ \hline x=0 \quad x=0 \quad x=\sqrt{\frac{45}{2}(90-y)} \end{array}$$

$$r_o = \sqrt{\frac{45}{2}(90-y)}$$

محمد عمر الخطيب

$$r_i = 0$$



(1) أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى

$y = 4 - x^2$ ومحور x حول المستقيم $y = -3$ بطريقة الحلقات

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dx$$

$$= \pi \int_{-2}^2 (4 - x^2)^2 - (-3)^2 dx$$

$$= \pi \int_{-2}^2 (16 - 8x^2 + x^4 - 9) dx$$

$$= \pi \int_{-2}^2 (7 - 8x^2 + x^4) dx$$

$$= \pi \left(7x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right)_{-2}^2 = \frac{1472\pi}{5}$$

اسم شريحة + محور الدوران
: بشرط (الحاصل) dx

$$y = 4 - x^2$$

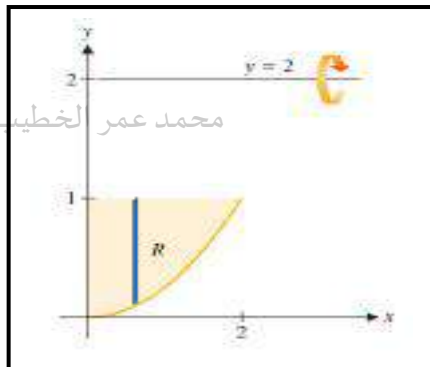
$$y = 0$$

$$y = -3$$

$$r_o = 4 - x^2 - (-3)$$

$$= 7 - x^2$$

$$r_i = 0 - (-3) = 3$$



(2) أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة

محمد عمر الخطيب

بالمنحنى $y = \frac{1}{4}x^2$ والمستقيم $y = 1$ ومحور y

حول المستقيم $y = 2$ بطريقة الحلقات

محمد عمر الخطيب

اسم شريحة + محور الدوران
: بشرط (الحاصل) dx

$$y = 2$$

$$y = 1$$

$$y = \frac{1}{4}x^2$$

$$r_o = 2 - \frac{1}{4}x^2$$

$$r_i = 2 - 1 = 1$$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dx$$

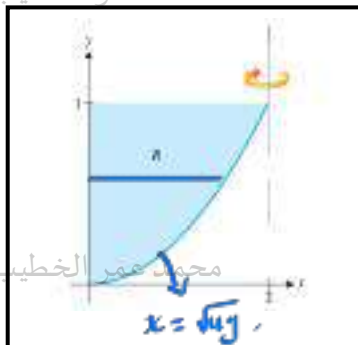
$$= \pi \int_0^2 \left(2 - \frac{1}{4}x^2 \right)^2 - 1^2 dx$$

$$= \pi \int_0^2 \left(4 - x^2 + \frac{1}{16}x^4 \right) - 1 dx$$

$$= \pi \int_0^2 \left(3 - x^2 + \frac{1}{16}x^4 \right) dx$$

$$= \pi \left(3x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{16} \cdot \frac{x^5}{5} \right)_0^2 = \frac{56\pi}{5}$$

(1) اكتب التكامل الذي يمثل حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة R



المحصورة بالمنحنى $y = \frac{1}{4}x^2$ والمستقيم $y = 1$ ومحور y

حول المستقيم $x = 2$ بطريقة الحلقات

$$y = \frac{1}{4}x^2$$

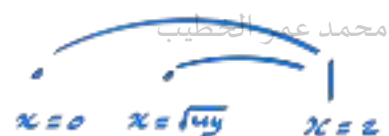
$$4y = x^2$$

$$x^2 = 4y$$

$$x = \pm \sqrt{4y}$$

محمد عمر الخطيب

اسم شريحة 1 محمد عمر الخطيب
الشرعية (الكامل) dy



$$r_o = 2 - 0$$

$$r_i = 2 - \sqrt{4y}$$

محمد عمر الخطيب

$$V = \pi \int (r_o^2 - r_i^2) dy$$

$$= \pi \int_0^1 (2^2 - (2 - \sqrt{4y})^2) dy$$

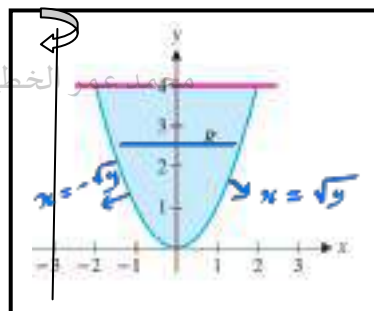
محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(2) اكتب التكامل الذي يمثل حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة R



$$y = x^2$$

$$x^2 = y$$

$$x = \pm \sqrt{y}$$

المحصورة بالمنحنى $y = x^2$ والمستقيم $y = 4$

حول المستقيم $x = -3$ بطريقة الحلقات

اسم شريحة 2 محمد عمر الخطيب
الشرعية (الكامل) dy



$$r_o = \sqrt{y} - (-3) = \sqrt{y} + 3$$

$$r_i = -\sqrt{y} - (-3) = -\sqrt{y} + 3$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$V = \pi \int (r_o^2 - r_i^2) dy$$

$$= \pi \int_0^4 ((\sqrt{y} + 3)^2 - (-\sqrt{y} + 3)^2) dy$$

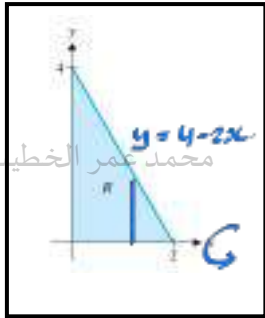
محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

المحصورة بالمستقيم $y = 4 - 2x$ والمحورين



$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dx$$

محمد عمر الخطيب

$$= \pi \int_0^2 (4 - 2x)^2 dx$$

(1) حول محور X

محمد عمر الخطيب

الرسم

$$y = 4 - 2x$$

$$y = 0$$

$$y = 0$$

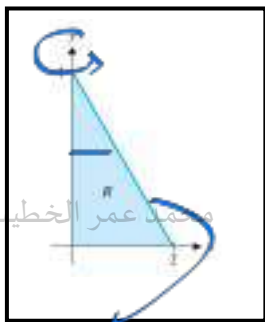
$$r_o = 4 - 2x - 0$$

$$r_i = 0 - 0$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب



$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dy$$

محمد عمر الخطيب

$$= \pi \int_0^4 (2 - \frac{1}{2}y)^2 dy$$

(2) حول محور Y

الرسم

محمد عمر الخطيب

$$x = 0$$

$$x = 2$$

$$x = 2 - \frac{1}{2}y$$

$$r_o = 2 - \frac{1}{2}y - 0$$

$$r_i = 0 - 0$$

محمد عمر الخطيب

$$y = 4 - 2x$$

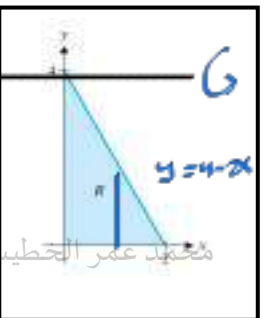
$$2x = 4 - y$$

$$x = 2 - \frac{1}{2}y$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب



$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dx$$

محمد عمر الخطيب

$$= \pi \int_0^2 4^2 - (2x)^2 dx$$

(3) حول المستقيم $y = 4$

الرسم

محمد عمر الخطيب

$$y = 4$$

$$y = 4 - 2x$$

$$y = 0$$

$$r_o = 4 - 0 = 4$$

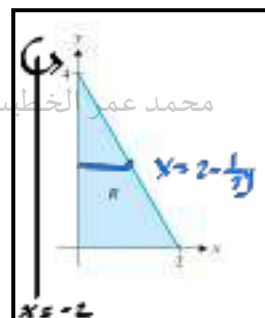
$$r_i = 4 - (4 - 2x)$$

$$= 2x$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب



$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dy$$

محمد عمر الخطيب

$$= \pi \int_0^4 (4 - \frac{1}{2}y)^2 - (2)^2 dy$$

(4) حول مستقيم $x = -2$

الرسم

محمد عمر الخطيب

$$x = -2$$

$$x = 0$$

$$x = 2 - \frac{1}{2}y$$

$$r_o = 2 - \frac{1}{2}y - (-2)$$

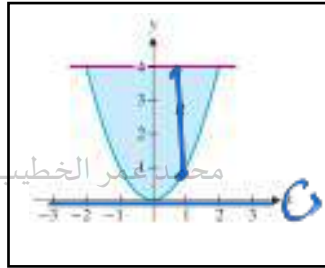
$$r_i = 0 - (-2)$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب



المحصورة بالدالة $y = x^2$ والمستقيم $y = 4$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dx$$

$$= \pi \int_{-2}^2 4^2 - (x^2)^2 dx$$

(1) حول محور X

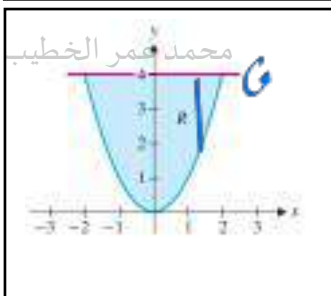
$$y = 4$$

$$y = x^2$$

$$y = 0$$

$$r_o = 4 - 0 = 4$$

$$r_i = x^2 - 0 = x^2$$



$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dx$$

$$= \pi \int_{-2}^2 (4 - x^2)^2 dx$$

(2) حول محور y

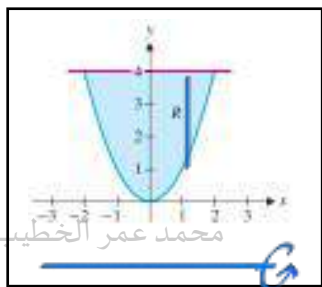
$$y = 4$$

$$y = 4$$

$$y = x^2$$

$$r_o = 4 - x^2$$

$$r_i = 4 - 4$$



$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dx$$

$$= \pi \int_{-2}^2 6^2 - (x^2 + 2)^2 dx$$

(3) حول محور y

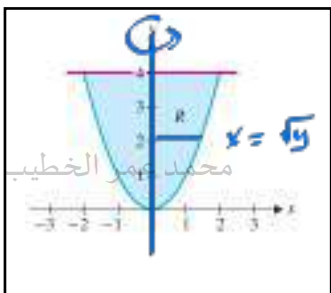
$$y = 4$$

$$y = x^2$$

$$y = -2$$

$$r_o = 4 - (-2) = 6$$

$$r_i = x^2 - (-2) = x^2 + 2$$



(4) حول محور y

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dy$$

$$= \pi \int_0^4 (\sqrt{y})^2 dy$$

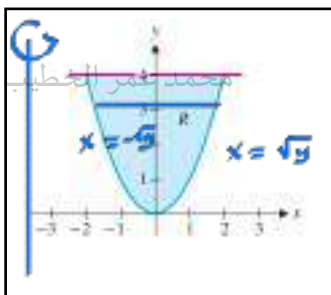
$$x = 0$$

$$x = 0$$

$$x = \sqrt{y}$$

$$r_o = \sqrt{y} - 0$$

$$r_i = 0 - 0$$



$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dy$$

$$= \pi \int_0^4 (\sqrt{y} + 4)^2 - (-\sqrt{y} + 4)^2 dy$$

(5) حول محور x

$$x = -4$$

$$x = -\sqrt{y}$$

$$x = \sqrt{y}$$

$$r_o = \sqrt{y} - (-4) = \sqrt{y} + 4$$

$$r_i = -\sqrt{y} - (-4) = -\sqrt{y} + 4$$

اكتب التكامل الذي يمثل حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة R

(1) المحصورة بالمستقيم $y = 2 - x$ والمستقيم $y = x$ و $y = 0$ حول المحور y

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dy$$

$$= \pi \int_0^1 (2-y)^2 - y^2 dy$$

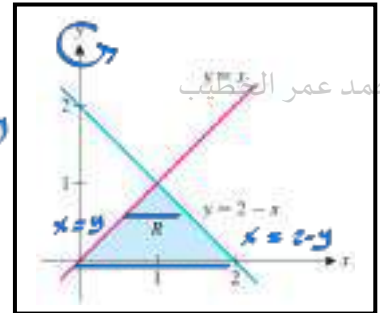
محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$x=0 \quad x=y \quad x=2-y$$

$$r_o = 2-y-0$$

$$r_i = y-0$$



محمد عمر الخطيب

(2) المحصورة بالمستقيم $y = 2 - x$ والمستقيم $y = x$ و $y = 0$ حول المحور $x = 3$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dy$$

$$= \pi \int_0^1 (3-y)^2 - (1+y)^2 dy$$

محمد عمر الخطيب

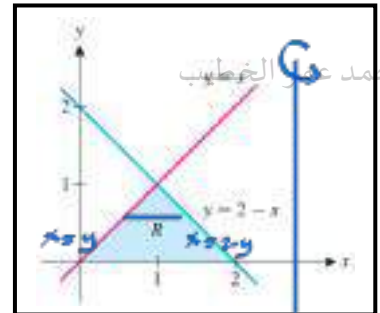
محمد عمر الخطيب

$$x=y \quad x=2-y \quad x=3$$

$$r_o = 3-y$$

$$r_i = 3-(2-y)$$

$$= 1+y$$



محمد عمر الخطيب

(3) المحصورة بالمستقيم $y = 2 - x$ والمستقيم $y = x$ و $y = 0$ حول المحور x

يوجد جزأين مساحتهما ... ∴ يوجد جزأين حجمهما

$$V_1 = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dx$$

$$= \pi \int_0^1 x^2 dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

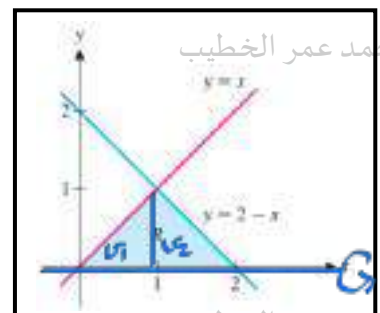
$$y=x$$

$$y=0$$

$$y=0$$

$$r_o = x$$

$$r_i = 0$$



محمد عمر الخطيب

$$V_2 = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dx$$

$$= \pi \int_1^2 (2-x)^2 dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$y = 2-x$$

$$y = 0$$

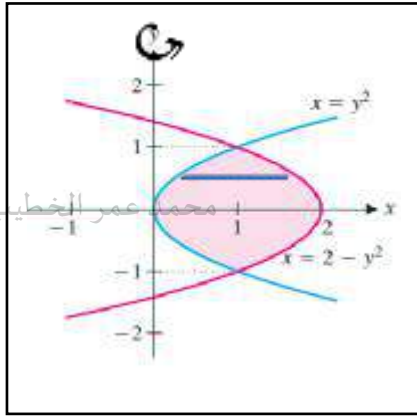
$$y = 0$$

$$r_o = 2-x-0$$

$$r_i = 0-0$$

محمد عمر الخطيب

(1) اكتب التكامل الذي يمثل حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المظلمة R

حول محور y ($x=0$)حلقات dy

$$x=0 \quad x=y^2 \quad x=2-y^2$$

$$r_o = 2 - y^2 - 0 = 2 - y^2$$

$$r_i = y^2 - 0 = y^2$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dy$$

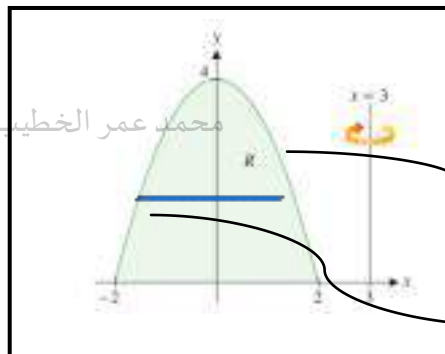
$$= \pi \int_{-1}^1 (2 - y^2)^2 - (y^2)^2 dy$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(2) اكتب التكامل الذي يمثل حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى

بمنحنى $y = 4 - x^2$ ومحور x حول المستقيم $x = 3$ بطريقة الحلقات

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$x = \sqrt{4 - y}$$

$$x = -\sqrt{4 - y}$$

حلقات dy

$$x = -\sqrt{4 - y} \quad x = \sqrt{4 - y} \quad x = 3$$

$$r_o = 3 - (-\sqrt{4 - y})$$

$$= 3 + \sqrt{4 - y}$$

$$r_i = 3 - \sqrt{4 - y}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dy$$

$$= \pi \int_0^4 (3 + \sqrt{4 - y})^2 - (3 - \sqrt{4 - y})^2 dy$$

محمد عمر الخطيب

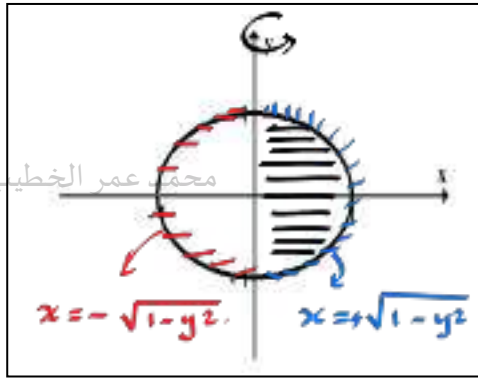
محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(1) اكتب التكامل الذي يمثل حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $x^2 + y^2 = 1$ حول المستقيم y

حول المستقيم y

يكن تدوير نصف المنحنى .



محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

أضرب في

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$V = \pi \int_{-1}^1 (r_o^2 - r_i^2) dy$$

$$= \pi \int_{-1}^1 (\sqrt{1-y^2})^2 dy$$

$$x=0 \quad x=0 \quad x=\sqrt{1-y^2}$$

$$r_o = \sqrt{1-y^2} - 0$$

$$r_i = 0 - 0$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

وهو حجم كرة نصف قطرها 1

(2) اكتب التكامل الذي يمثل حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحدودة بالمنحنى $x^2 + y^2 = 1$ حول المستقيم $y = 2$

حول المستقيم $y = 2$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

حلنا dx

محمد عمر الخطيب $y = 2$

$$y = \sqrt{1-x^2} \quad \bullet$$

$$y = -\sqrt{1-x^2} \quad \bullet$$

$$r_o = 2 - (-\sqrt{1-x^2})$$

$$= 2 + \sqrt{1-x^2}$$

$$r_i = 2 - \sqrt{1-x^2}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$V = \pi \int_{-1}^1 (r_o^2 - r_i^2) dx$$

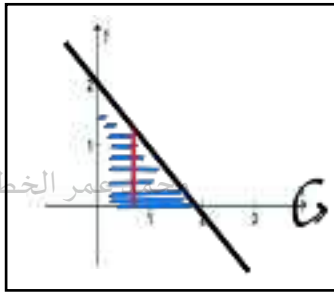
$$= \pi \int_{-1}^1 (2 + \sqrt{1-x^2})^2 - (2 - \sqrt{1-x^2})^2 dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بالمستقيم $x=0$ و $y=0$ و $y=2-x$ حول محور X



$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int r_o^2 - r_i^2 dx \\
 &= \pi \int_0^2 (2-x)^2 dx \\
 &= \pi \left[\frac{(2-x)^3}{3(-1)} \right]_0^2 = \frac{8}{3} \pi
 \end{aligned}$$

(1) حول محور X

اترابط dx

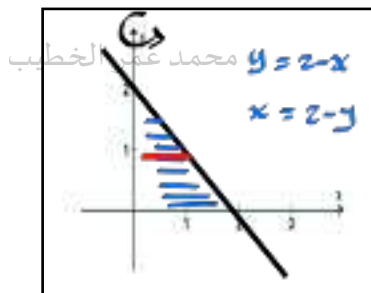
$y = 2 - x$

محمد عمر الخطيب

$y = 0$

$r_o = 2 - x - 0$

$r_i = 0 - 0$



$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int r_o^2 - r_i^2 dy \\
 &= \pi \int_0^2 (2-y)^2 dy \\
 &= \pi \left[\frac{(2-y)^3}{3(-1)} \right]_0^2 = \frac{8}{3} \pi
 \end{aligned}$$

(2) حول محور Y

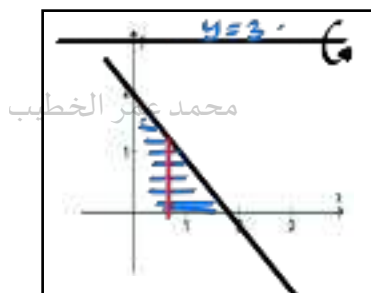
اترابط dy

$x = 0$ $x = 0$ $x = 2 - y$

$r_o = 2 - y$

محمد عمر الخطيب

$r_i = 0$



$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int r_o^2 - r_i^2 dx \\
 &= \pi \int_0^2 (3)^2 - (1+x)^2 dx \\
 &= \pi \left[9x - \frac{(1+x)^3}{3} \right]_0^2 = \frac{28}{3} \pi
 \end{aligned}$$

(3) حول المستقيم $y=3$

اترابط dx

محمد عمر الخطيب

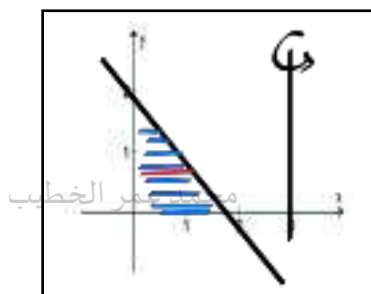
$y=3$

$y=2-x$

$y=0$

$r_o = 3 - 0 = 3$

$r_i = 3 - (2-x) = 1+x$



$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int r_o^2 - r_i^2 dy \\
 &= \pi \int_0^2 3^2 - (1+y)^2 dy \\
 &= \pi \left[9y - \frac{(1+y)^3}{3} \right]_0^2 = \frac{28}{3} \pi
 \end{aligned}$$

(4) حول المستقيم $x=3$

اترابط dy

محمد عمر الخطيب

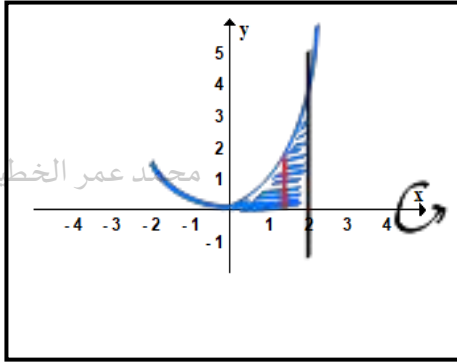
$x=0$ $x=2-y$ $x=3$

$r_o = 3 - 0$

$r_i = 3 - (2-y) = 1+y$

محمد عمر الخطيب

أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى $y = x^2$ والمستقيم $y = 0$ و $x = 2$



$$\begin{aligned} V &= \pi \int r_o^2 - r_i^2 dx \\ &= \pi \int_0^2 (x^2)^2 dx \\ &= \pi \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_0^2 \\ &= \frac{32}{5} \pi \end{aligned}$$

(1) حول محور x

أجزاء dx

محمد عمر الخطيب

$y = x^2$

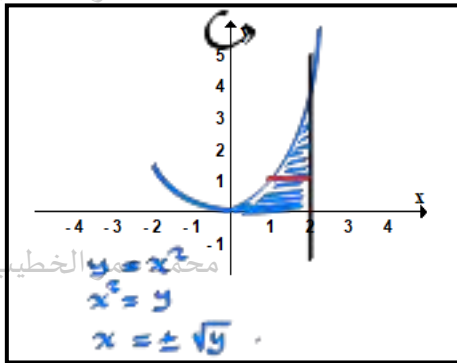
$y = 0$

$y = 0$

$r_o = x^2 - 0$

$r_i = 0 - 0$

(2) حول محور y



$$\begin{aligned} V &= \pi \int r_o^2 - r_i^2 dy \\ &= \pi \int_0^4 2^2 - (\sqrt{y})^2 dy \\ &= \pi \int_0^4 4 - y dy \\ &= \pi \left[4y - \frac{y^2}{2} \right]_0^4 = 8\pi \end{aligned}$$

حلقات dy

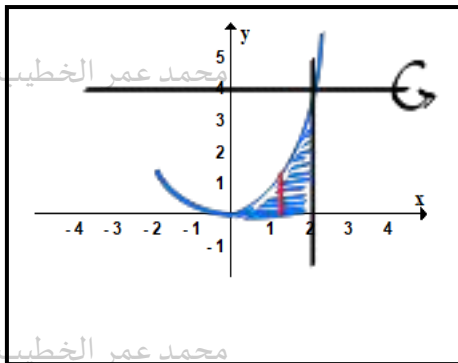
محمد عمر الخطيب

$x = 0$ $x = \sqrt{y}$ $x = 2$

$r_o = 2 - 0$

$r_i = \sqrt{y} - 0$

(3) حول المستقيم $y = 4$



$$\begin{aligned} V &= \pi \int r_o^2 - r_i^2 dx \\ &= \pi \int_0^2 4^2 - (4 - x^2)^2 dx \\ &= \pi \int_0^2 16 - (16 - 8x^2 + x^4) dx \\ &= \pi \left[\frac{8x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^2 \\ &= \frac{224}{15} \pi \end{aligned}$$

حلقات dx

محمد عمر الخطيب

$y = 4$

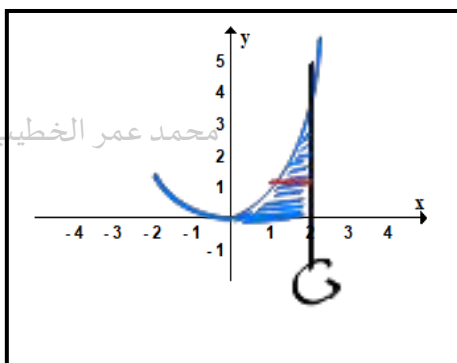
$y = x^2$

$y = 0$

$r_o = 4 - 0$

$r_i = 4 - x^2$

(4) حول المستقيم $x = 2$



$$\begin{aligned} V &= \pi \int r_o^2 - r_i^2 dy \\ &= \pi \int_0^4 (2 - \sqrt{y})^2 dy \\ &= \pi \int_0^4 (4 - 4\sqrt{y} + y) dy \\ &= \pi \left[4y - \frac{8}{3}y^{3/2} + \frac{y^2}{2} \right]_0^4 \\ &= \frac{8}{3} \pi \end{aligned}$$

أجزاء dy

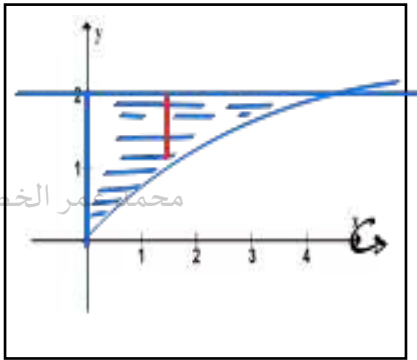
محمد عمر الخطيب

$x = \sqrt{y}$ $x = 2$ $x = 2$

$r_o = 2 - \sqrt{y}$

$r_i = 2 - 2$

أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بالمنحنى $y = \sqrt{x}$ و $y = 2$ و $x = 0$



محمد عمر الخطيب

$$\begin{aligned} V &= \pi \int r_o^2 - r_i^2 dx \\ &= \pi \int_0^4 2^2 - (\sqrt{x})^2 dx \\ &= \pi \int_0^4 4 - x dx \\ &= \pi \left[4x - \frac{x^2}{2} \right]_0^4 = 8\pi \end{aligned}$$

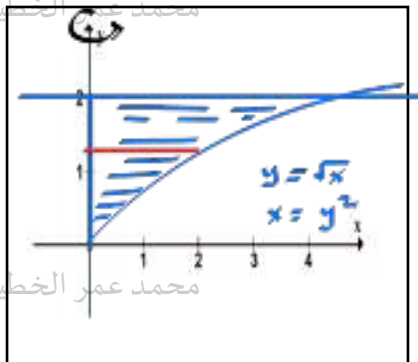
(1) حول محور X

ملفات dx

$y = 2$
 $y = \sqrt{x}$
 $y = 0$

$r_o = 2 - 0$
 $r_i = \sqrt{x} - 0$

محمد عمر الخطيب



محمد عمر الخطيب

$$\begin{aligned} V &= \pi \int r_o^2 - r_i^2 dy \\ &= \pi \int_0^2 (y^2)^2 dy \\ &= \pi \int_0^2 y^4 dy \\ &= \pi \left[\frac{y^5}{5} \right]_0^2 = \frac{32}{5} \pi \end{aligned}$$

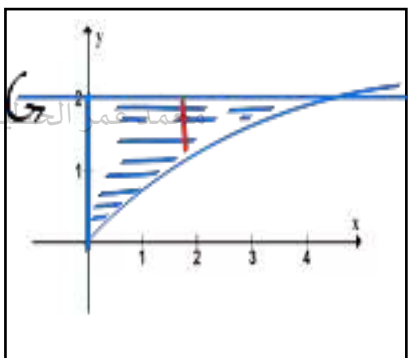
(2) حول محور Y

أشعة dy

$x = 0$ $x = y^2$ $x = y^2$

$r_o = y^2 - 0$
 $r_i = 0 - 0$

محمد عمر الخطيب



محمد عمر الخطيب

$$\begin{aligned} V &= \pi \int r_o^2 - r_i^2 dx \\ &= \pi \int_0^4 (2 - \sqrt{x})^2 dx \\ &= \pi \int_0^4 4 - 4\sqrt{x} + x dx \\ &= \pi \left[4x - \frac{8}{3}x^{3/2} + \frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \frac{8}{3} \pi \end{aligned}$$

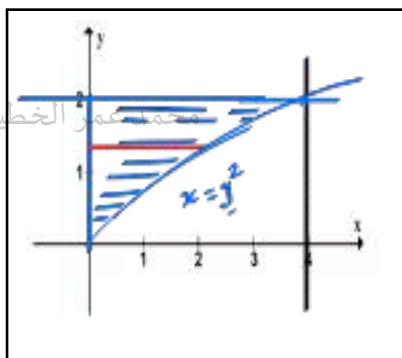
(3) حول المستقيم $y = 2$

أشعة dx

$y = 2$
 $y = 2$
 $y = \sqrt{x}$

$r_o = 2 - \sqrt{x}$
 $r_i = 2 - 2 = 0$

محمد عمر الخطيب



محمد عمر الخطيب

$$\begin{aligned} V &= \pi \int r_o^2 - r_i^2 dy \\ &= \pi \int_0^2 y^2 - (4 - y^2)^2 dy \\ &= \pi \int_0^2 16 - (16 - 8y^2 + y^4) dy \\ &= \pi \left[\frac{8y^3}{3} - \frac{y^5}{5} \right]_0^2 = \frac{224}{15} \pi \end{aligned}$$

(4) حول المستقيم $x = 4$

ملفات dy

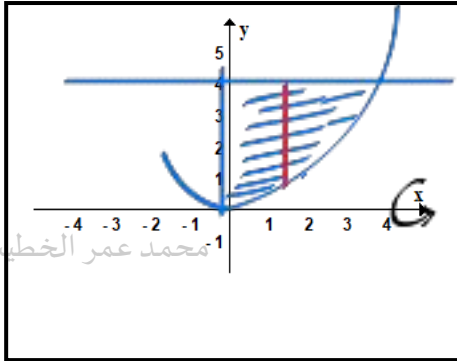
$x = 0$ $x = y^2$ $x = 4$

$r_o = 4 - 0 = 4$
 $r_i = 4 - y^2$

أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمستقيم $y = 4$ والمستقيم $x = 0$, $x = 4$

و المنحنى $y = \frac{1}{4}x^2$

(1) حول محور X



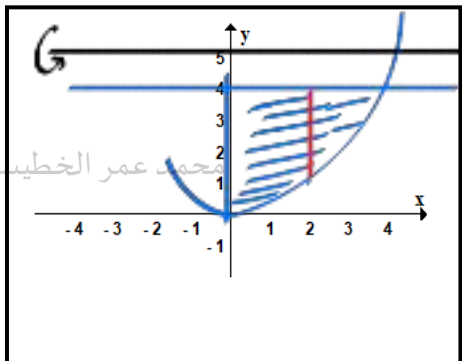
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^4 (r_o^2 - r_i^2) dx \\ &= \pi \int_0^4 (4)^2 - \left(\frac{1}{4}x^2\right)^2 dx \\ &= \pi \int_0^4 16 - \frac{1}{16}x^4 dx \\ &= \pi \left[16x - \frac{1}{80}x^5 \right]_0^4 \\ &= \frac{256}{5} \pi \end{aligned}$$

ملفات dx

$$\begin{aligned} y &= 4 \\ y &= \frac{1}{4}x^2 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_o &= 4 - 0 = 4 \\ r_i &= \frac{1}{4}x^2 - 0 \end{aligned}$$

(2) حول المستقيم $y = 5$



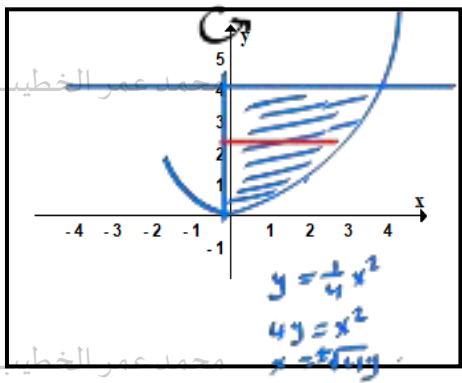
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^4 \left(5 - \frac{1}{4}x^2\right)^2 - (1)^2 dx \\ &= \frac{832}{15} \pi \end{aligned}$$

ملفات dx

$$\begin{aligned} y &= 5 \\ y &= 4 \\ y &= \frac{1}{4}x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_o &= 5 - \frac{1}{4}x^2 \\ r_i &= 5 - 4 = 1 \end{aligned}$$

(3) حول محور Y



$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^4 (\sqrt{4y})^2 dy \\ &= 32 \pi \end{aligned}$$

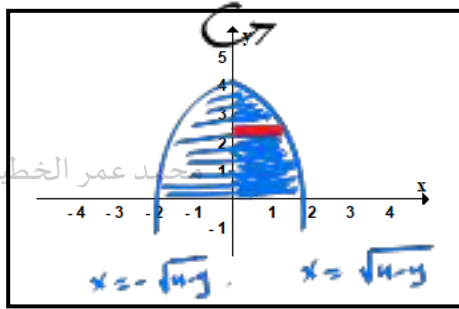
ملفات dy

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ x &= 0 \\ x &= \sqrt{4y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_o &= \sqrt{4y} - 0 \\ r_i &= 0 - 0 \end{aligned}$$

أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى $y = 4 - x^2$ ومحور X

(1) حول محور y



محمد عمر الخطيب

يكنى تدوير نصف المنحنى (يمين)

$$V = \pi \int_0^4 (\sqrt{4-y})^2 dy$$

$$= \pi \int_0^4 (4-y) dy$$

$$= 8\pi$$

محمد عمر الخطيب

أجزاء dy

محمد عمر الخطيب

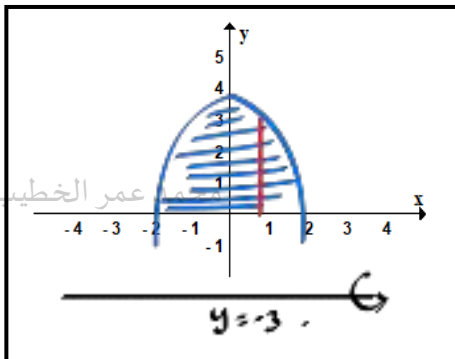
$$x=0 \quad x=0 \quad x=\sqrt{4-y}$$

$$r_o = \sqrt{4-y}$$

$$r_i = 0$$

محمد عمر الخطيب

(2) حول المستقيم $y = -3$



محمد عمر الخطيب

$$V = \pi \int_{-2}^2 (3-x^2)^2 - (3)^2 dx$$

$$= \frac{1472}{15} \pi$$

محمد عمر الخطيب

مقاطع dx

$$y = 4 - x^2$$

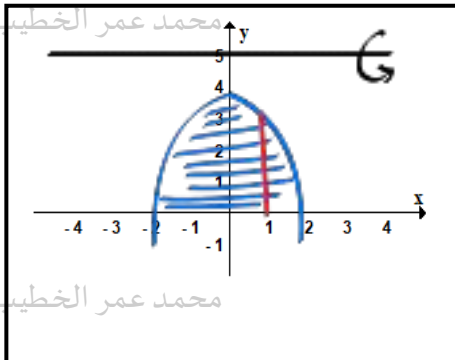
محمد عمر الخطيب

$$y = -3$$

$$r_o = 4 - x^2 - (-3) = 7 - x^2$$

$$r_i = 0 - (-3) = 3$$

(3) حول المستقيم $y = 5$



محمد عمر الخطيب

$$V = \pi \int_{-2}^2 (5)^2 - (1+x^2)^2 dx$$

$$= \frac{1088}{15} \pi$$

محمد عمر الخطيب

مقاطع dx

$$y = 5$$

$$y = 4 - x^2$$

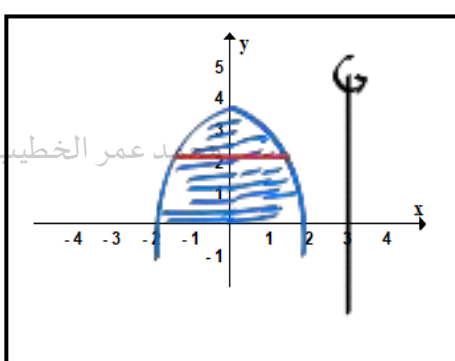
$$y = 0$$

$$r_o = 5 - 0 = 5$$

$$r_i = 5 - (4 - x^2) = 1 + x^2$$

محمد عمر الخطيب

(4) حول المستقيم $x = 3$



محمد عمر الخطيب

$$V = \pi \int_0^4 (3 + \sqrt{4-y})^2 - (3 - \sqrt{4-y})^2 dy$$

$$= 64\pi$$

محمد عمر الخطيب

مقاطع dy

محمد عمر الخطيب

$$x = -\sqrt{4-y} \quad x = \sqrt{4-y} \quad x = 3$$

$$r_o = 3 - (-\sqrt{4-y}) = 3 + \sqrt{4-y}$$

$$r_i = 3 - \sqrt{4-y}$$

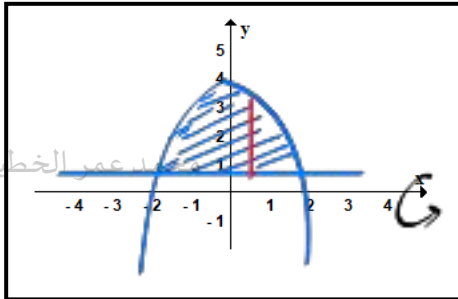
محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة بالمنحنى $y = 4 - x^2$ والمستقيم $y = 1$ حول محور X

(1) حول محور X



محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

حلقات dx

محمد عمر الخطيب

$$y = 4 - x^2$$

$$y = 1$$

$$y = 0$$

محمد عمر الخطيب

$$r_o = 4 - x^2 - 0$$

$$r_i = 1 - 0 = 1$$

حدود التكامل (نقاط التقاطع)

$$4 - x^2 = 1$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \pm \sqrt{3}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

