

## أوراق عمل كامل الوحدة السابعة طرائق التكامل والمعادلات التفاضلية



### تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج الإماراتية

موقع المناهج ← المناهج الإماراتية ← الصف الثاني عشر المتقدم ← رياضيات ← الفصل الثالث ← ملفات متنوعة ← الملف

تاريخ إضافة الملف على موقع المناهج: 15-03-2026 16:26:40

ملفات اكتب للمعلم اكتب للطالب الاختبارات الكترونية الاختبارات ا حلول ا عروض بوربوينت ا أوراق عمل منهج انجليزي ا ملخصات وتقارير ا مذكرات وبنوك ا الامتحان النهائي للمدرس

المزيد من مادة رياضيات:

إعداد: عبد الله أبوالنجا

### التواصل الاجتماعي بحسب الصف الثاني عشر المتقدم



صفحة المناهج الإماراتية على فيسبوك

الرياضيات

اللغة الانجليزية

اللغة العربية

التربية الاسلامية

المواد على تلغرام

### المزيد من الملفات بحسب الصف الثاني عشر المتقدم والمادة رياضيات في الفصل الثالث

أوراق عمل كامل الوحدة السادسة تطبيقات على التكامل المحدود

1

أوراق عمل كامل الوحدة الخامسة التكامل

2

الخريطة الذهنية لمقرر وحدات ودروس الرياضيات الفصل الثالث

3

مقرر الوحدات والدروس المطلوبة للفصل الثالث

4

ملزمة أوراق عمل الوحدة الخامسة Differentiation of Applications منهج ريفيل Reveal متبوعة بمفاتيح الإجابات

5

# Unit 7: Integration Techniques and First-Order Differential Equations

وحدة 7: طرائق التكامل والمعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

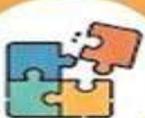


## LESSON 1: REVIEW OF FORMULAS AND TECHNIQUES

الدرس الأول: مراجعة الصيغ وطرائق التكامل

- Key rules (Power, Exp, Trig) (القوى، الأسية، المثلثية)
- Substitution review (مراجعة التعويض)

L1

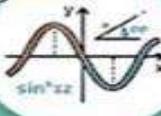


## LESSON 2: INTEGRATION BY PARTS

الدرس الثاني: التكامل بالأجزاء

- Use for products of functions (يستخدم احاصل ضرب الدوال)
- Formula:  $\int u dv = uv - \int v du$  (الصيغة:  $\int u dv = uv - \int v du$ )

L2

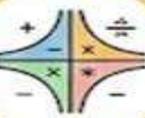


## LESSON 3: TRIGONOMETRIC TECHNIQUES

الدرس الثالث: طرائق تكامل المثلثية

- Trig identities ( $\sin^2$ ,  $\cos^2$ ) (المنطابقات المثلثية (جا، جتا))
- Trig substitutions ( $\sin$ ,  $\tan$ ,  $\sec$ ) (التعويضات المثلثية (جا، ظا، قا))

L3

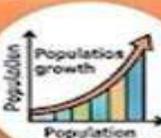


## LESSON 4: INTEGRATION OF RATIONAL FUNCTIONS

الدرس الرابع: تكامل الدوال النسبية باستخدام الكسور الجزئية

- Break down national expressions (تفكيك التعبيرات النسبية)
- Different types of factors (أنواع مختلفة من العوامل)

L4

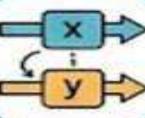


## LESSON 6: MODELING WITH DIFFERENTIAL EQUATIONS

الدرس السادس: نمذجة المعادلات التفاضلية

- Real-world problems to equations (تحويل مشاكل الواقع لمعادلات)
- Examples: Population, Cooling (أمثلة: السكان، التبريد)

L6



## LESSON 7: SEPARABLE DIFFERENTIAL EQUATIONS

الدرس السابع: المعادلات التفاضلية القابلة للفصل

- Separation method:  $f(y)dy = g(x)dx$  (طريقة الفصل:  $f(y)dy = g(x)dx$ )
- Integration to solve (التكامل للحل)

L7

Mr. Abdalla Abouelnaga

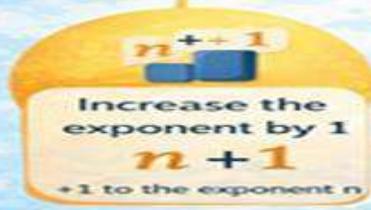
0505114830



# Unit7: Integration Techniques and First-Order Differential Equations

وحدة 7: طرائق التكامل والمعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$



- $n \neq -1$
- + C represents the constant of integration
- Works for any real number  $n \neq -1$
- The constant 'C' is an arbitrary constant of integration

## Lesson 1 : Review of Formulas and Techniques

الدرس الأول: مراجعة الصيغ وطرائق التكامل

Grade 12 Advanced  
الثاني عشر متقدم

Mr. Abdalla  
Abouelnaga



Mr. Abdalla Abouelnaga  
0505114830



Student Name (اسم الطالب): \_\_\_\_\_

Class (الصف) \_\_\_\_\_

## Unit 7

Mr. Abdalla Abouelnaga

## Integration Techniques and First-Order Differential Equations

Mr. Abdalla Abouelnaga

### Lesson 1

### Review of Formulas and Techniques

#### Objectives

- Compute integrals using direct computation and rules.
- Compute various integrals using integration by substitution.
- Compute integrals using completing a square before integrating.

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

### Basic Integration Formulas

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c, \quad \text{for } r \neq -1 \text{ (power rule)}$$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c, \quad \text{for } x \neq 0$$

Mr. Abdalla Abouelnaga

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + c$$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + c$$

Mr. Abdalla Abouelnaga

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + c$$

$$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

$$\int e^{-x} dx = -e^{-x} + c$$

Mr. Abdalla Abouelnaga

$$\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c$$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

$$\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} x + c$$

Mr. Abdalla Abouelnaga

$$\int \cot x dx = \ln |\sin x| + c$$

#### Example: 1

1) Evaluate  $\int (x^2 - 3x - 5) dx$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

2) Evaluate  $\int (x^2 - 5)^2 dx$

Mr. Abdalla Abouelnaga

3) Evaluate:  $\int (x^2 + 4)^2 dx$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

## Generalizing a Basic Integration Rule

Mr. Abdalla Abouelnaga

*rules* , for  $a, b$  any constant numbers

$$\int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + c$$

$$\int \sin(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + c$$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

$$\int \sec(ax + b) \tan(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sec(ax + b) + c$$

$$\int \csc(ax + b) \cot(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \csc(ax + b) + c$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$$

**Remember**  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$

## Exercise: 1.1

1) Evaluate  $\int 5\cos(2x) dx$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

2) Evaluate  $\int 3\cos(3-x) dx$

Mr. Abdalla Abouelnaga

3) Evaluate  $\int \cos\left(\frac{x}{3}\right) dx$

Mr. Abdalla Abouelnaga

## Example :2

1) Evaluate  $\int \frac{3}{16+x^2} dx$

Mr. Abdalla Abouelnaga

2) Evaluate  $\int \frac{3}{125+5x^2} dx$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

## Exercise: 2.1

1) Evaluate  $\int \frac{3}{64+x^2} dx$

Mr. Abdalla Abouelnaga

2) Evaluate  $\int \frac{2}{4+4x^2} dx$

Mr. Abdalla Abouelnaga

### Example :3

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

*use the rules to find each integral*

$$1) \int \sin(6t) dt$$

Mr. Abdalla Abouelnaga

$$2) \int \sec(2\theta) \tan(2\theta) d\theta$$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

$$3) \int e^{3-2x} dx$$

Mr. Abdalla Abouelnaga

$$4) \int \frac{3}{e^{6x}} dx$$

Mr. Abdalla Abouelnaga

## Completing Square

Mr. Abdalla Abouelnaga

$$x^2 + 6x - 5$$

$$\left(\frac{1}{2}(x \text{ coefficient})\right)^2 = \left(\frac{1}{2}(6)\right)^2 = 9$$

$$x^2 + 6x + 9 - 9 - 5$$

Mr. Abdalla Abouelnaga

$$(x^2 + 6x + 9) - 9 - 5$$

$$(x + 3)(x + 3) - 14$$

$$(x + 3)^2 - 14$$

Mr. Abdalla Abouelnaga

$$2 + 2x - x^2$$

$$2 - (x^2 - 2x)$$

$$\left(\frac{1}{2}(x \text{ coefficient})\right)^2 = \left(\frac{1}{2}(-2)\right)^2 = 1$$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

$$2 - (x^2 - 2x + 1) - (-1)$$

$$3 - (x^2 - 2x + 1)$$

$$3 - (x - 1)(x - 1)$$

$$3 - (x - 1)^2$$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

## Example :4

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

1) Evaluate  $\int \frac{4}{5 + 2x + x^2} dx$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

2) Evaluate:  $\int \frac{1}{\sqrt{-5+6x-x^2}} dx$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

3) Evaluate :  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x e^{\tan x} dx$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

4) Evaluate :  $\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$

Mr. Abdalla Abouelnaga

## Exercise 4.1

1) Find  $\int_3^4 x \sqrt{x-3} dx$

Mr. Abdalla Abouelnaga

2) Evaluate :  $\int \frac{x^2}{1+x^6} dx$

Mr. Abdalla Abouelnaga

4) Evaluate  $\int \frac{x^5}{1+x^6} dx$

Mr. Abdalla Abouelnaga

5) Evaluate:  $\int \frac{t+1}{t^2+2t+4} dt$

Mr. Abdalla Abouelnaga

## Exercise 4.2

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Find:  $\int_0^2 f(x)dx$  if  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{(x^2+1)} & \text{if } x \leq 1 \\ \frac{x^2}{x^2+1} & \text{if } x \geq 1 \end{cases}$

Mr. Abdalla Abouelnaga

## An Integral Requiring Some Imagination

Mr. Abdalla Abouelnaga

### Example :5

Evaluate  $\int \frac{4x + 1}{2x^2 + 4x + 10}$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Rework the previous example by rewriting the integral as:  $\int \frac{4x+1}{2x^2+4x+10} dx = \int \frac{4x+4-3}{2x^2+4x+10} dx$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Remember:  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$

### Solution

Mr. Abdalla Abouelnaga

### Exercise 5:1

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

1) Evaluate  $\int \frac{x}{1+x^4} dx$

2) Evaluate  $\int \frac{x^3}{1+x^4} dx$

Mr. Abdalla Abouelnaga

$$3) \int \frac{x^5}{1+x^4} dx$$

Mr. Abdalla Abouelnaga

$$4) \text{Find } \int \frac{1}{\sqrt{x}+x} dx$$

Mr. Abdalla Abouelnaga

$$5) \text{find } \int \frac{2}{x^{\frac{1}{4}} + x} dx$$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Term 3

امتحان العام 2023

الأسئلة المتضمنة في امتحان الوزارة للفصل الدراسي الثالث 2024  
Questions which included in MOE Exam Term3 (2024)

Mathematics G12 Advanced

Final Revision Grade12 Adv

1

0505114830

Evaluate the integral.

