حل هيكل أسئلة تقدير طول منحنى الدالة



تم تحميل هذا الملف من موقع المناهج الإماراتية	
موقع المناهج ⇦ المناهج الإماراتية ⇦ الصف الثاني عشر المتقدم ⇦ رياضيات ⇦ الفصل الأول ⇦ حلول ⇦ الملف	
تاريخ إضافة الملف على موقع المناهج: 11-11-2026 18:02:25	
المزيد من مادة رياضيات:	ملفات ا كتب للمعلم ا كتب للطالب ا اختبارات الكترونية ا اختبارات ا حلول ا عروض بوربوينت ا أوراق عمل منهج انجليزي ا ملخصات وتقارير ا مذكرات وبنوك ا الامتحان النهائي ا للمدرس
	إعداد: محمد عمر الخطيب

التواصل الاجتماعي بحسب الصف الثاني عشر المتقدم					
صفحة المناهج الإماراتية على فيسبوك					
المواد على تلغرام	التربية الاسلامية	اللغة العربية	اللغة الانجليزية	الرياضيات	

المزيد من الملفات بحسب الصف الثاني عشر المتقدم والمادة رياضيات في الفصل الأول	
1	حل هيكل أسئلة تقدير طول منحنى الدالة
2	هيكل تقدير طول منحنى الدالة
3	أسئلة تغطية اختبار – الجزء الخاص بالأسئلة ذات الإجابة الحرة (FRQ) بدون حلول – تحديد اتصال دالة عند نقطة
4	شرح مفصل لدرس الاشتقاق وقواعده
5	نموذج تدريبي وفق هيكل 2027

تحميل تطبيق المناهج للهواتف الذكية	
تطبيق المناهج على Store App (آبل)	تطبيق المناهج على Play Google (أندرويد)

محمد عمر الخطيب

Alpha Education Center

KhateebAcademy.com

الإمـــارات THE EMIRATES

الحل

هيكل

مادة

الرياضيات

الصف الثاني عشر متقدم

الفصل الدراسي الأول

2027/2026

رابط تحميل أوراق العمل (التلجرام) t.me/omaralkhateeb12AD

الحل

مع تمنياتي لكم بالنجاح والتفوق

إعداد : محمد عمر الخطيب

الطلاب الأعزاء نتمنى لكم التوفيق والنجاح

للحصول على الدرجة الكاملة في الاختبار يجب دراسة الملزمة الاصلية والتركيز على الهيكل وتكراره عدة مرات

في الامتحان الاسئلة من 1 الى 20 هي اسئلة اختيار من متعدد ومن 21 الى 26 هي اسئلة كتابية

القسم الأول

اسئلة الاختيارمن متعدد(الدوائر)
من السؤال 1 الى السؤال 20

ملاحظات

(1) درجات أسئلة الدوائر تختلف من سؤال الى أُخر وتكون لها إما درجتين او ثلاث او اربع درجات حسب السؤال

(2) في الامتحان يكون ترتيب الأسئلة مختلف عن الملزمة

محمد عمر الخطيب

(7) قدر طول منحنى الدالة $f(x)=\cos x$ باستخدام قطعتين مستقيمتين ($n=2$)

حيث $0\le x\le \frac{\pi}{2}$

$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{\frac{\pi}{2}-0}{2}=\frac{\pi}{4}\Rightarrow P: 0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}$

النقاط هي $(0,1),(\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}),(\frac{\pi}{2},0)$

$d_1=\sqrt{(\frac{\pi}{4}-0)^2+(\frac{\sqrt{2}}{2}-1)^2}\approx 0.84$

$d_2=\sqrt{(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})^2+(0-\frac{\sqrt{2}}{2})^2}\approx 1.06$

$d=d_1+d_2=0.84+1.06=1.90\ \#$

☆ في حالة $n=2$ قيم x تكون نهاية ، منتصف ، بداية الفترة

---

(8) قدر طول منحنى الدالة $f(x)=\sin x$ باستخدام قطعتين مستقيمتين ($n=2$)

حيث $0\le x\le \frac{\pi}{2}$

$\Delta x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow P: 0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}$

النقاط هي $(0,0),(\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}),(\frac{\pi}{2},1)$

$d_1=\sqrt{(\frac{\pi}{4}-0)^2+(\frac{\sqrt{2}}{2}-0)^2}\approx 1.06$

$d_2=\sqrt{(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})^2+(1-\frac{\sqrt{2}}{2})^2}\approx 0.84$

$d=d_1+d_2=1.06+0.84=1.90\ \#$

محمد عمر الخطيب

(9) قدر طول منحنى الدالة $f(x)=\sqrt{x+1}$ باستخدام قطعتين مستقيمتين ($n=2$)

حيث $0 \le x \le 3$

$\Delta x = \frac{3-0}{2} = 1.5 \Rightarrow P: 0, 1.5, 3$

$(0,1), (1.5, \sqrt{2.5}), (3,2)$ النقاط هي

$d_1 = \sqrt{(1.5-0)^2+(\sqrt{2.5}-1)^2} \approx 1.61$

$d_2 = \sqrt{(3-1.5)^2+(2-\sqrt{2.5})^2} \approx 1.56$

$d = d_1 + d_2 = 1.61 + 1.56 = 3.17$

---

(10) قدر طول منحنى الدالة $f(x)=\frac{1}{x}$ باستخدام قطعتين مستقيمة ($n=2$)

حيث $1 \le x \le 2$

$\Delta x = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow P: 1, \frac{3}{2}, 2$

$(1,1), (\frac{3}{2}, \frac{2}{3}), (2, \frac{1}{2})$ النقاط هي

$d_1 = \sqrt{(\frac{3}{2}-1)^2+(\frac{2}{3}-1)^2} \approx 0.60$

$d_2 = \sqrt{(2-\frac{3}{2})^2+(\frac{1}{2}-\frac{2}{3})^2} \approx 0.53$

$d = d_1 + d_2 = 0.61 + 0.53 = 1.13$

(11 أ) قدر طول منحنى الدالة $f(x)=x^2+1$ باستخدام قطعتين مستقيمتين ($n=2$)

حيث $-2 \le x \le 2$

$\Delta x = \frac{2-(-2)}{2} = 2 \Rightarrow P: -2, 0, 2$

$(-2,5), (0,1), (2,5)$ النقاط هي

$d_1 = \sqrt{(0-2)^2+(1-5)^2} = 2\sqrt{5} \approx 4.47$

$d_2 = \sqrt{(2-0)^2+(5-1)^2} = 2\sqrt{5} \approx 4.47$

$d = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5} = 8.94$

محمد عمر الخطيب

(11 ب) قدر طول منحنى الدالة $f(x)=x^2+1$ باستخدام اربع قطع مستقيمة ($n=4$)

حيث $-2 \le x \le 2$

$n=4$. يفضل الحل بالجدول لان

$\Delta x = \frac{2-(-2)}{4} = \frac{4}{4} \Rightarrow P: -2, -1, 0, 1, 2$

اليسار Left	اليمين Right	المسافة dist
$(-2,5)$	$(-1,2)$	$\sqrt{(-1-(-2))^2+(2-5)^2} = \sqrt{10}$
$(-1,2)$	$(0,1)$	$\sqrt{(0-(-1))^2+(1-2)^2} = \sqrt{2}$
$(0,1)$	$(1,2)$	$\sqrt{(1-0)^2+(2-1)^2} = \sqrt{2}$
$(1,2)$	$(2,5)$	$\sqrt{(2-1)^2+(5-2)^2} = \sqrt{10}$

$d = \sqrt{10} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{10} = 9.15$

---

(12) قدر طول منحنى الدالة $f(x)=x^3+2$ باستخدام قطعتين مستقيمتين ($n=2$)

حيث $-1 \le x \le 1$

$\Delta x = \frac{1-(-1)}{2} = 1 \Rightarrow P: -1, 0, 1$

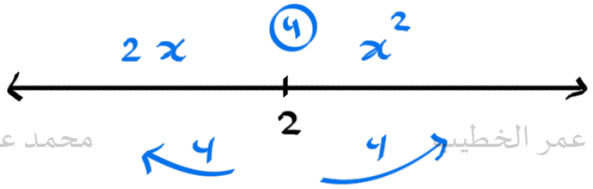
النقاط هي $(-1,1), (0,2), (1,3)$

$d_1 = \sqrt{(0-(-1))^2+(2-1)^2} = \sqrt{2} \approx 1.414$

$d_2 = \sqrt{(1-0)^2+(3-2)^2} = \sqrt{2} \approx 1.414$

$d = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \approx 2.828$

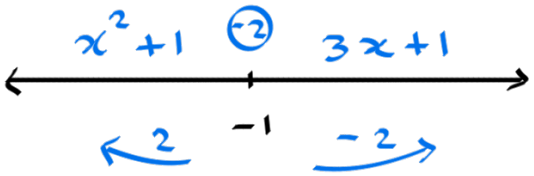
(21) اذا كانت $f(x)=\begin{cases}2x & , \quad x<2\\ x^2 & , \quad x\geq 2\end{cases}$ **اوجد** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$



$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$

---

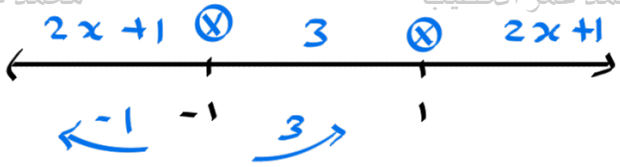
(22) اذا كانت $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & , \quad x<-1\\ 3x+1 & , \quad x\geq -1\end{cases}$ **اوجد** $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$



$\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ غير موجودة

محمد عمر الخطيب

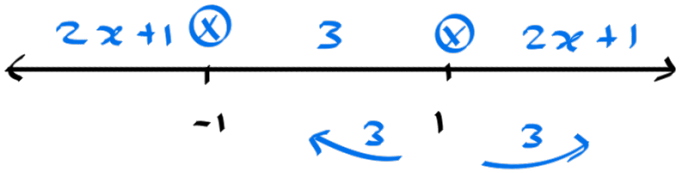
(23) اذا كانت $f(x)=\begin{cases}2x+1 & , \quad x<-1\\ 3 & , \quad -1<x<1\\ 2x+1 & , \quad x>1\end{cases}$ **اوجد** $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$



$\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ غير موجودة

---

(24) اذا كانت $f(x)=\begin{cases}2x+1 & , \quad x<-1\\ 3 & , \quad -1<x<1\\ 2x+1 & , \quad x>1\end{cases}$ **اوجد** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$



$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$

ممكن السؤال ما يحدد الطريقة بالامتحان

(29) اوجد قيمة $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x}$ باستخدام نظرية الشطيرة

نعلم أن $-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1$

$-x^2 \le x^2 \sin\frac{1}{x} \le x^2$

$\lim_{x\to 0} -x^2 = 0$, $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ $\Rightarrow \lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$ #

من نظرية الشطيرة

---

(31) اوجد قيمة $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\cos^2\frac{1}{x}$ باستخدام نظرية الشطيرة

$0 \le \cos^2\frac{1}{x} \le 1$

$0 \le \sqrt{x}\cos^2\frac{1}{x} \le \sqrt{x}$

$\lim_{x\to 0^+} 0 = 0$, $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$ $\Rightarrow \lim_{x\to 0} \sqrt{x}\cos^2\frac{1}{x} = 0$ #

من نظرية الشطيرة

---

(32) افترض ان الدالة $f(x)$ محدودة بمعنى ان هناك M عدد ثابت بحيث يكون $|f(x)| \le M$ لجميع قيم x ، استخدم نظرية الشطيرة لاثبات ان $\lim_{x\to 0} x^2 f(x) = 0$

$|f(x)| \le M$ بضرب

$-M \le f(x) \le M$

$-Mx^2 \le x^2 f(x) \le Mx^2$

$\lim_{x\to 0} -Mx^2 = 0$, $\lim_{x\to 0} Mx^2 = 0$ $\Rightarrow \lim_{x\to 0} x^2 f(x) = 0$ #

من نظرية الشطيرة

(30) لماذا لا نستطيع استخدام نظرية الشطيرة في ايجاد $\lim_{x\to 0} x^2 \sec\frac{1}{x}$