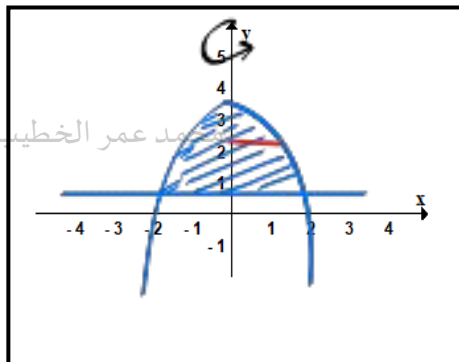
$$V = \pi \int_{-3}^1 (4 - x^2)^2 - (1)^2 dx$$

$$= \frac{88\sqrt{3}}{5} \pi$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(2) حول محور Y



محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

كيف ندير نصف المنحنى

$$y = 4 - x^2$$

$$x^2 = 4 - y$$

$$x = \pm \sqrt{4 - y}$$

محمد عمر الخطيب

أمر dy

محمد عمر الخطيب

$$x = 0 \quad x = 0 \quad x = \sqrt{4 - y}$$

$$r_o = \sqrt{4 - y} - 0$$

$$r_i = 0 - 0$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$V = \pi \int_1^4 (\sqrt{4 - y})^2 dy$$

$$= \frac{9}{2} \pi$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

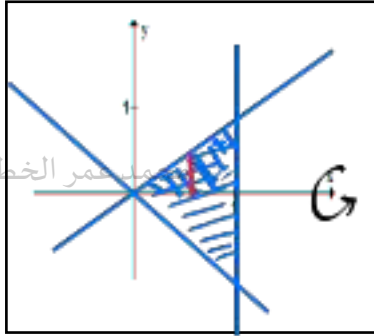
محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحدودة بالمنحنى $y = x$ و $y = -x$ و $x = 1$

كَيْفِي تَدْرِيفُ نَفْسِي بِشَيْءٍ

(1) حول محور X



$$V = \pi \int_0^1 x^2 dx$$

$$= \frac{1}{3} \pi$$

أجزاء dx

محمد عمر الخطيب

(2)

$y = x$

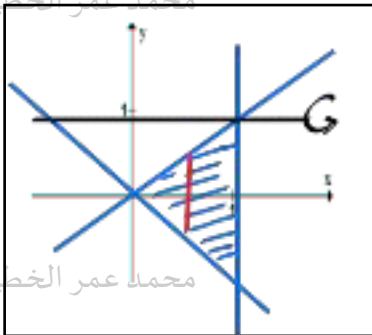
$y = 0$

$y = 0$

$r_o = x$

$r_i = 0$

(2) حول محور $y = 1$



$$V = \pi \int_0^1 (1+x)^2 - (1-x)^2 dx$$

$$= 2\pi$$

أجزاء dx

محمد عمر الخطيب

(2)

$y = 1$

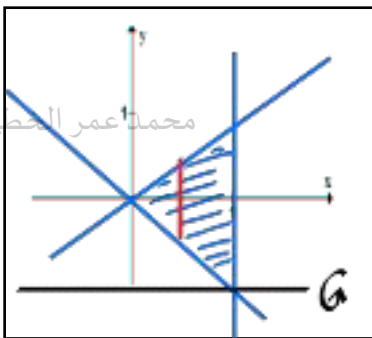
$y = x$

$y = -x$

$r_o = 1 - (-x) = 1 + x$

$r_i = 1 - x$

(3) حول محور $y = -1$



$$V = \pi \int_0^1 (x+1)^2 - (-x+1)^2 dx$$

$$= 2\pi$$

أجزاء dx

محمد عمر الخطيب

$y = x$

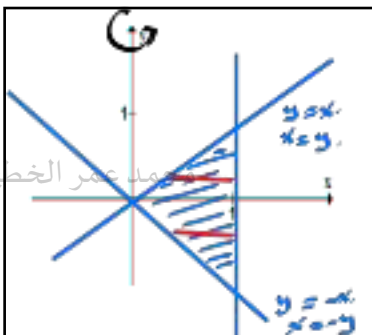
$y = -x$

$y = -1$

$r_o = x - (-1) = x + 1$

$r_i = -x - (-1) = -x + 1$

(4) حول محور Y



يوجد جُزءٌ سادسٌ .

$$V_1 = \pi \int_0^1 (1)^2 - (y)^2 dy = \frac{2}{3} \pi$$

$$V_2 = \pi \int_0^1 (1)^2 - (-y)^2 dy = \frac{2}{3} \pi$$

$$V = V_1 + V_2 = \frac{4}{3} \pi$$

أجزاء dy

محمد عمر الخطيب

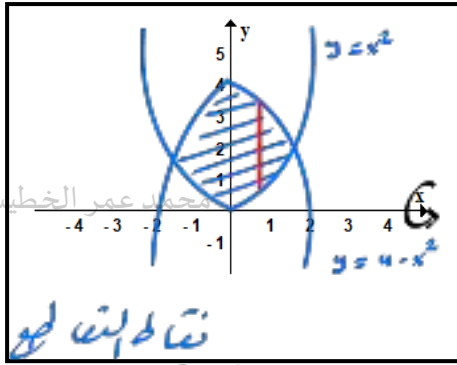
$r_o = 1 - 0 = 1$

$r_i = y - 0 = y$

$r_o = 1 - 0 = 1$

$r_i = -y - 0 = -y$

(1) أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بالمنحنى $y = x^2$ و $y = 4 - x^2$ حول محور x



$$V = \pi \int_{-2}^2 (r_o^2 - r_i^2) dx$$

$$V = \pi \int_{-2}^2 ((4 - x^2)^2 - (x^2)^2) dx$$

$$= \frac{64}{3} \pi$$

حول محور x

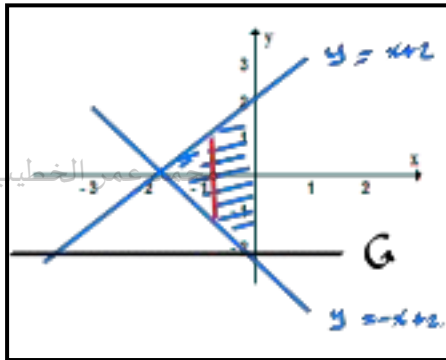
ملفات dx

$$r_o = 4 - x^2 - 0$$

$$= 4 - x^2$$

$$r_i = x^2 - 0 = x^2$$

(2) أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة المستقيم $y = x + 2$ والمستقيم $y = -x - 2$ حول المستقيم $x = 0$



$$V = \pi \int_{-2}^0 ((x+4)^2 - (-x)^2) dx$$

$$= 16\pi$$

ملفات dx

$$r_o = x + 2 - (-2)$$

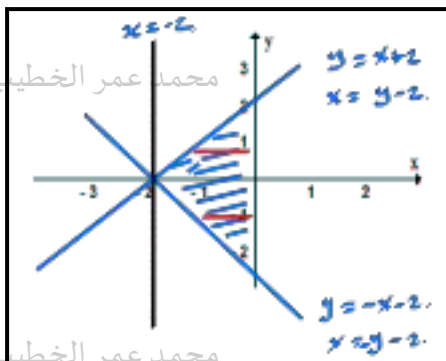
$$= x + 4$$

$$r_i = -x - 2 - (-2)$$

$$= -x$$

(3) أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة R المحصورة المستقيم $y = x + 2$ والمستقيم $x = -2$ حول المستقيم $x = 0$

$x = -2$ حول المستقيم $x = 0$ و $y = -x - 2$



$$V_1 = \pi \int_0^2 (2)^2 - (y)^2 dy$$

$$= \frac{16}{3} \pi$$

$$V_2 = \pi \int_{-1}^2 (2)^2 - (-y)^2 dy$$

$$= \frac{16}{3} \pi$$

$$V = V_1 + V_2 = \frac{32}{3} \pi$$

ملفات dy

$$V_1: r_o = 0 - (-2) = 2$$

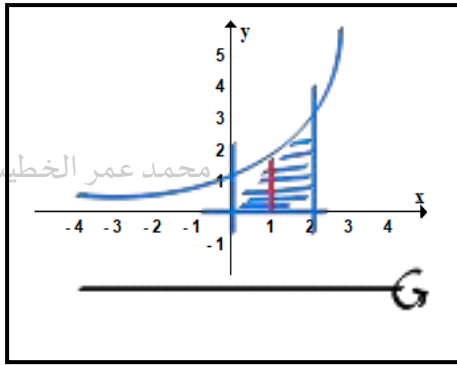
$$r_i = y - 2 - (-2)$$

$$= y$$

$$V_2: r_o = 0 - (-2) = 2$$

$$r_i = -y - 2 - (-2) = -y$$

(1) أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بالمنحنى $y = e^x$ و $y = 0$ ، $x = 0$ ، $x = 2$ حول محور $y = -2$



$$V = \pi \int_0^2 (r_o^2 - r_i^2) dx$$

$$V = \pi \int_0^2 (e^x + 2)^2 - (2)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^2 e^{2x} + 4e^x + 4 - 4 dx$$

$$= \pi \int_0^2 e^{2x} + 4e^x dx$$

$$= 52.4 \pi$$

حول محور $y = -2$

هناك dx

محمد عمر الخطيب

$$y = e^x$$

$$y = 0$$

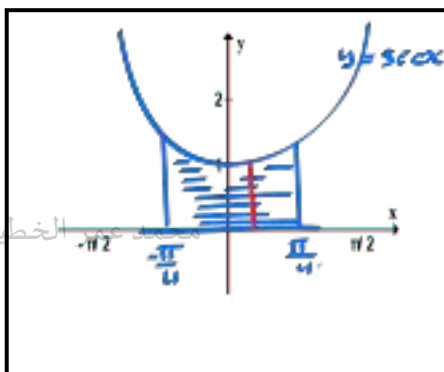
$$y = -2$$

$$r_o = e^x - (-2) = e^x + 2$$

$$r_i = 0 - (-2) = 2$$

محمد عمر الخطيب

(2) أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بالمنحنى $y = \sec x$ و $y = 0$ ، حول محور x



حول محور x $x = \frac{\pi}{4}$ ، $x = -\frac{\pi}{4}$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

هناك dx

$$y = \sec x$$

$$y = 0$$

$$y = 0$$

$$r_o = \sec x$$

$$r_i = 0$$

محمد عمر الخطيب

$$V = \pi \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\sec x)^2 dx$$

$$= \pi [\tan x]_{-\pi/4}^{\pi/4}$$

$$= 2\pi$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

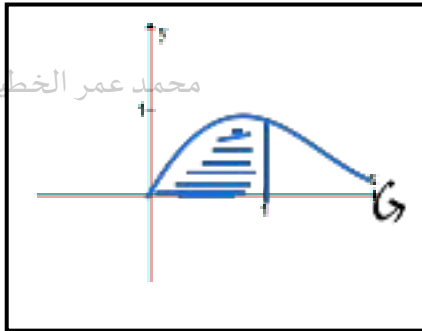
محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بالمنحنى $y = \sqrt{\frac{x}{x^2+2}}$ و $y=0$ ، $x=1$ حول محور X

حول محور X



$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^1 \left(\sqrt{\frac{x}{x^2+2}} \right)^2 dx \\
 &= \pi \int_0^1 \frac{x}{x^2+2} dx \\
 &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+2} dx \\
 &= \frac{\pi}{2} \left[\ln|x^2+2| \right]_0^1 \\
 &= \frac{\pi}{2} [\ln 3 - \ln 2] \\
 &= \frac{\pi}{2} \ln \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

$$y = \sqrt{\frac{x}{x^2+2}}$$

$$y = 0$$

$$y = 0$$

$$r_o = \sqrt{\frac{x}{x^2+2}} - 0$$

$$r_i = 0$$

محمد عمر الخطيب

عنه من لول الى بدون رسم

لاذ اكر رسم صحيح

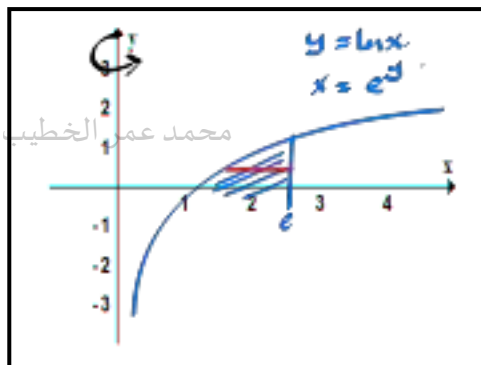
در صفا : لول

$$y = \sqrt{\frac{x}{x^2+2}}$$

(2) اوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحصورة R

بالمنحنى $y = \ln x$ والمستقيم $y=0$ على الفترة $[1, e]$

حول y



$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^1 (e^y)^2 - (e^y)^2 dy \\
 &= \pi \int_0^1 e^{2y} - e^{2y} dy \\
 &= \pi \left[\frac{e^{2y}}{2} - \frac{e^{2y}}{2} \right]_0^1 \\
 &= \frac{\pi}{2} (e^2 + 1)
 \end{aligned}$$

حالت dy

محمد عمر الخطيب

$$x=0 \quad x=e^y \quad x=e$$

$$r_o = e - 0 = e$$

$$r_i = e^y - 0 = e^y$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

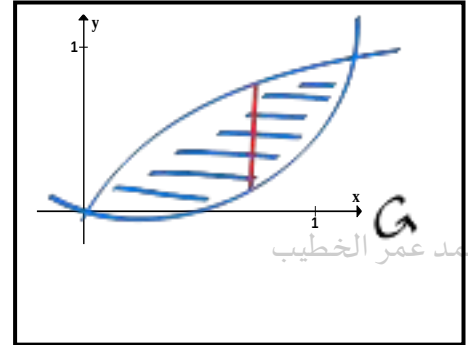
محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

يمثل كل من التكاملات التالية حجم مجسم بطريقة الاقراص والحلقات، ارسم المنطقة R وحدد محور

الدوران اللذين ينتج عنهما المجسم

$$(1) \int_0^1 \pi [(\sqrt{x})^2 - (x^2)^2] dx$$



نلاحظ ان التكامل dx

موجّه الى المحور x

∴ محور الدوران هو محور x.

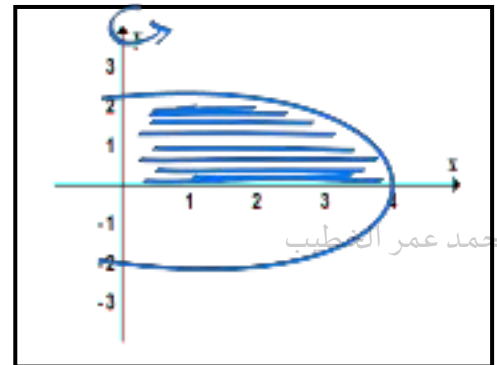
$$r_o = \sqrt{x} - 0 = \sqrt{x} \rightarrow f(x) = \sqrt{x}$$

$$r_i = x^2 - 0 = x^2 \rightarrow g(x) = x^2$$

$$(2) \int_0^2 \pi (4 - y^2)^2 dy$$

نلاحظ ان التكامل dy

∴ محور الدوران هو محور y.



$$r_o = 4 - y^2 \rightarrow f(y) = 4 - y^2$$

$$r_i = 0 \rightarrow g(y) = 0$$

∴ يوجد حل آخر.

نلاحظ ان التكامل dy

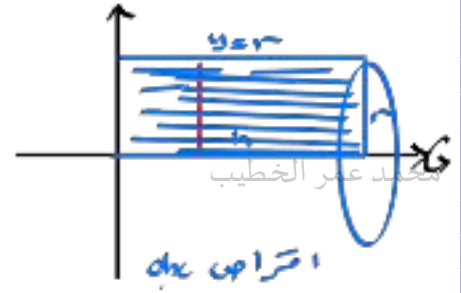
من 0 الى 2.

الرسم فقط الجزء اليساري

(1) اثبت أن حجم الاسطوانة التي نصف قطر قاعدتها r وارتفاعها h هو $v = \pi r^2 h$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^h r_o^2 - r_i^2 \, dx \\ &= \pi \int_0^h (r)^2 \, dx \\ &= \pi \int_0^h r^2 \, dx \\ &= \pi r^2 h \quad \# \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= r \quad \cdot \\ y &= 0 \quad \cdot \\ y &= 0 \quad \text{---} \\ r_o &= r \\ r_i &= 0 \end{aligned}$$



(2) يتشكل المخروط القائم الذي نصف قطر قاعدة r

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

وارتفاعه h من تدوير المستقيم الذي معادلته $y = \frac{r}{h}x$

حول المحور x أثبت أن حجم المخروط هو $v = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^h r_o^2 - r_i^2 \, dx \\ &= \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 \, dx \\ &= \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} x^2 \, dx \\ &= \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h \\ &= \pi \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3} \pi r^2 h \quad \# \end{aligned}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

اترأى dx

$$y = \frac{r}{h}x \quad \cdot$$

$$y = 0 \quad \cdot$$

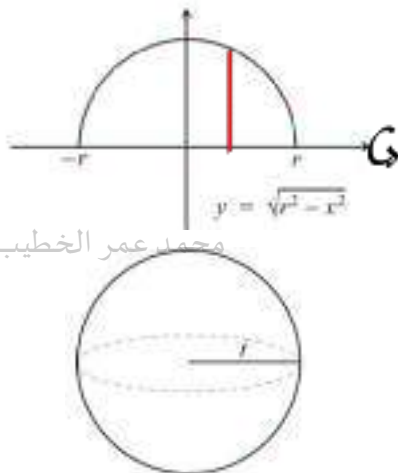
$$y = 0 \quad \text{---}$$

$$r_o = \frac{r}{h}x$$

$$r_i = 0$$

(3) تتشكل الكرة التي نصف قطرها r من تدوير الجزء العلوي من معادلة الدائرة $x^2 + y^2 = r^2$

حول المحور x ، أثبت أن حجم الكرة هو $v = \frac{4}{3} \pi r^3$



محمد عمر الخطيب

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-r}^r r_o^2 - r_i^2 \, dx \\ &= \pi \int_{-r}^r (\sqrt{r^2 - x^2})^2 \, dx \\ &= \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) \, dx \\ &= \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r \\ &= \pi \left[\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) - \left(-r^3 + \frac{r^3}{3}\right) \right] = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad \# \end{aligned}$$

اترأى dx

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \quad \cdot$$

$$y = 0 \quad \cdot$$

$$y = 0 \quad \text{---}$$

$$r_o = \sqrt{r^2 - x^2}$$

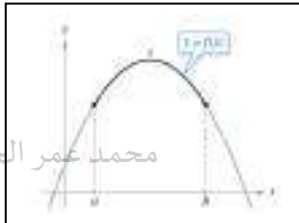
$$r_i = 0$$

محمد عمر الخطيب

الوحدة السادسة : تطبيقات التكامل /// الدرس الرابع : طول القوس ومساحة السطح

طول القوس (المنحنى)

إذا كانت $y = f(x)$ دالة قابلة للإشتقاق، ومشتقتها متصلة على الفترة $[a, b]$ فإن طول منحنى الدالة يعطى بالتكامل



$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + [y']^2} dx$$

اكتب التكامل الذي يمثل طول منحنى الدالة y على الفترة المعطى (بدون إجراء عملية التكامل)

(1) $y = x^3$, $-1 \leq x \leq 1$

$$s = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + 9x^4} dx$$

$$\begin{aligned} y &= x^3 \\ y' &= 3x^2 \\ (y')^2 &= 9x^4 \end{aligned}$$

(2) $y = e^x$, $[0, 1]$

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x}} dx$$

$$\begin{aligned} y &= e^x \\ y' &= e^x \\ (y')^2 &= (e^x)^2 = e^{2x} \end{aligned}$$