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

$$\int \csc 3t \cot 3t dt$$

$$\int \csc 3t \cot 3t dt$$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

A

$$-\frac{1}{3} \csc 3t + c$$

B

$$-\frac{1}{3} \sec 3t + c$$

C

$$-3 \csc 3t + c$$

D

$$\frac{\csc^2 3t \cot^2 3t}{3} + c$$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

عزيزي الطالب : اجتهد في فهم ومذاكرة هذه الامثلة والتمارين بالكتاب المدرسي تمنياتي للجميع بالنجاح والتفوق

Mr. Abdalla Abouelnaga

جاء السؤال التالي لقياس المخرج التعليمي درس 7.3

Mr. Abdalla Abouelnaga

Integrate trigonometric functions using the substitution  $x = a \sin(y)$ ,  $x = a \tan(y)$ ,  $x = a \sec(y)$   
و يمكن حله بالتعويض ايضا

Term 3

امتحان العام 2023

الأسئلة المتضمنة في امتحان الوزارة للفصل الدراسي الثالث 2024  
Questions which included in MOE Exam Term3 (2024)

Mathematics G12 Advanced

Final Revision Grade12 Adv

3

0505114830

Evaluate the integral.

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} dx$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} dx$$

A

$$\sqrt{x^2 + 4} + c$$

B

$$x\sqrt{x^2 - 4} + c$$

C

$$2 \sec x + c$$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

D

$$\sqrt{x^2 - 4} + c$$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

عزيزي الطالب : اجتهد في فهم ومذاكرة هذه الامثلة والتمارين بالكتاب المدرسي تمنياتي للجميع بالنجاح والتفوق

5

Abouelnaga  
4830

Evaluate the integral.

Mr. Abdalla Abouelnaga

$$\int \sin\left(\frac{x}{a}\right) dx, a \neq 0$$

أوجد قيمة التكامل.

$$\int \sin\left(\frac{x}{a}\right) dx, a \neq 0$$

Mr. Abdalla Abouelnaga  
0505114830

Mr. Abdalla Abouelnaga

عبدالله أبو النجا

Mr. Abdalla Abouelnaga

عبدالله أبو النجا

Mr. Abdalla Abouelnaga  
0505114830

A

$$-a \cos\left(\frac{x}{a}\right) + c, a \neq 0$$

Mr. Abdalla Abouelnaga  
0505114830

B

$$-\frac{1}{a} \cos\left(\frac{x}{a}\right) + c, a \neq 0$$

Mr. Abdalla Abouelnaga  
0505114830

Mr. Abdalla Abouelnaga

C

$$-a \sin\left(\frac{x}{a}\right) + c, a \neq 0$$

Mr. Abdalla Abouelnaga  
0505114830

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

D

$$-\frac{1}{a} \cos x + c, a \neq 0$$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga  
0505114830

Mr. Abdalla Abouelnaga

عزيزي الطالب : اجتهد في فهم ومذاكرة هذه الأمثلة والتمارين بالكتاب المدرسي تمنياتي للجميع بالنجاح والتفوق

11

4830

Evaluate the indicated integral.

Mr. Abdalla Abouelnaga

$$\int (x\sqrt{x} + 1) dx$$

أوجد قيمة التكامل غير المحدود.

$$\int (x\sqrt{x} + 1) dx$$

A

$$\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{x^2}{2} + c$$

Mr. Abdalla Abouelnaga  
0505114830

B

$$\frac{x^2\sqrt{x}}{2} + x + c$$

Mr. Abdalla Abouelnaga  
0505114830

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

C

$$\frac{5}{x^2} + x + c$$

Mr. Abdalla Abouelnaga  
0505114830

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

D

$$\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + x + c$$

Mr. Abdalla Abouelnaga  
0505114830

Mr. Abdalla Abouelnaga

عزيزي الطالب : اجتهد في فهم ومذاكرة هذه الأمثلة والتمارين بالكتاب المدرسي تمنياتي للجميع بالنجاح والتفوق

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

20

4830

Evaluate the integral.

Mr. Abdalla Abouelnaga

أوجد قيمة التكامل.

$$\int \frac{1}{1+4x^2} dx$$

$$\int \frac{1}{1+4x^2} dx$$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

A

$$\frac{1}{2} \tan^{-1}(2x) + c$$

Mr. Abdalla Abouelnaga

B

$$\frac{1}{2} \sin^{-1}(2x) + c$$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

C

$$2 \tan^{-1} x + c$$

D

$$2 \sin^{-1}(2x) + c$$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

عزيزي الطالب : اجتهد في فهم ومذاكرة هذه الأسئلة والتمارين بالكتاب المدرسي تمنياتي للجميع بالنجاح والتفوق

Q5



Part 3 Writing (كتابة) الجزء الثالث



Evaluate the integral.



أوجد قيمة التكامل.

$$\int \frac{2}{\sqrt{x} + x} dx$$

$$\int \frac{2}{\sqrt{x} + x} dx$$

Mr. Abdalla Abouelnaga

عزيزي الطالب : اجتهد في فهم ومذاكرة هذه الأسئلة والتمارين بالكتاب المدرسي تمنياتي للجميع بالنجاح والتفوق

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

3

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Evaluate the integral.

$$\int \frac{2}{4 + 4x^2} dx$$

أوجد قيمة التكامل.

$$\int \frac{2}{4 + 4x^2} dx$$

A

$$\frac{1}{2} \tan^{-1} x + c$$

B

$$\frac{1}{2} \sin^{-1} x + c$$

C

$$2 \cos \sqrt{x} + c$$

D

$$2 \sin \sqrt{x} + c$$

Mr. Abdalla Abouelnaga

عزيزي الطالب : اجتهد في فهم ومذاكرة هذه الأمثلة والتمارين بالكتاب المدرسي تمنياتي للجميع بالنجاح والتفوق

4

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Evaluate the integral.

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

أوجد قيمة التكامل.

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

A

$$-2 \sin \sqrt{x} + c$$

B

$$-2 \cos \sqrt{x} + c$$

C

$$2 \cos \sqrt{x} + c$$

D

$$2 \sin \sqrt{x} + c$$

Mr. Abdalla Abouelnaga

عزيزي الطالب : اجتهد في فهم ومذاكرة هذه الأمثلة والتمارين بالكتاب المدرسي تمنياتي للجميع بالنجاح والتفوق

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

12

Abouelnaga  
14830

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Evaluate the integral.

$$\int \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx$$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

أوجد قيمة التكامل.

$$\int \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx$$

Mr. Abdalla Abouelnaga

A

$$\sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + c$$

B

$$\frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + c$$

C

$$\frac{1}{2} \sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + c$$

D

$$\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + c$$

Mr. Abdalla Abouelnaga

عزيزي الطالب : اجتهد في فهم ومذاكرة هذه الأمثلة والتمارين بالكتاب المدرسي تمنياتي للجميع بالنجاح والتفوق

14

Abouelnaga  
14830

Evaluate the integral.

$$\int \cos^2 x \sin x dx$$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

أوجد قيمة التكامل.

$$\int \cos^2 x \sin x dx$$

Mr. Abdalla Abouelnaga

A

$$-\frac{\cos^3 x}{3} + c$$

B

$$-\frac{\sin^3 x}{3} + c$$

C

$$\frac{\cos^3 x}{3} + c$$

D

$$\frac{\sin^3 x}{3} + c$$

Mr. Abdalla Abouelnaga

عزيزي الطالب : اجتهد في فهم ومذاكرة هذه الأمثلة والتمارين بالكتاب المدرسي تمنياتي للجميع بالنجاح والتفوق

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

# Unit 7: Integration Techniques and First-Order Differential Equations

وحدة 7: طرائق التكامل والمعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى

$$\int u dv = uv - \int v du$$

## 1 Choose $u$

Set  $u$  equal to a function to differentiate

$$u = x$$

LIATE

Logarithmic  
Inverse  
Algebraic  
Trigonometric  
Exponential

$$u = x$$

$$du = dx$$

## 2 Choose $dv$

Set  $dv$  equal to a function to integrate

$$\int v = e^x dx$$

$$dv = e^x$$

Calculate  $uv$  and  $\int v du$

$$\int x e^x dx = e^x$$

## 3 Choose $dv$

Set  $dv$  equal to a function to integrate

$$dv = e^x dx$$

$$v = e^x$$

## 3 Substitute into the formula

Fill in  $uv$  and  $\int v du$  to the formula

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx$$

- Identify your  $u$  and  $dv$  wisely
- Differentiate  $u$  and integrate  $dv$
- Plug  $uv$  and  $\int v du$  into the formula
- Always add the constant of integration  $+ C$

## Lesson 2 : Integration by Parts

الدرس الثاني: التكامل بالأجزاء

Grade 12 Advanced

الثاني عشر متقدم

Mr. Abdalla  
Abouelnaga



Mr. Abdalla Abouelnaga

0505114830



Student Name (اسم الطالب): \_\_\_\_\_

Class (الصف) \_\_\_\_\_

- Learn the notion of integration by parts.
- Use integration by parts to compute definite and indefinite integrals.

## Introduction

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)]dx = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

Using Product Rule

If you integrate both sides

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

Rearranging the equation

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Let  $u = f(x)$ ,  $v = g(x)$

$$du = f'(x)dx, \quad dv = g'(x)dx$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

This is known as Integration by Parts

Easier to integrate.

## Introductory Example

Evaluate:  $\int x \cos x dx$ 

$$\int \overbrace{x}^u \overbrace{\cos x dx}^{dv} = ?$$

$$u = x \quad dv = \cos x dx$$

$$du = dx \quad v = \int \cos x dx = \sin x$$

Rule:  $\int u dv = uv - \int v du$

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx$$

$$\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + c$$

$\int u dv = uv - \int v du$

- 1 Choose  $u$**   
Set  $u$  equal to a function to differentiate
- 2 Choose  $dv$**   
Set  $dv$  equal to a function to integrate
- 3 Substitute into the formula**  
Fill in  $uv$  and  $\int v du$  to the formula.

$\int u dv = uv - \int v du$

??? What will happen if you choose  $u = \cos x$  and  $dv = x dx$ ?  
Will you get an easier integral?

Example: 1

1) Evaluate:  $\int x e^{2x} dx$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Exercise: 1.1

Evaluate:  $\int \cos^{-1}x dx$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Exercise: 1.2

Evaluate:  $\int \ln(x) dx$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

## Repeated Integration by Parts

Example: 2 Evaluate:  $\int x^2 e^{-3x} dx$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

## Repeated Integration by Parts with a Twist

Example: 3 Evaluate:  $\int e^x \sin x dx$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

### Exercise 3.1

1) Evaluate:  $\int e^x \cos 2x dx$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

2) Evaluate:  $\int e^x (\ln x + \frac{1}{x}) dx$  by using integration by parts on  $\int e^x \ln x dx$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

## Definite Integral by Parts

Example: 4 Evaluate:  $\int_1^2 x \ln(x) dx$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

### Exercise 4.1

1) Evaluate:  $\int_0^{\pi} e^{\cos x} \sin 2x dx$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

2) Evaluate:  $\int_0^1 x \tan^{-1}x \, dx$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Using Substitution and Parts in the Same Question

Example: 5 Evaluate:  $\int x^3 \sin(x^2) dx$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Exercise 5.1

1) Evaluate:  $\int e^{\sqrt{x}} dx$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

2) Evaluate:  $\int \sin(\ln x) dx$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

2) Evaluate:  $\int \sin(\ln x) dx$

You can solve it directly by parts without using substitution.



Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

### Reduction Formula

$$\int x^n e^x dx =$$

Using Integration by Parts

$$u = x^n, \quad dv = e^x dx$$

$$du = n x^{n-1} dx, \quad v = \int e^x dx = e^x$$

$$\int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx$$

for  $n > 1$  we need to repeat integration by parts

$$\text{Reduction formula}$$
$$\int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx$$

**Example: 6**

Evaluate  $\int x^4 e^x dx$  using reduction formula.

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

**Exercise 6.1**

1) Evaluate  $\int x^3 e^{-3x} dx$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

2) Evaluate:  $\int \frac{1}{2} x^2 \cos(\sqrt{x}) dx$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Term 3

امتحان العام 2022.2023

الأسئلة المتضمنة في امتحان الوزارة للفصل الدراسي الثالث 2024  
Questions which included in MOE Exam Term3 (2024)

Mathematics G12 Advanced

Final Revision Grade12 Adv

16

4830

Evaluate the integral.

$$\int \ln(2x) dx$$

أوجد قيمة التكامل.

$$\int \ln(2x) dx$$

A  $x \ln(2x) - \int dx$

B  $\frac{\ln(2x)}{2} - \int dx$

C  $2x \ln x - \int dx$

D  $x \ln(2x) - x^2 + c$

الأستاذ عبدالله أبو النجا معلم أول الرياضيات 0505114830

A

Mr. Abdalla Abouelnaga

عزيزي الطالب : اجتهد في فهم ومذاكرة هذه الأمثلة والتمارين بالكتاب المدرسي تمنياتي للجميع بالنجاح والتفوق

Term 3

امتحان العام 2021.2022

الأسئلة المتضمنة في امتحان الوزارة للفصل الدراسي الثالث 2024  
Questions which included in MOE Exam Term3 (2024)

Mathematics G12 Advanced

Final Revision Grade12 Adv

8

Abouelnaga  
14830

Evaluate the integral.

$$\int x^2 \ln x dx$$

أوجد قيمة التكامل.

$$\int x^2 \ln x dx$$

A  $\frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + c$

B  $\frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^2}{3} + c$

C  $\frac{x^3 \ln x}{3} + \frac{x^3}{9} + c$

D  $\frac{x^3 \ln x}{3} + \frac{x^2}{3} + c$

Exam2021.2022 T3

الأستاذ عبدالله أبو النجا معلم أول الرياضيات 0505114830

A

Mr. Abdalla Abouelnaga

عزيزي الطالب : اجتهد في فهم ومذاكرة هذه الأمثلة والتمارين بالكتاب المدرسي تمنياتي للجميع بالنجاح والتفوق

21

Abouelnaga  
14830

Evaluate the integral.

$$\int_1^2 xe^x dx$$

أوجد قيمة التكامل.

$$\int_1^2 xe^x dx$$

A

1

B

$e^2 - 1$

C

$e^2 + 1$

D

$e^2$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Exam2021.2022 T3

D

Mr. Abdalla Abouelnaga

عزيزي الطالب : اجهد في فهم ومذاكرة هذه الامثلة والتمارين بالكتاب المدرسي تمنياتي للجميع بالنجاح والتفوق

20

Abouelnaga  
14830

Exam2020.2021 T3

Evaluate the integral  $\int x \sec^2 x dx$

A

$x \tan x + c$

B

$\frac{\sec^3 x}{3} + c$

C

$x \tan x - \int \tan x dx$

D

$x \tan x + \int \sec x dx$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Exam2020.2021 T3

C

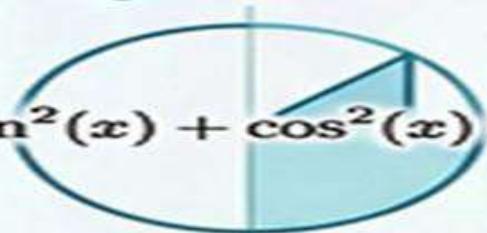
Mr. Abdalla Abouelnaga

عزيزي الطالب : اجهد في فهم ومذاكرة هذه الامثلة والتمارين بالكتاب المدرسي تمنياتي للجميع بالنجاح والتفوق

# Unit 7: Integration Techniques and First-Order Differential Equations

وحدة 7: طرائق التكامل والمعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى

## Pythagorean Identities


$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

## Power-Reduction Formulas

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

### RADICAL FORM

$$\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\sqrt{a^2 + x^2}$$

$$\sqrt{x^2 - a^2}$$

### SUBSTITUTION

$$x = a \sin(\theta)$$

$$x = a \tan(\theta)$$

$$x = a \sec(\theta)$$

### IDENTITY RESULT

$$a \cos(\theta)$$

$$a \sec(\theta)$$

$$a \tan(\theta)$$

## Lesson 3 : Trigonometric Techniques of Integration

الدرس الثالث: طرائق تكامل الدوال المثلثية

Grade 12 Advanced

الثاني عشر متقدم

Mr. Abdalla  
Abouelnaga



Mr. Abdalla Abouelnaga

0505114830



Student Name (اسم الطالب): \_\_\_\_\_

Class (الصف) \_\_\_\_\_

- Integrate functions of the form  $\sin^n(x) \cos^m(x)$
- Integrate functions of the form  $\sec^m(x) \tan^n(x)$
- Integrate functions using the trigonometric substitution  $x = a \sin(\theta)$
- Integrate functions using the trigonometric substitution  $x = a \tan(\theta)$
- Integrate functions using the trigonometric substitution  $x = a \sec(\theta)$

## Basic Integration Formulas

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c, \quad \text{for } r \neq -1 \text{ (power rule)} \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c, \quad \text{for } x \neq 0$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + c$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + c$$

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + c$$

$$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int e^{-x} dx = -e^{-x} + c$$

$$\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c$$

$$\int \frac{1}{|x| \sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} x + c$$

$$\int \cot x dx = \ln |\sin x| + c$$

## Trigonometric identities

When we have other trigonometric functions or combination of trigonometric functions, we are going to use substitutions or by parts (or we may need other techniques as we are going to see)

Here are some identities that will help us to do so:

### Pythagorean Trigonometric Identities:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\sec^2 x - \tan^2 x = 1$$

$$\sec^2 x = \tan^2 x + 1$$

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

$$\csc^2 x - \cot^2 x = 1$$

$$\csc^2 x = \cot^2 x + 1$$

$$\cot^2 x = \csc^2 x - 1$$

### Double Angle Identities:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \longrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x \longrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

The Integral on the form

$$\int \sin^m x \cos^n x dx, \quad m \text{ and } n \text{ are positive integers.}$$

**Case 1:  $m$  is an odd positive integer:**

- ✚ Isolate one factor of the sine function.
- ✚ Replace any remaining factors of  $\sin^2 x$  with  $1 - \cos^2 x$
- ✚ Make substitution  $u = \cos x$

**Example: 1**

Evaluate:  $\int \cos^4 x \sin x dx$

**Exercise: 1.1**

1) Evaluate:  $\int \cos^4 x \sin^3 x dx$

2) Evaluate:  $\int \cos^3 x \sin x \, dx$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

3) Evaluate:  $\int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \sqrt{\cos x} \sin^3 x \, dx$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

The Integral on the form

$$\int \sin^m x \cos^n x dx, \quad m \text{ and } n \text{ are positive integers.}$$

**Case 1:  $n$  is an odd positive integer:**

- ✚ Isolate one factor of the sine function.
- ✚ Replace any remaining factors of  $\cos^2 x$  with  $1 - \sin^2 x$
- ✚ Make substitution  $u = \sin x$

**Example: 2**

Evaluate:  $\int \sqrt{\sin x} \cos^5 x dx$

2) Evaluate:  $\int \cos^3 x \sin^4 x dx$

The Integral on the form

$$\int \sin^m x \cos^n x dx, \quad m \text{ and } n \text{ are positive integers.}$$

**Case 2: m and n are both Even positive integers:**

Reduce the power of the integrand using half-angle formula.

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \quad \text{or} \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

**Example: 3**

1) Evaluate:  $\int \sin^2 x dx$

2) Evaluate:  $\int \cos^4 x dx$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

### Exercise: 3.1

1) Evaluate:  $\int \cos^2(x + 1)dx$

### Integrals of form

$\int \tan^m x \sec^n x dx$  ,  $m$  and  $n$  are positive integers

Case I:  $m$  is an odd integer

- ✚ Isolate one factor of  $\sec x \tan x$
- ✚ Replace  $\tan^2 x$  by  $\sec^2 x - 1$
- ✚ Substitute  $u = \sec x$  then

$$du = \sec x \tan x dx$$

### Example: 4

1) Evaluate:  $\int \tan^3 x \sec^3 x dx$

**Integrals of form**

$$\int \tan^m x \sec^n x dx \quad , m \text{ and } n \text{ are positive integers}$$

**Case 2:  $n$  is an even integer**

- + Isolate one factor of  $\sec^2 x$
- + Replace remaining  $\sec^2 x$  by  $\tan^2 x + 1$
- + Substitute  $u = \tan x$  then  $du = \sec^2 x dx$

**Example: 5**

1) Evaluate:  $\int \tan^2 x \sec^4 x dx$

**Exercise 5.1**

Evaluate:  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x \sec^4 x dx$

Case 3:  $m$  is an even positive integer and  $n$  is an odd positive integer:

- ✚ Replace  $\tan^2 x$  by  $\sec^2 x - 1$
- ✚ Then evaluate the integral which is in term of  $\sec x$  using reduction formula.