بما ان الدالة $f(x)=\sec\frac{1}{x}$ غير محدودة (لها خطوط تقارب رأسية) فانه لا يمكن تطبيق نظرية الشطيرة لايجاد

$\lim_{x\to 0} x^2 \sec\frac{1}{x}$

ملاحظة:	
$\lim_{x\to 0} x^2 \sec\frac{1}{x}$	غير موجودة

(30 ★) ممكن ان يكون نص السؤال بالشكل التالي

أي من النهايات التالية لايمكن ايجادها باستخدام نظرية الشطيرة

(a) $\lim_{x\to 0} x^2 \sec\frac{1}{x}$ **(b)** $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x}$

(c) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\cos\frac{1}{x}$ **(d)** $\lim_{x\to 0} \frac{2x^3}{x^2+1}$

(30 ★ ★) ممكن ان يكون نص السؤال بالشكل التالي

لا يمكن استخدام نظرية الشطيرة لايجاد $\lim_{x\to 0} x^2 \sec\frac{1}{x}$ **لان**

(a) الدالة $\sec(\frac{1}{x})$ **غير محدودة بجوار العدد صفر**

(b) الدالة $\sec(\frac{1}{x})$ **دائما موجبة**

(c) الدالة $\sec(\frac{1}{x})$ **دائما سالبة**

(d) الدالة $\sec(\frac{1}{x})$ **غير متصلة عند الصفر**

اوجد قيمة النهايات التالية اذا وجدت

(7) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

$= \lim_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)}$

$= \lim_{x\to 2} \dfrac{x+1}{x+2} = \dfrac{3}{4}$

---

(8) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2+2x-3}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

$= \lim_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+3)}$

$= \lim_{x\to 1} \dfrac{x^2+x+1}{x+3} = \dfrac{3}{4}$

---

(9) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\tan x} = 1$

$x \backsim \sin x \backsim \tan x \backsim \sin^{-1} x \backsim \tan^{-1} x$

عند x تقترب من الصفر .

---

(10) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$

---

(11) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\, e^{-2x+1}}{x^2+x}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{x\, e^{-2x+1}}{x(x+1)} = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^{-2x+1}}{x+1} = \dfrac{e^1}{1} = e$

(12) $\lim_{x\to 0} x^2 \csc^2 x$ $= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{x}{\sin x}$

$= (1)(1) = 1$

---

(13) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ $\times \frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)}$

$= \lim \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}(\sqrt{x+4}+2)}$

$= \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}$

---

(14) $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{3-\sqrt{x+9}}$ $\times \frac{3+\sqrt{x+9}}{3+\sqrt{x+9}}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2x(3+\sqrt{x+9})}{9-(x+9)}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2x(3+\sqrt{x+9})}{9-x-9}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2x(3+\sqrt{x+9})}{-x}$

$= \lim_{x\to 0} -2(3+\sqrt{x+9}) = -12$

☆ يمكنك حل السؤال بأكثر من طريقة

(15) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$ $\times \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$

$= \lim_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$

$= \lim_{x\to 1} (\sqrt{x}+1)$

$= 2$

---

(16) $\lim_{x\to 4} \dfrac{x^3-64}{x-4}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

$= \lim_{x\to 4} \dfrac{(x-4)(x^2+4x+16)}{x-4}$

$= 64$

حدد الفترات التي تكون عندها الدالة $f(x)$ متصلة

(21) $f(x)=\sqrt{x+3}$

مجال الدالة

$x+3 \geq 0$

$x \geq -3$

فترة الاتصال هي

$[-3, \infty)$

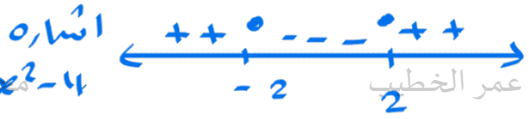
---

(22) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$

مجال الدالة

$x^2-4 \geq 0$

اشارة x^2-4



فترة الاتصال هي

$(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

---

(23) $f(x)=\sqrt[3]{x+2}$

مجال الدالة هو

$(-\infty, \infty)$

فترة الاتصال هي

$(-\infty, \infty)$

---

(24) $f(x)=(x-1)^{3/2} = \sqrt{(x-1)^3}$

$(x-1)^3 \geq 0$

$x-1 \geq 0$

$x \geq 1$

فترة الاتصال هي

$[1, \infty)$

---

(25) $f(x)=sin^{-1}(x+2)$

تذكر أن مجال $\sin^{-1}x$ هو $[-1,1]$

$-1 \leq x+2 \leq 1$

$-3 \leq x \leq -1$

فترة الاتصال هي

$[-3,-1]$

محمد عمر الخطيب

(26) $f(x) = ln(\sin x)$

مجال الدالة

$\sin x > 0$



$0 < x < \pi$

$D = (0, \pi) + 2n\pi$

$n \in Z$

فترة الاتصال

$(0, \pi) + 2n\pi \;,\; n \in Z$

او

$(2n\pi \;,\; (2n+1)\pi) \;,\; n \in Z$

او

$\dots \cup (-2\pi, -\pi) \cup (0, \pi) \cup (2\pi, 3\pi) \cup \dots$

---

(27) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} + e^x}{x^2 - 2}$

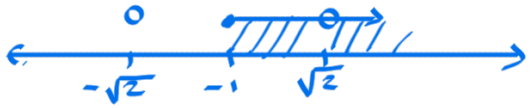
المجال

البسط $x + 1 \geq 0$

$x \geq -1$

المقام R

اصفار المقام $x = \pm\sqrt{2}$



$D = [-1, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$

فترة الاتصال هي

$[-1, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$

---

(28) $f(x) = \dfrac{ln(x^2 - 1)}{\sqrt{x^2 - 2x}}$

مجال الدالة

تجميع الخطوتين

البسط $x^2 - 1 > 0$



المقام $x^2 - 2x \geq 0$



اصفار المقام $x = 0, 2$



$D = (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$

فترة الاتصال هي

$(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$

(مثال4.2) اكتب الدلة الموسعة للدالة : $g(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$ حتى تصبح متصلة عند $x=1$

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+3)}{x-1} = 4$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x-3}{x-1} & x\neq 1 \\ 4 & x=1 \end{cases}$$

★ ممكن ان يكون نص السؤال بالشكل التالي

(1) اكتب الدلة الموسعة للدالة : $g(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$ حتى تصبح متصلة على مجموعة الاعداد الحقيقية

اولاً نجد نقطة الانفصال وهي $x=1$

ثم نكمل الحل بنفس خطوات السؤال السابق .

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+3)}{x-1} = 4$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x-3}{x-1} & x\neq 1 \\ 4 & x=1 \end{cases}$$

محمد عمر الخطيب

(2) ان قيمة $g(1)$ التي تجعل الدالة: $g(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$ متصلة على مجموعة الاعداد الحقيقية هي

$$g(1)=\lim_{x\to 1} g(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{x-1}=4$$

---

(3) اوجد قيمة الثابت a حتى تصبح الدالة $g(x)$ متصلة في كل مكان:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1} & , \quad x\neq 1\\ a & , \quad x=1\end{cases}$$

$$a=g(1)=\lim_{x\to 1} g(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{x-1}=4$$

$$\boxed{a=4}$$

---

(4) نوع انفصال الدالة : $g(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$ عند $x=1$ هو

(a) فجوة قابلة للازالة

(b) قفزة غير قابلة للازالة

(c) لانهائي غير قابلة الازالة

(d) تذبذبي غير قابلة للازالة

الدالة غير معرفة عند $x=1$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{x-1}=4$$

موجودة

فجوة

اوجد قيمة النهايات التالية اذا وجدت

(9) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x-2}{3x^2+4x-1}$ $= \frac{1}{3}$

---

(10) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-x+1}{4x^2-3x-1}$ $= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

---

(11) $\lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{\sqrt{4+x^2}}$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2}}$

$= \lim \frac{-x}{|x|}$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{-x} = 1$

---

(12) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-1}{4x^3-5x-1}$ $= 0$

درجة البسط اقل من درجة المقام

(13) $\lim_{x\to\infty} ln(\frac{x^2+1}{x-3})$ $= Ln\left(\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x-3}\right)$

بدل النهاية مع Ln

$= Ln(\infty) = \infty$

---

(14) $\lim_{x\to 0^+} ln(x\,sin\,x)$ $= Ln\left(\lim_{x\to 0^+} x\,\sin x\right)$

$= Ln(0^+) = -\infty$

(a19) تمثل الدالة $s(t)=16t^2+10$ موقع جسم بالقدم عند الزمن t ثانية اوجد السرعة المتجهة المتوسطة بين $t=0$ و $t=2$

$$v_{avg}=\frac{s(2)-s(0)}{2-0}$$

$$=\frac{74-10}{2}=32 \text{ ft/s}$$

(b19) تمثل الدالة $s(t)=16t^2+10$ موقع جسم بالقدم عند الزمن t ثانية اوجد السرعة المتجهة المتوسطة بين $t=1$ و $t=2$

$$v_{avg}=\frac{s(2)-s(1)}{2-1}$$

$$=\frac{74-26}{1}=48 \text{ ft/s}$$

(c19) تمثل الدالة $s(t)=16t^2+10$ موقع جسم بالقدم عند الزمن t ثانية اوجد السرعة المتجهة المتوسطة بين $t=1.9$ و $t=2$

$$v_{avg}=\frac{s(2)-s(1.9)}{2-1.9}$$

$$=\frac{74-67.76}{0.1}=62.4 \text{ ft/s}$$

(d19) تمثل الدالة $s(t)=16t^2+10$ موقع جسم بالقدم عند الزمن t ثانية اوجد السرعة المتجهة المتوسطة بين $t=1.99$ و $t=2$

$$v_{avg}=\frac{s(2)-s(1.99)}{2-1.99}$$

$$=\frac{74-73.3616}{0.01}=63.84 \text{ ft/s}$$

(e19) تمثل الدالة $s(t)=16t^2+10$ موقع جسم بالقدم عند الزمن t ثانية قدر السرعة المتجهة اللحظية عند $t=2$

$$v(t)=s'(t)=32t$$

$$v(2)=32(2)=64 \text{ ft/s}$$

* يمكنه حل السؤال بأكثر من طريقة

(a20) تمثل الدالة $s(t)=3t^3+t$ موقع جسم بالقدم عند الزمن t ثانية اوجد السرعة المتجهة المتوسطة بين $t=0$ و $t=2$

$$v_{avg}=\frac{s(2)-s(0)}{2-0}$$

$$=\frac{26-0}{2}=13 \text{ ft/s}$$

(b20) تمثل الدالة $s(t)=3t^3+t$ موقع جسم بالقدم عند الزمن t ثانية اوجد السرعة المتجهة المتوسطة بين $t=1$ و $t=2$

$$v_{avg}=\frac{s(2)-s(1)}{2-1}$$

$$=\frac{26-4}{1}=22 \text{ ft/s}$$

(c20) تمثل الدالة $s(t)=3t^3+t$ موقع جسم بالقدم عند الزمن t ثانية اوجد السرعة المتجهة المتوسطة بين $t=1.9$ و $t=2$

$$v_{avg}=\frac{s(2)-s(1.9)}{2-1.9}$$

$$=\frac{26-22.477}{0.1}=35.23 \text{ ft/s}$$

(d20) تمثل الدالة $s(t)=3t^3+t$ موقع جسم بالقدم عند الزمن t ثانية اوجد السرعة المتجهة المتوسطة بين $t=1.99$ و $t=2$

$$v_{avg}=\frac{s(2)-s(1.99)}{2-1.99}$$

$$=\frac{26-25.6318}{0.01}=36.8203 \text{ ft/s}$$

(20e) تمثل الدالة $s(t)=3t^3+t$ موقع جسم بالقدم عند الزمن t ثانية اوجد السرعة المتجهة اللحظية عند $t=2$

$$v(t)=s'(t)=9t^2+1$$

$$v(2)=9(2)^2+1=37 \text{ ft/s}$$

(a21) تمثل الدالة $s(t)=\sqrt{t^2+8t}$ موقع جسم بالقدم عند الزمن t ثانية اوجد السرعة المتجهة المتوسطة بين $t=0$ و $t=2$