(3) $y = \ln x$, $[1, 3]$

$$s = \int_1^3 \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_1^3 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx$$

$$\begin{aligned} y &= \ln x \\ y' &= \frac{1}{x} \\ (y')^2 &= \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

(4) $y = \tan x$, $0 \leq x \leq \pi/4$

$$s = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \sec^4 x} dx$$

$$\begin{aligned} y &= \tan x \\ y' &= \sec^2 x \\ (y')^2 &= \sec^4 x \end{aligned}$$

(5) $y = \int_0^x u \sin u du$, $[0, \pi]$

$$s = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + x^2 \sin^2 x} dx$$

$$\begin{aligned} y &= \int_0^x u \sin u du \\ y' &= x \sin x \\ (y')^2 &= x^2 \sin^2 x \end{aligned}$$

(1) أوجد طول منحنى الدالة $y = \sqrt{3}x + 1$ على الفترة $[0, 5]$

$$s = \int_0^5 \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^5 \sqrt{1 + 3} dx \\ &= \int_0^5 2 dx = 10 \end{aligned}$$

محمد عمر الخطيب

$$y = \sqrt{3}x + 1$$

$$y' = \sqrt{3}$$

$$(y')^2 = (\sqrt{3})^2 = 3$$

محمد عمر الخطيب

(2) أوجد طول منحنى الدالة $y = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$ حيث $1 \leq x \leq 4$

$$s = \int_1^4 \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$= \int_1^4 \sqrt{1 + x-1} dx$$

محمد عمر الخطيب

$$= \int_1^4 \sqrt{x} dx$$

$$= \left. \frac{2}{3} x^{3/2} \right|_1^4 = \frac{14}{3}$$

محمد عمر الخطيب

$$y = \frac{2}{3}(x-1)^{3/2}$$

$$y' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} (x-1)^{1/2} \cdot 1$$

$$= (x-1)^{1/2}$$

$$\begin{aligned} (y')^2 &= [(x-1)^{1/2}]^2 \\ &= x-1 \end{aligned}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(3) أوجد طول منحنى الدالة $y = \sqrt{1-x^2}$ حيث $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$

$$s = \int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

محمد عمر الخطيب

$$= \int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} dx$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}} dx$$

محمد عمر الخطيب

$$= \int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{\frac{1}{1-x^2}} dx$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x \Big|_{-1/2}^{1/2} = \frac{\pi}{3}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$y = \sqrt{1-x^2}$$

$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$(y')^2 = \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \right)^2$$

$$= \frac{x^2}{1-x^2}$$

(1) أوجد طول منحنى الدالة $y = \ln \cos x$ على الفترة $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

$$s = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \tan^2 x} dx$$

محمد عمر الخطيب

$$= \int_0^{\pi/4} \sqrt{\sec^2 x} dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} |\sec x| dx$$

محمد عمر الخطيب

$$= \int_0^{\pi/4} \sec x dx$$

محمد عمر الخطيب

$$= \ln |\sec x + \tan x| \Big|_0^{\pi/4} = \ln(\sqrt{2} + 1)$$

$$y = \ln \cos x$$

$$y' = \frac{-\sin x}{\cos x}$$

$$= -\tan x$$

$$(y')^2 = (-\tan x)^2$$

$$= \tan^2 x$$

محمد عمر الخطيب

(2) أوجد طول منحنى الدالة $f(x)$ حيث $f'(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ على الفترة $[2, 3]$

محمد عمر الخطيب

$$s = \int_2^3 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

محمد عمر الخطيب

$$= \int_2^3 \sqrt{1 + x^2 - 2x} dx$$

محمد عمر الخطيب

$$= \int_2^3 \sqrt{x^2 - 2x + 1} dx$$

محمد عمر الخطيب

$$|x-1| \frac{-(x-1)}{1} \frac{x-1}{1}$$

$$= \int_2^3 \sqrt{(x-1)^2} dx = \int_2^3 |x-1| dx = \int_2^3 (x-1) dx = \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_2^3 = \frac{3}{2}$$

$$f'(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$$

$$[f'(x)]^2 = x^2 - 2x$$

(3) أوجد طول منحنى الدالة $f(x)$ حيث $f(x) = \int_{-2}^x \sqrt{4t^2 - 1} dt$ على الفترة $[-2, 0]$

محمد عمر الخطيب

$$s = \int_{-2}^0 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

محمد عمر الخطيب

$$= \int_{-2}^0 \sqrt{1 + 4x^2 - 1} dx$$

محمد عمر الخطيب

$$= \int_{-2}^0 \sqrt{4x^2} dx$$

$$= \int_{-2}^0 |2x| dx = \int_{-2}^0 -2x dx = \left[-x^2 \right]_{-2}^0 = 4$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$f(x) = \int_{-2}^x \sqrt{4t^2 - 1} dt$$

$$f'(x) = \sqrt{4x^2 - 1}$$

محمد عمر الخطيب

$$[f'(x)]^2 = 4x^2 - 1$$

$$|x| \frac{-x}{0} \frac{x}{0}$$

محمد عمر الخطيب

(1) أوجد طول منحنى الدالة $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ حيث $0 \leq x \leq 1$

$$\begin{aligned}
 s &= \int_0^1 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \\
 &= \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{4} [(e^x)^2 - 2 + (\bar{e}^x)^2]} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{4 + (e^x)^2 - 2 + (\bar{e}^x)^2} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{(e^x)^2 + 2 + (\bar{e}^x)^2} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{(e^x + \bar{e}^x)^2} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 |e^x + \bar{e}^x| dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 e^x + \bar{e}^x dx = \frac{1}{2} \left[e^x + \frac{\bar{e}^x}{-1} \right]_0^1 \\
 &= \frac{e^2 - 1}{2e}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{2}(e^x + \bar{e}^x) \\
 f'(x) &= \frac{1}{2}(e^x + \bar{e}^x(-1)) \\
 &= \frac{1}{2}(e^x - \bar{e}^x) \\
 [f'(x)]^2 &= \left[\frac{1}{2}(e^x - \bar{e}^x) \right]^2 \\
 &= \frac{1}{4} [(e^x)^2 - 2e^x \cdot \bar{e}^x + (\bar{e}^x)^2] \\
 &= \frac{1}{4} [(e^x)^2 - 2 + (\bar{e}^x)^2]
 \end{aligned}$$

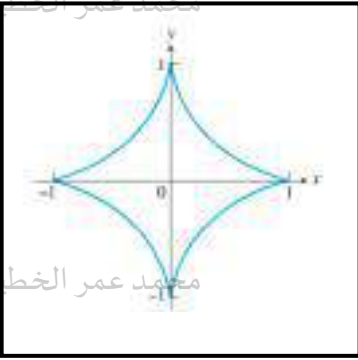
(2) أوجد طول منحنى الدالة $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}$ على الفترة $[1, 3]$

$$\begin{aligned}
 s &= \int_1^3 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \\
 &= \int_1^3 \sqrt{1 + \frac{1}{4} (x^4 - 2 + \frac{1}{x^4})} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_1^3 \sqrt{4 + x^4 - 2 + \frac{1}{x^4}} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_1^3 \sqrt{x^4 + 2 + \frac{1}{x^4}} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_1^3 \sqrt{(x^2 + \frac{1}{x^2})^2} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_1^3 |x^2 + \frac{1}{x^2}| dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_1^3 x^2 + \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} \right]_1^3 = \frac{11}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x} \\
 f'(x) &= \frac{1}{6} \cdot 3x^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{x^2} \\
 &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2x^2} \\
 &= \frac{1}{2}(x^2 - \frac{1}{x^2}) \\
 [f'(x)]^2 &= \frac{1}{4}(x^2 - \frac{1}{x^2})^2 \\
 &= \frac{1}{4}(x^4 - 2 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}) \\
 &= \frac{1}{4}(x^4 - 2 + \frac{1}{x^4})
 \end{aligned}$$

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1 \quad \text{تمثل العلاقة}$$

الشكل النجمي المجاور أوجد طول منحنى الشكل



ملاحظة: طول المنحنى النجمي الذي معادلته $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ هو $s = 6a$

$$S = 4 \int_0^1 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

$$= 4 \int_0^1 \sqrt{1 + x^{-2/3} - 1} dx$$

$$= 4 \int_0^1 \sqrt{x^{-2/3}} dx$$

$$= 4 \int_0^1 (x^{-2/3})^{1/2} dx$$

$$= 4 \int_0^1 x^{-1/3} dx$$

$$= 4 \left[\frac{3}{2} x^{2/3} \right]_0^1$$

$$= 6 x^{2/3} \Big|_0^1$$

$$= 6$$

$$a^{2/3} = 4$$

$$a^2 = 64$$

$$a = 8$$

نفسه ان يكون السؤال صنع دائرة يفضل استخدم القانون .

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 4 \quad \text{فان}$$

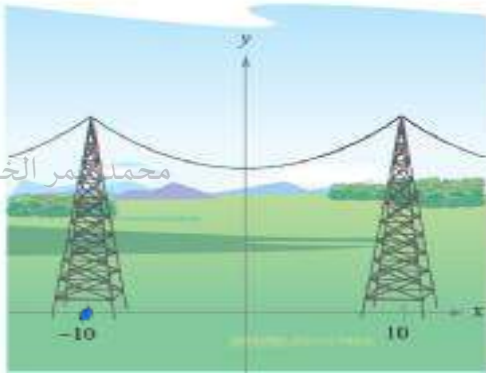
$$\Rightarrow s = 6(8) = 48$$

يمثل الشكل المجاور كابل كهربائي يمتد بين عمودين للكهرباء والمسافة بينهم 20 m

حيث تمثل المعادلة

$$y = 5(e^{x/10} + e^{-x/10})$$

ارتفاع الكابل عند أي مسافة x حيث $-10 \leq x \leq 10$



ملاحظة: عند تعليق حبل بين عمودين البعد بينهما $2L$ ft، ومعادلته $y = \frac{2L}{4}(e^{x/L} + e^{-x/L})$

حيث $-L \leq x \leq L$ فان التكامل الذي يمثل طول الحبل هو

$$s = \frac{1}{2} \int_{-L}^L (e^{x/L} + e^{-x/L}) dx = \int_0^L (e^{x/L} + e^{-x/L}) dx = L(e - e^{-1})$$

أوجد طول الكابل الكهربائي بين العمودين

$$s = \int_{-10}^{10} \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

$$= 2 \int_0^{10} \sqrt{1 + \frac{1}{4} [(e^{x/10})^2 - 2 + (e^{-x/10})^2]} dx$$

$$= 2 \int_0^{10} \sqrt{4 + (e^{x/10})^2 - 2 + (e^{-x/10})^2} dx$$

$$= \int_0^{10} \sqrt{(e^{x/10})^2 + 2 + (e^{-x/10})^2} dx$$

$$= \int_0^{10} \sqrt{(e^{x/10} + e^{-x/10})^2} dx$$

$$= \int_0^{10} |e^{x/10} + e^{-x/10}| dx$$

$$= \left[\frac{e^{x/10}}{1/10} + \frac{e^{-x/10}}{-1/10} \right]_0^{10} = 10(e - 1/e) = 23.5$$

مساحة السطح

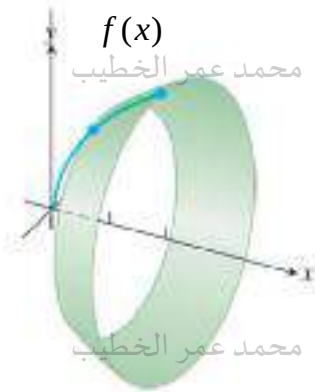
إذا كانت $y = f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق، ومشتقتها متصلة على الفترة $[a, b]$ فإن مساحة السطح

محمد عمر الخطيب

الناتج عن دوران الدالة حول محور x يعطى بالتكامل

$$S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + [y']^2} dx$$

محمد عمر الخطيب



محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

إذا كانت $x = g(y)$ دالة قابلة للاشتقاق، ومشتقتها متصلة على الفترة $[c, d]$ فإن مساحة السطح

الناتج عن دوران الدالة حول محور y يعطى بالتكامل

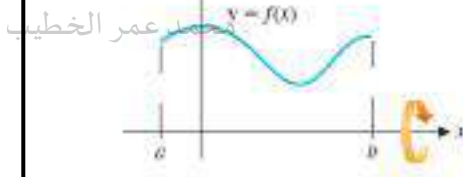
محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

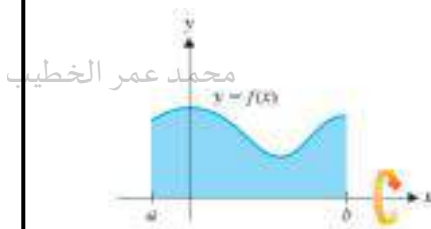
محمد عمر الخطيب

$$S = \int_c^d 2\pi g(y) \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy$$

ملاحظات :

(1) إذا تم تدوير المنحنى $y = f(x)$ حول محور x علىعلى الفترة $[a, b]$ فان مساحة السطح تكون هي

المساحة الجانبية وليست الكلية (بدون القاعدتين)

(2) إذا تم تدوير المساحة المحصورة بالدالة $y = f(x)$ ومحور x حول محور x على الفترة $[a, b]$ فان

مساحة السطح تكون هي المساحة الكلية وليست الجانبية

(يجب اضافة القاعدتين)

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(1) اكتب التكامل الذي يمثل مساحة السطح المتولد عن دوران الدالة y حول محور x

على الفترة المعطى (بدون إجراء عملية التكامل)

(a) $y = \sin x$, $[0, \pi]$

$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + [y']^2} dx$

$S = 2\pi \int_0^\pi \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx$

$y = \sin x$

$y' = \cos x$

$(y')^2 = \cos^2 x$

(b) $y = e^x$, $[0, 1]$

$S = \int_0^1 2\pi e^x \sqrt{1 + e^{2x}} dx$

$S = \int_0^1 2\pi e^x \sqrt{1 + e^{2x}} dx$

$y = e^x$

$y' = e^x$

$(y')^2 = (e^x)^2 = e^{2x}$

(c) $y = \ln x$, $[1, 2]$

$S = \int_1^2 2\pi \ln x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx$

$= 2\pi \int_1^2 \frac{\ln x}{x} \sqrt{x^2 + 1} dx$

$y = \ln x$

$y' = \frac{1}{x}$

$(y')^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}$

(d) $y = \tan x$, $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

$S = \int_0^{\pi/4} 2\pi \tan x \sqrt{1 + \sec^4 x} dx$

$S = \int_0^{\pi/4} 2\pi \tan x \sqrt{1 + \sec^4 x} dx$

$y = \tan x$

$y' = \sec^2 x$

$(y')^2 = \sec^4 x$

(2) اكتب التكامل الذي يمثل مساحة السطح المتولد عن دوران المعادلة $g(y) = y^2 + 1$

حيث $0 \leq y \leq 1$ حول محور y (بدون إجراء عملية التكامل)

$S = \int_0^1 2\pi g(y) \sqrt{1 + [g'(y)]^2} dy$

$= 2\pi \int_0^1 (y^2 + 1) \sqrt{1 + 4y^2} dy$

$g(y) = y^2 + 1$

$g'(y) = 2y$

$[g'(y)]^2 = 4y^2$

(1) اوجد مساحة السطح المتولد عن دوران الدالة $y = 2$ حول محور x حيث $0 \leq x \leq 5$

$$S = \int_0^5 2\pi y \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$= \int_0^5 2\pi \cdot 2 \cdot \sqrt{1 + 0} dx$$

$$= \int_0^5 4\pi dx$$

$$= 20\pi$$

$$y = 2$$

$$y' = 0$$

$$(y')^2 = 0$$

محمد عمر الخطيب
وهي المساحة الجانبيه (منطقة الاسطوان)

محمد عمر الخطيب

(2) اوجد مساحة السطح المتولد من دوران الدالة $f(x) = \sqrt{3}x$ حول محور x حيث $1 \leq x \leq 7$

$$S = \int_1^7 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

$$= 2\pi \int_1^7 \sqrt{3}x \sqrt{1 + 3} dx$$

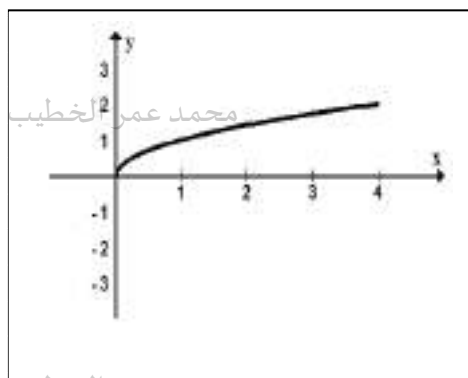
$$= 4\pi \sqrt{3} \int_1^7 x dx$$

$$= 4\pi \sqrt{3} \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^7 = 96\sqrt{3}\pi$$

$$y = \sqrt{3}x$$

$$y' = \sqrt{3}$$

$$(y')^2 = 3$$



محمد عمر الخطيب

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$[f'(x)]^2 = \frac{1}{4x}$$

محمد عمر الخطيب

(3) اوجد مساحة السطح المتولد عن دوران الدالة $f(x) = \sqrt{x}$

محمد عمر الخطيب

حول محور x على الفترة $[0, 4]$

$$S = \int_0^4 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

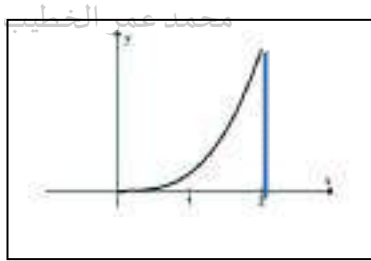
$$= \int_0^4 2\pi \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx$$

$$= 2\pi \int_0^4 \sqrt{x \left(1 + \frac{1}{4x} \right)} dx$$

$$= 2\pi \int_0^4 \sqrt{x + \frac{1}{4}} dx$$

$$= 2\pi \int_0^4 \left(x + \frac{1}{4} \right)^{1/2} dx = 2\pi \left[\frac{2}{3} \left(x + \frac{1}{4} \right)^{3/2} \right]_0^4 = 36\pi$$

محمد عمر الخطيب



(1) اوجد مساحة السطح المتولد عن دوران الدالة $f(x) = \frac{1}{9}x^3$

حول محور x على الفترة $[0, 2]$

$$S = \int_0^2 2\pi \cdot \frac{1}{9}x^3 \sqrt{1 + \frac{1}{9}x^4} dx$$

$$= \frac{2\pi}{9} \int_0^2 x^3 \sqrt{1 + \frac{1}{9}x^4} dx$$

محمد عمر الخطيب

$$= \frac{2\pi}{9} \int x^3 \sqrt{u} \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

محمد عمر الخطيب

$$= \frac{\pi}{2} \int_1^{25/9} u^{1/2} du$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_1^{25/9} = \frac{98\pi}{81}$$

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^2$$

$$[f'(x)]^2 = \frac{1}{9}x^4$$

محمد عمر الخطيب

$$u = 1 + \frac{1}{9}x^4 \quad \text{نقرب}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{4}{9}x^3$$

$$\frac{9}{4} \frac{du}{x^3} = dx$$

$$x=0 \Rightarrow u=1$$

$$x=2 \Rightarrow u = \frac{25}{9}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(2) اوجد مساحة سطح الجسم المتولد عن دوران الدالة $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ حول محور x على الفترة