### Example: 6

1) Evaluate:  $\int \sec x dx$

2) Evaluate:  $\int \csc x dx$

Example: 7

Evaluate:  $\int \sec^3 x dx$

Exercises 7.1

Evaluate:  $\int \cos^2 x \sin^2 x dx$

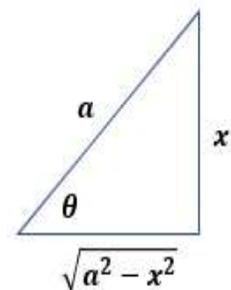
Exercises 7.2

Show that  $\int \frac{1}{\cos x - 1} dx = \csc x + \cot x + c$

- Integrate functions using the trigonometric substitution  $x = a \sin(\theta)$
- Integrate functions using the trigonometric substitution  $x = a \tan(\theta)$
- Integrate functions using the trigonometric substitution  $x = a \sec(\theta)$

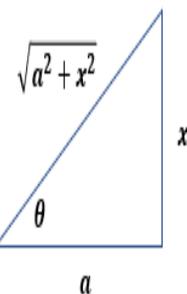
Expression	Trigonometric Substitution	Interval	Identity
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin \theta$	$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$

$$x = a \sin \theta \text{ then } \sin \theta = \frac{x}{a}$$



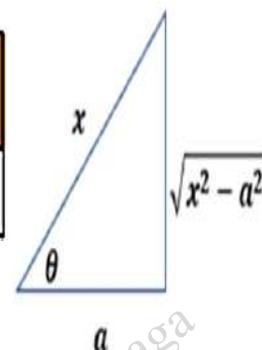
Expression	Trigonometric Substitution	Interval	Identity
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan \theta$	$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$

$$x = a \tan \theta \text{ then } \tan \theta = \frac{x}{a}$$



Expression	Trigonometric Substitution	Interval	Identity
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec \theta$	$\theta \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$	$\sec^2 \theta - 1 = \tan^2 \theta$

$$x = a \sec \theta \text{ then } \sec \theta = \frac{x}{a}$$



Example: 8

Evaluate  $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}dx$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Exercise 8.1

Evaluate  $\int \sqrt{9-x^2}dx$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Exercise 8.2 Evaluate  $\int \sqrt{9 - x^2} dx$

Exercise 8.3 Evaluate:  $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx$

Exercise 8.4 Evaluate:  $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx$

Example: 9

Evaluate  $\int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}} dx$

Exercise 9.1

Evaluate:  $\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} dx$

Exercise 9.2 Evaluate:  $\int \frac{x+1}{\sqrt{4+x^2}} dx$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Example: 10 Evaluate  $\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x} dx$  for  $x \geq 5$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Exercise 10.1

Evaluate:  $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2} dx, x \geq 2$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Moe Exams امتحانات وزارية سابقة

Term 3
امتحان العام 2022.2023
الأسئلة المتضمنة في امتحان الوزارة للفصل الدراسي الثالث 2024  
Questions which included in MOE Exam Term3 (2024)
Mathematics G12 Advanced

Final Revision Grade 12 Adv

6 4830

**Evaluate the integral.**

$$\int \cos^2(x + 1) dx$$

**أوجد قيمة التكامل.**

$$\int \cos^2(x + 1) dx$$

**A**  $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}[\sin 2(x + 1)] + c$

**B**  $\sin^2(x + 1) + c$

**C**  $\frac{1}{4}[\sin 2(x + 1)] + c$

**D**  $\frac{1}{2}x + [\sin(x + 1)] + c$

الأستاذ عبدالله أبو النجا معلم أول الرياضيات 0505114830

Mr. Abdalla Abouelnaga
عزيزي الطالب : اجتهد في فهم ومذاكرة هذه الأسئلة والتمارين بالكتاب المدرسي تمنياتي للجميع بالنجاح والتفوق

7.3 جاء السؤال التالي لقياس المخرج التعليمي درس 7.3  
 Integrate trigonometric functions using the substitution  $x = a \sin(y)$ ,  $x = a \tan(y)$ ,  $x = a \sec(y)$   
 و يمكن حله بالتعويض ايضا

Term 3 امتحان العام 2023 الأسئلة المتضمنة في امتحان الوزارة للفصل الدراسي الثالث 2024 Questions which included in MOE Exam Term3 (2024) Mathematics G12 Advanced

Final Revision Grade 12 Adv

3 4830 Evaluate the integral.

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} dx$$

أوجد قيمة التكامل.

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} dx$$

A  $\sqrt{x^2 + 4} + c$

B  $x\sqrt{x^2 - 4} + c$

C  $2 \sec x + c$

D  $\sqrt{x^2 - 4} + c$

Mr. Abdalla Abouelnaga

عزيزي الطالب : اجتهد في فهم ومذاكرة هذه الأمثلة والتمارين بالكتاب المدرسي تمنياتي للجميع بالنجاح والتفوق

0505114830 الأستاذ عبدالله أبو النجا معلم أول الرياضيات

Term 3 امتحان العام 2022,2023 الأسئلة المتضمنة في امتحان الوزارة للفصل الدراسي الثالث 2024 Questions which included in MOE Exam Term3 (2024) Mathematics G12 Advanced

Final Revision Grade 12 Adv

17 4830 Evaluate the indicated integral.

$$\int (\sin^2 x + \cos^2 x + 1) dx$$

أوجد قيمة التكامل غير المحدود.

$$\int (\sin^2 x + \cos^2 x + 1) dx$$

A  $\frac{\sin 2x}{2} + c$

B  $\frac{-\sin^3 x}{3} + \frac{\cos^3 x}{3} + x + c$

C  $\frac{\cos 2x}{2} + c$

D  $2x + c$

Mr. Abdalla Abouelnaga

عزيزي الطالب : اجتهد في فهم ومذاكرة هذه الأمثلة والتمارين بالكتاب المدرسي تمنياتي للجميع بالنجاح والتفوق

0505114830 الأستاذ عبدالله أبو النجا معلم أول الرياضيات

10

Exam2020.2021 T3

Evaluate the integral  $\int_0^{\pi/4} (\sin^2 x - \cos^2 x) dx$

- A. Abdalla Abouelnaga  $\frac{1}{2}$       B. Abdalla Abouelnaga  $1$       C. Mr. Abdalla Abouelnaga  $2$       D. Mr. Abdalla Abouelnaga  $\frac{1}{2}$

Exam

Exam2020.2021 T3

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

عزيزي الطالب : اجتهد في فهم ومذاكرة هذه الامثلة والتمارين بالكتاب المدرسي تمنياتي للجميع بالنجاح والتفوق

7

Which substitution can be used to evaluate the integral?

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 25}} dx$$

ما التعويض الذي يمكن استخدامه لإيجاد قيمة التكامل؟

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 25}} dx$$

- A.  $x = 5 \sin \theta$   
B.  $x = 5 \sec \theta$   
C.  $x = 5 \tan \theta$   
D.  $x = \sec \theta \tan \theta$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

عزيزي الطالب : اجتهد في فهم ومذاكرة هذه الامثلة والتمارين بالكتاب المدرسي تمنياتي للجميع بالنجاح والتفوق

9

Evaluate the Integral.

$$\int \tan x \sec^3 x \, dx$$

أوجد قيمة التكامل.

$$\int \tan x \sec^3 x \, dx$$

A  $\frac{\sec^3 x}{3} + c$

B  $-\frac{\sec^3 x}{3} + c$

C  $\frac{\tan^3 x}{3} + c$

D  $-\frac{\tan^3 x}{3} + c$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

عزيزي الطالب : اجتهد في فهم ومذاكرة هذه الأمثلة والتمارين بالكتاب المدرسي تمنياتي للجميع بالنجاح والتفوق

Exam2021.2022 T3

الإستاذ عبدالله أبو النجا معلم أول الرياضيات 0505114830

24

Evaluate the integral.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 16}} \, dx$$

أوجد قيمة التكامل.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 16}} \, dx$$

A  $\ln \left| \frac{\sqrt{16 + x^2}}{4} \right| + x + c$

B  $\ln \left| \frac{\sqrt{16 + x^2}}{4} \right| - x + c$

C  $\ln \left| \frac{x + \sqrt{16 + x^2}}{4} \right| + c$

D  $\ln \left| \frac{x - \sqrt{16 + x^2}}{4} \right| + c$

bdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

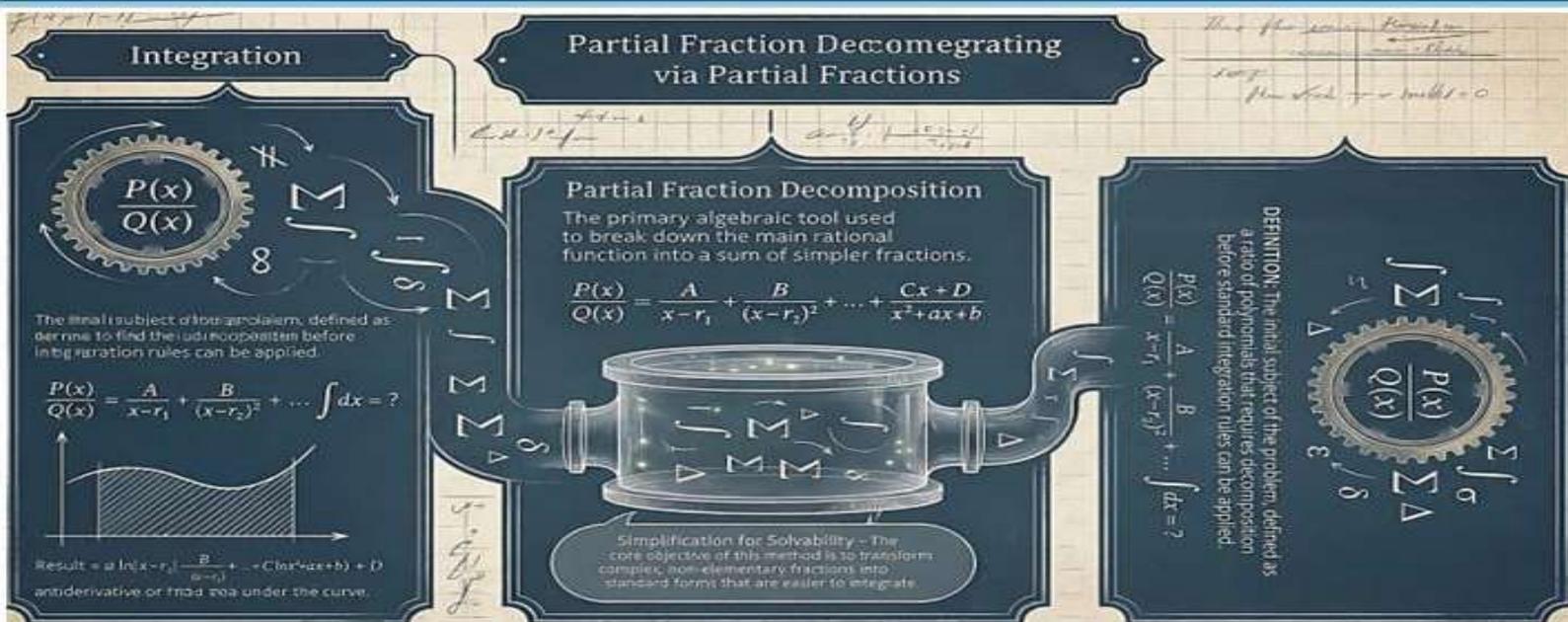
عزيزي الطالب : اجتهد في فهم ومذاكرة هذه الأمثلة والتمارين بالكتاب المدرسي تمنياتي للجميع بالنجاح والتفوق

Exam2021.2022 T3

الإستاذ عبدالله أبو النجا معلم أول الرياضيات 0505114830

# Unit 7: Integration Techniques and First-Order Differential Equations

## وحدة 7: طرائق التكامل والمعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى



## Lesson 4 : Integration of Rational Functions Using Partial Fractions

### الدرس الرابع: تكامل الدوال النسبية باستخدام الكسور الجزئية

Grade 12 Advanced  
الثاني عشر متقدم

Mr. Abdalla  
Abouelnaga



Mr. Abdalla Abouelnaga  
0505114830



Student Name (اسم الطالب): \_\_\_\_\_

Class (الصف) \_\_\_\_\_



- Integrate rational functions using partial fractions in different cases.