$$v_{avg}=\frac{s(2)-s(0)}{2-0}$$

$$=\frac{\sqrt{20}-0}{2}=2.236 \ ft/s$$

(b21) تمثل الدالة $s(t)=\sqrt{t^2+8t}$ موقع جسم بالقدم عند الزمن t ثانية اوجد السرعة المتجهة المتوسطة بين $t=1$ و $t=2$

$$v_{avg}=\frac{s(2)-s(1)}{2-1}$$

$$=\frac{\sqrt{20}-3}{1}=1.472 \ ft/s$$

(c21) تمثل الدالة $s(t)=\sqrt{t^2+8t}$ موقع جسم بالقدم عند الزمن t ثانية اوجد السرعة المتجهة المتوسطة بين $t=1.9$ و $t=2$

$$v_{avg}=\frac{s(2)-s(1.9)}{2-1.9}$$

$$=\frac{\sqrt{20}-\sqrt{18.81}}{0.1}=1.35 \ ft/s$$

(d21) تمثل الدالة $s(t)=\sqrt{t^2+8t}$ موقع جسم بالقدم عند الزمن t ثانية اوجد السرعة المتجهة المتوسطة بين $t=1.99$ و $t=2$

$$v_{avg}=\frac{s(2)-s(1.99)}{2-1.99}$$

$$=\frac{\sqrt{20}-\sqrt{19.88}}{0.01}=1.342 \ ft/s$$

(e21) تمثل الدالة $s(t)=\sqrt{t^2+8t}$ موقع جسم بالقدم عند الزمن t ثانية اوجد السرعة المتجهة اللحظية عند $t=2$

$$v=s'(t)=\frac{2t+8}{2\sqrt{t^2+8t}}$$

$$v(2)=\frac{2(2)+8}{2\sqrt{2^2+8(2)}}=1.3416 \ ft/s$$

(a22) تمثل الدالة $s(t)=3sin(t-2)$ موقع جسم بالقدم عند الزمن t ثانية اوجد السرعة المتجهة المتوسطة بين $t=0$ و $t=2$

$$v_{avg}=\frac{s(2)-s(0)}{2-0}$$

$$=\frac{0-(-2.7279)}{2}=1.3639\ ft/s$$

(b22) تمثل الدالة $s(t)=3sin(t-2)$ موقع جسم بالقدم عند الزمن t ثانية اوجد السرعة المتجهة المتوسطة بين $t=1$ و $t=2$

$$v_{avg}=\frac{s(2)-s(1)}{2-1}$$

$$=\frac{0-(-2.5244)}{1}=2.5244\ ft/s.$$

(c22) تمثل الدالة $s(t)=3sin(t-2)$ موقع جسم بالقدم عند الزمن t ثانية اوجد السرعة المتجهة المتوسطة بين $t=1.9$ و $t=2$

$$v_{avg}=\frac{s(2)-s(1.9)}{2-1.9}$$

$$=\frac{0-(-2.995)}{0.1}=2.995\ ft/s.$$

(d22) تمثل الدالة $s(t)=3sin(t-2)$ موقع جسم بالقدم عند الزمن t ثانية اوجد السرعة المتجهة المتوسطة بين $t=1.99$ و $t=2$

$$v_{avg}=\frac{s(2)-s(1.99)}{2-1.99}$$

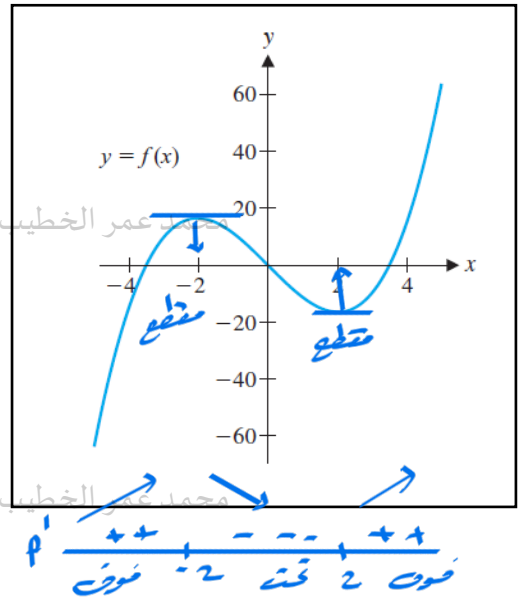
$$=\frac{0-(-0.03)}{0.01}=3\ ft/s.$$

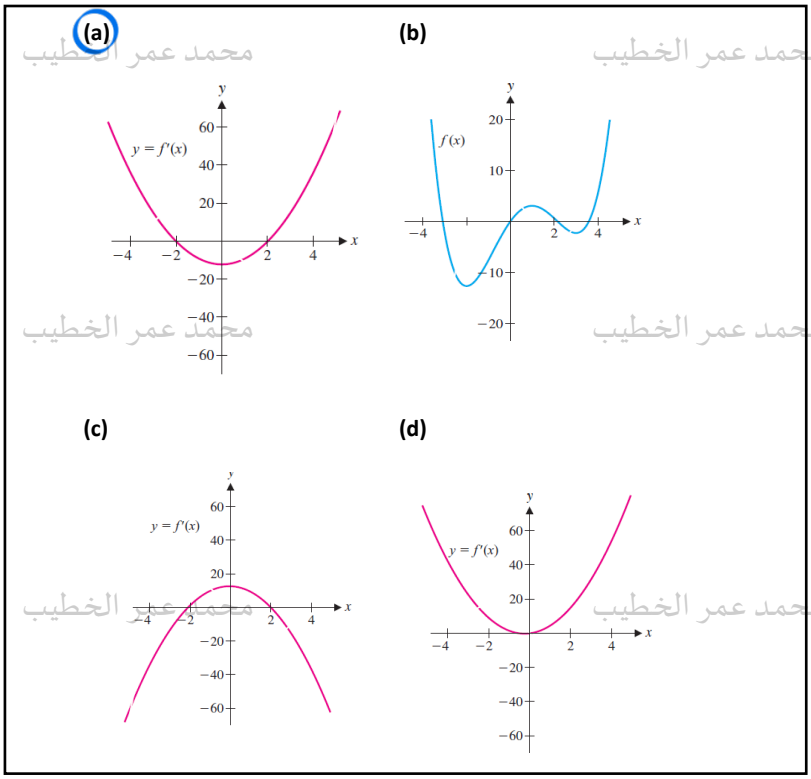
(e22) تمثل الدالة $s(t)=3sin(t-2)$ موقع جسم بالقدم عند الزمن t ثانية اوجد السرعة المتجهة اللحظية عند $t=2$

$$v(t)=s'(t)=3\cos(t-2)$$

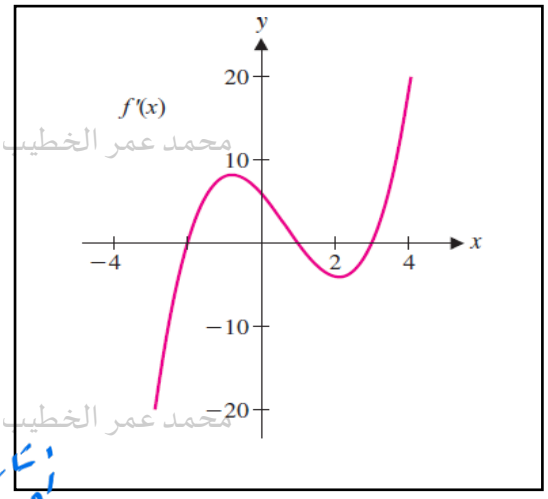
$$v(2)=3\cos(0)=3\ ft/s$$

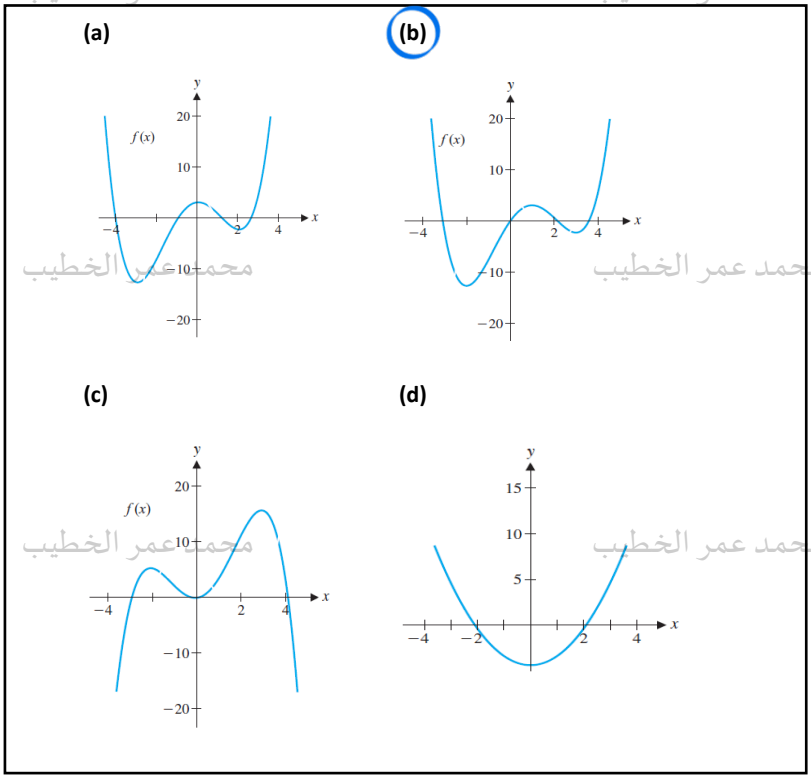
مثال(2.5) استخدم التمثيل البياني الموضح للدالة f لاختيار التمثيل البياني للدالة f'



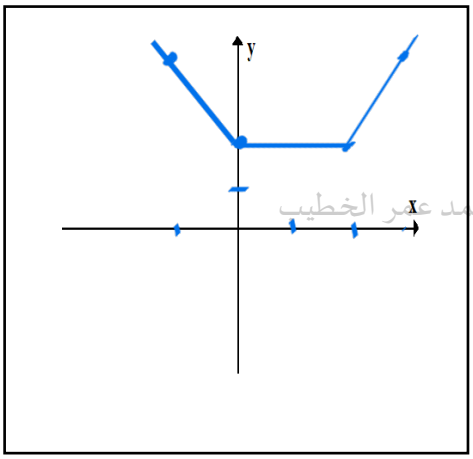


مثال(2.6) استخدم التمثيل البياني الموضح للدالة f' لاختيار التمثيل البياني للدالة f





(a29) مثل بيانياً وحدد جميع قيم x التي تكون عندها الدالة $f(x)=|x|+|x-2|$ غير قابلة للاشتقاق



$|x|$: $-x$ | x | x

$|x-2|$: $-x+2$ | 0 | $-x+2$ | 2 | $x-2$

f : $-2x+2$ | 2 | $2x-2$

f' : -2 | 0 | 2

$x=0, x=2$ عند الدالة غير قابلة للاشتقاق

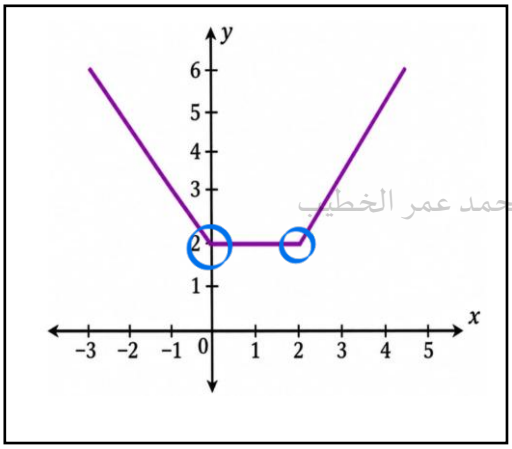
لرسم هذه الدالة

f : $-2x+2$ | 2 | $2x-2$

x	-1	0	0	1	2	2	3
f	4	2	2	2	2	2	4

(*a29) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f(x)=|x|+|x-2|$ ، ان جميع قيم x التي تكون عندها الدالة غير قابلة للاشتقاق هي