$[-1, 1]$ تساوي

نلاحظ : اننا نحتاج ان نأخذ هوامش

السطح لانه لن نضيقها ، سيكون $S = 4\pi$

محمد عمر الخطيب

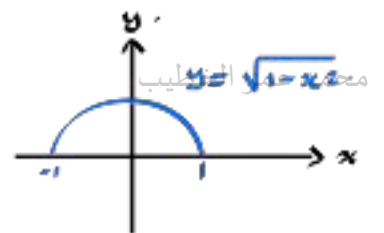
$$S = \int_{-1}^1 2\pi \cdot \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} dx$$

$$= 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}} dx$$

$$= 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= 2\pi \int_{-1}^1 1 dx = 2\pi(2) = 4\pi$$

محمد عمر الخطيب



$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$[f'(x)]^2 = \frac{x^2}{1-x^2}$$

محمد عمر الخطيب

(1) اوجد مساحة السطح المتولد عن دوران المساحة المحصورة بالدالة $y = 2$ حول محور x حيث

$$0 \leq x \leq 5$$

مساحة السطح = المساحة الجانبيه + مساحة القاعدة

$$S = 2\pi \int_0^5 2 \sqrt{1+0} dx = 20\pi$$

المساحة
الجانبيه

$$y = 2$$

$$y' = 0$$

$$(y')^2 = 0$$

مساحة السطح المتولد عن دوران المساحة هي

$$= 20\pi + 2(4\pi)$$

$$= 28\pi$$

الشكل الناتج

اسطوانة رأسية

(2) اوجد مساحة السطح المتولد من دوران المربع المكون من جميع قيم (x, y) حيث

$$-1 \leq x \leq 1 \text{ و } -1 \leq y \leq 1 \text{ حول المحور } y$$

(بما انه تم تدوير المنطقة المحصورة بالمربع يعني المساحة)

نحتاج ان نخرج المساحة الكلية للسطح الناتج
لنحسب قطرها 1 وارتفاعها 2 فيكون الناتج $2\pi(1)^2 + 2\pi(1)(1)$

اعلى بالسفلى

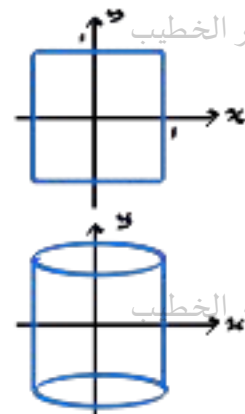
$$S = 2\pi \int_{-1}^1 1 \sqrt{1+(y')^2} dy = 4\pi$$

المساحة السفليه (المساحة الكلية)

المساحة الجانبيه + مساحة القاعدة

$$2\pi(1)^2 + 4\pi$$

$$= 6\pi$$



$$g(y) = 1$$

$$g'(y) = 0$$

$$(g'(y))^2 = 0$$

الوحدة السادسة : تطبيقات التكامل /// الدرس الخامس : حركة المقذوفات

$$g = 9.8m / s^2 \quad \text{or} \quad g = 32 ft / s^2$$

اولاً : حركة المقذوف في بعد واحد

(1) تعطى معادلة حركة مقذوف يتحرك رأسياً للأعلى أو للأسفل عند أي زمن t في المعادلة التفاضلية

$$h''(t) = y''(t) = -g = -32 ft / s^2, \quad y'(0) = v_0, \quad y(0) = y_0$$

بالقدم ft

أو

$$h''(t) = y''(t) = -g = -9.8 m / s^2, \quad y'(0) = v_0, \quad y(0) = y_0$$

بالمتر m

$$v(t) = y'(t) = -g t + v_0$$

$$h(t) = y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + y_0$$

معادلة السرعة المتجهة الرأسية

والحل يكون

معادلة الارتفاع

(2) تعطى معادلة حركة مقذوف يتحرك أفقياً لليمين أو لليسار عند أي زمن t في المعادلة التفاضلية

$$x''(t) = 0, \quad x'(0) = v_0, \quad x(0) = x_0$$

$$x'(t) = v_0$$

$$x(t) = v_0 t + x_0$$

معادلة السرعة المتجهة الأفقية

والحل يكون

معادلة الموقع الأفقي

ملاحظات مهمة:

(1) تكون السرعة المتجهة موجبة إذا كانت الحركة للأعلى (لليمين) وسالبة إذا كانت الحركة

للأسفل (لليسار)

$$T = \frac{2v_0}{g}$$

(2) زمن التحليق أو زمن الرحلة يحدث عندما يكون الارتفاع يساوي صفر

$$(h(t) = y(t) = 0)$$

$$H = \frac{v_0^2}{2g}$$

(3) يصل الجسم أقصى ارتفاع عندما تنعدم السرعة $(h'(t) = y'(t) = 0)$

(1) نضع $v(t) = 0$ ونجد الزمن (ب) نعوض الزمن في المعادلة $y(t)$

(4) سرعة اصطدام الجسم بالأرض (1) نضع $y(t) = 0$ ونجد الزمن (ب) نعوض الزمن في المعادلة $v(t)$

اكتب المعادلة التفاضلية مع الشروط الابتدائية لكل مما يلي:

$$g = 32$$

(1) قذفت كرة للأعلى من الأرض بسرعة متجهة قدرها 48 ft/s

$$y''(t) = -g = -32$$

$$y'(0) = 48$$

$$y(0) = 0$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(2) قذفت كرة للأعلى من يد شخص ترتفع عن الأرض 1 m وبسرعة متجهة قدرها 7 m/s

$$g = 9.8$$

$$y''(t) = -g = -9.8$$

$$y'(0) = 7$$

$$y(0) = 1$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$g = 32$$

(3) سقطت كرة من برج ارتفاعه 100 ft

$$y''(t) = -g = -32$$

$$y'(0) = 0$$

$$y(0) = 100$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(4) قذفت كرة وزنها 50 gm من برج ارتفاعه 75 ft وبسرعة متجهة للأسفل قدرها 18 ft/s

$$y''(t) = -g = -32$$

$$y'(0) = -18$$

$$y(0) = 75$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

منتهى بكره للرفوف

(5) اكتب معادلة السرعة المتجهة والارتفاع لحل المعادلة التفاضلية بالشروط الابتدائية التالية:

$$h''(t) = y''(t) = -16 \text{ m/s}^2, \quad y'(0) = 10, \quad y(0) = 120$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$y'(t) = \int -16 \, dt$$

$$= -16t + C_1$$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 10$$

$$y(t) = -16t + 10$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$y(t) = \int -16t + 10 \, dt$$

$$= -8t^2 + 10t + C_2$$

$$y(0) = 120 \Rightarrow C_2 = 120$$

$$y(t) = -8t^2 + 10t + 120$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

مكن اننا نكتب المعادلات

$$g = 16, \quad v_0 = 10, \quad y_0 = 120$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0$$

$$= -8t^2 + 10t + 120$$

$$y'(t) = v(t) = -16t + 10$$

$$y'(t) = -gt + v_0$$

$$= -16t + 10$$

قذفت كرة من الارض رأسياً للأعلى بشكل مستقيم وبسرعة متجهة ابتدائية 19.6 m/s ، بتجاهل

مقاومة الهواء

$$g = 9.8$$

(1) اكتب المعادلة التفاضلية التي تتمذج معادلة الارتفاع مع الشروط عند أي زمن t

$$h''(t) = -9.8, \quad h'(0) = 19.6, \quad h(0) = 0.$$

$$h''(t) = -9.8$$

$$h'(t) = \int -9.8 \, dt$$

$$= -9.8t + c_1$$

$$h'(0) = 19.6 \Rightarrow c_1 = 19.6$$

$$h(t) = \int -9.8t + 19.6 \, dt$$

$$= -4.9t^2 + 19.6t + c_2$$

$$h(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$h(t) = -4.9t^2 + 19.6t$$

(2) أوجد معادلة الارتفاع عند أي زمن t

المعادلة التفاضلية

(المعادلة التفاضلية)

$$g = 9.8, \quad v_0 = 19.6, \quad h_0 = 0$$

$$h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0$$

$$= -4.9t^2 + 19.6t$$

$$v(t) = -9.8t + 19.6$$

(3) أوجد ارتفاع الكرة بعد 3 ثواني

$$h(3) = -4.9(3)^2 + 19.6(3)$$

$$= 14.7 \text{ m}$$

(4) أوجد أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة

أقصى ارتفاع يكون عندما تنعدم السرعة

(2) أقصى ارتفاع هو

$$h'(t) = 0$$

$$-9.8t + 19.6 = 0$$

$$t = 2$$

$$h(2) = -4.9(2)^2 + 19.6(2)$$

$$= 19.6 \text{ m}$$

(5) أوجد زمن التحليق للكرة (مقدار الزمن التي تبقى فيه الكرة بالهواء)

$$h(t) = 0 \quad \text{زمن التحليق (زمن الرحلة)}$$

$$-4.9t^2 + 19.6t = 0$$

$$t = 0 \quad (t = 4)$$

رسم الخطة المحل من قانون الجذب (دوائر)

$$T = \frac{2(19.6)}{9.8} = 4 \text{ s}$$

(1) تسقط قطرات المطر من غيمة على ارتفاع 1000 m عن سطح الأرض أوجد السرعة المتجهة لقطرة

قطرة الماء مثل الكرة، مثل الغطاس، مثل أي جسم

الماء عند اصطدامها بالأرض (تجاهل مقاومة الهواء)

$$g = 9.8, \quad v_0 = 0, \quad h_0 = 1000$$

$$h''(t) = -9.8, \quad h'(0) = 0, \quad h(0) = 1000$$

$$h'(t) = \int -9.8 dt = -9.8t + C_1$$

$$h'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow h'(t) = -9.8t$$

$$h(t) = \int -9.8t dt = -4.9t^2 + C_2$$

$$h(0) = 1000 \Rightarrow C_2 = 1000$$

$$h(t) = -4.9t^2 + 1000$$

$$h(t) = 0 \quad \text{زمن كرملة}$$

$$-4.9t^2 + 1000 = 0$$

$$t = -14.28 \quad t = 14.28$$

مرور

$$(2) \text{ سرعة الاصطدام}$$

$$v(14.28) = h'(14.28)$$

$$= -9.8(14.28)$$

$$\approx -140 \text{ m/s}$$

(2) قذف جسم للأسفل من ارتفاع 160 ft عن سطح الأرض وبسرعة متجهة 48 ft/s أوجد السرعة

المتجهة للجسم عند اصطدامه بالأرض (تجاهل مقاومة الهواء)

$$g = 32, \quad v_0 = -48, \quad h_0 = 160$$

$$h''(t) = -32, \quad h'(0) = -48, \quad h(0) = 160$$

$$h'(t) = -32t + C_1$$

$$h'(0) = -48 \Rightarrow C_1 = -48$$

$$h'(t) = -32t - 48$$

$$h(t) = -16t^2 - 48t + C_2$$

$$h(0) = 160 \Rightarrow C_2 = 160$$

$$h(t) = -16t^2 - 48t + 160$$

$$h(t) = 0 \quad \text{زمن كرملة}$$

$$-16t^2 - 48t + 160 = 0$$

$$t = -2, \quad t = 2$$

مرور

$$(2) \text{ سرعة الاصطدام هي}$$

$$v(2) = h'(2)$$

$$= -32(2) - 48 = -112 \text{ ft/s}$$

(3) سقطت كرة رأسياً من ارتفاع 80 ft وفي نفس الوقت تم قذف كرة رأسياً من الأرض للأعلى

وبسرعة 40 ft/s ، حدد الارتفاع الذي تلتقي عنده الكرتين (تجاهل مقاومة الهواء)

$$g = 32, \quad v_0 = 0, \quad h_0 = 80$$

$$h''(t) = -32, \quad h'(0) = 0, \quad h(0) = 80$$

$$h'(t) = -32t + C_1 \Rightarrow h'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$h'(t) = -32t$$

$$h(t) = -16t^2 + C_2 \Rightarrow h(0) = 80 \Rightarrow C_2 = 80$$

$$h(t) = -16t^2 + 80$$

$$g = 32, \quad v_0 = 40, \quad h_0 = 0$$

$$h''(t) = -32, \quad h'(0) = 40, \quad h(0) = 0$$

$$h'(t) = -32t + C_1 \Rightarrow h'(0) = 40 \Rightarrow C_1 = 40$$

$$h'(t) = -32t + 40$$

$$h(t) = -16t^2 + 40t + C_2 \Rightarrow h(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$h(t) = -16t^2 + 40t$$

عندما تكون كرتان على نفس الارتفاع

يكون

$$-16t^2 + 80 = -16t^2 + 40t$$

$$80 = 40t$$

$$t = 2 \text{ s}$$

هذا هو زمن الالتقاء

الارتفاع هو (عوض في أي معادلة)

$$h(2) = -16(2)^2 + 80 = 16 \text{ ft}$$

(1) إذا كان أقصى ارتفاع تصل إليه قدمي لاعب كرة سلة لتسديد الكرة هي 1.35 m أوجد السرعة

المتجهة الابتدائية التي قفز بها اللاعب ليصل إلى هذا الارتفاع (تجاهل مقاومة الهواء)

☆ يمكن اعتبار قدم اللاعب كرة

$$g = 9.8, \quad v_0 = ??, \quad h_0 = 0$$

$$h''(t) = -9.8, \quad h'(0) = v_0, \quad h(0) = 0$$

$$h'(t) = \int -9.8 dt = -9.8t + C_1$$

$$h'(0) = v_0 \Rightarrow C_1 = v_0$$

$$h'(t) = -9.8t + v_0$$

$$h(t) = \int -9.8t + v_0 dt = -4.9t^2 + v_0t + C_2$$

$$h(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$h(t) = -4.9t^2 + v_0t$$

$$h'(t) = 0$$

$$-9.8t + v_0 = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0}{9.8}$$

$$h\left(\frac{v_0}{9.8}\right) = 1.35$$

$$-4.9 \left(\frac{v_0}{9.8}\right)^2 + v_0 \left(\frac{v_0}{9.8}\right) = 1.35$$

$$-4.9 \frac{v_0^2}{9.8^2} + \frac{v_0^2}{9.8} = 1.35$$

$$\text{بالفرق في } 9.8^2 \text{ يكون}$$

$$-4.9 v_0^2 + 9.8 v_0^2 = 129.654$$

$$4.9 v_0^2 = 129.654$$

$$v_0^2 = 26.46$$

$$v_0 = 5.14, \quad v_0 = -5.14$$

منهذه لان الجسم صاعد

$$v_0 = 5.14 \text{ m/s}$$

(2) يسقط جسم من ارتفاع H ft من سطح الارض

(أ) بين أن الجسم يصل إلى الأرض بعد الزمن $T = \frac{1}{4} \sqrt{H}$ s (تجاهل مقاومة الهواء)

$$g = 32, \quad v_0 = 0, \quad h_0 = H$$

$$h''(t) = -32, \quad h'(t) = 0, \quad h(0) = H$$

$$h'(t) = \int -32 dt = -32t + C_1 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$h'(t) = -32t$$

$$h(t) = \int -32t dt = -16t^2 + C_2 \Rightarrow C_2 = H$$

$$h(t) = -16t^2 + H$$

$$h(t) = 0 \text{ يصل الجسم إلى الأرض عندما}$$

$$-16t^2 + H = 0$$

$$t^2 = \frac{H}{16}$$

$$t = -\sqrt{\frac{H}{16}}, \quad t = \sqrt{\frac{H}{16}} = \frac{\sqrt{H}}{4} \#$$

مرفوض

$$\therefore t = \frac{1}{4} \sqrt{H}$$

(ب) بين أن السرعة المتجهة للجسم عند اصطدامه بالأرض هي $V = -8\sqrt{H}$ ft/s (تجاهل الهواء)

$$h(t) = -16t^2 + H$$

$$t = \frac{1}{4} \sqrt{H}$$

$$h'(t) = -32t$$

من إسقاط سابق
(أ) من سرعة

(2)

سرعة عند الاصطدام هي

$$h'\left(\frac{1}{4} \sqrt{H}\right) = -32 \left(\frac{1}{4} \sqrt{H}\right)$$

$$= -8 \sqrt{H} \#$$

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2 \text{ or } g = 32 \text{ ft/s}^2$$

محمد عمر الخطيب

ثانياً : حركة المقذوف في بعدين

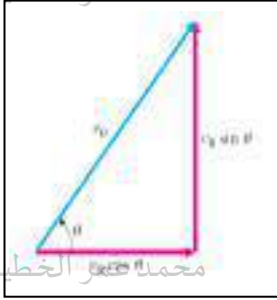
نحتاج في حركة المقذوف في بعدين إلى معادلات الحركة الرأسية والأفقية

(1) معادلة الحركة الرأسية للمقذوف عند أي زمن في المعادلة التفاضلية

$$y''(t) = -9.8 \text{ m/s}^2 \text{ or } -32 \text{ ft/s}^2, \quad y'(0) = v_0 \sin \theta, \quad y(0) = y_0$$



حيث θ زاوية ميل المقذوف عن المستوى الأفقي



$$y'(t) = -g t + v_0 \sin \theta$$

← معادلة السرعة المتجهة الرأسية

$$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin \theta t + y_0$$

← معادلة الارتفاع

(2) معادلة الحركة الأفقية عند أي زمن في المعادلة التفاضلية

$$x''(t) = 0, \quad x'(0) = v_0 \cos \theta, \quad x(0) = x_0$$

السرعة الأفقية دائماً
ثابتة طول فترة الرحلة

$$x'(t) = v_0 \cos \theta$$

← معادلة السرعة المتجهة الأفقية

$$x(t) = v_0 \cos \theta t + x_0$$

← معادلة الموقع الأفقي

ملاحظات (من الفيزياء) تستخدم
هذه القوانين للتأكد من الاجابات
لمسائل اختيار من متعدد

$$T = \frac{2v_0 \sin \theta}{g}$$

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

(1) زمن التحليق للمقذوف يحدث عندما يكون الارتفاع يساوي صفر

$$y(t) = 0 \text{ اوجد قيمة الزمن الذي يجعل}$$

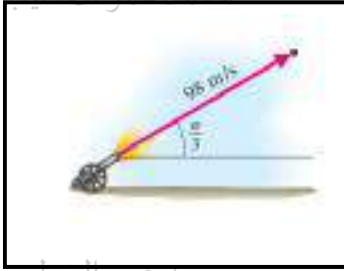
(2) اقصى ارتفاع يصل اليه الجسم عندما تنعدم السرعة

$$(y'(t) = 0)$$

(أ) نضع $v(t) = 0$ ونجد الزمن (ب) نعوض الزمن في المعادلة $y(t)$

(3) المدى الأفقي

(أ) نضع $y(t) = 0$ ونجد الزمن (ب) نعوض الزمن في المعادلة $x(t)$



تطلق قذيفة من الأرض بسرعة ابتدائية متجهة قدرها 98 m/s ،

$$g = 9.8, \quad v_0 = 98, \\ y_0 = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{3}.$$

بزاوية ميل قدرها $\theta = \frac{\pi}{3}$

(1) أوجد معادلة الحركة الرأسية في أي زمن t (معادلة الارتفاع)

محمد عمر الخطيب

$$y'' = -9.8, \quad y'(0) = 98 \sin \frac{\pi}{3}, \quad y(0) = 0.$$

$$y' = \int -9.8 dt = -9.8t + C_1 \Rightarrow C_1 = 98 \sin \frac{\pi}{3}.$$

او (من السطرين)

$$y' = -9.8t + 49\sqrt{3}$$

$$y = \int -9.8t + 49\sqrt{3} dt = -4.9t^2 + 49\sqrt{3}t + C_2$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \theta + y_0 \\ = -4.9t^2 + 98 \sin \frac{\pi}{3} t \\ = -4.9t^2 + 49\sqrt{3}t.$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$y(t) = -4.9t^2 + 49\sqrt{3}t$$