## Introduction

# Mastering Integration: A Step-by-Step Guide to Partial Fraction Decomposition

A clear roadmap for breaking down complex rational functions into simpler parts for integration.

## PHASE 1: PRE-DECOMPOSITION SETUP

**Step 1: Check the Degree of the Numerator.**

$$d \rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)}$$

- ✓ Ensure the function  $P(x)/Q(x)$  is "proper" by verifying the degree of the numerator is strictly less than the degree of the denominator; if not, perform polynomial long division first.

**Step 2: Factor the Denominator  $Q(x)$ .**

Completely factor the denominator into its most basic components, identifying whether they are linear factors  $(ax + b)$  or irreducible quadratic factors  $(ax^2 + bx + c)$ .

## PHASE 2: DETERMINING THE DECOMPOSITION FORM

### Case 1: Distinct Linear Factors

$$\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$$

For every non-repeated linear factor  $(x - a)$ , assign a partial fraction in the form of  $A / (x - a)$ .



### Case 2: Repeated Linear Factors

$$\frac{P(x)}{(x-a)^n} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$$

For a factor like  $(x - a)^n$ , create a sum of  $n$  fractions with increasing powers in the denominator.



### Case 3: Irreducible Quadratic Factors

$$\frac{P(x)}{(ax^2 + bx + c)} = \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

For quadratic factors that cannot be factored further, use a linear numerator:  $(Ax + B) / (ax^2 + bx + c)$ .



## PHASE 3: SOLVING FOR CONSTANTS

**Step 3: Combine and Equate.**

Multiply the entire equation by the common denominator to clear the fractions, leaving a single polynomial equation.

**Step 4: Solve for  $A, B, C \dots$**

Find the unknown constants by either substituting strategic  $x$ -values (that make terms zero) or by equating the coefficients of like powers of  $x$  on both sides.

## PHASE 4: THE FINAL INTEGRATION

**Step 5: Integrate the Simpler Terms.**

Replace the original complex fraction with the sum of the partial fractions and integrate each term individually, typically resulting in natural loge (ln) or inverse tangent (arctan) functions.

**Sample Transformation.**

COMPLEX INTEGRAL

$$\int \left[ \frac{1}{x^2 - 1} \right] dx$$

SIMPLER TERMS

$$\int \left[ \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(x+1) \right] dx = \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + C$$

## Introductory Example

Write in Partial Fraction?

## Solution

Partial Fraction Expansion

$$\frac{6x}{x^2 - x - 2}$$

$$\frac{6x}{x^2 - x - 2} = \frac{6x}{(x + 1)(x - 2)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 2}$$

$$\frac{6x}{(x + 1)(x - 2)} = \frac{A(x - 2)}{(x + 1)(x - 2)} + \frac{B(x + 1)}{(x + 1)(x - 2)}$$

$$\frac{6x}{(x + 1)(x - 2)} = \frac{A(x - 2) + B(x + 1)}{(x + 1)(x - 2)}$$

$$6x = A(x - 2) + B(x + 1)$$

To find A and B

$$\text{Let } x = -1$$

$$6(-1) = A(-1 - 2) + B(-1 + 1)$$

$$-6 = -3A$$

$$A = 2$$

$$\text{Let } x = 2$$

$$6(2) = A(2 - 2) + B(2 + 1)$$

$$12 = 3B$$

$$B = 4$$

So, our original fraction can be written as:

$$\frac{6x}{x^2 - x - 2} = \frac{2}{x + 1} + \frac{4}{x - 2}$$

## Partial Fraction: Distinct Linear Factors

Example: 1

Write in Partial Fraction  $\frac{3x}{x^2 - x - 2}$

Example: 2

Evaluate:  $\int \frac{x-5}{x^2-1} dx$

Exercise: 2.1

Evaluate  $\int \frac{1}{x^2 + x - 2} dx =$

**Exercise: 2.2**Evaluate:  $\int \frac{2-x}{x^2+5x} dx$ *Mr. Abdalla Abouelnaga**Mr. Abdalla Abouelnaga***Partial Fractions: Three Distinct Linear Factors**Partial fractions:  
distinct linear factors

$$\frac{P(x)}{(a_1x + b_1)(a_2x + b_2)\cdots(a_nx + b_n)} = \frac{c_1}{a_1x + b_1} + \frac{c_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{c_n}{a_nx + b_n},$$

for some constants  $c_1, c_2, \dots, c_n$ .**Example: 3**Evaluate:  $\int \frac{3x^2-7x-2}{x^3-x} dx$ *Mr. Abdalla Abouelnaga**Mr. Abdalla Abouelnaga*

**Exercise: 3.1**Evaluate:  $\int \frac{-x+5}{x^3-x^2-2x} dx$ **Partial Fractions: Repeated Linear Factors**

$$\frac{P(x)}{(ax+b)^n} = \frac{c_1}{ax+b} + \frac{c_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{c_n}{(ax+b)^n},$$

for constants  $c_1, c_2, \dots, c_n$  to be determined.

**Example: 4** Use a partial fractions decomposition to find an antiderivative of

$$f(x) = \frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x}.$$

Exercise: 4.1

Evaluate:  $\int \frac{2x}{x^2-6x+9} dx$

Exercise: 4.2

Evaluate:  $\int \frac{2x}{x^2-4x+4} dx$

## Partial Fraction where Long Division is Required

**Example: 5** Find the indefinite integral of  $f(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 - 15x + 5}{x^2 - 2x - 8}$  using a partial fractions decomposition.

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

**Exercise: 5.1** Evaluate:  $\int \frac{x^3 + x}{x^2 - 1} dx$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Exercise: 5.2 Evaluate:  $\int \frac{x^2+1}{x^2-5x-6} dx$

Partial Fractions with a Quadratic Factor(irreducible quadratic Factors)

$$\frac{P(x)}{(a_1x^2 + b_1x + c_1)(a_2x^2 + b_2x + c_2) \cdots (a_nx^2 + b_nx + c_n)}$$
$$= \frac{A_1x + B_1}{a_1x^2 + b_1x + c_1} + \frac{A_2x + B_2}{a_2x^2 + b_2x + c_2} + \cdots + \frac{A_nx + B_n}{a_nx^2 + b_nx + c_n}$$

Example: 6 Evaluate:  $\int \frac{1}{x^3+4x} dx$

Exercise: 6.1

Use a partial fractions decomposition to find an antiderivative of  $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^3 + x}$ .

Mr. Abdalla Abou

Mr. Abdalla Abouelnaga

Exercise: 6.2

Use a partial fractions decomposition to find an antiderivative for

$$f(x) = \frac{5x^2 + 6x + 2}{(x + 2)(x^2 + 2x + 5)}$$

Mr. Abdalla

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

# Brief Summary of Integration Techniques

Integration by Substitution:

Integration by Parts:

Trigonometric Substitution:

Partial Fractions:

Example: 7

In exercises 43 and 44, name the method by identifying whether the integral can be evaluated using substitution, integration by parts, or partial fractions.

a)  $\int \frac{2}{x^2-1} dx =$

b)  $\int \frac{x}{x^2-1} dx =$

Example: 7

In exercises 43 and 44, name the method by identifying whether the integral can be evaluated using substitution, integration by parts, or partial fractions.

a)  $\int \frac{2x+2}{(x+1)^2} dx =$

b)  $\int \frac{x-1}{(x+1)^2} dx =$

4

Find the partial fraction decomposition.

$$\frac{x - 6}{x^2 - 4}$$

أوجد تفكيك الكسر الجزئي.

$$\frac{x - 6}{x^2 - 4}$$

A  $\frac{2}{x + 2} - \frac{1}{x - 2}$

B  $\frac{1}{x + 2} - \frac{2}{x - 2}$

C  $\frac{2}{x + 1} - \frac{1}{x - 4}$

D  $\frac{1}{x + 2} - \frac{1}{x - 2}$

Moe Exam 2022/2023  
Mr. Abdalla Abouelnaga  
Last Year

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

عزيزي الطالب : اجتهد في فهم ومذاكرة هذه الأمثلة والتمارين بالكتاب المدرسي تمنياتي للجميع بالنجاح والتفوق

Q2

Part 3 Writing (كتابة) الجزء الثالث

Evaluate the integral.

$$\int \frac{x + 4}{x^3 - 3x^2 + 2x} dx$$

أوجد قيمة التكامل.

$$\int \frac{x + 4}{x^3 - 3x^2 + 2x} dx$$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

عزيزي الطالب : اجتهد في فهم ومذاكرة هذه الأمثلة والتمارين بالكتاب المدرسي تمنياتي للجميع بالنجاح والتفوق

5

Evaluate the integral.

$$\int \frac{x-5}{x^2-1} dx$$

أوجد قيمة التكامل.

$$\int \frac{x-5}{x^2-1} dx$$

A  $3 \ln|x+1| + 2 \ln|x-1| + c$

B  $3 \ln|x+1| - 2 \ln|x-1| + c$

C  $2 \ln|x+1| - 3 \ln|x-1| + c$

D  $2 \ln|x+1| + 3 \ln|x-1| + c$

Exam2021.2022 T3

B

Mr. Abdalla Abouelnaga

عزيزي الطالب : اجتهد في فهم ومذاكرة هذه الأمثلة والتمارين بالكتاب المدرسي تمنياتي للجميع بالنجاح والتفوق

8

If  $\frac{1}{x^3+4x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$

What is the value of  $\int \frac{1}{x^3+4x} dx$  ?

إذا كان  $\frac{1}{x^3+4x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$

ما قيمة  $\int \frac{1}{x^3+4x} dx$  ؟

A  $\ln|x| + \ln|x^2+4| + c$

B  $\frac{1}{4} \ln|x| - \frac{1}{8} \ln|x^2+4| + c$

C  $\ln|x^2+4| - \frac{1}{4} \ln|x| + c$

D  $\frac{1}{4} \ln|x| + \frac{1}{8} \tan^{-1}x + c$

Exam2020.2021 T3

Exam2020.2021 T3

B

Mr. Abdalla Abouelnaga

عزيزي الطالب : اجتهد في فهم ومذاكرة هذه الأمثلة والتمارين بالكتاب المدرسي تمنياتي للجميع بالنجاح والتفوق

## Question 7 MOE Re- Exam 2017/2018

Find Partial Fraction decomposition of  $\frac{5x}{x^2 - x - 6}$

A  $\frac{2}{x+3} + \frac{1}{x-2}$

B  $\frac{1}{x+2} + \frac{2}{x-3}$

C  $\frac{2}{x+2} + \frac{3}{x-3}$

D  $\frac{2}{x-3} + \frac{3}{x+2}$

Solution Steps

Mr. Abdalla Abouelnaga

عزيزي الطالب : اولاً اجتهد في فهم ومذاكرة تمارين الكتاب (الكتاب اولاً). تمنياتي للجميع بالنجاح والتفوق

2023/2024

## Question 19 MOE Exam 2018/2019

Evaluate  $\int \frac{2}{x^2 - 1} dx$

A  $\ln|x+1| + \ln|x-1| + c$

B  $\ln|x-1| - \ln|x+1| + c$

C  $\ln|x+1| - \ln|x-1| + c$

D  $-\ln|x-1| - \ln|x+1| + c$

Solution Steps

Mr. Abdalla Abouelnaga

عزيزي الطالب : اولاً اجتهد في فهم ومذاكرة تمارين الكتاب (الكتاب اولاً). تمنياتي للجميع بالنجاح والتفوق

2023/2024

## Question 48 MOE Exam 2019/2020

If  $\frac{x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$  What is the value of  $\int \frac{x-1}{(x+1)(x-2)} dx$ ?