المشتقة غير موجودة عند الركن



(a) $x=0$ (b) $x=2$

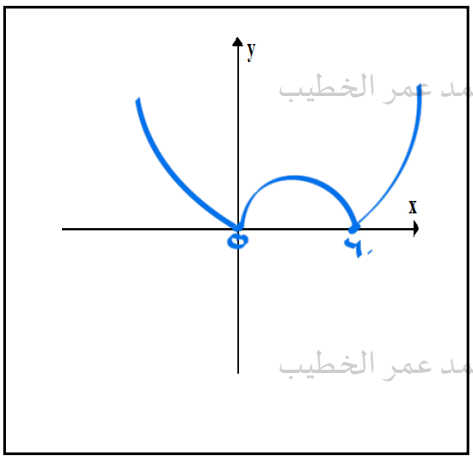
(c) $x=0, x=2$ (d) $0 \le x \le 2$

(b29) مثل بيانياً وحدد جميع قيم x التي تكون عندها الدالة $f(x)=|x^2-4x|$ غير قابلة للاشتقاق



لرسم هذه الدالة
(1) ارسم الدالة $g(x)=x^2-4x$
(2) اعمل انعكاس للجزء الذي يقع تحت محور x

الدالة غير قابلة للاشتقاق عند الزوايا الحرجة
$x=0, x=4$



(b29*) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f(x)=|x^2-4x|$ ، ان جميع قيم x التي تكون عندها الدالة غير قابلة للاشتقاق هي

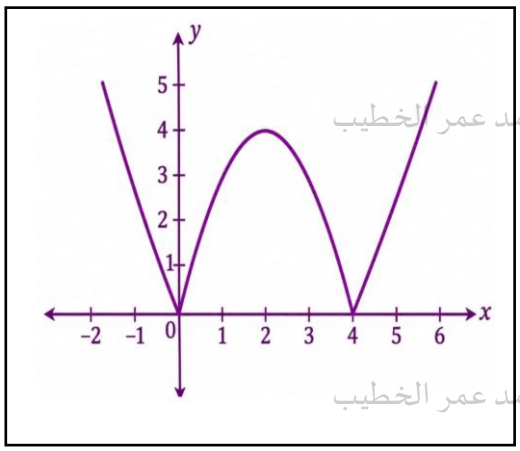
(a) $x=0$

(b) $x=2$

(c) $x=4$

(d) $x=0, x=4$

زوايا حرجة



محمد عمر الخطيب

(a30) حدد جميع قيم x التي تكون عندها الدالة $f(x)=e^{-2/x}$ غير قابلة للاشتقاق

المشتقة غير موجودة عند

(1) أصفار مقام الدالة (أصفار البسط)

(2) أصفار مقام المشتقة

الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $x=0$

(b30) حدد جميع قيم x التي تكون عندها الدالة $f(x)=e^{-2/(x^3-x)}$ غير قابلة للاشتقاق

أصفار مقام البسط

$x^3-x=0$

$x=0,\pm 1$

الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $x=0,\pm 1$

اوجد مشتقة كل من الدوال التالية

(7) $f(x)=\dfrac{10}{\sqrt[3]{x}}-2x+\pi$ $= 10x^{-1/3} - 2x + \pi$

$f'(x) = -\frac{10}{3}x^{-4/3} - 2$

$= \frac{10}{3x^{4/3}} - 2 = \frac{10}{3\sqrt[3]{x^4}} - 2$

---

(8) $f(x)=12x-x^2-\dfrac{10}{\sqrt[3]{x^2}}$ $= 12x - x^2 - 10x^{-2/3}$

$f'(x) = 12 - 2x + \frac{20}{3}x^{-5/3}$

$= 12 - 2x + \frac{20}{3x^{5/3}}$

$= 12 - 2x + \frac{20}{3\sqrt[3]{x^5}}$

---

(9) $f(s)=2s^{3/2}-3s^{-1/3}$

$f'(s) = 2\cdot\frac{3}{2}s^{1/2} - 3\cdot\frac{-1}{3}s^{-4/3}$

$= 3s^{1/2} + s^{-4/3}$

$= 3\sqrt{s} + \frac{1}{s^{4/3}} = 3\sqrt{s} + \frac{1}{\sqrt[3]{s^4}}$

---

(10) $f(t)=3t^{\pi}-2t^{1.3}$

$f'(t) = 3t^{\pi-1} - 2.6t^{0.3}$

(11) $f(x)=\dfrac{3x^2-3x+1}{2x}$ $= \frac{3x^2}{2x} - \frac{3x}{2x} + \frac{1}{2x} = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} + \frac{1}{2x}$.

$f'(x) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{x^2}$

$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2x^2}$

* يمكن استخدام قاعدة القسمة

---

(12) $f(x)=\dfrac{4x^2-x+3}{\sqrt{x}}$ $= \frac{4x^2}{\sqrt{x}} - \frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x}} = \frac{4x^3}{x^{1/2}} - \frac{x}{x^{1/2}} + \frac{3}{x^{1/2}}$

$f(x) = 4x^{3/2} - x^{1/2} + 3x^{-1/2}$

$f'(x) = 6x^{1/2} - \frac{1}{2}x^{-1/2} - \frac{3}{2}x^{-3/2}$

$= 6\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2\sqrt{x^3}}$

---

(13) $f(x)=x(3x^2-\sqrt{x})$ $= 3x^3 - x^{3/2}$

$f'(x) = 9x^2 - \frac{3}{2}x^{1/2}$

$= 9x^2 - \frac{3}{2}\sqrt{x}$

---

(14) $f(x)=(x+1)(3x^2-4)$ $= 3x^3 - 4x + 3x^2 - 4$

$= 3x^3 + 3x^2 - 4x - 4$.

$f'(x) = 9x^2 + 6x - 4$.

* يمكن حل السؤال بقاعدة الضرب

(a21) بفرض ان $f(x), g(x)$ دوال قابلة للاشتقاق حيث $f'(0)=-1, f(0)=-1$

و $g'(0)=-1, g(0)=3$

فاوجد معادلة المماس للدالة $h(x)$ عند $x=0$ حيث $h(x)=f(x)g(x)$

ميل نقطة

$m=2$ $(0,-3)$

$x_1=0 \Rightarrow y_1=h(0)=f(0)\cdot g(0)$

$=-1\times 3=-3$

النقطة $(0,-3)$

$h'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$

$m_t=h'(0)=f'(0)\cdot g(0)+f(0)\cdot g'(0)$

$=(-1)(3)+(-1)(-1)$

$=-2$

الميل $m=-2$

معادلة مماس الدالة $h(x)$ عند $x=0$ هي

$y+3=-2(x-0)$

$y=-2x-3$

(a21) بفرض ان $f(x), g(x)$ دوال قابلة للاشتقاق حيث $f'(1)=3, f(1)=-2$

و $g'(1)=-2, g(1)=1$

فاوجد معادلة المماس للدالة $h(x)$ عند $x=1$ حيث $h(x)=f(x)g(x)$

ميل نقطة

$m=7$ $(1,-2)$

$x_1=1 \Rightarrow y_1=h(1)=f(1)\cdot g(1)$

$=-2\times 1=-2$

النقطة $(1,-2)$

$h'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$

$m_t=h'(1)=f'(1)\cdot g(1)+f(1)\cdot g'(1)$

$=3\times 1+(-2)(-2)$

$=7$

الميل $m_t=7$

معادلة مماس الدالة $h(x)$ عند $x=1$ هي

$y+2=7(x-1)$

$y+2=7x-7$

$y=7x-9$

(a22) بفرض ان $f(x), g(x)$ دوال قابلة للاشتقاق حيث $f(1)=-2 \, , f'(1)=3$

و $g(1)=1 \, , g'(1)=-2$

فاوجد معادلة المماس للدالة $h(x)$ عند $x=1$ حيث $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$x_1=1 \Rightarrow y_1=h(1)=\dfrac{f(1)}{g(1)}=\dfrac{-2}{1}=-2$

النقطة $(1,-2)$

$h'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)g(x)}{[g(x)]^2}$

$m_t=h'(1)=\dfrac{f'(1)g(1)-f(1)g(1)}{[g(1)]^2}$

$=\dfrac{(3)(1)-(-2)(-2)}{1^2}$

$=-1$

معادلة المماس للدالة $h(x)$

$y+2=-1(x-1)$

$y+2=-x+1$

$y=-x-1$

(b22) بفرض ان $f(x), g(x)$ دوال قابلة للاشتقاق حيث $f(0)=-1 \, , f'(0)=-1$

و $g(0)=3 \, , g'(0)=-1$

فاوجد معادلة المماس للدالة $h(x)$ عند $x=0$ حيث $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$x_1=0 \Rightarrow y_1=h(0)=\dfrac{f(0)}{g(0)}=\dfrac{-1}{3}=-\dfrac{1}{3}$

النقطة $(0,-\frac{1}{3})$

$h'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)g(x)}{[g(x)]^2}$

$m_t=h'(0)=\dfrac{f'(0)g(0)-f(0)g(0)}{[g(0)]^2}$

$=\dfrac{(-1)(3)-(-1)(-1)}{3^2}$

$=-\dfrac{4}{9}$

معادلة المماس للدالة $h(x)$

$y+\frac{1}{3}=-\frac{4}{9}(x-0)$

$y=-\frac{4}{9}x-\frac{1}{3}$

محمد عمر الخطيب

(a23) بفرض ان $f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق حيث $f'(1)=3\,,f(1)=-2$

فاوجد معادلة المماس للدالة $h(x)$ عند $x=1$ حيث $h(x)=x^2f(x)$

$x_1=1 \Rightarrow y_1=h(1)=1^2f(1)=-2$

النقطة $(1,-2)$

$h'(x)=2x\cdot f(x)+x^2f'(x)$

$m_t=h'(1)=2(1)f(1)+1^2\cdot f'(1)$

$=2(-2)+3$

$=-1$

معادلة المماس

$y+2=-1(x-1)$

$y+2=-x+1$

$y=-x-1$

(b23) بفرض ان $f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق حيث $f'(0)=-1\,,f(0)=-1$

فاوجد معادلة المماس للدالة $h(x)$ عند $x=0$ حيث $h(x)=x^2f(x)$

$x_1=0 \Rightarrow y_1=h(0)=0^2\times f(0)=0$

النقطة $(0,0)$

$h'(x)=2x\cdot f(x)+x^2f'(x)$

$m_t=h'(0)=2(0)f(0)+0^2\cdot f'(0)$

$=0$

معادلة المماس

$y-0=0(x-0)$

$y=0$

(a24) بفرض ان الدالة $g(x)$ قابلة للاشتقاق حيث $g(1)=1\ ,g'(1)=-2$

فاوجد معادلة المماس للدالة $h(x)$ عند $x=1$ حيث $h(x)=\dfrac{x^2}{g(x)}$

$x_1=1 \Rightarrow y_1=h(1)=\dfrac{1^2}{g(1)}=\dfrac{1}{1}=1$

النقطة $(1\ ,1)$

$h'(x)=\dfrac{2x\,g(x)-x^2g'(x)}{(g(x))^2}$

$m_t=h'(1)=\dfrac{2(1)g(1)-1^2\cdot g'(1)}{(g(1))^2}$

$=\dfrac{2(1)(1)-(-2)}{1^2}=4.$

معادلة المماس

$y-1=4(x-1)$

$y-1=4x-4$

$y=4x-3.$

(b24) بفرض ان الدالة $g(x)$ قابلة للاشتقاق حيث $g(0)=3\ ,g'(0)=-1$

فاوجد معادلة المماس للدالة $h(x)$ عند $x=0$ حيث $h(x)=\dfrac{x^2}{g(x)}$

$x_1=0 \Rightarrow y_1=h(0)=\dfrac{0^2}{g(0)}=\dfrac{0}{1}=0$

النقطة $(0\ ,0)$

$h'(x)=\dfrac{2x\,g(x)-x^2g'(x)}{(g(x))^2}$

$m_t=h'(0)=\dfrac{2(0)g(0)-0^2\cdot g'(0)}{(g(0))^2}$

$=0$

معادلة المماس

$y-0=0(x-0)$

$y=0.$

(31) استخدم المعلومات التالية

$$f(1)=3, g(1)=2, f'(1)=4, f'(2)=3, g'(1)=-2, g'(3)=5$$

اوجد $h'(1)$ **حيث** $h(x)=f(g(x))$

$$h(x)=f(g(x))$$
$$h'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$$
$$h'(1)=f'(g(1))\cdot g'(1)$$
$$=f'(2)\cdot(-2)$$
$$=3(-2)$$
$$=-6$$