محمد عمر الخطيب

(2) أوجد معادلة الحركة الأفقية في أي زمن t $x''(t) = 0, \quad x'(0) = v_0 \cos \frac{\pi}{3}, \quad x(0) = 0$

$$x'(t) = C_1 \Rightarrow x'(0) = 98 \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow C_1 = 49.$$

محمد عمر الخطيب

$$x'(t) = 49.$$

$$x(t) = \int 49 dt = 49t + C_2 \Rightarrow x(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0.$$

$$x(t) = 49t.$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$y(0) = 0$$

(3) أوجد زمن التحليق للقذيفة

$$-4.9t^2 + 49\sqrt{3}t = 0$$

$$t = 0, \quad t = 10\sqrt{3}.$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$T = 10\sqrt{3} \text{ s}$$

(4) أوجد المدى الأفقي (أقصى بعد تصل إليه القذيفة)

$$y(t) = 0$$

نجد من كماله

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$t = 10\sqrt{3}$$

من الفترة (0)

$$x(10\sqrt{3}) = 49(10\sqrt{3}) = 849 \text{ m}.$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$R = 849 \text{ m}$$

محمد عمر الخطيب
 $g = 32$, $v_0 = 48$
 $y_0 = 6$, $\theta = 20^\circ$

محمد عمر الخطيب
 (1) يتم اطلاق جسم من ارتفاع 6 ft بزاوية 20° وبسرعة ابتدائية 48 ft/s

اوجد زمن التحليق والمدى الأفقي لجسم

مصادر الارتفاع
 $y'' = -32$, $y'(0) = 48 \sin 20^\circ$, $y(0) = 6$

محمد عمر الخطيب
 $y'(t) = \int -32 dt = -32t + C_1$

محمد عمر الخطيب
 $y(0) = 48 \sin 20^\circ \Rightarrow C_1 = 48 \sin 20^\circ$

$y'(t) = -32t + 48 \sin 20^\circ$

$y(t) = \int -32t + 48 \sin 20^\circ$
 $= -16t^2 + 48 \sin 20^\circ t + C_2$

محمد عمر الخطيب
 $y(0) = 6 \Rightarrow C_2 = 6$

محمد عمر الخطيب
 $y(t) = -16t^2 + 48 \sin 20^\circ t + 6$

(1) زمن إلتحاق

$y(t) = 0 \Rightarrow t = 1.031 \text{ s}$

مصادر الموضع الأفقي
 $x''(t) = 0$, $x'(0) = 48 \cos 20^\circ$, $x(0) = 0$

محمد عمر الخطيب
 $x(t) = C_1$

محمد عمر الخطيب
 $x'(0) = 48 \cos 20^\circ \Rightarrow C_1 = 48 \cos 20^\circ$

$x'(t) = 48 \cos 20^\circ$

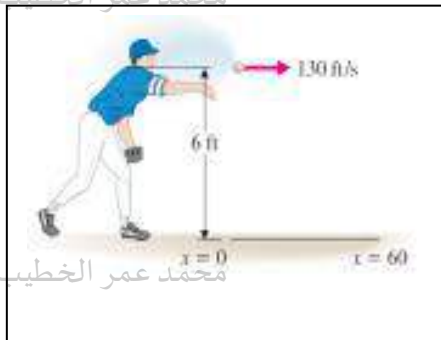
$x(t) = \int 48 \cos 20^\circ dt$
 $= 48 \cos 20^\circ t + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$

محمد عمر الخطيب
 $x(t) = 48 \cos 20^\circ t$

المدى الأفقي
 $x(1.031) = 48 \cos 20^\circ (1.031)$

$R = 59 \text{ ft}$

محمد عمر الخطيب
 (2) يطلق لاعب، كرة بيسبول من ارتفاع 6 ft وبسرعة أفقية ابتدائية قدرها 130 ft/s



محمد عمر الخطيب
 (أ) أوجد ارتفاع الكرة عندما تصل إلى المنصة (على بعد 60 ft)

محمد عمر الخطيب
 $g = 32$, $v_0 = 130$, $y_0 = 6$, $\theta = 0^\circ$

محمد عمر الخطيب
 $y''(t) = -32$, $y'(0) = 130 \sin 0^\circ = 0$, $y(0) = 6$

محمد عمر الخطيب
 $y'(t) = -32t + C_1 \Rightarrow y'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$
 $= -32t$

$y(t) = 16t^2 + C_2 \Rightarrow y(0) = 6 \Rightarrow C_2 = 6$

$y(t) = -16t^2 + 6$

محمد عمر الخطيب
 $x''(t) = 0$, $x'(0) = 130 \cos 0^\circ = 130$, $x(0) = 0$

محمد عمر الخطيب
 $x(t) = 130t$

محمد عمر الخطيب
 $x = 60$ عند أي لحظة

$130t = 60 \Rightarrow t = 0.46 \text{ s}$

أي أن ارتفاع الكرة عند لحظة $t = 0.46 \text{ s}$

(ب) اكتب المعادلة التي تربط x و y

محمد عمر الخطيب
 $x(t) = 130t \Rightarrow t = \frac{x}{130}$

$y(t) = -16t^2 + 6$

$= -16 \left(\frac{x}{130} \right)^2 + 6$

$\Rightarrow y(x) = \frac{-16}{130^2} x^2 + 6$

محمد عمر الخطيب
 يمكن حل الكوال السابق منه

مصادر المسار

$x = 60 \Rightarrow y = 2.6$

محمد عمر الخطيب

(1) تريد طائرة على ارتفاع 256 ft ، اسقاط إمدادات إلى موقع معين على الأرض ، إذا كان للطائرة

سرعة أفقية 100 ft/s ، فما المسافة التي ينبغي أن تبعد بها الطائرة عن الهدف عند إطلاق الإمدادات من

أجل أن تسقط في الموقع المستهدف. (اوجد المدى الافقي للمقذوف)

المطلوب إيجاد المدى الأفقي . محمد عمر الخطيب

$$g = 32, \quad v_0 = 100, \quad y_0 = 256, \quad \theta = 0$$

$$y''(t) = -32, \quad y'(0) = 100 \sin 0 = 0, \quad y(0) = 256 \quad (1)$$

$$y(t) = -32t^2 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$= -32t^2$$

$$y(t) = -16t^2 + C_2 \Rightarrow C_2 = 256$$

$$= -16t^2 + 256$$

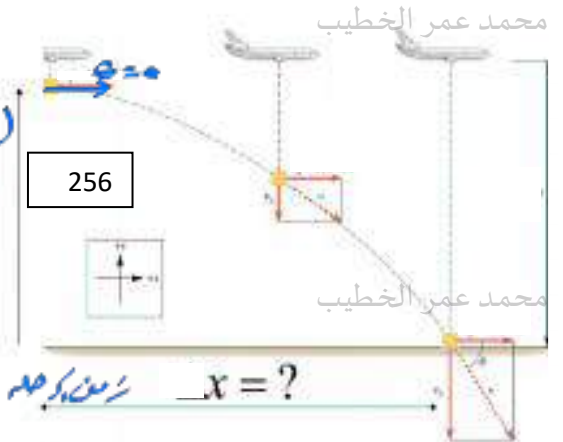
$$y(t) = 0 \Rightarrow -16t^2 + 256 = 0 \Rightarrow t = 4 \text{ s}$$

$$x''(t) = 0, \quad x'(0) = 100 \cos 0 = 100, \quad x(0) = 0$$

$$x'(t) = C_1 \Rightarrow C_1 = 100 \Rightarrow x(t) = 100t$$

$$x(t) = 100t + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$= 100t$$



المدى الأفقي

$$R = x(4) = 400 \text{ ft}$$

(2) يتم اطلاق كرة قدم من ارتفاع 6 ft وبسرعة ابتدائية 80 ft/s وبزاوية 8° يقف شخص في نهاية

الملعب ويبعد 40 yd في اتجاه الرمي ، هل سيلتقط هذا الشخص الكرة ام لا.

الحل بالمعادلات

المطلوب إيجاد المدى الأفقي وأخذ القرار . محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

ملاحظة

$$1 \text{ yd} = 3 \text{ ft}$$

$$g = 32, \quad v_0 = 80, \quad y_0 = 6, \quad \theta = 8^\circ$$

(1)

$$y''(t) = -32, \quad y'(0) = 80 \sin 8^\circ, \quad y(0) = 6$$

$$y'(t) = -32t + C_1 \Rightarrow y'(0) = 80 \sin 8^\circ$$

$$\Rightarrow C_1 = 80 \sin 8^\circ$$

$$y'(t) = -32t + 80 \sin 8^\circ$$

$$y(t) = -16t^2 + 80 \sin 8^\circ t + C_2$$

$$y(0) = 6 \Rightarrow C_2 = 6$$

$$y(t) = -16t^2 + 80 \sin 8^\circ t + 6$$

$$y(t) = 0$$

$$\Rightarrow t = 1.05 \text{ s}$$

(2)

$$x''(t) = 0, \quad x'(0) = 80 \cos 8^\circ, \quad x(0) = 0$$

$$x(t) = 80 \cos 8^\circ t$$

$$R = x(1.05) = 80 \cos 8^\circ (1.05)$$

$$= 83$$

لا يستطيع ان يمسك الكرة لان

سقطت عند 83 ft

ما هو هذا الوقت في بعد

$$(120 \text{ ft} = 40 \text{ yd})$$

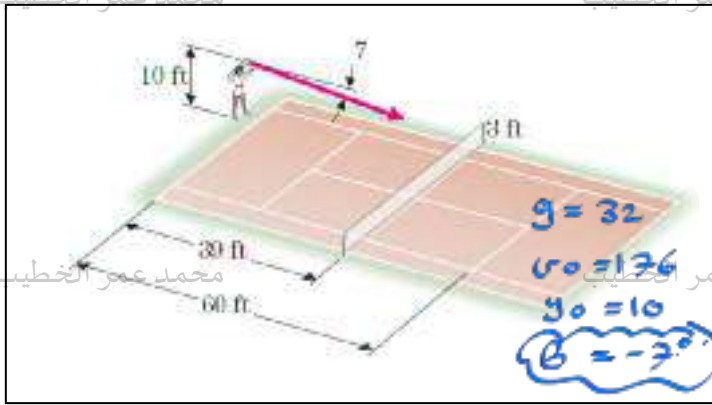
يطلق لاعب، كرة تنس من ارتفاع 10 ft

وبسرعة ابتدائية 176 ft/s

وبزاوية ميل أسفل الخط الأفقي قياسها 7°

محمد عمر الخطيب

كما هو موضح بالشكل



(1) أوجد معادلة الحركة الرأسية في أي زمن t $y''(t) = -32$, $y'(0) = 176 \sin(-7^\circ)$, $y(0) = 10$

* يوجد مرتين على الشبكة

(محم) هل الكرة ستمر من فوق الشبكة

(ع) هل الكرة ستكون داخل ام خارج الملعب

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \theta t + y_0$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= -16t^2 + 176 \sin(-7^\circ)t + 10$$

$$= -16t^2 - 21.45t + 10$$

$$x''(t) = 0, \quad x'(0) = 176 \cos(-7^\circ), \quad x(0) = 0$$

(2) أوجد معادلة الحركة الأفقية في أي زمن t

$$x(t) = v_0 \cos \theta t + x_0$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= 176 \cos(-7^\circ)t$$

$$= 174.7t$$

$$x(t) = 39$$

(3) أوجد زمن وصول الكرة إلى الشبكة

المطلوب زمن الجول في 39

$$176 \cos(-7^\circ)t = 39$$

$$t = \frac{39}{176 \cos(-7^\circ)} = 0.223\text{ s}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

(4) أوجد ارتفاع الكرة عن الأرض عند وصول الكرة إلى الشبكة، هل ستمر الكرة فوق الشبكة ؟

$$y(0.223) = 4.4\text{ ft}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

وهو اعلى من ارتفاع الشبكة لذلك ستمر الكرة

$$y(t) = 0$$

(5) أوجد زمن التحليق للكرة

$$-16t^2 - 21.45t + 10 = 0$$

$$t = 0.366\text{ s}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$x(0.366) = 174.7(0.366)$$

(6) أوجد المدى الأفقي للكرة

$$= 63.92\text{ ft}$$

(7) هل ستكون الكرة داخل أم خارج الحد (على بعد 60 ft من اللاعب)

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

بناء على المدى الأفقي للكرة هو 63.92، وهو اكبر من 60 لذلك تكون الكرة خارج الحد

يمكن استخدام معادلة المسار التربيعية التي تربط بين المتغيرين x, y في هذا النوع من المسائل وهي

$$y = y_0 + \tan \theta x - \frac{g}{2[v_0 \cos \theta]^2} x^2$$

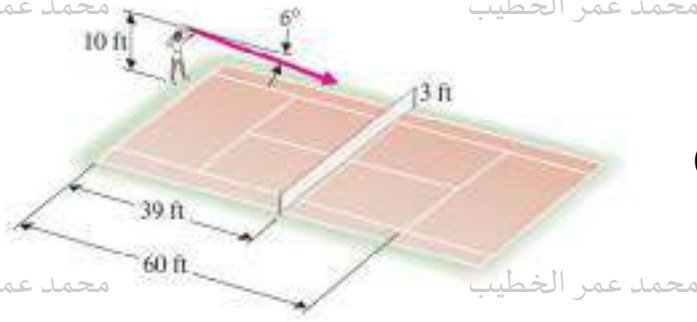
يطلق لاعب، كرة تنس من ارتفاع 10 ft

وبسرعة ابتدائية 176 ft/s

وبزاوية ميل أسفل الخط الأفقي قياسها $6''$

كما هو موضح بالشكل

فان المدى الافقي للكرة هو



$$g = 32, v_0 = 176, y_0 = 10, \theta = -6''$$

$$y = 10 + \tan(-6'') x - \frac{32}{2[176 \cos(-6'')]^2} x^2$$

عوض الخيارات مكان x في معادلة

المسار حتى تحصل على $y = 0$

او حل المعادلة $y = 0$ لتجد قيمة x

(a) 55.31 ft

(b) 81.42 ft

(c) 43.14 ft

(d) 70.47 ft

$$y = 10 + \tan(-6) x - \frac{32}{2[176 \cos(-6)]^2} x^2 = 0$$

$$x = 70.47$$

من المعادلة

mode 53

او shift slae



ثالثاً: حركة المقذوف في ثلاث أبعاد (معادلة الحركة لقذيفة جنونية)

قوة ماغنوس

تعطى المسافة الجانبية لكرة تتحرك وتدور بمعدل w راديان في الثانية بالمعادلة التفاضلية

$$x''(t) = \frac{-0.1}{m} \sin(4wt + \theta_0) \quad , \quad x'(0) = 0 \quad , \quad x(0) = 0$$

حيث θ_0 الزاوية الابتدائية عند رمي الكرة

و m كتلة الكرة ب صلج و x بالقدم

أوجد معادلة الحركة الجانبية لكرة البيسبول التي تزن 0.01 صلج والتي تدور بمعدل $w = 2$ راديان

بالثانية حيث ترمى الكرة من الموقع صفر والزاوية الابتدائية صفر والسرعة الابتدائية صفر.

ثم أوجد موقع الكرة الجانبية بعد نصف ثانية

$$x''(t) = \frac{-0.1}{0.01} \sin(4 \times 2 \times t + 0) \quad , \quad x'(0) = 0 \quad , \quad x(0) = 0$$

$$x''(t) = -10 \sin(8t) \quad , \quad x'(0) = 0 \quad , \quad x(0) = 0$$

$$x'(t) = \int x''(t) dt$$

$$= \int -10 \sin(8t) dt$$

$$= \frac{10}{8} \cos(8t) + C_1$$

$$x'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{-10}{8} = -1.25$$

$$x'(t) = 1.25 \cos(8t) - 1.25$$

$$= 1.25 (\cos 8t - 1)$$

$$x(t) = \int 1.25 (\cos 8t - 1) dt$$

$$= 1.25 \left(\frac{\sin 8t}{8} - t \right) + C_2$$

$$x(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$x(t) = 1.25 \left(\frac{\sin 8t}{8} - t \right)$$

$$= 0.156 \sin 8t - 1.25t$$

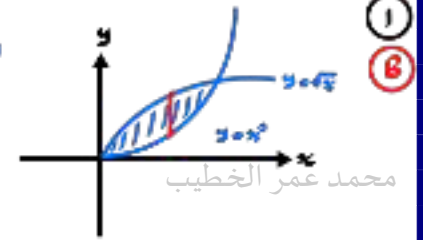
$$x(1/2) = -0.74$$

انتهت الوحدة السادسة بحمد الله

$$A = \int_0^1 \sqrt{x} - x^2 dx$$

محمد عمر الخطيب

السريعة
 $y = \sqrt{x}$
 $y = x^2$



1
6

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

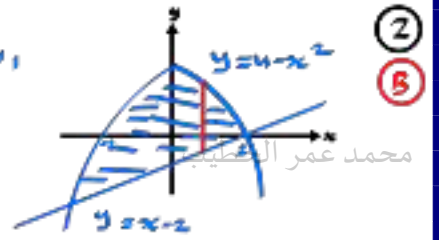
$$A = \int_{-3}^2 (4 - x^2 - (x - 2)) dx$$

$$= \int_{-3}^2 (-x^2 - x + 6) dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

السريعة
 $y = 4 - x^2$
 $y = x - 2$



2
5

نقاط التقاطع

$$x - 2 = 4 - x^2$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x = -3, x = 2$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$A = \int_0^3 (5x - x^2 - 2x) dx$$

$$= \int_0^3 (3x - x^2) dx$$

$$= \left. \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right|_0^3 = \frac{9}{2}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

السريعة
 $y = 5x - x^2$
 $y = 2x$



3
B

نقاط التقاطع

$$2x = 5x - x^2$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x = 0, 3$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$A = \int_{-3}^2 (6 - x - x^2) dx$$

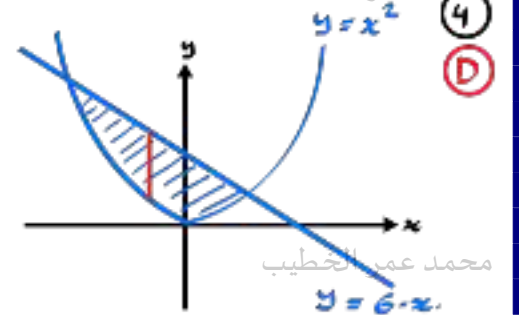
$$= \left. 6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right|_{-3}^2$$

$$= \frac{125}{6}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

السريعة
 $y = 6 - x$
 $y = x^2$



4
D

نقاط التقاطع

$$x^2 = 6 - x$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x = -3, x = 2$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

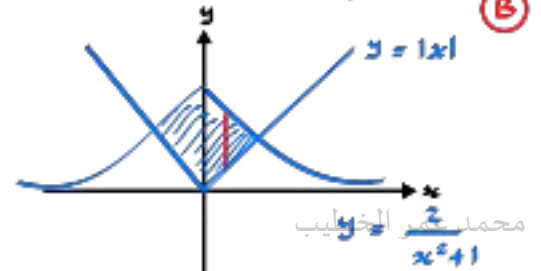
5 محمد عمر الخطيب

$$A = 2 \int_0^1 \frac{2}{x^2+1} - x \, dx$$

$$= 2 \left[2 \tan^{-1} x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1$$

$$= 4 \tan^{-1} x - \frac{x^2}{2} \Big|_0^1$$

محمد عمر الخطيب



بدون نماذج

$$A = \int_{-1}^1 \frac{2}{x^2+1} - |x| \, dx = \int_{-1}^0 \frac{2}{x^2+1} - (-x) \, dx + \int_0^1 \frac{2}{x^2+1} - x \, dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