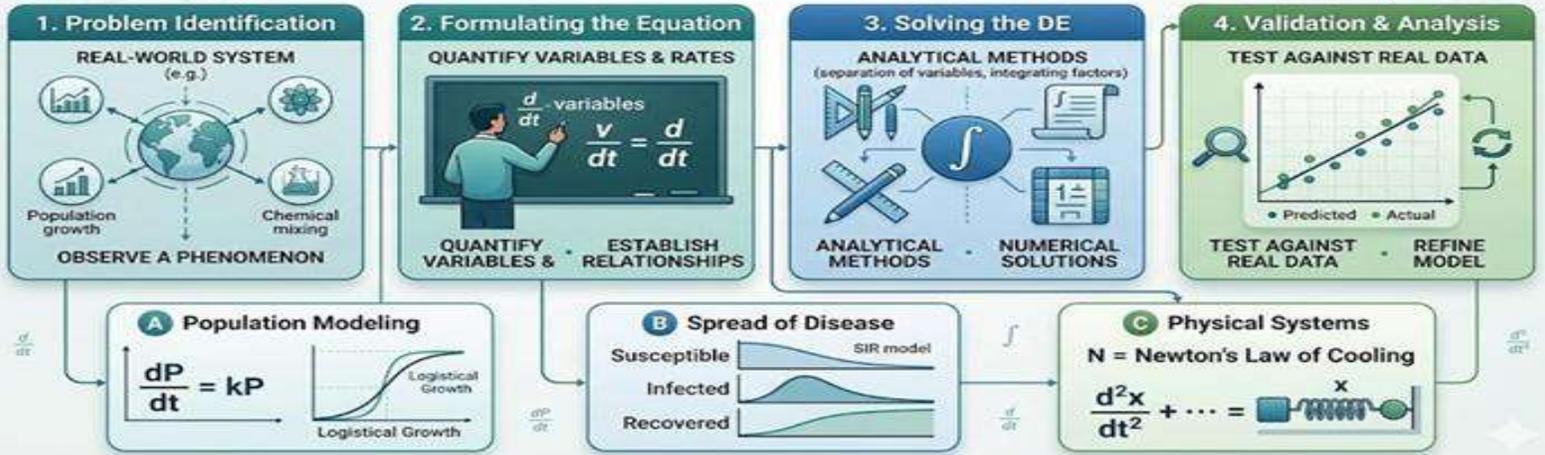
- A  $\frac{2}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\ln|x-2| + c$     B  $\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{2}{3}\ln|x-2| + c$     C  $\frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{2}{3}\ln|x-2| + c$     D  $\frac{2}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{3}\ln|x-2| + c$

## Solution Steps

# Unit 7: Integration Techniques and First-Order Differential Equations

وحدة 7: طرائق التكامل والمعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى

## Modeling with Differential Equations



## Lesson 6 : Modeling with Differential Equations

الدرس السادس: نمذجة المعادلات التفاضلية

Grade 12 Advanced  
الثاني عشر متقدم

Mr. Abdalla  
Abouelnaga



Mr. Abdalla Abouelnaga  
0505114830



Student Name (اسم الطالب): \_\_\_\_\_

Class (الصف) \_\_\_\_\_

## Modeling with Differential Equations

## Objectives

- Learn differential equations of the form.

$$y' = ky \text{ and their general solution}$$

- Solve problems involving differential equations of the form  $y' = ky$  satisfying an indicated initial condition.

Mr. Abdalla Abouelnaga

A Differential Equation is an equation involving derivatives.

## Differential Equation

## Examples

$$y'' + 2y' = 3y$$

$$y' = 2y - 1$$

## Solution

A function or  
a set of functions

## Algebraic Equation

## Examples

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$\frac{2}{x+1} = \frac{x}{3}$$

## Solution

A number or  
a set of numbers

# Forms of the differential Equations

$$y'(t) = ky(t)$$

$$y' = ky$$

$$y'(t) = k[y(t) - T_a]$$

$$y' = k[y - T_a]$$

$$y'(t) = ky(t)[M - y(t)]$$

$$y' = k.y[M - y]$$

General Solution

$$y(t) = Ae^{kt}$$

$$A = y(0)$$

$$k = \frac{\ln\left[\frac{y(t_1)}{y(0)}\right]}{t_1 - t_0}$$

$$y(t) = Ae^{kt} + T_a$$

$$A = y(0) - T_a$$

$$k = \frac{\ln\left[\frac{y(t_1) - T_a}{y(0) - T_a}\right]}{t_1 - t_0}$$

$$y(t) = \frac{A.M.e^{k.M.t}}{1 + Ae^{k.M.t}}$$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

## Modeling with differential Equations

Growth and Decay Problems

$$y'(t) = ky(t)$$

$$y(t) = Ae^{kt}$$

Exponential Growth Law  $k > 0$

Exponential Decay Law  $k < 0$

Newton's Law of Cooling

$$y'(t) = k[y(t) - T_a]$$

$$y(t) = Ae^{kt} + T_a$$

Where

$y(t)$ : is the object temperature

$T_a$ : is the ambient temperature (temperature of the surrounding)

Compound Murabaha

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Where:

**A**: The value of the investment after

**P**: The principle = initial value of investment

**r**: Murabaha rate

**n**: number of times per year that Murabaha is compounded.

**t**: time in years

For continuous compounding ( $n \rightarrow \infty$ )

The value of investment after t years is.

$$A = Pe^{rt}$$

Depreciation of Assets

$$v'(t) = r.v(t)$$

$$v(t) = Ae^{rt}$$

Where:

$v(t)$ : the value of the asset at time t

$A = v(0)$ : the initial value of asset

**r**: (negative) the depreciation rate at which the value of the asset decreases

**Example: 1** Find the solution of the given differential equation satisfying the indicated initial condition.  $y' = 4y$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y(x) > 0$

**Exercise: 1.1** Find the solution of the given differential equation satisfying the indicated initial condition.  $y' = -y$ ,  $y(1) = 2$ ,  $y(x) > 0$

## Growth and Decay Problems

Populations grow at a rate proportional to their current levels.

This can be represented by the Differential Equation:

$$y'(t) = k y(t)$$

Where  $k$ : is the proportionality constant.

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

$$\frac{dy}{y} = k dt$$

Integrating both sides:

$$\int \frac{dy}{y} = \int k dt$$

$$\ln|y| + c_1 = kt + c_2$$

$$\ln|y| = kt + c_2 - c_1$$

$$\text{Let } c = c_2 - c_1$$

$$\ln|y| = kt + c$$

$$e^{\ln|y|} = e^{kt+c} \quad y(t) > 0$$

since  $y(t)$  represents a Population

$$y(t) = e^{kt} \cdot e^c$$

$$\text{let } A = e^c$$

$$y(t) = Ae^{kt}$$

This is the General Solution for the Differential Equation

$$y(t) = Ae^{kt} \quad \text{Exponential Growth Law } k > 0$$

$$\text{Exponential Decay Law } k < 0$$

**Example: 2** A freshly inoculated bacterial culture contains 100 cells, when checked 60 minutes later it is determined that there are 450 cells, assuming Exponential Growth:

1. Determine number of cells at any time measured in minutes.
2. Find the doubling time.

**Given:**

Exponential Growth  
 $y(0) = 100$   
 $y(60) = 450$



$$1) y(t) = 100e^{\frac{\ln(4.5)}{60}t} \quad 2) t = \frac{60 \ln(2)}{\ln(4.5)} \approx 27.65 \text{ minutes}$$

**Exercise: 2.1**

Suppose a bacterial culture initially has 400 cells after 1 hour the population has increased to 800, assuming Exponential Growth:

- a. Quickly determine the population after 3 hours
- b. Find an equation for population at any time.
- c. What will the population be after 3.5 hours?

**Given:**

Exponential Growth  
 $y(0) = 400$   
 $y(1) = 800$



a)  $y(3) = 3200 \text{ cells}$     b)  $y(t) = 400e^{\ln(2)t}$     c)  $y(3.5) \approx 4525.4834 \approx 4525$

## Radioactive Decay

**Half-life:** time required for half of the initial quantity to decay into other elements

Example: 3

The half-life of Uranium  $^{235}\text{U}$  is approximately  $0.7 \times 10^9$  years if 50 grams are buried at a nuclear waste site, how much remain after:

- 100 years
- 1000 years

Given: Exponential Decay

$$y(0) = 50$$

$$\text{Half-life} = 0.7 \times 10^9 \text{ years} \rightarrow y(0.7 \times 10^9) = 25$$



$$y(100) = 49.99999505 \text{ grams} \quad y(1000) = 49.99995049 \text{ grams}$$

Exercise: 3.1

The half-life of Carbon  $^{14}\text{C}$  is approximately 5730 years, if you have 50 grams of it, how much will be left in 100 years?

Given: Exponential Decay

$$y(0) = 50$$

$$\text{Half-life} = 5730 \text{ years} \rightarrow y(5730) = 25$$



$$y(100) = 50 e^{-100k} \approx 49.3988 \text{ grams.}$$

## Newton's Law of Cooling

$$y'(t) = k[y(t) - T_a]$$

$$\text{If } y(t) > T_a$$

$$\frac{dy}{dt} = k[y(t) - T_a]$$

$$\frac{dy}{y(t) - T_a} = k dt$$

$$\int \frac{dy}{y(t) - T_a} = \int k dt$$

$$\ln|y(t) - T_a| + c_1 = kt + c_2$$

$$\ln|y(t) - T_a| = kt + c$$

$$e^{\ln(y(t)-T_a)} = e^{kt+c}$$

$$y(t) - T_a = e^{kt} \cdot e^c$$

Where  $y(t)$ : is the object temperature

$T_a$  : is the ambient temperature.

(Temperature of the surrounding)

Separating variables:

Integrating both sides:

$$\text{Let } (c_2 - c_1) = c$$

$$\text{Since } y(t) > T_a \\ y(t) - T_a > 0$$

$$\text{Let } e^c = A$$

$$y(t) = Ae^{kt} + T_a$$

**Example: 4**

A bowl of porridge at  $200^{\circ}\text{F}$  is placed in  $70^{\circ}\text{F}$  room, one minute later the porridge has cooled to  $180^{\circ}\text{F}$  when will the temperature be  $120^{\circ}\text{F}$ ?