---

(32) استخدم المعلومات التالية

$$f(2)=1, g(2)=3,, f'(2)=-1, f'(3)=-3, g'(1)=2, g'(2)=4$$

اوجد $h'(2)$ **حيث** $h(x)=f(g(x))$

$$h(x)=f(g(x))$$
$$h'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$$
$$h'(2)=f'(g(2))\cdot g'(2)$$
$$=f'(3)\cdot(4)$$
$$=-3(4)$$
$$=-12$$

(33) تسمى الدالة $f(x)$ دالة زوجية اذا حققت $f(-x)=f(x)$ لكل قيم x

وتسمى دالة فردية اذا حققت $f(-x)=-f(x)$ لكل قيم x

(أ) اثبت ان مشتقة الدالة الزوجية هي دالة فردية

الاثبات : بما ان الدالة المعطى زوجية فانها تحقق

$f(-x)=f(x)$

اشتق الطرفين

$f'(-x)(-1)=f'(x)$

$-f'(-x)=f'(x)$

$f'(-x)=-f'(x)$

وهذ تعريف الدالة الفردية

$\therefore f'(x)$ دالة فردية #

(ب) اثبت ان مشتقة الدالة الفردية هي دالة زوجية

الاثبات : بما ان الدالة $f(x)$ المعطى فردية فان $f(-x)=-f(x)$

اشتق الطرفين

$f'(-x)(-1)=-f'(x)$

$f'(-x)=f'(x)$ وهذ تعريف الدالة الزوجية

$\therefore f'$ دالة زوجية #

ممكن ان يكون السؤال بالطريقة التالية

(❖) اذا كانت $f(x)$ دالة زوجية فاي من العبارات التالية صحيحة دائماً

(a) الدالة $f'(x)$ هي دالة زوجية

(b) الدالة $f'(x)$ هي دالة فردية

(c) الدالة $f'(x)$ هي دالة ليست فردية وليست دالة زوجية

(d) لا يمكن تحديد نوع الدالة $f'(x)$

(34) يكون التمثيل البياني للدالة $f(x)$ متماثل حول المستقيم $x=a$

اذا حققت $f(a+x)=f(a-x)$

يكون التمثيل البياني للدالة $f(x)$ متماثل حول النقطة $(a,0)$

اذا حققت $f(a+x)=-f(a-x)$

اثبت ان مشتقة الدالة المتماثلة حول المستقيم $x=a$ هي دالة متماثلة حول النقطة $(a,0)$

الاثبات : لتكن f دالة متماثلة حول المستقيم $x=a$ فان

$$f(a+x)=f(a-x)$$

اشتق الطرفين

$$f'(a+x)\times(1)=f'(a-x)\times(-1)$$

$$f'(a+x)=-f'(a-x)$$

وهذا تعريف الدالة المتماثلة حول النقطة $(a,0)$

f' دالة متماثلة حول النقطة $(a,0)$

ممكن ان يكون السؤال بالطريقة التالية

(★) اذا كانت $f(x)$ دالة متماثل حول المستقيم $x=a$ فاي من العبارات التالية صحيحة دائماً

(a) الدالة $f'(x)$ تكون متماثلة حول المستقيم $x=a$

(b) الدالة $f'(x)$ تكون متماثلة حول المستقيم $x=-a$

(c) الدالة $f'(x)$ تكون متماثلة حول النقطة $(a,0)$

(d) الدالة $f'(x)$ تكون متماثلة حول النقطة $(0,a)$

محمد عمر الخطيب

اوجد كل مما يأتي

$(35.a)\ \dfrac{d}{dx}f(x^2)$ $= f'(x^2)\cdot 2x$

$= 2x\, f'(x^2)$

$(35.b)\ \dfrac{d}{dx}[f(x)]^2$ $= 2[f(x)]^1 \cdot f'(x)$

$= 2\, f(x)\cdot f'(x)$

$(35.c)\ \dfrac{d}{dx}f(f(x))$ $= f'(f(x))\cdot f'(x)$

$(36.a)\ \dfrac{d}{dx}f(\sqrt{x})$ $= f'(\sqrt{x})\cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\, f'(\sqrt{x})$

$(36.b)\ \dfrac{d}{dx}\sqrt{f(x)} = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

$(36.c)\ \dfrac{d}{dx}f(x\,f(x))$ $= f'(x\,f(x))\,[1\cdot f(x) + x\cdot f'(x)]$

☆ رتب الحل (مهم جداً) حتى لا تخطئ.

(17) اذا كانت الدالة $f(x)=x^3+4x-1$ لها معكوس هي $g(x)$، فاوجد $g'(-1)$

افرض ان
$g(-1)=a$
$f^{-1}(-1)=a$
$-1=f(a)$
$f(a)=-1$
$a^3+4a-1=-1$
$a^3+4a=0$
$a(a^2+4)=0$
$a=0$ نبذ وحيده.

$f'(x)=3x^2+4$
$f'(0)=4$

$g'(-1)=\frac{1}{f'(g(-1))}$
$=\frac{1}{f'(0)}$
$=\frac{1}{4}$.

---

(18) اذا كانت الدالة $f(x)=x^5+4x-2$ لها معكوس هي $g(x)$، فاوجد $g'(-2)$

$g(-2)=a$.
$f^{-1}(-2)=a$.
$-2=f(a)$
$f(a)=-2$
$a^5+4a-2=-2$
$a(a^4+4)=0$
$a=0$

$f'(x)=5x^4+4$.
$f'(0)=4$.

$g'(-2)=\frac{1}{f'(g(-2))}$
$=\frac{1}{f'(0)}$
$=\frac{1}{4}$

---

(19) اذا كانت الدالة $f(x)=x^5+3x^3+x$ لها معكوس هي $g(x)$، فاوجد $g'(5)$

$g(5)=a$.
$f^{-1}(5)=a$.
$5=f(a)$
$f(a)=5$
$a^5+3a^3+a=5$
$a^5+3a^3+a-5=0$
$a=1$ تخمين

$f'(x)=5x^4+9x^2+1$
$f'(1)=15$

$g'(5)=\frac{1}{f'(g(5))}$
$=\frac{1}{f'(1)}$
$=\frac{1}{15}$.

(20) اذا كانت الدالة $f(x)=x^3+2x+1$ لها معكوس هي $g(x)$ ، فاوجد $g'(-2)$

$g(-2)=a$

$f'(-2)=a$

$-2=f(a)$

$f(a)=-2$

$a^3+2a+1=-2$

$a^3+2a+3=0$

من الاله او تخمين

$a=-1$

$f'(x)=3x^2+2$

$f'(-1)=5$

$g'(-2)=\frac{1}{f'(g(-2))}$

$=\frac{1}{f'(-1)}$

$=\frac{1}{5}$

---

(21) اذا كانت الدالة $f(x)=\sqrt{x^3+2x+4}$ لها معكوس هي $g(x)$ ، فاوجد $g'(2)$

$g(2)=a$

$f'(2)=a$

$2=f(a)$

$f(a)=2$

$\sqrt{a^3+2a+4}=2$

$a^3+2a+4=4$

$a(a^2+2)=0$

$a=0$

$f'(x)=\frac{3x^2+2}{2\sqrt{x^3+2x+4}}$

$f'(0)=\frac{2}{4}$

$=1/2$

$g'(2)=\frac{1}{f'(g(2))}$

$=\frac{1}{f'(0)}$

$=\frac{1}{1/2}$

$=2$

---

(22) اذا كانت الدالة $f(x)=\sqrt{x^5+4x^3+3x+1}$ لها معكوس هي $g(x)$ ، فاوجد $g'(3)$

$g(3)=a$

$f'(3)=a$

$3=f(a)$

$f(a)=3$

$\sqrt{a^5+4a^3+3a+1}=3$

$a^5+4a^3+3a+1=9$

$a^5+4a^3+3a-8=0$

بالتخمين

$a=1$

$f'(x)=\frac{5x^4+12x^2+3}{2\sqrt{x^5+4x^3+3x+1}}$

$f'(1)=\frac{10}{3}$

$g'(3)=\frac{1}{f'(g(3))}$

$=\frac{1}{f'(1)}$

$=\frac{1}{10/3}$

$=\frac{3}{10}$

اوجد مشتقة كل دالة فيما يلي

(9) $f(t)=\sin 3t\ \sec 3t$ $= \sin 3t \cdot \frac{1}{\cos 3t} = \tan 3t$

$f'(t) = \sec^2 3t \cdot 3 = 3\sec^2 3t$

---

(10) $f(t)=\sqrt{\cos 5t\ \sec 5t}$ $= \sqrt{\cos 5t \cdot \frac{1}{\cos 5t}} = \sqrt{1} = 1$

$f'(t) = 0$

---

(11) $f(w)=\frac{1}{\sin 4w}$ $= \csc 4w$ * يحل بطرق ثانية

$f'(w) = -\csc 4w \cot 4w \cdot 4 = -4\csc 4w \cot 4w$

---

(12) $f(w)=w^2\sec^2 3w$ $= w^2(\sec 3w)^2$

$f'(w) = 2w\sec^2 3w + w^2 \cdot 2(\sec 3w)'\sec 3w \tan 3w \cdot 3$

$= 2w\sec^2 3w + 6w^2\sec^2 3w \tan 3w$

---

(13) $f(x)=2\sin 2x\cos 2x$ يحل السؤال بأكثر من طريقة

$f'(x) = 2\cos 2x \cdot 2 \cdot \cos 2x + 2\sin 2x \cdot (-\sin 2x) \cdot 2$

$= 4\cos^2 2x - 4\sin^2 2x = 4\cos 4x$

---

(14) $f(x)=4\sin^2 3x + 4\cos^2 3x$ $= 4(\sin^2 3x + \cos^2 3x) = 4$

$f'(x) = 0$ متطابقة فيثاغورس

(15) $f(x) = tan\sqrt{x^2+1}$

$$f'(x) = \sec^2\sqrt{x^2+1} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \sec^2\sqrt{x^2+1}$$

---

(16) $f(x) = 4x^2 \sin x \sec 3x$

$$f'(x) = 8x \sin x \sec 3x + 4x^2 \cos x \cdot \sec 3x + 4x^2 \sin x \cdot \sec 3x \cdot \tan 3x \cdot 3$$

$$= 8x \sin x \cdot \sec 3x + 4x^2 \cos x \cdot \sec 3x + 12x^2 \sin x \sec 3x \cdot \tan 3x$$

---

(17) $f(x) = \sin^3(\cos\sqrt{x^3+2x^2}) = \left[\sin(\cos\sqrt{x^3+2x^2})\right]^3$

$$f'(x) = 3\left[\sin(\cos\sqrt{x^3+2x^2})\right]^2 \cdot \cos(\cos\sqrt{x^3+2x^2}) \times (-\sin\sqrt{x^3+2x^2}) \cdot \frac{3x^2+4x}{2\sqrt{x^3+2x^2}}$$

---

(18) $f(x) = \tan^4(\sin^2(x^3+2x)) = \left[\tan(\sin(x^3+2x))^2\right]^4$

$$= 4\tan^3(\sin^2(x^3+2x)) \cdot \sec^2(\sin^2(x^3+2x)) \cdot 2\sin(x^3+2x) \cdot \cos(x^3+2x) \cdot (3x^2+2x)$$