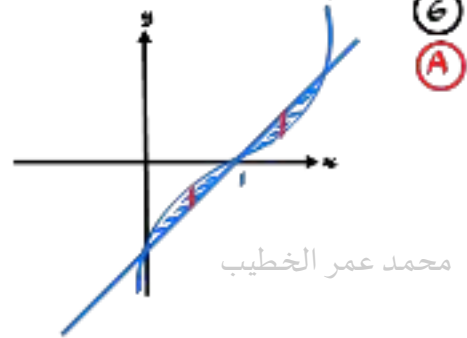
6 محمد عمر الخطيب

$$A = 2 \int_0^1 (x-1)^3 - (x-1) \, dx$$

$$= 2 \left[\frac{(x-1)^4}{4(1)} - \frac{(x-1)^2}{2(1)} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}$$

بدون نماذج



محمد عمر الخطيب

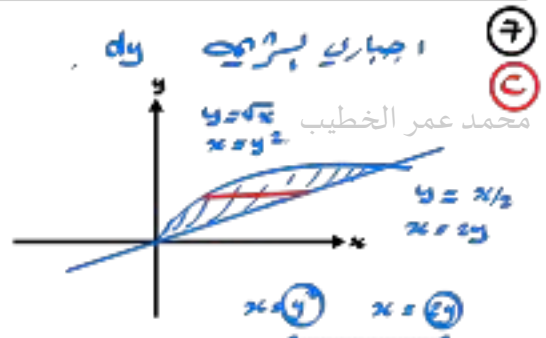
محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$A = \int_0^1 (x-1)^3 - (x-1) \, dx + \int_1^2 (x-1) - (x-1)^3 \, dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب



محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

8 محمد عمر الخطيب

$$A = \int_{-1}^3 -y^2 + 10 - (y-2)^2 \, dy$$

$$= \left[-\frac{y^3}{3} + 10y - \frac{(y-2)^3}{3(1)} \right]_{-1}^3 = \frac{64}{3}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$A = \int_{-3}^2 4 - y^2 - (y - 2) dy$$

المنطق البرهني dy
لأن الحدود بدلالة y

$$= \int_{-3}^2 -y^2 - y + 6 dy$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= \left[-\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + 6y \right]_{-3}^2 = \frac{125}{6}$$

$$A = \int_0^1 (2\sqrt{y} - y) dy$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

اجباري برهني dy

$$y = \frac{x^2}{4} \Rightarrow x^2 = 4y, \\ x = \pm \sqrt{4y}, \\ = \pm 2\sqrt{y},$$

ناخذ فقط $x = 2\sqrt{y}$ لأن x موجب
 $y = x \Rightarrow x = y$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$x = 2\sqrt{y} \quad x = y$$

$$\int_0^2 2x - x^2 dx = A_2$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

المنطق

$$y = 2x \quad y = x^2$$

$$\int_0^4 2 - \sqrt{y} dy = A_3$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

المنطق

$$x = \sqrt{y}, \quad x = 2$$

$$\int_0^2 4 - x^2 dx = A_1 + A_2$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

المنطق

$$y = 4 \quad y = x^2$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$A_1 = \int_0^1 2 - x^2 - x^2 dx$$

$$= \int_0^1 2 - 2x^2 dx$$

$$= \left[2x - \frac{2x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

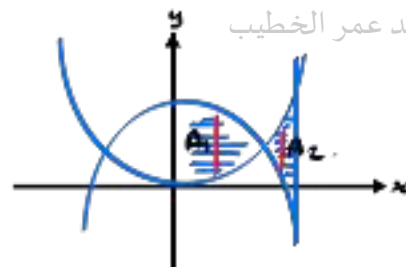
$$A_2 = \int_1^2 x^2 - (2 - x^2) dx$$

$$= \int_1^2 2x^2 - 2 dx$$

محمد عمر الخطيب

$$\left[\frac{2x^3}{3} - 2x \right]_1^2 = \frac{8}{3}$$

$$A = A_1 + A_2 = 4$$



محمد عمر الخطيب

$$x^2 = 2 - x^2$$

$$2x^2 = 2$$

$$x = -1, 1$$

نقاط التقاطع

محمد عمر الخطيب

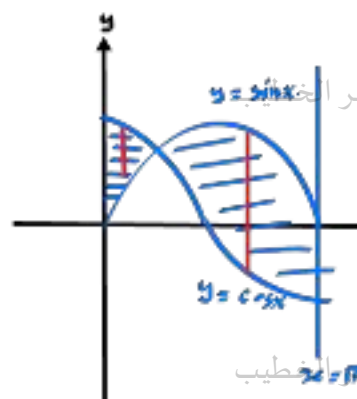
محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$A = \int_0^{\pi/4} \cos x - \sin x dx + \int_{\pi/4}^{\pi} \sin x - \cos x dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب



$$\sin x = \cos x$$

$$\tan x = 1$$

نقاط التقاطع

$$Q_1 \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \checkmark$$

$$Q_3 \rightarrow x = \pi + \frac{\pi}{4} x$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

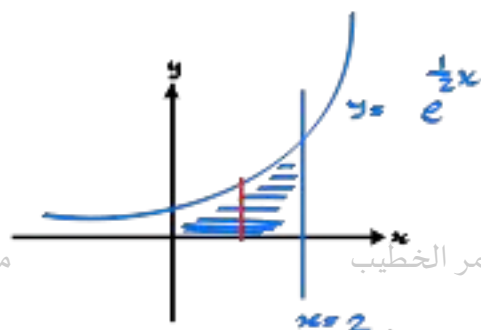
محمد عمر الخطيب

$$A = \int_0^2 e^{\frac{1}{2}x} dx$$

$$= \left[\frac{e^{\frac{1}{2}x}}{\frac{1}{2}} \right]_0^2 = 2e - 2$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب



محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

من احد تعريفات المساحة

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

18

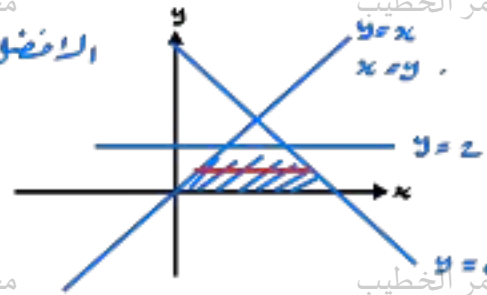
B

$$A = \int_0^2 6 - y - y \, dy$$

$$= \int_0^2 6 - 2y \, dy$$

محمد عمر الخطيب

الافضل بشرية dy



محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

x=6-y.

الافضل بشرية dy

19

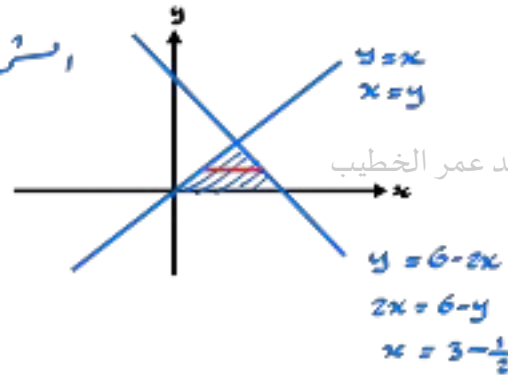
C

$$A = \int_0^2 3 - \frac{1}{2}y - y \, dy$$

$$= \int_0^2 3 - \frac{3}{2}y \, dy$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب



محمد عمر الخطيب

نقاط تقاطع

$$y = 3 - \frac{1}{2}y$$

$$y + \frac{1}{2}y = 3$$

$$\frac{3}{2}y = 3$$

$$3y = 6 \Rightarrow y = 2$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

الافضل بشرية dy

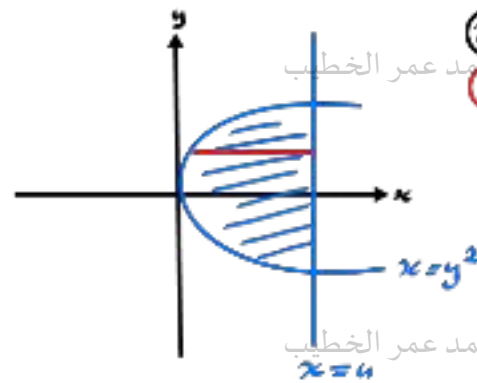
20

C

$$A = \int_{-2}^2 4 - y^2 \, dy$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب



محمد عمر الخطيب

نقاط تقاطع

$$y^2 = 4$$

$$y = \pm 2$$

$$A = \int_0^a f(x) \, dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

او

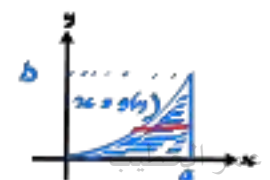
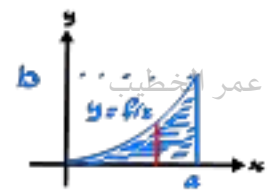
21

B

$$A = \int_0^b a - g(y) \, dy$$

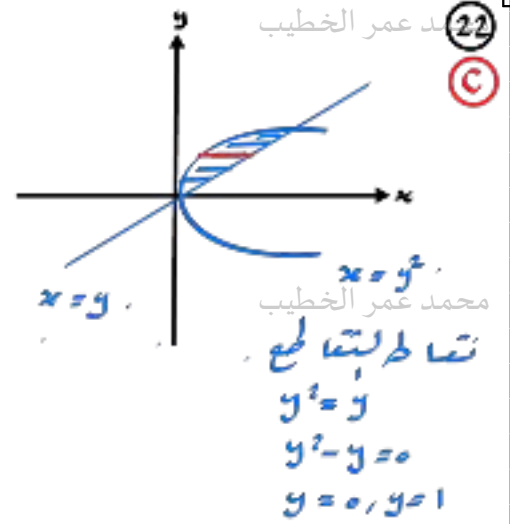
محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب



$$A = \int_0^1 y - y^2 dy$$

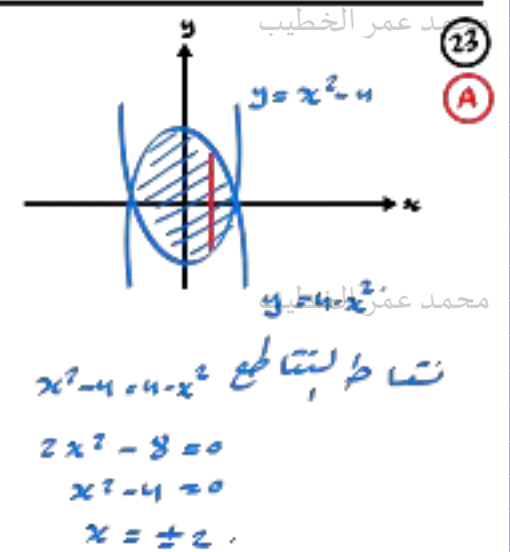
$$= \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$



$$A = \int_{-2}^2 4 - x^2 - (x^2 - 4) dx$$

$$= \int_{-2}^2 8 - 2x^2 dx$$

$$= 8x - \frac{2x^3}{3} \Big|_{-2}^2 = \frac{64}{3}$$



قيمة التكامل يساوي مساحة المنطقة.

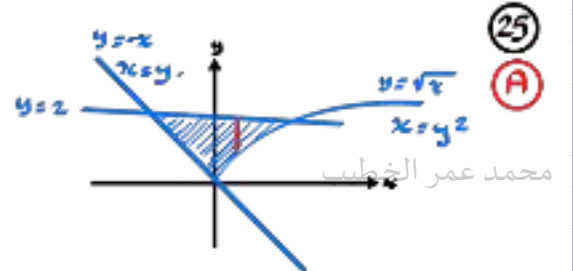
$$\int_0^2 f(x) - g(x) dx = \frac{1}{2} (2)(2) = 2$$



$$A = \int_0^2 y^2 - (-y) dy$$

$$= \int_0^2 y^2 + y dy$$

المنطقة احباري يد



محمد عمر الخطيب

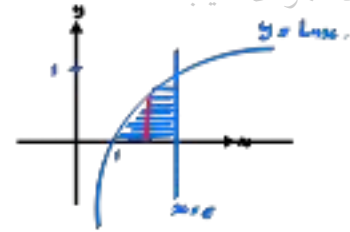
محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$A = \int_1^e \ln x \, dx.$$

غير موجود بالحساب

نذلك لا هذا الحاصل

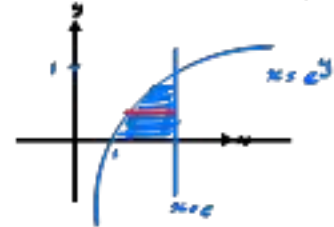


محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$A = \int_0^1 e - e^y \, dy.$$



محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

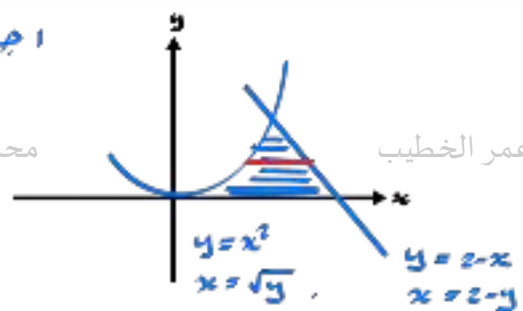
محمد عمر الخطيب

محتسبة بالتدريج
y = e
y = 1

$$A = \int_0^1 2 - y - \sqrt{y} \, dy$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب



محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$A = \int_1^4 x^2 - e^{-x} \, dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + e^{-x} \right]_1^4$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب



نسا طرقتنا

Shift slope من محمد عمر الخطيب

0.73
حاجه عدد دلتا

$$A = \int_0^k kx - x^2 \, dx$$

$$\frac{4}{3} = \left[k \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^k$$

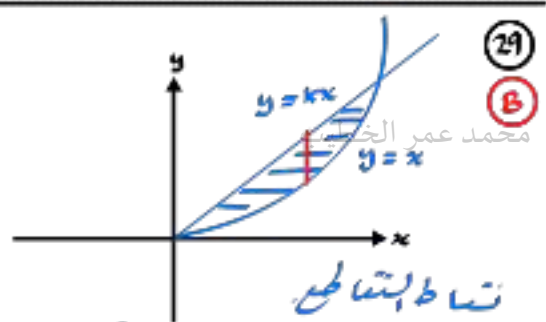
$$\frac{4}{3} = \frac{k^3}{2} - \frac{k^3}{3}$$

$$8 = 3k^2 - 2k^2$$

$$8 = k^3 \Rightarrow k = 2$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب



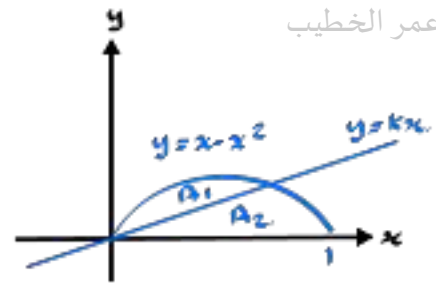
نسا طرقتنا
x^2 = kx
x^2 - kx = 0
x(x - k) = 0 \Rightarrow x = 0

$$A_1 + A_2 = \int_0^1 x - x^2 dx$$

$$= \left. \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right|_0^1$$

$$= \frac{1}{6}$$

$$A_1 = A_2 \Rightarrow 2A_1 = \frac{1}{6} \Rightarrow A_1 = \frac{1}{12}$$



$$p'(t) = \beta(t) - D(t)$$

$$= 10 + 2t - (4 + t)$$

$$= 6 + t$$

$$\Delta p = \int_0^{30} p'(t) dt \quad \text{حيث يتغير عدد السكان}$$

$$= \int_0^{30} 6 + t dt = 630$$

$$630 + 1000 = \text{عدد السكان}$$

$$10630 =$$

انتهت اجابات درس الاول

1
A

$$V = \int A(x) dx$$

$$= \int_0^{10} \frac{4}{25} (10-x) dx = \frac{4}{25} \left(10x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{10} = 8$$

محمد عمر الخطيب

2
B

$$V = \int A(x) dx$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{3}}{4} L^2 dx$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{3}}{4} (2\sqrt{\sin x})^2 dx$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{3} \sin x = -\sqrt{3} \cos x \Big|_0^{\pi} = 2\sqrt{3}$$



$$y = 2\sqrt{\sin x}$$

$$L = 2\sqrt{\sin x} - 0$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

3
B

$$V = \int A(x) dx$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{2} d dx$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (\sqrt{2\sin x})^2 dx$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{2} 2 \sin x dx = \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = 2$$



$$y = \sqrt{2\sin x}$$

$$y = 0$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

4
B

$$V = \int A(x) dx$$

$$= \int_{-1}^1 s^2 dx$$

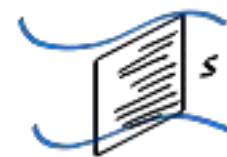
$$= \int_{-1}^1 (2-x^2)^2 dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$= \int_{-1}^1 4 - 8x^2 + 4x^4 dx$$

$$= 4x - \frac{8x^3}{3} + \frac{4x^5}{5} \Big|_{-1}^1 = \frac{64}{15}$$



$$y = 2-x^2$$

$$y = x^2$$

$$s = 2-x^2 - x^2$$

$$= 2-2x^2$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

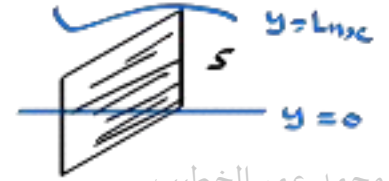
محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$U = \int A(x) dx$$

$$= \int_1^2 s^2 dx$$

$$= \int_1^2 (\ln x)^2 dx$$



استخدم المتكامل اذا كان الجواب صنع دائرة

$$U = \int_0^H (B - \frac{B}{H} x)^2 dx$$

$$B = 180, H = 100$$

$$= \int_0^{100} (180 - \frac{180}{100} x)^2 dx = \int_0^{100} (180 - \frac{9}{5} x)^2 dx$$

$$U = \int A(y) dy$$

$$= \int_0^3 s^2 dy$$

$$= \int_0^3 (-2y + 6)^2 dy = \frac{(-2y + 6)^3}{3(-2)} \Big|_0^3 = 36$$



$$s = -2y + 6 - 0 = -2y + 6$$

$$U = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dx$$

$$= \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 - 0 dx$$

$$= \pi \int_0^4 x dx = \pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 = 8\pi$$

اقصاص

بشرية 1 قدر دوران (x)
بشرية 2 قدر دوران (x)

$$r_o = \sqrt{x} - 0 = \sqrt{x}$$

$$r_i = 0 - 0 = 0$$

$$U = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dx$$

$$= \pi \int_0^4 2^2 - (\sqrt{x})^2 dx$$

$$= \pi \int_0^4 4 - x dx = \pi \left[4x - \frac{x^2}{2} \right]_0^4 = 8\pi$$

ملاحظات

بشرية 1 قدر دوران (x)
بشرية 2 قدر دوران (x)

$$r_o = 2 - 0 = 2$$

$$r_i = \sqrt{x} - 0 = \sqrt{x}$$

(A)

$$U = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dx$$

$$= \pi \int_{-1}^2 (x+2)^2 - (x^2)^2 dx$$

$$r_o = x+2 = 0$$

$$r_i = x^2 = 0$$

$$= \pi \int_{-1}^2 (x+2)^2 - x^4 dx$$

$$= \pi \left(\frac{(x+2)^3}{3(1)} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{72\pi}{5}$$

(B)

$$U = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dx$$

$$= \pi \int_0^1 \left(\sqrt{\frac{2x}{x^2+1}} \right)^2 - 0^2 dx$$

بُستَوية $\perp$ قمر ليدان (x)