Given  $y(0) = 200^{\circ}\text{F}$   
 $y(1) = 180^{\circ}\text{F}$   
 $T_a = 70^{\circ}\text{F}$



$$t = \frac{\ln(\frac{5}{13})}{\ln(\frac{11}{13})} = 5.71977 \text{ minutes}$$

**Exercise: 4.1**

A cold drink is poured out at  $50^{\circ}\text{F}$  after 2 minutes of sitting in  $70^{\circ}\text{F}$  room its temperature has risen to  $56^{\circ}\text{F}$

- Find the drink's temperature at any time  $t$
- What will the temperature be after 10 minutes?
- When will the drink warmed to  $66^{\circ}\text{F}$  ?

Given:  $y(0) = 50^{\circ}\text{F}$   
 $y(2) = 56^{\circ}\text{F}$   
 $T_a = 70^{\circ}\text{F}$



$$a) y(t) = -20e^{\frac{\ln(0.7)}{2}t} + 70 \quad b) y(10) = 66.6386^{\circ}\text{F} \quad c) t = \frac{2\ln(0.2)}{\ln(0.7)} \approx 9.025 \text{ minutes}$$

## Compound Murabaha

$$A = P \left( 1 + \frac{r}{n} \right)^{nt}$$

Where:

A: The value of the investment after compounded Murabaha

P: The principle = initial value of investment

r: Murabaha rate

n: number of times per year that Murabaha is compounded.

t: time in years

As n increases the greater the Murabaha is.

Is there a limit to how much Murabaha can occur?

Under continuous compounding ( $n \rightarrow \infty$ )

Annual Percentage Yield in one year:

$$APY = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{r}{n} \right)^n - 1 \right]$$

$$APY = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{r}{rm} \right)^{rm} - 1 \right]$$

Suppose  $n = rm$

$$APY = \left[ \lim_{m \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{m} \right)^m \right]^r - 1$$

since  $\lim_{m \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{m} \right)^m = e$

Then  $APY = e^r - 1$

For continuous compounding ( $n \rightarrow \infty$ )

The value of investment after t years is

$$A = Pe^{rt}$$

=

$$y = Ae^{rt}$$

**Example: 5**

If you invest AED1000 at annual Murabaha rate of 8%. Compare the value of the investment after 1 year under the following forms of compounding:

- a. Annual  $\longrightarrow n = 1$
- b. Monthly  $\longrightarrow n = 12$
- c. Daily  $\longrightarrow n = 365$
- d. Continuous

Given:  $P = AED1000$   
 $r = 0.08$   
 $t = 1$



a) AED1080      b) AED1082.999507      c) AED1083.277572      d)  $\approx$  AED1083.287068

**Exercise: 5.1**

Person A invests AED10000 in 1990 and person B invests AED20000 in 2000

- a. If both receive 12% Murabaha compounded continuously, what are the value of investment in 2010?
- b. Repeat for Murabaha rate of 4%
- c. Determine Murabaha rate such that person A ends up exactly even with person B.  
(Hint: you want person A to have 20000 in 2000)

## Introduction: Depreciation of Assets

If  $y(t)$  is the value of investment after  $t$  years with continuous compounding, the rate of change of  $y(t)$  is proportional to  $y(t)$ .

that is  $y'(t) = ky(t)$

then  $y(t) = Ae^{rt}$

$$v'(t) = r \cdot v(t)$$

$$v(t) = Ae^{rt}$$

Where:

$v(t)$ : the value of the asset at time  $t$

$A = v(0)$ : the initial value of asset

$r$ : (negative) the depreciation rate at which the value of the asset decreases

**Example: 6** Suppose that the value of AED10000 asset decreases continuously at constant rate 24% per year.

- Find its worth after 10 years, 20 years.
- Compare these values to AED10000 asset that depreciate to no value in 20 years using linear depreciation.

18

Exam2020.2021 T3

Find the solution of the differential equation  $y' = -y$  satisfying the initial condition  $y(1) = 2$ .

- A.  $y = 2e^{1-x}$       B.  $y = 2e^{2x}$       C.  $y = e^{1-x}$       D.  $y = -2e^{1+x}$

Mr. Abdalla Abouelnaga

عزيزي الطالب : اجتهد في فهم ومذاكرة هذه الأمثلة والتعارين بالكتاب المدرسي تمنياتي للجميع بالنجاح والتفوق

Term 3

Questions from previous MOE exams أسئلة وردت بامتحانات وزارية سابقة

Mathematics G12 Advanced

Question 45 MOE Exam 2019/2020

Solve the differential equation  $y' = 3y$  ,  $y(0) = -2$

- A.  $y = 2e^{3x}$       B.  $y = -2e^{\frac{1}{3}x}$       C.  $y = -2e^{3x}$       D.  $y = 2e^{3x} - 4$

Solution Steps

Mr. Abdalla Abouelnaga

عزيزي الطالب : اولاً اجتهد في فهم ومذاكرة تمارين الكتاب (الكتاب اولاً). تمنياتي للجميع بالنجاح والتفوق

2023/2024

14

Abouelnaga  
14830

Exam2020.2021 T3

Find the solution of the differential equation  $y' = 2y$  satisfying the initial condition  $y(1) = 2$ .

أوجد حلاً للمعادلة التفاضلية  $y' = 2y$  يحقق الشرط الابتدائي  $y(1) = 2$ .

A  $y = 20e^{2x-1}$

B  $y = \frac{e^{2x}}{e^2}$

C  $y = 2e^{2x}$

D  $y = 2e^{2(x-1)}$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

عزيزي الطالب : اجتهد في فهم ومذاكرة هذه الأسئلة والتعارين بالكتاب المدرسي تمنياتي للجميع بالنجاح والتفوق

Q3

Abouelnaga  
14830

Part 3 Writing (كتابة)

Suppose a bacterial culture initially has 300 cells. After 2 hours, the population has increased to 1,200.

Find the population after 6 hours.

على فرض أن مستنبت بكتيري يحتوي في البداية على 300 خلية. وبعد 2 ساعة، تزايد عدد أفراد المجتمع إلى 1,200.  
حدد عدد أفراد المجتمع بعد 6 ساعات.

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

19200

Mr. Abdalla Abouelnaga

عزيزي الطالب : اجتهد في فهم ومذاكرة هذه الأسئلة والتعارين بالكتاب المدرسي تمنياتي للجميع بالنجاح والتفوق

1

Abouelnaga  
14830

Exam2021.2022 T3

If you invest AED 1000 at an annual morabaha rate of 8%, find the value of the investment after 5 years under continuous compounding.

إذا استثمرت AED 1000 بمعدل مرابحة سنوية 8%، أوجد قيمة الاستثمار بعد 5 سنوات مع مرابحة مركبة مستمرة.

Exam2021.2022 T3

- A AED 1469.3  
B AED 1489.8  
C AED 1479.6  
D AED 1491.8

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga  
0505114830

Exam2021.2022 T3

الأستاذ عبدالله أبو النجا معلم أول الرياضيات 0505114830

Mr. Abdalla Abouelnaga

عزيزي الطالب : اجتهد في فهم ومذاكرة هذه الأسئلة والتعارين بالكتاب المدرسي تمنيتي للجميع بالنجاح والتفوق

13

Abouelnaga  
14830

Find the solution of the differential equation  $y' = y - 50$  satisfying the initial condition  $y(0) = 70$ .

أوجد حل المعادلة التفاضلية  $y' = y - 50$  والتي تحقق الشرط الابتدائي  $y(0) = 70$ .

- A  $y = 20e^t - 50$   
B  $y = e^t + 50$   
C  $y = 50e^t + 20$   
D  $y = 20e^t + 50$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga  
0505114830

Exam2021.2022 T3

الأستاذ عبدالله أبو النجا معلم أول الرياضيات 0505114830

Mr. Abdalla Abouelnaga

عزيزي الطالب : اجتهد في فهم ومذاكرة هذه الأسئلة والتعارين بالكتاب المدرسي تمنيتي للجميع بالنجاح والتفوق

# Unit 7: Integration Techniques and First-Order Differential Equations

وحدة 7: طرائق التكامل والمعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى

## SEPARABLE DIFFERENTIAL EQUATIONS

SOLVING BY SEPARATION OF VARIABLES

**What is a Separable DE?**

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

REWRITABLE AS:  

$$h(y) dy = k(x) dx$$

Ref: <IMAGE 2>

**Important Tips**

- Don't Forget the +C!
- Check for Singular Solutions ( $g(y)=0$ )
- Handling Implicit Solutions

**Visual Example**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y^2}$$

$$y^2 dy = 2x dx$$

$$\int y^2 dy = \int 2x dx$$

$$\frac{1}{3} y^3 = x^2 + C$$

$$y = \sqrt[3]{3x^2 + 3C}$$

**Step-by-Step Method**

- Step 1: Identify and Separate.**  
Use division/multiplication to get variables on opposite sides.
- Step 2: Integrate Both Sides.**  
Get y as a function of x.
- Step 3: Solve for y (if possible).**  
Get y as a function of x.
- Step 4: Use Initial Condition (if given).**  
Find the particular solution.

**Applications**

A: Radioactive Decay.  $\frac{dN}{dt} = -kN$   
 $N(t) = N_0 e^{-kt}$

B: Population Growth.  $\frac{dP}{dt} = kP$   
 $P(t) = P_0 e^{kt}$

C: Mixing Problems.  
 $\frac{d(\text{Amount})}{dt} = \text{Rate}_{in} - \text{Rate}_{out}$   
 Separable form

## Lesson 7 : Separable Differential Equations

الدرس السابع: المعادلات التفاضلية القابلة للفصل

Grade 12 Advanced  
 الثاني عشر متقدم

Mr. Abdalla Abouelnaga



Mr. Abdalla Abouelnaga  
 0505114830



Student Name (اسم الطالب): \_\_\_\_\_

Class (الصف) \_\_\_\_\_

- Find the general solution of separable differential equations of first order.

Introduction

First Order

Contain only the first derivative:

$$y' = \frac{y}{x-2}$$

$$\frac{dy}{dx} = (x-3)y$$

Ordinary

Differential Equations in which Function(s) is defined by one variable

$$\frac{dy}{dx} = 3x - 2$$

$$\frac{dy}{dt} = e^{y-t}$$

Differential Equations

Equations that involve derivatives

$$y' = 2y$$

$$\frac{dy}{dx} = 2y(3-y)$$

A Separable Differential Equation

If we can separate the variables

$$g(y)dy = h(x)dx$$

$$g(y)y' = h(x)x'$$

Where all  $x$ 's are in one side of the equation and all  $y$ 's are on the other side

SEPARABLE DIFFERENTIAL EQUATIONS

SOLVING BY SEPARATION OF VARIABLES

**What is a Separable DE?**  
 $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$   
 REWRITABLE AS:  
 $h(y)dy = k(x)dx$

**Visual Example**  
 $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y^2}$   
 $y^2 dy = 2x dx$   
 $\int y^2 dy = \int 2x dx$   
 $\frac{1}{3}y^3 = x^2 + C$   
 $y = \sqrt[3]{3x^2 + 3C}$

**Step-by-Step Method**  
 Step 1: Identify and Separate. Use division/multiplication to get variables on opposite sides.  
 Step 2: Integrate Both Sides. Get y as a function of x.  
 Step 3: Solve for y (if possible). Get y as a function of x.  
 Step 4: Use Initial Condition (if given). Find the particular solution.