اوجد كل قيم x التي يكون عندها المماس على المنحنى $y=f(x)$ افقيا

المماس افقي

$(29a)\ f(x)=xe^{-2x}$

$f(x)=1\cdot e^{-2x}+x\cdot e^{-2x}\cdot(-2)$

$=e^{-2x}(1-2x)$

$=\frac{1-2x}{e^{2x}}$

$f'(x)=m=0$

$\frac{1-2x}{e^{2x}}=0$

$1-2x=0$

$\boxed{x=\frac{1}{2}}$

$(29b)\ f(x)=xe^{-3x}$

$f'(x)=1\cdot e^{-3x}+x\,e^{-3x}\cdot(-3)$

$=e^{-3x}(1-3x)$

$=\frac{1-3x}{e^{3x}}$

$f'(x)=m=0$

$\frac{1-3x}{e^{3x}}=0$

$1-3x=0$

$x=\frac{1}{3}$

$(30a)\ f(x)=x^2e^{-2x}$

$f'(x)=2x\,e^{-2x}+x^2e^{-2x}(-2)$

$=e^{-2x}(2x-2x^2)$

$=\frac{2x-2x^2}{e^{2x}}$

$f'(x)=m=0$

$\frac{2x-2x^2}{e^{2x}}=0$

$2x-2x^2$

$x=0\ ,\ x=1$

$(30b)\ f(x)=x^2e^{-3x}$

$f'(x)=2x\,e^{-3x}+x^2e^{-3x}(-3)$

$=e^{-3x}(2x-3x^2)$

$=\frac{2x-3x^2}{e^{3x}}$

$f'(x)=m=0$

$\frac{2x-3x^2}{e^{3x}}=0$

$2x-3x^2=0$

$x=0\ ,\ x=\frac{2}{3}$

اوجد مشتقة كل دالة فيما يلي

$(20a)\quad f(x)=\dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}$ $= \dfrac{(\ln x)^{1/2}}{x}$

$$f'(x)=\frac{\frac{1/x}{2\sqrt{\ln x}}\cdot x-\sqrt{\ln x}\cdot 1}{x^2}$$

$$=\frac{\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}-\sqrt{\ln x}}{x^2}$$

$$=\frac{\frac{1-2\ln x}{2\sqrt{\ln x}}}{x^2}=\frac{1-2\ln x}{2x^2\sqrt{\ln x}}$$

$(20b)\quad g(t)=\dfrac{\ln\sqrt{t}}{t}$ $= \dfrac{\ln t^{1/2}}{t} = \dfrac{\frac{1}{2}\ln t}{t}$

$$g'(t)=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t}\cdot t-\frac{1}{2}\ln t\cdot 1}{t^2}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln t}{t^2}=\frac{1-\ln t}{2t^2}=\frac{1-2\ln\sqrt{t}}{2t^2}$$

* حكمة يكون احد الخيارات

$(21a)\quad h(x)=e^x\ln x$

$$h'(x)=e^x\cdot\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}$$

$$=e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{e^x}{x}(x\ln x+1)$$

$(21b)\quad f(x)=e^{\ln x} = x$

$f'(x) = 1$

$(22a)\quad h(x)=2^{e^x}$

$h'(x) = 2^{e^x} \cdot e^x \cdot \ln 2$

$=$

$(22b)\quad h(x)=\dfrac{e^x}{2^x}$

$h'(x) = \dfrac{e^x \cdot 2^x - e^x \cdot 2^x \ln 2}{(2^x)^2}$

$= \dfrac{e^x \cdot 2^x (1-\ln 2)}{(2^x)^2}$

$= \dfrac{e^x (1-\ln 2)}{2^x}$

تمارين مقترحة

(1) اوجد $y'(x)$ للمعادلة $x^2y^2-2x=4-4y$

اشتق الطرفين ضمنياً

$$2xy^2+x^2\cdot 2yy'-2=-4y'$$

$$2x^2yy'+4y'=2-2xy^2$$

$$y'(2x^2y+4)=2-2xy^2$$

$$y'=\frac{2-2xy^2}{2x^2y+4}$$

$$=\frac{2(1-xy^2)}{2(x^2y+4)}=\frac{1-xy^2}{x^2y+4}$$

---

(2) اوجد $y'(x)$ للمعادلة $x^2y^2-2x=4-4y$ عند النقطة $(2,-2)$

(3) اوجد ميل المماس للمعادلة $x^2y^2-2x=4-4y$ عند النقطة $(2,-2)$

اشتق الطرفين ضمنياً

$$2xy^2+x^2\cdot 2yy'-2=-4y'$$

عوض النقطة مباشرة

$$2(2)(-2)^2+2^2\cdot 2(-2)y'-2=-4y'$$

$$16-16y'-2=-4y'$$

$$-16y'+4y'=2-16$$

$$-12y'=-14 \Rightarrow y'=\frac{-14}{-12}=\frac{7}{6}$$

$$\Rightarrow m_t=\frac{7}{6}$$

☆ يمكن تعويض النقطة في اول كل

(4) اوجد معادلة المماس للمعادلة $x^2y^2 - 2x = 4 - 4y$ عند النقطة $(2,-2)$

١ نشتق الطرفين ضمنياً

$$2xy^2 + x^2 \cdot 2y\,y' - 2 = -4y'$$

عوض النقطة مباشرة

$$2(2)(-2)^2 + 2^2 \cdot 2(-2)y' - 2 = -4y'$$

$$16 - 16y' - 2 = -4y'$$

$$-16y' + 4y' = 2 - 16$$

$$-12y' = -14 \Rightarrow y' = \frac{-14}{-12} = \frac{7}{6}$$

$$\Rightarrow m_t = \frac{7}{6}$$

معادلة المماس هي

$$y + 2 = \frac{7}{6}(x - 2)$$

$$y + 2 = \frac{7}{6}x - \frac{14}{6}$$

$$y = \frac{7}{6}x - \frac{14}{6} - 2$$

$$y = \frac{7}{6}x - \frac{-26}{6}$$

$$y = \frac{7}{6}x - \frac{13}{3}$$

اوجد مشتقة كل دالة فيما يلي

$(29.a)\quad f(x)=\sin^{-1}(x^3+1)$

$\sin^{-1}x \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-(x^3+1)^2}}\cdot 3x^2$$

$$=\frac{3x^2}{\sqrt{1-(x^3+1)^2}}$$

$(29.b)\quad f(x)=\sin^{-1}(\sqrt{x})$

$\sin^{-1}x \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}=\frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}=\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$$

$(30.a)\quad f(x)=\cos^{-1}(x^2+x)$

$\cos^{-1}x \longrightarrow \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-(x^2+x)^2}}\cdot(2x+1)$$

$$=\frac{-(2x+1)}{\sqrt{1-(x^2+x)^2}}$$

$(30.b)\quad f(x)=\cos^{-1}(2/x)$

$$f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{x}\right)^2}}\cdot\frac{-2}{x^2}$$

$$=\frac{2}{x^2\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}=\frac{2}{x^2\sqrt{\frac{x^2-4}{x^2}}}$$

$$=\frac{2}{x^2\frac{\sqrt{x^2-4}}{|x|}}=\frac{2}{|x|\sqrt{x^2-4}}$$

يمكن حل السؤال بالطريقة التالية

$f(x)=\sec^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$

$$f'(x)=\frac{1}{\left|\frac{x}{2}\right|\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2-1}}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{\frac{|x|}{2}\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}}\cdot\frac{1}{x}$$

$$=\frac{1}{|x|\sqrt{\frac{x^2-4}{4}}}=\frac{1}{|x|\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}}$$

$$=\frac{2}{|x|\sqrt{x^2-4}}$$

$(31.a)\quad f(x)=tan^{-1}(\sqrt{x})$

$\tan^{-1}x \longrightarrow \frac{1}{x^2+1}$

$f'(x)=\frac{1}{(\sqrt{x})^2+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$=\frac{1}{2\sqrt{x}\,(x+1)}$

$(31.b)\quad f(x)=tan^{-1}(\frac{1}{x})$

يمكن حل السؤال بطريقة $\cot^{-1}x$

$f'(x)=\frac{1}{(\frac{1}{x})^2+1}\cdot\frac{-1}{x^2}$

$=\frac{1}{\frac{1}{x^2}+1}\cdot\frac{-1}{x^2}$

$=\frac{1}{\frac{1+x^2}{x^2}}\cdot\frac{-1}{x^2}=\frac{-1}{1+x^2}$

$(32.a)\quad f(x)=\sqrt{2+tan^{-1}x}$

$f'(x)=\frac{\frac{1}{x^2+1}}{2\sqrt{2+\tan^{-1}x}}$

$=\frac{1}{2(x^2+1)\sqrt{2+\tan^{-1}x}}$

$(32.b)\quad f(x)=e^{tan^{-1}x}$

$f'(x)=e^{\tan^{-1}x}\cdot\frac{1}{x^2+1}$

$=\frac{e^{\tan^{-1}x}}{x^2+1}$

تمارين مقترحة

(1) اوجد قيمة c التي تحقق نظرية رول للدالة $f(x)=x^3-3x^2+2x+2$ على الفترة $[0,1]$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$

$f'(c) = 0$

$3c^2 - 6c + 2 = 0$

$c = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$

$c = \frac{3+\sqrt{3}}{3} = 1.57 \notin (0,1)$ مرفوضة

$c = \frac{3-\sqrt{3}}{3} = 0.42 \in (0,1)$ مقبولة

---

(2) اذا كانت الدالة $f(x)=x^2-4x+5$ تحقق شروط نظرية رول على الفترة $[0,b]$ فاوجد قيمة b تساوي

$f(0) = f(b)$

$5 = b^2 - 4b + 5$

$b^2 - 4b = 0$

$b = 0 \quad , b = 4$

$\therefore \boxed{b = 4}$

---

(3) اذا كانت الدالة $f(x)=a\,x^2-5x$ تحقق شروط نظرية رول على الفترة $[1,3]$ فاوجد قيمة a

$f(1) = f(3)$

$a(1)^2 - 5(1) = a(3)^2 - 5(3)$

$a - 5 = 9a - 15$

$8a = 10$

$a = \frac{5}{4}$.

(4) اذا كانت الدالة $f(x)=x^3+mx$ تحقق فرضيات نظرية رول على الفترة $[a,b]$ حيث ان قيمة c التي تحققها النظرية هي 2 فاوجد قيمة m

$f'(x) = 3x^2+m$

$f'(c) = 0$

$f'(2) = 0$

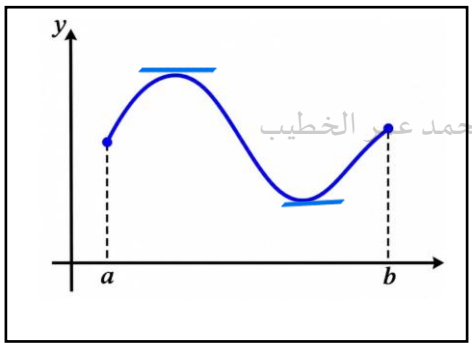
$3(2)^2 + m = 0$

$12 + m = 0$

$m = -12$.