$\therefore$ بُستَوية dx

$$= \pi \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = \pi \ln(x^2+1) \Big|_0^1 = \pi \ln 2$$

$$r_o = \sqrt{\frac{2x}{x^2+1}} = 0$$

$$r_i = 0 - 0 = 0$$

$$U = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dx$$

$$= \pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sqrt{\cos x})^2 - 0^2 dx$$

بُستَوية $\perp$ قمر ليدان (x)

$\therefore$ بُستَوية dx

(B)

$$= \pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x dx = -\pi \sin x \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2\pi$$

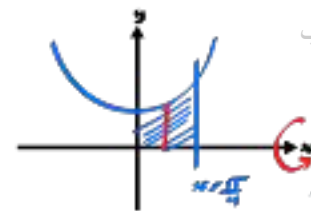
$$r_o = \sqrt{\cos x} = 0$$

$$r_i = 0 - 0 = 0$$

(A)

$$U = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi/4} (\sec x)^2 dx$$



بُستَوية $\perp$ قمر ليدان (x)

$\therefore$ بُستَوية dx

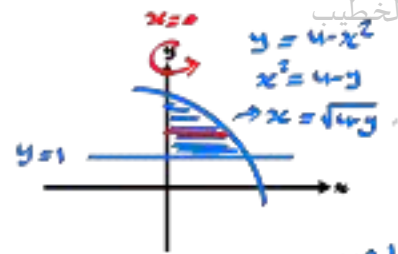
$$= \pi \tan x \Big|_0^{\pi/4}$$

$$= \pi$$

$$r_o = \sec x = 0 = \sec x$$

$$r_i = 0 - 0 = 0$$

$$\begin{aligned}
 S &= \pi \int r_o^2 - r_i^2 dy \\
 &= \pi \int_1^4 (\sqrt{4-y})^2 dy \\
 &= \pi \int_1^4 (4-y) dy \\
 &= \pi \left[4y - \frac{y^2}{2} \right]_1^4 = \frac{9\pi}{2}
 \end{aligned}$$

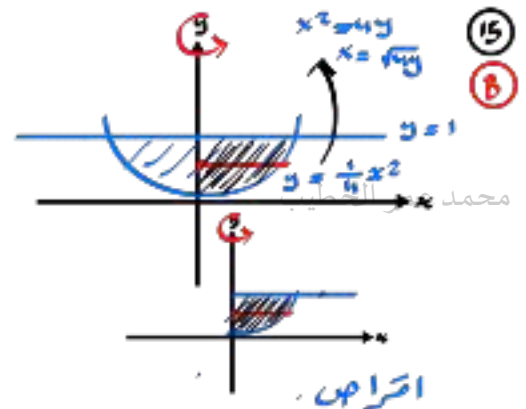


أقراص
محمد عمر الخطيب
بشرية 1 قدر دوران (y)
بشرية . y

$$\begin{aligned}
 r_o &= \sqrt{4-y} - 0 \\
 r_i &= 0 - 0
 \end{aligned}$$

بيان قدر دوران هو منه دور تمام الشكل
نأخذ فقط نصف المنحنى .

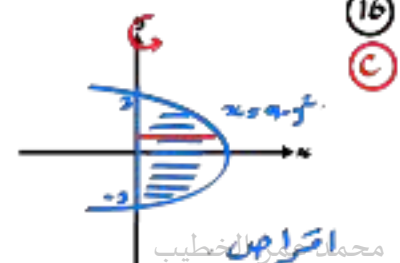
$$\begin{aligned}
 S &= \pi \int r_o^2 - r_i^2 dy \\
 &= \pi \int_0^1 (\sqrt{4y})^2 dy \\
 &= \pi \int_0^1 4y dy = 2\pi \left[y^2 \right]_0^1 = 2\pi
 \end{aligned}$$



بشرية 1 قدر دوران (y)
بشرية . y

$$\begin{aligned}
 r_o &= \sqrt{4y} - 0 \\
 r_i &= 0 - 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S &= \pi \int r_o^2 - r_i^2 dy \\
 &= \pi \int_{-3}^3 (9-y^2)^2 dy \\
 &= \pi \int_{-3}^3 (81 - 18y^2 + y^4) dy \\
 &= \pi \left[81y - 12y^3 + \frac{y^5}{5} \right]_{-3}^3 = \frac{1296}{5} \pi
 \end{aligned}$$



بشرية 1 قدر دوران (y)
بشرية . y

$$\begin{aligned}
 r_o &= 9-y^2 - 0 \\
 r_i &= 0 - 0
 \end{aligned}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

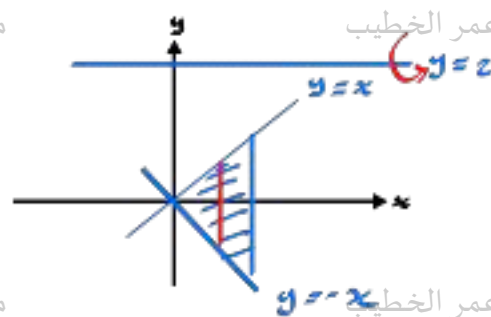
محمد عمر الخطيب

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dx$$

$$= \pi \int_0^1 (2+x)^2 - (2-x)^2 dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب



حلقات

بشرية 1 قدر دوران (x)
بشرية 2

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$r_o = 2 - (-x) = 2 + x$$

$$r_i = 2 - x = 2 - x$$

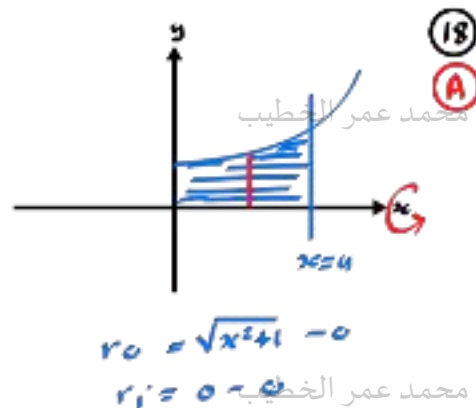
$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dx$$

$$= \pi \int_0^4 (\sqrt{x^2+1})^2 dx$$

$$= \pi \int_0^4 x^2 + 1 dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب



$$r_o = \sqrt{x^2+1} - 0$$

$$r_i = 0 - 0$$

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dx$$

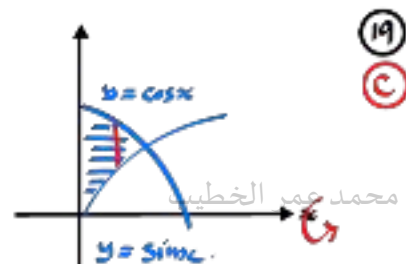
$$= \pi \int_0^{\pi/4} \cos^2 x - \sin^2 x dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi/4} \cos 2x dx$$

$$= \pi \cdot \frac{\sin 2x}{2} \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{2}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب



$$r_o = \cos x - 0$$

$$r_i = \sin x - 0$$

نسا لم تتابع

$$\sin x = \cos x$$

$$\tan x = 1$$

$$Q_1 \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \checkmark$$

$$x < Q_3 \rightarrow x = \frac{5\pi}{4}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dx$$

$$= \pi \int_0^4 b^2 - (b - f(x))^2 dx$$

$$r_o = b - 0$$

$$r_i = b - f(x)$$

(A)

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dx$$

$$= \pi \int_0^4 (\sqrt{16-x^2})^2 dy$$

$$= \pi \int_0^4 16 - y^2 dy = \pi \left(16y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^4 = \frac{128}{3} \pi$$

$$y = \sqrt{16-x^2}$$

$$y^2 = 16-x^2$$

$$x^2 = 16-y^2$$

$$x = \sqrt{16-y^2}$$

(21)

(A)

$$V = \pi \int r_o^2 - r_i^2 dy$$

$$= \pi \int_1^4 (\sqrt{y} + 1)^2 - 1^2 dy$$

$$y = x^2$$

$$x^2 = y$$

$$x = \sqrt{y}$$

$$r_o = \sqrt{y} - (-1)$$

$$= \sqrt{y} + 1$$

$$r_i = 0 - (-1) = 1$$

(22)

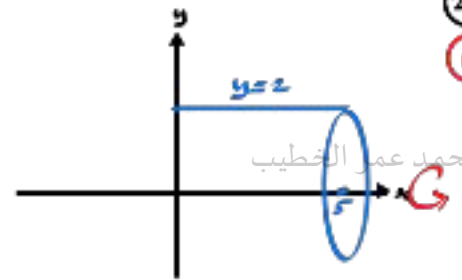
(B)

السكة ا سطوانه نصف قطرها

$$r = 2$$

ارتفاعها

$$h = 5$$



(23)

(A)

انتهت اجابته بدرس اضافي

$$S = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

$$S = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \sec^4 x} dx$$

$$f(x) = \tan x$$

$$f'(x) = \sec^2 x$$

$$(f'(x))^2 = \sec^4 x$$

$$S = \int_1^3 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

$$S = \int_1^3 \sqrt{1 + x - 1} dx = \int_1^3 \sqrt{x} dx$$

$$= \int_1^3 x^{1/2} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_1^3 = \frac{2}{3} (\sqrt{27} - 1) = 2.8$$

$$f(x) = \frac{2}{3} (x-1)^{3/2}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} (x-1)^{1/2}$$

$$= (x-1)^{1/2}$$

$$[f'(x)]^2 = ((x-1)^{1/2})^2 = x-1$$

$$S = \int_2^4 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

$$S = \int_2^4 \sqrt{1 + x^2 - 2x} dx$$

$$= \int_2^4 \sqrt{x^2 - 2x + 1} dx$$

$$= \int_2^4 \sqrt{(x-1)^2} dx$$

$$= \int_2^4 |x-1| dx$$

$$= \int_2^4 (x-1) dx = \frac{x^2}{2} - x \Big|_2^4 = 4$$

$$f'(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$$

$$[f'(x)]^2 = x^2 - 2x$$

$$|x-1| \leftarrow \begin{array}{c} -(x-1) \\ x-1 \end{array}$$

لرکانت پنهان [0,4] يكون طول المنحنى

$$S = \int_2^4 |x-1| dx = \int_2^1 -(x-1) dx + \int_1^4 (x-1) dx$$

$$S = \int_3^5 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

$$= \int_3^5 \sqrt{1 + 4x^2 - 1} dx$$

$$= \int_3^5 \sqrt{4x^2} dx$$

$$= \int_3^5 2|x| dx$$

$$= \int_3^5 2x dx$$

$$= x^2 \Big|_3^5 = 16$$



$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$= \int_a^b \sqrt{1 + (\tan x)^2} dx$$

$$= \int_a^b \sqrt{\sec^2 x} dx$$

$$= \int_a^b |\sec x| dx$$

$$y = \ln \sec x$$

$$y' = \frac{\sec x \tan x}{\sec x}$$

$$= \tan x$$

$$(y')^2 = \tan^2 x$$

☆ اذا كانت كل اختيارات بدون الخلل
افترار $\int_a^b \sec x dx$

$$S = \int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2x} \sin^2 x} dx$$

$$y = \int_0^x e^{-u} \sin u du$$

$$y' = e^{-x} \sin x$$

$$y' = (e^{-x} \sin x)^2$$

$$= e^{-2x} \sin^2 x$$

يمكنه حل السؤال مباشرة مع ان يطول هو ربح

$$S = \frac{1}{4} (2\pi r) \\ = \frac{1}{4} \cdot 2\pi (1) = \pi/2.$$

داؤه نصف قطرها 1



7

(A)

$$S = \int_0^1 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}} dx.$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

★ كما ان بعض لادن
الدالة غير متناهية
عند $x=1$

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$[f'(x)]^2 = \frac{x^2}{1-x^2}$$

$$y = 10 \left(e^{x/20} + e^{-x/20} \right), \quad L = 20$$

$$S = \frac{1}{2} \int_{-10}^{10} e^{x/20} + e^{-x/20} dx.$$

استخدم قانون طول الجبل

8

(B)

$$S = 2\pi \int_1^e f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

$$= 2\pi \int_1^e \ln x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx.$$

$$= 2\pi \int_1^e \ln x \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} dx$$

$$= 2\pi \int_1^e \frac{\ln x}{x} \sqrt{x^2+1} dx$$

$$f(x) = \ln x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$[f'(x)]^2 = \frac{1}{x^2}$$

9

(C)

$$S = 2\pi \int_0^3 f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

$$= 2\pi \int_0^3 \frac{1}{9} x^3 \sqrt{1 + \frac{1}{9} x^4} dx$$

$$= \frac{2\pi}{9} \int_0^3 x^3 \sqrt{1 + \frac{1}{9} x^4} dx$$

$$f(x) = \frac{1}{9} x^3$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^2$$

$$[f'(x)]^2 = \frac{1}{9} x^4$$

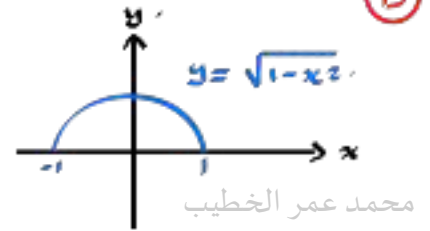
10

(D)

لا صفة ؛ يمكن استنتاج ان لنا هو بساطة

الطاقة لكونه ان نصف قطرها 1 فيكون $S = 4\pi$

$$\begin{aligned}
 S &= 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}} dx \\
 &= 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}} dx \\
 &= 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
 &= 2\pi \int_{-1}^1 1 dx = 2\pi(2) = 4\pi
 \end{aligned}$$



$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$[f'(x)]^2 = \frac{x^2}{1-x^2}$$

$$S = \int_1^2 \sqrt{1+(y')^2} dx$$

$$= \int_1^2 \sqrt{1+\frac{1}{4}\left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right)} dx$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{2} \sqrt{4+x^2-2+\frac{1}{x^2}} dx$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{2} \sqrt{x^2+2+\frac{1}{x^2}} dx$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{2} \sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2} dx$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{2} \left|x+\frac{1}{x}\right| dx$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{2} \left(x+\frac{1}{x}\right) dx$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$[f'(x)]^2 = \frac{1}{4} \left(x - \frac{1}{x}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} \left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right)$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$S = \int_1^4 \sqrt{1+9x^4} dx$$

$$[f'(x)]^2 = 9x^4$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$f(x) = 3x^2$$

محمد عمر الخطيب

$$f'(x) = -3x^2$$

$$f(x) = -x^3 + C$$

$$f(1) = 6$$

محمد عمر الخطيب

$$f(1) = 6$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$1+C=6 \Rightarrow C=5$$

$$f(x) = x^3 + 5$$

محمد عمر الخطيب

$$-1+C=6 \Rightarrow C=7$$

$$f(x) = -x^3 + 7$$

انتهت اجاباتكم درس الرابع

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

1
A

$$y_0 = 6, v_0 = -1.2$$

$$y(t) = 6, y'(t) = -1.2$$

محمد عمر الخطيب

سأبذل أقصى مجهود لدرست

2
B

$$y = 9.8, v_0 = 19.6, y_0 = 0$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0$$

$$y(t) = 0$$

$$-4.9t^2 + 19.6t = 0$$

$$t = 0, t = 4 \text{ s.}$$

محمد عمر الخطيب

3
B

$$g = 9.8, v_0 = 0, y_0 = 36$$

$$y(t) = -4.9t^2 + 36$$

$$y'(t) = -9.8t$$

$$y'(3) = -9.8(2.71)$$

$$= -26.5 \text{ m/s}$$

4
A

$$g = 32, v_0 = -48, y_0 = 160$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0$$

$$y(t) = 0$$

$$t = 2, t = -5$$

$$y'(t) = -32t - 48$$

$$y'(2) = -112 \text{ ft/s}$$

5
D

$$g = 9.8, v_0 = 98, y_0 = 0, \theta = \pi/6$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \theta t + y_0$$

$$y(t) = -4.9t^2 + 98 \sin \frac{\pi}{6} t + 0 = -4.9t^2 + 49t$$

$$g = 9.8, \quad v_0 = 98, \quad y_0 = 0, \quad \theta = \pi/6.$$

$$x(t) = v_0 \cos \theta t + x_0$$

$$= 98 \cos \frac{\pi}{6} t + 0$$

$$= 49\sqrt{3} t.$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

6

A

$$g = 9.8, \quad v_0 = 98, \quad y_0 = 0, \quad \theta = \pi/6.$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \theta t + y_0 \quad x(t) = v_0 \cos \theta t + x_0$$

$$= -4.9t^2 + 98 \sin \frac{\pi}{6} t + 0$$

$$= -4.9t^2 + 49t$$

$$y(t) = 0 \Rightarrow t = 0, t = 10 \text{ s}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$x(10) = 49\sqrt{3}(10) = 848.7 \text{ m}$$

محمد عمر الخطيب

7

C

$$g = 9.8, \quad v_0 = 40, \quad y_0 = 0, \quad \theta = 30^\circ$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \theta t + y_0$$

محمد عمر الخطيب

$$= -4.9t^2 + 40 \sin 30^\circ t + 0$$

$$= -4.9t^2 + 20t$$

$$y(t) = 0 \Rightarrow t = 0, t = 4.08 \text{ s}$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$x(t) = v_0 \cos \theta t + x_0$$

محمد عمر الخطيب

$$= 40 \cos 30^\circ t + 0$$

$$= 20\sqrt{3} t$$

$$x(4.08) = 20\sqrt{3}(4.08) = 141.4 \text{ m}$$

محمد عمر الخطيب

8

B

$$g = 9.8, \quad v_0 = 115, \quad y_0 = 1050, \quad \theta = 0$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \theta t + y_0$$

محمد عمر الخطيب

$$= -4.9t^2 + 115 \sin 0 + 1050$$

$$= -4.9t^2 + 1050$$

$$y(t) = 0 \Rightarrow t = -14.63, t = 14.63$$

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

محمد عمر الخطيب

$$x(t) = v_0 \cos \theta t + x_0$$

محمد عمر الخطيب

$$= 115 \cos 0 t + 0$$

$$= 115 t$$

$$x(14.63) = 115(14.63) = 1682 \text{ m}$$

9

B

$$g = 32, \quad v_0 = 4, \quad y_0 = 0, \quad \theta = 45^\circ.$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \theta t + y_0$$

$$= -16t^2 + 4 \sin 45^\circ t + 0$$

$$x(t) = v_0 \cos \theta t + x_0$$

$$= 4 \cos 45^\circ t + 0$$

$$= -16t^2 + 2\sqrt{2}t \quad \text{--- ①}$$

$$= 2\sqrt{2}t \quad \text{--- ②}$$

$$\Rightarrow t = \frac{x}{2\sqrt{2}}$$

عوض في معادله ② في معادله ①

$$y(t) = -16 \left(\frac{x}{2\sqrt{2}} \right)^2 + 2\sqrt{2} \cdot \frac{x}{2\sqrt{2}}$$

$$= -16 \cdot \frac{x^2}{8} + x$$

$$y = -2x^2 + x$$

$$g = 32, \quad v_0 = 0, \quad y_0 = H.$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0$$

$$= -16t^2 + H.$$

$$y(t) = 0$$

$$-16t^2 + H = 0$$

$$t^2 = \frac{H}{16}$$

$$t = -\frac{\sqrt{H}}{4} \quad \text{و} \quad t = \frac{\sqrt{H}}{4}.$$

$$g = 9.8, \quad v_0 = 30, \quad y_0 = 0, \quad \theta = 60^\circ$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \theta t + y_0$$

$$= -4.9t^2 + 30 \sin 60^\circ t + 0$$

$$= -4.9t^2 + 15\sqrt{3}t.$$

$$y(t) = 0$$

$$t = 0, \quad t = 5.3$$

انتهت اجابتي لدرس الخامس