**Applications**  
 A: Radioactive Decay.  $\frac{dN}{dt} = -kN$ .  $N(t) = N_0 e^{-kt}$   
 B: Population Growth.  $\frac{dP}{dt} = kP$ .  $P(t) = P_0 e^{kt}$   
 C: Mixing Problems.  $\frac{d(\text{Amount})}{dt} = \text{Rate}_{in} - \text{Rate}_{out}$ . Separable form

**Important Tips**  
 Don't Forget the +C!  
 Check for Singular Solutions (g(y)=0)  
 Handling Implicit Solutions

**Example: 1**

Determine whether the following differential equations is separable.

$$1) y' = xy^2 - 2xy$$

$$2) y' = xy^2 - 2x^2y$$

$$3) y' = (3x + 1)\cos y$$

**Exercise: 1.1** Determine whether the following differential equations is separable.

1)  $y' = (3x + y)\cos y$

2)  $y' = x^2y - x\cos y$

3)  $y' = 2x\cos y - xy^3$

## General Solution in Explicit Form if possible

**Example: 2** Solve the differential equation(or)  
Find the General Solution in Explicit Form if possible .

$$1) y' = \frac{x^2+7x+3}{y^2}$$

$$2) y' = (x^2 + 1)y$$

**Exercise: 2.1**

Solve the differential equation(or)

Find the General Solution in Explicit Form if possible .

$$1) y' = \frac{2}{xy + y}$$

$$2) y' = \frac{\sqrt{1 - y^2}}{x \ln x}$$

## Initial Value Problem

General solution of a differential equation includes arbitrary constant (**integration constant**)

It represents a family of curves.

To select one solution an initial condition is given  $(x_0, y_0)$

### Example: 3

Solve the initial value problem explicitly if possible:

$$1) y' = \frac{x-1}{y^2}, \quad y(0) = 2$$

$$2) y' = 3(x+1)^2 y, \quad y(0) = 1$$

**Exercise 3.1**

Solve the initial value problem explicitly if possible:

$$1) y' = \frac{\tan y}{x}, \quad y(1) = \frac{\pi}{2}$$

$$2) y' = \frac{9x^2 - \sin x}{\cos y + 5e^y}, \quad y(0) = \pi$$

# Logistic Growth

## Exponential Vs. Logistic Growth

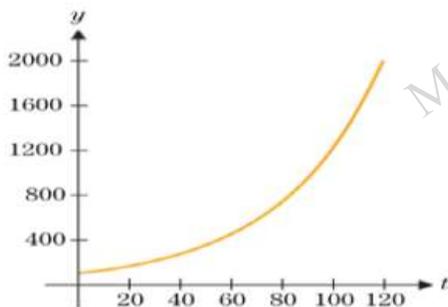
### Exponential model of growth:

The model assumes unlimited growth.

Rate of change in a population is proportional to current population.

$$y' = ky$$

$$y(t) = Ae^{kt}$$



### Logistic model of growth

Assumes that there is a maximum limit for growth.

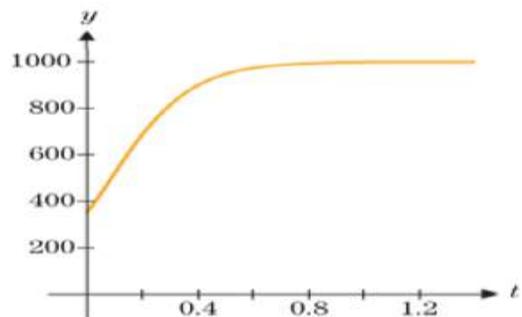
Rate of change in a population is proportional to current population and the difference between maximum(M) and current population (y)

$$y' = ky(M - y)$$

$y = 0$   
 $y = M$  are two solutions for the D.E

IF  $y \neq 0, y \neq M$

$$y = \frac{AMe^{Mkt}}{1 + Ae^{Mkt}}$$



we will show how we found it

Reading Only

$$y' = ky(M - y)$$

Logistic Equation

$$\frac{y'(t)}{y(M - y)} = k$$

$$\frac{dy}{y(M - y)} = k dt$$

Integrating both sides:

$$\int \frac{dy}{y(M - y)} = \int k dt$$

Using partial fraction expansion for the left integral:

$$\int \left( \frac{1}{My} + \frac{1}{M(M - y)} \right) dy = \int k dt$$

$$\frac{1}{M} \ln|y| - \frac{1}{M} \ln|M - y| = kt + c$$

$$\ln|y| - \ln|M - y| = Mkt + Mc \quad 0 < y < M$$

$$\ln(y) - \ln(M - y) = Mkt + Mc$$

$$\ln\left(\frac{y}{M - y}\right) = Mkt + Mc$$

$$\frac{y}{M - y} = e^{Mkt + Mc}$$

$$\frac{y}{M - y} = e^{Mc} \cdot e^{Mkt}$$

$$\frac{y}{M - y} = A \cdot e^{Mkt}$$

$$y = A \cdot e^{Mkt}(M - y)$$

$$y + Ae^{Mkt}y = AMe^{Mkt}$$

$$y(1 + Ae^{Mkt}) = AMe^{Mkt}$$

$$y = \frac{AMe^{Mkt}}{1 + Ae^{Mkt}}$$

Example: 5

## Solving a Logistic Growth Problem

Given a maximum sustainable population of  $M = 1000$  (this could be measured in millions or tons, etc.) and growth rate  $k = 0.007$ , find an expression for the population at any time,  $t$ , given an initial population of  $y(0) = 350$  and assuming logistic growth.

Solution

Remember

Logistic Equation

$$y' = ky(M - y)$$

Solution of  
Logistic Equation

$$y = \frac{AMe^{Mkt}}{1 + Ae^{Mkt}}$$



Example: 6 solve the initial value problem explicitly if possible  $y' = 3y(2 - y)$ ,  $y(0) = 1$

### Exercise:6.1

solve the initial value problem explicitly if possible.

$$y' = 2y(5 - y), \quad y(0) = 4$$

### Solution

#### Remember

#### Logistic Equation

$$y' = ky(M - y)$$

#### Solution of

#### Logistic Equation

$$y = \frac{AMe^{Mkt}}{1 + Ae^{Mkt}}$$



15

Which of the differential equations is separable?

أي من المعادلات التفاضلية قابلة للفصل؟

A  $y' = (5x - 2) \cdot \sin y$

B  $y' = 2x(5y - x)$

C  $y' = 2x \sin y - x^2 y^3$

D  $y' = x^3 y - x \cos y$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

عزيزي الطالب : اجتهد في فهم ومذاكرة هذه الأمثلة والتمارين بالكتاب المدرسي تمنياتي للجميع بالنجاح والتفوق

18

The differential equation is separable.  
Find the general solution, in an explicit form if possible.

المعادلة التفاضلية قابلة للفصل.  
أوجد الحل العام، بصيغة صريحة إذا أمكن.

$$y' = \frac{\sqrt{1-y^2}}{x \ln x}$$

$$y' = \frac{\sqrt{1-y^2}}{x \ln x}$$

A  $y = \cos[\ln x + c]$

B  $y = \sin[\ln x + c]$

C  $y = \cos[\ln(\ln x) + c]$

D  $y = \sin[\ln(\ln x) + c]$

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

عزيزي الطالب : اجتهد في فهم ومذاكرة هذه الأمثلة والتمارين بالكتاب المدرسي تمنياتي للجميع بالنجاح والتفوق

20

Abouelnaga  
14830

Exam2021.2022 T3

The differential equation is separable.

Find the general solution, in an explicit form if possible.

$$y' = \frac{2}{xy + y}$$

A

$$y = \frac{1}{2}x^2 + x + c$$

B

$$\frac{y^2}{2} = \frac{1}{2}x^2 + x + c$$

C

$$y = \ln|2x + 1| + c$$

D

$$\frac{y^2}{2} = 2 \ln|x + 1| + c$$

المعادلة التفاضلية قابلة للفصل.  
أوجد الحل العام، بصيغة صريحة إذا أمكن.

$$y' = \frac{2}{xy + y}$$

Exam2021.2022 T3

Mr. Abdalla Abouelnaga  
(0505114830)Mr. Abdalla Abouelnaga  
(0505114830)

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga  
(0505114830)

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

عزيزي الطالب : اجتهد في فهم ومذاكرة هذه الأمثلة والتمارين بالكتاب المدرسي تمنياتي للجميع بالنجاح والتفوق

3

Abouelnaga  
14830

T3

Exam2020.2021 T3

The differential equation  $y' = \frac{xy}{1+x^2}$  is separable. Find the general solution in an explicit form

A

$$y = x^2 + 1 + c$$

B

$$y = e^{\ln|x^2+1|+c}$$

C

$$y = e^{\ln\sqrt{x^2+1}+c}$$

D

$$y = \ln|x^2 + 1| + c$$

المعادلة التفاضلية  $y' = \frac{xy}{1+x^2}$  قابلة للفصل.

أوجد الحل العام بصيغة صريحة.

Exam2020.2021 T3

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga  
(0505114830)

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga  
(0505114830)

Mr. Abdalla Abouelnaga

Mr. Abdalla Abouelnaga

عزيزي الطالب : اجتهد في فهم ومذاكرة هذه الأمثلة والتمارين بالكتاب المدرسي تمنياتي للجميع بالنجاح والتفوق

Solution Steps Before Choosing

## Question 88 MOE Exam 2019/2020

The differential equation  $y' = x \cos^2 y$  is separable. Find the general solution, in an explicit form.

- A  $y = \cos^{-1}\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$     B  $y = \tan^{-1}\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$     C  $y = \tan\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$     D  $y = \cos\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$

Solution Steps

Mr. Abdalla Abouelnaga

عزيزي الطالب : اولاً اجتهد في فهم ومذاكرة تمارين الكتاب (الكتاب اولاً). تمنياتي للجميع بالنجاح والتفوق

2023/2024

## Question 47 MOE Exam

Which differential equation is not separable ?

أي المعادلات التفاضلية التالية غير قابلة للفصل؟

- A  $y' = 1 - \frac{3x}{y}$     B  $y' = x^2 y^2$     C  $y' = x^2 + 5$     D  $y' = x^2 \sin(2y)$

Solution Steps

Mr. Abdalla Abouelnaga

عزيزي الطالب : اولاً اجتهد في فهم ومذاكرة تمارين الكتاب (الكتاب اولاً). تمنياتي للجميع بالنجاح والتفوق

2023/2024