---

(5) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f(x)$ على الفترة $[a,b]$ ان عدد قيم c التي تحققها نظرية رول للدالة على الفترة هي



(a) 1 (b) 2

(c) 3 (d) 4

عدد المماسات الافقية 2

---

(6) اذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على $[a,b]$ وكانت قابلة للاشتقاق على (a,b) حيث $f(a)=f(b)$ فاي من العبارات التالية صحيحة

احفظ نص النظرية مع الشروط

(a) يوجد على الاقل عدد مثل c في الفترة $[a,b]$ مغلقة يحقق $f'(c)=0$

(b) يوجد على الاقل عدد مثل c في الفترة (a,b) يحقق $f'(c)=0$

(c) يوجد على الاقل عدد مثل c في الفترة (a,b) يحقق $f'(c)=c$

(d) يوجد على الاقل عدد مثل c في الفترة (a,b) يحقق $f(c)=0$ ليس مشتقة

محمد عمر الخطيب

القسم الثاني

الأسئلة الكتابية

من السؤال 21 الى السؤال 26

ملاحظات :

(1) ممكن ان يكون السؤال مكون من اكثر من فرع

(2) يجب كتابة كل خطوات الحل

تمارين مقترحة

(1) حدد أي تكون الدالة $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$ متصلة

نقطة الانفصال $x=1$ لان الدالة غير معرفة عند $x=1$ (حيث مقام)

مجموعة تعريف الدالة $x\neq 1$ عند

او $\mathbb{R}/\{1\}$

---

(2) اوجد نقطة (نقاط) انفصال الدالة $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$ وحدد نوع الانفصال لها

نقطة الانفصال $x=1$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{x-1}=4$$

نوع الانفصال خفوة قابلة للازالة

---

(3) اوجد نقطة (نقاط) انفصال الدالة $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}$ وحدد نوع الانفصال لها

نقاط الانفصال $x=\pm 1$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)}=\frac{4}{2}=2$$

الدالة تقطة انفصال عند $x=1$ ونوعها خفوة قابلة للازالة

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)}=\pm\infty$$

الدالة تقطة انفصال عند $x=-1$ ونوعها لانهائي غير قابلة للازالة

☆ الدالة حولها تقارب رأسي عند $x=-1$

محمد عمر الخطيب

(4) ابحث في اتصال الدالة $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$ **عند** $x=1$

الدالة $f(x)$ غير متصلة عند $x=1$

لأن الدالة $f(x)$ غير معرفة عند $x=1$

(لا يمكن إيجاد $f(1)$ لأن المقدار 1 صفر مقام الدالة)

---

(5) ابحث في اتصال الدالة $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x<1 \\ 5 & x=1 \\ 3x-1 & x>1 \end{cases}$ **عند** $x=1$

x^2+1 ⑤ $3x-1$

2 ← 1 → 2

1) $f(1)=5$ الدالة معرفة عند $x=1$

2) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2+1=2$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 3x-1=2$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$ موجود

3) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$

∴ الدالة غير متصلة عند $x=1$

تكون الدالة $f(x)$ متصلة لكل $x\neq 1$

(29) افترض ان القانون الضريبي في دولة ما ينص على ان الالتزام الضريبي المفروض على x من الدولارات من الدخل الخاضع للضريبة يعطي بـ

$$T(x)=\begin{cases}0 & ,x\le 0\\ 0.14x & ,0<x<10,000\\ c+0.21x & ,\ 10,000\le x\end{cases}$$

اوجد قيمة c التي تجعل هذه الدالة متصلة لجميع قيم x

فسر لماذا يجب ان تكون هذه الدالة

$x=10000$ عند $T(x)$ بما ان الدالة متصلة فان

فان $\lim_{x\to 10000^-} T(x) = \lim_{x\to 10000^+} T(x)$

$0.14(10000) = c + 0.21(10000)$

$1400 = c + 2100$

$\therefore c = -700$



يجب ان تكون الدالة $T(x)$ متصلة حتى تكون الضريبة عادلة للجميع

---

(30) افترض ان القانون الضريبي في دولة ما ينص على ان الالتزام الضريبي المفروض على x من الدولارات من الدخل الخاضع للضريبة يعطي بـ

$$T(x)=\begin{cases}0 & ,x\le 0\\ a+0.12x & ,0<x\le 20,000\\ b+0.16(x-20,000) & ,\ x>20,000\end{cases}$$

اوجد قيمة الثوابت a,b التي تجعل هذه الدالة متصلة لجميع قيم x



بما ان الدالة متصلة عند $x=0$ فان

$f(0) = \lim_{x\to 0^+} T(x)$

$0 = a$

$\therefore a = 0$

بما ان الدالة متصلة عند $x=20000$ فان

$\lim_{x\to 20000^-} T(x) = \lim_{x\to 20000^+} T(x)$

$a + 0.12(20000) = b + 0.16(20000-20000)$

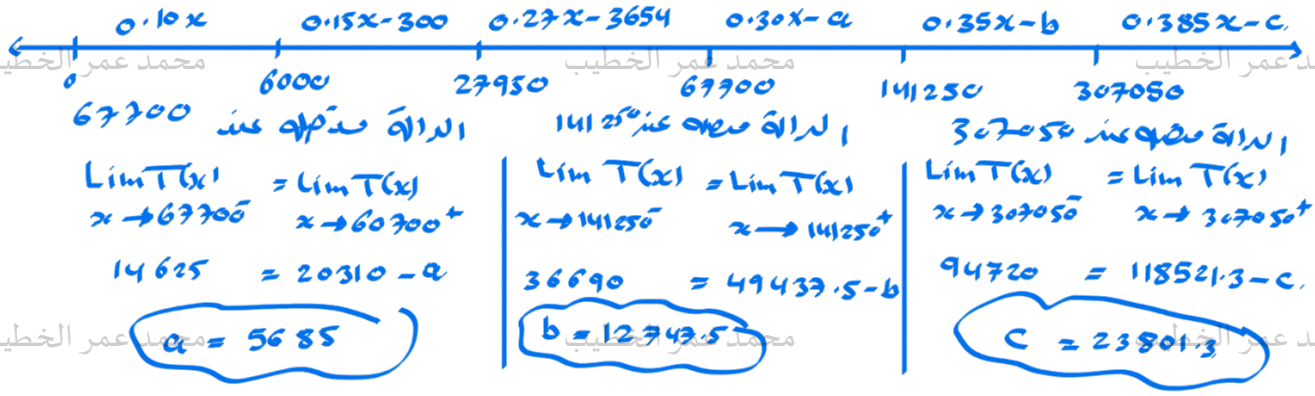
$2400 = b$

(31) الجدول التالي يبين دالة الالتزام الضريبي حسب الدخل

المبلغ الخاضع للضريبة فوق	ولكن ليس فوق	التزامك الضريبي هو	ناقص
0	6000	10%	0
6000	27950	15%	300
27950	67700	27%	3654
67700	141250	30%	a
141250	307050	35%	b
307050	–	38.6	c

كون دالة الالتزام الضريبي $T(x)$ ثم اوجد قيمة الثوابت a,b التي تجعل هذه الدالة متصلة لجميع قيم x

$$T(x)=\begin{cases}0.10x & ,0\le x\le 6000\\ 0.15x-300 & ,6000<x\le 27950\\ 0.27x-3654 & ,27950<x\le 67700\\ 0.30x-a & ,67700<x\le 141250\\ 0.35x-b & ,141250<x\le 307050\\ 0.386x-c & ,307050<x\end{cases}$$



(32) بين ان الدالة $T(x)$ متصلة عند $x=6000$

$T(6000) = 0.10(6000) = 600$

$\lim\limits_{x\to 6000^-} T(x) = 0.1(6000) = 600$

$\lim\limits_{x\to 6000^+} T(x) = 0.15(6000)-300 = 600$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 6000} T(x) = T(6000)$

إذن الدالة متصلة عند $x=6000$

حدد لكل دالة من الدوال التالية خطوط التقارب الرأسية والمائله

$$(29)\ f(x)=\frac{x^3}{4-x^2}$$

الرأسيه

$4-x^2=0$

$x=-2,\ x=2$

الافقيه لا يوجد

المائله

رتب البسط حسب الاس

$$\begin{array}{r|l} x^3 & -x \\ \hline \ominus x^3 \oplus 4x & \\ \hline 4x & \end{array}$$

خط التقارب المائل هو

$y=-x$

$$(30)\ f(x)=\frac{x^2+1}{x-2}$$

الرأسيه

$x-2=0$

$x=2$

الافقيه لا يوجد

المائله

$$\begin{array}{r|l} x^2+1 & x+2 \\ \hline \ominus x^2 \oplus 2x & \\ \hline 2x+1 & \\ \ominus 2x \oplus 4 & \\ \hline 5 & \end{array}$$

خط التقارب المائل هو

$y=x+2$

محمد عمر الخطيب

$$(31)\ f(x)=\frac{x^3}{x^2+x-4}$$

الأفقية لا يوجد

المائلة

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2+x-4 \\ \hline -x^3-x^2+4x & x-1 \\ \hline -x^2+4x & \\ +x^2+x-4 & \\ \hline 5x-4 & \end{array}$$

خط التقارب المائل هو $y=x-1$

الرأسية

$x^2+x-4=0$

$$x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$$

$$x=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$$

$$(32)\ f(x)=\frac{x^4}{x^3+2}$$

الأفقية لا يوجد

المائلة

$$\begin{array}{r|l} x^4 & x^3+2 \\ \hline -x^4-2x & x \\ \hline -2x & \end{array}$$

خط التقارب المائل هو $y=x$

الرأسية

$x^3+2=0$

$x^3=-2$

$x=\sqrt[3]{-2}$

$x=-\sqrt[3]{2}$

(17) اوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $f(x)=(x^2+2x)(x^4+x^2+1)$ عند $x=0$

$x_1=0 \Rightarrow y_1=f(0)=0$

النقطة $(0,0)$

$f'(x)=(2x+2)(x^4+x^2+1)+(x^2+2x)(4x^3+2x)$

$m_t=f(0)=2$

معادلة المماس هي

$y-0=2(x-0)$

$y=2x$

---

(18) اوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $f(x)=(x^3+x+1)(3x^2+2x-1)$ عند $x=1$

$x_1=1 \Rightarrow y_1=f(1)=12$

النقطة $(1,12)$

$f'(x)=(3x^2+1)(3x^2+2x-1)+(x^3+x+1)(6x+2)$

$m_t=f'(1)=40$

معادلة المماس هي

$y-12=40(x-1)$

$y=40x-28$

محمد عمر الخطيب

(19) اوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $f(x)=\frac{x+1}{x+2}$ **عند** $x=0$

$x_1=0 \Rightarrow y_1=f(0)=\frac{1}{2}$

النقطة $(0,\frac{1}{2})$

$f'(x)=\frac{1(x+2)-(x+1)(1)}{(x+2)^2}$

$m_t=f'(0)=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$

معادلة المماس هي

$y-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(x-0)$

$y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$

---

(20) اوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $f(x)=\frac{x+3}{x^2+1}$ **عند** $x=1$

$x_1=1 \Rightarrow y_1=f(1)=\frac{1+3}{1^2+1}=2$

النقطة $(1,2)$

$f'(x)=\frac{1(x^2+1)-(x+3)(2x)}{(x^2+1)^2}$

$m_t=f'(1)=\frac{2-8}{4}=\frac{-6}{4}=\frac{-3}{2}$

معادلة المماس هي

$y-2=-\frac{3}{2}(x-1)$

$y=-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}+2$

$y=-\frac{3}{2}x+\frac{7}{4}$

اوجد مشتقة كل دالة فيما يلي

(3) $f(t)=\tan^3 2t-\csc^4 3t$ $=(\tan 2t)^3-(\csc 3t)^4$

$f'(t)=3(\tan 2t)^2\cdot \sec^2 2t\cdot 2-4(\csc 3t)^3\cdot(-\csc 3t\cdot\cot 3t\cdot 3)$

$=6\tan^2 2t\sec^2 2t+12\csc^4 3t\cot 3t$

---

(4) $f(t)=t^2+2\cos^2 4t$ $=t^2+2(\cos 4t)^2$

$f'(t)=2t+4(\cos 4t)'\cdot(-\sin 4t)\cdot 4$

$=2t-16\cos 4t\sin 4t$

$=2t-16\sin 4t\cos 4t$

---

(5) $f(x)=x\cos 5x^2$

$f'(x)=1\cdot\cos 5x^2+x\cdot(-\sin 5x^2)\cdot 10x$

$=\cos 5x^2-10x^2\sin 5x^2$

---

(6) $f(x)=x^2\sec 4x$

$f'(x)=2x\sec 4x+x^2\cdot\sec 4x\tan 4x\cdot 4$

$=2x\sec 4x+4x^2\sec 4x\tan 4x$

(7) $f(x)=\dfrac{\sin x^2}{x^2}$

$$f'(x)=\frac{\cos x^2\cdot 2x\cdot x^2-\sin x^2\cdot 2x}{(x^2)^2}$$

$$=\frac{2x^3\cos x^2-2x\sin x^2}{x^4}$$

$$=\frac{2x^2\cos x^2-2\sin x^2}{x^3}$$

---

(8) $f(x)=\dfrac{x^2}{\csc^4 2x}=x^2\sin^4 2x=x^2\cdot(\sin 2x)^4$

$$f'(x)=2x\cdot\sin^4 2x+x^2\cdot 4(\sin 2x)^3\cdot\cos 2x\cdot 2$$

$$=2x\sin^4 2x+8x^2\sin^3 2x\cos 2x$$

☆ يمكنك حل السؤال بالطريقة .

(35) يبدأ تكاثر البكتريا بالعدد 200 ويتضاعف ثلاث مرات كل يوم، اوجد قانون لتكاثر البكتيريا بعد t يوم، ثم اوجد النسبة المئوية للمعدل للحظي للتغير في التكاثر

$r=1$ $a=3$

عدد البكتيريا يساوي $p(t) = p_0\ a^{rt}$
حيث p_0 عدد البكتيريا في بداية التجربة
حيث a عدد المرات التي تضاعف فيها البكتيريا في وحدة الزمن
حيث r معدل نمو البكتيريا ونجدة من خلال تعويض المعطيات

$p_0 = 200$, $a = 3$, $r = 1$

$p(t) = 200 \times 3^{t}$.

النسبة المئوية للمعدل اللحظي للتغير

$$\frac{p'(t)}{p(t)} \times 100\ \%$$

$$= \frac{200 \times 3^{t} \cdot \ln 3}{200 \times 3^{t}} \times 100\ \%$$

$$= 110\ \%$$

---

(36) يبدأ تكاثر البكتريا بالعدد 500 ويتضاعف كل اربعة ايام، اوجد قانون لتكاثر البكتيريا بعد t يوم، ثم اوجد النسبة المئوية للمعدل للحظي للتغير في التكاثر

$r=\frac{1}{4}$ $a=2$

$p_0 = 500$, $a = 2$, $r = \frac{1}{4}$.

$p(t) = 500 \times 2^{\frac{1}{4}t}$.

النسبة المئوية للمعدل اللحظي للتغير

$$= \frac{500 \times 2^{\frac{1}{4}t} \cdot \frac{1}{4} \cdot \ln 2}{500 \times 2^{\frac{1}{4}t}} \times 100\ \%$$

$$= 17.3\ \%$$

الطريقة الثانية

$p(t) = p_0\ a^{rt}$

$p_0 = 500$, $a = 2$

$p(4) = 1000$ من السؤال

$p(t) = 500 \times 2^{rt}$ ∴

ولإيجاد r نستخدم الشرط

$p(4) = 1000$

$500 \times 2^{r(4)} = 1000$

$2^{4r} = 2$

$4r = 1 \rightarrow r = \frac{1}{4}$

∴ $p(t) = 500 \times 2^{\frac{1}{4}t}$.

(37) يتم تحديد التركيز c لمادة معينة بعد t ثانية من التفاعل بالمعادلة $c(t)=\dfrac{6}{2e^{-8t}+1}$

(أ) بين ان $c'(t)>0$ وفسر النتيجة

$$c'(t)=\frac{-6\cdot(2e^{-8t}\cdot(-8))}{(2e^{-8t}+1)^2}=\frac{96e^{-8t}}{(2e^{-8t}+1)^2}>0$$

لان كل من البسط والمقام كميات موجبة

∴ الدالة $c(t)$ دالة متزايدة

(العلاقة بين الزمن t والتركيز $c(t)$ علاقة طردية)

(ب) اوجد اكبر قيمة للتركيز مع مرور الزمن وبين انه لا يتخطى 6

بما ان الدالة متزايدة فان اكبر قيمة لها هي

$$\lim_{t\to\infty} c(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{6}{2e^{-8t}+1}=\lim\frac{6}{\frac{2}{e^{8t}}+1}=\frac{6}{1}=6$$

اكبر قيمة للتركيز هو 6

---

(38) يتم تحديد التركيز c لمادة معينة بعد t ثانية من التفاعل بالمعادلة $c(t)=\dfrac{10}{9e^{-10t}+2}$

(أ) بين ان $c'(t)>0$ وفسر النتيجة

$$c'(t)=\frac{-10(9e^{-10t}\cdot(-10))}{(9e^{-10t}+2)^2}=\frac{900e^{-10t}}{(9e^{-10t}+2)^2}>0$$

لان كل من البسط والمقام كميات موجبة

∴ الدالة $c(t)$ دالة متزايدة

(العلاقة بين الزمن t والتركيز $c(t)$ علاقة طردية)

(ب) اوجد اكبر قيمة للتركيز مع مرور الزمن وبين انه لا يتخطى 5

بما ان الدالة متزايدة فان اكبر قيمة لها هي

$$\lim_{t\to\infty} c(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{10}{9e^{-10t}+2}=\lim_{t\to\infty}\frac{10}{\frac{9}{e^{10t}}+2}=\frac{10}{2}=5$$

اكبر قيمة للتركيز هو 5

(1) تحقق من فرضيات (شروط) نظرية رول للدالة $f(x)=x^2+1$ على الفترة $[-2,2]$

ثم اوجد قيمة c التي تحقق النظرية موضحاً الاستنتاج بيانياً .

الحل :

(1) الدالة $f(x)$ متصلة على الفترة $[-2,2]$ لانها كثيرة حدود

(2) الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق على الفترة $(-2,2)$ لانها كثيرة حدود

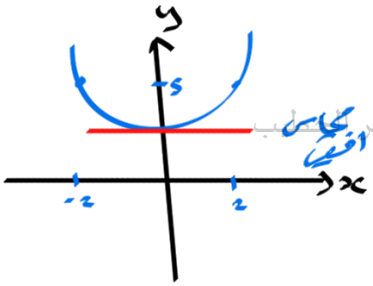
يفضل حفظ هذه العبارات الرياضية

(3) كذلك

$$\left.\begin{matrix} f(-2)=5 \\ f(2)=5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(-2)=f(2)$$

اذاً الدالة تحقق شروط نظرية رول .

اذاً يوجد على الاقل عدد c في الفترة $(-2,2)$ ويحقق



$f'(c)=0$

$2c=0$

$c=0 \in (-2,2)$

$c=0$ للدالة مماس افقي عند

(2) تحقق من فرضيات نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=x^2+1$ على الفترة $[0,2]$

ثم اوجد قيمة c التي تحقق النظرية موضحاً الاستنتاج بيانياً .

الحل :

(1) الدالة $f(x)$ متصلة على الفترة $[0,2]$ لانها كثيرة حدود

(2) الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق على الفترة $(0,2)$ لانها كثيرة حدود

اذاً الدالة تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة .

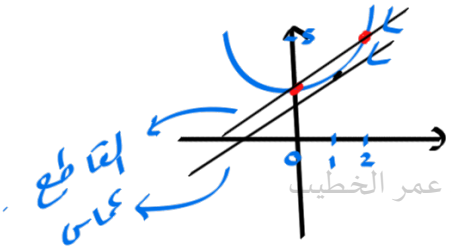
اذاً يوجد على الاقل عدد c في الفترة $(0,2)$ ويحقق

$$f'(c)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}$$

$$2c=\frac{5-1}{2-0}$$

$$2c=2$$

$$\boxed{c=1} \quad c\in(0,2)$$



$x=1$

(3) تحقق من فرضيات نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=x^3+x^2$ على الفترة $[0,1]$

ثم اوجد قيمة c التي تحقق النظرية موضحاً الاستنتاج بيانياً .

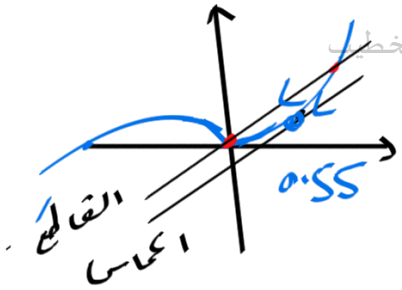
الحل :

(1) الدالة $f(x)$ متصلة على الفترة $[0,1]$ لانها كثيرة حدود

(2) الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق على الفترة $(0,1)$ لانها كثيرة حدود

اذاً الدالة تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة .

اذاً يوجد على الاقل عدد c في الفترة $(0,1)$ ويحقق



$$f'(c)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}$$

$$3c^2+2c=\frac{2-0}{1-0}$$

$$3c^2+2c=2$$

$$3c^2+2c-2=0$$

$$c=\frac{-1+\sqrt{7}}{3}=0.55\in(0,1)\checkmark$$

$$c=\frac{-1-\sqrt{7}}{3}=-1.22\notin(0,1)\times$$

$$x=\frac{-1+\sqrt{7}}{3}=0.55$$

(4) تحقق من فرضيات نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=x^3+x^2$ على الفترة $[-1,1]$

ثم اوجد قيمة c التي تحقق النظرية موضحاً الاستنتاج بيانياً .

الحل :

(1) الدالة $f(x)$ متصلة على الفترة $[-1,1]$ لانها كثيرة حدود

(2) الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق على الفترة $(-1,1)$ لانها كثيرة حدود

اذاً الدالة تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة .

اذاً يوجد على الاقل عدد c في الفترة $(-1,1)$ ويحقق

$$f'(c)=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}$$

$$3c^2+2c=\frac{2-0}{1-(-1)}$$

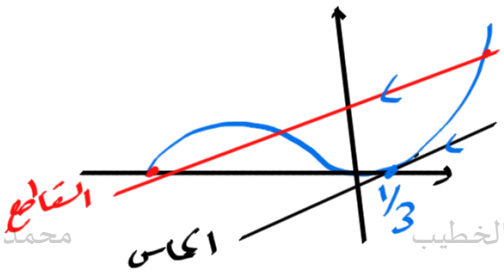
$$3c^2+2c=1$$

$$3c^2+2c-1=0$$

$$c=\frac{1}{3}\in(-1,1)\checkmark$$

$$c=-1\notin(-1,1)\times$$

اذاً $c=\frac{1}{3}$ فقط .



المماس يوازي القاطع عند $x=\frac{1}{3}$

(5) تحقق من فرضيات نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=\sin x$ على الفترة $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

ثم اوجد قيمة c التي تحقق النظرية موضحاً الاستنتاج بيانياً .

الحل :

(1) الدالة $f(x)$ متصلة على الفترة $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ لانها دالة مثلثية

(2) الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق على الفترة $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ لانها دالة مثلثية

اذاً الدالة تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة .

اذاً يوجد على الاقل عدد c في الفترة $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ويحقق

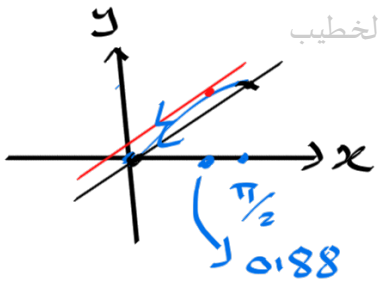
$$f'(c)=\frac{f(\frac{\pi}{2})-f(0)}{\frac{\pi}{2}-0}$$

$$\cos c=\frac{1-0}{\pi/2}$$

$$\cos c=\frac{2}{\pi}$$

$$c=\cos^{-1}\left(\frac{2}{\pi}\right)=0.88\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

لان c في الربع الأول .



المماس يوازي المقاطع عند $x=0.88$

محمد عمر الخطيب

(6) تحقق من فرضيات نظرية رول للدالة $f(x)=\sin x$ على الفترة $[-\pi,0]$

ثم اوجد قيمة c التي تحقق النظرية موضحاً الاستنتاج بيانياً .

الحل :

(1) الدالة $f(x)$ متصلة على الفترة $[-\pi,0]$ لانها دالة مثلثية

(2) الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق على الفترة $(-\pi,0)$ لانها دالة مثلثية

(3) كذلك

$$\left.\begin{matrix} f(-\pi)=0 \\ f(0)=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(-\pi)=f(0)$$

اذاً الدالة تحقق شروط نظرية رول .

اذاً يوجد على الاقل عدد c في الفترة $(-\pi,0)$ ويحقق

$f'(c)=0$

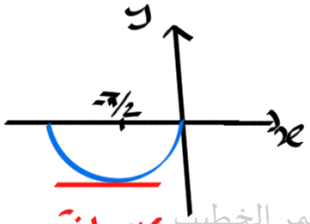
$\cos c=0$

$c < \pi/2 \quad , \quad 3\pi/2$ } العرف π

$c=\frac{\pi}{2}+n\pi \quad , \quad n\in Z$

$c=\frac{\pi}{2} \notin (-\pi,0)$

$c=-\frac{\pi}{2} \in (-\pi,0) \Rightarrow c=\frac{-\pi}{2}$ فقط



الحاس اقعر عند $x=-\frac{\pi}{2}$

انتهت الاسئلة

مع تمنياتي لكم بالتوفيق